



HAL
open science

Modélisation des phénomènes de relaxation diélectrique par Réalisation Diffusive

Lionel Laudebat, Pierre Bidan, Gérard Montseny, Vincent Bley

► **To cite this version:**

Lionel Laudebat, Pierre Bidan, Gérard Montseny, Vincent Bley. Modélisation des phénomènes de relaxation diélectrique par Réalisation Diffusive. Matériaux du Génie Electrique (MGE), Apr 2003, Grenoble, France. hal-02536673

HAL Id: hal-02536673

<https://hal.science/hal-02536673v1>

Submitted on 8 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation des phénomènes de relaxation diélectrique par Réalisation Diffusive

L.Laudebat¹, P.Bidan¹, G.Montseny², V.Bley¹

¹ Laboratoire de Génie Electrique de Toulouse - Université Paul Sabatier
118, Route de Narbonne 31062 Toulouse cedex 4, France

² Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS
7, Avenue du Colonel Roche 31077 Toulouse cedex 4, France

Résumé : Le concept de représentation diffusive permet d'obtenir un modèle numérique pour la simulation temporelle de phénomènes de relaxation étudiés usuellement dans un cadre fréquentiel. L'identification temporelle de ce modèle permet de montrer les différents avantages de cette représentation.

Mots Clés : Représentation diffusive, Identification, Opérateurs Pseudo-différentiels, Relaxation Diélectriques.

I. INTRODUCTION

Dans le cadre de l'étude d'un dispositif à paramètres répartis et dans la mesure où l'on vise un modèle comportemental entrée/sortie, et non une description précise des phénomènes internes, l'approche par opérateur, du type fonction de transfert, est une voie plus naturelle et plus économique numériquement que des approches par éléments finis ou par convolution. En effet, lorsqu'il s'agit en particulier d'Opérateurs Pseudo-Différentiels (O.P.D) sous-jacents, l'introduction de la représentation diffusive (R.D.) permet l'utilisation d'un formalisme adapté à une analyse et à une réalisation dynamique locale en temps [1]. Les O.P.D. sont des représentations temps-fréquence qui généralisent la notion de fonction de transfert à une classe plus large regroupant, entre autres, les opérateurs convolutifs des fonctions de transfert rationnelles, les opérateurs différentiels, les opérateurs integrodifférentiels fractionnaires.

En génie électrique certains dispositifs mettant en jeu des phénomènes magnétiques et diélectriques ont un comportement d'O.P.D. La prise en compte des pertes par courants de Foucault dans les matériaux magnétiques fonctionnant en régime transitoire [2][3] ou bien encore l'évolution des phénomènes de relaxation dans les diélectriques comportent tous des caractéristiques les incluant dans la classe des opérateurs pseudo-différentiels. Après avoir introduit quelques définitions de la représentation diffusive, nous développerons plus particulièrement la mise en œuvre de cet outil dans le cadre des phénomènes de relaxations au sein des diélectriques. L'objectif de cet article est d'appliquer le formalisme de la représentation diffusive dans le cas d'un condensateur plan-plan pour montrer les différents avantages de cette approche dans le cadre de la simulation, ainsi que de présenter les résultats d'identification de modèles dynamiques basés sur la Représentation Diffusive (R.D.).

II. REPRESENTATIONS ET REALISATIONS DIFFUSIVES

A. Représentation diffusive

La théorie des représentations diffusives dont l'origine remonte à [4] et la présentation générale abstraite à [1] permet d'exprimer une grande variété d'O.P.D. causaux sous forme d'un système dynamique linéaire entrée-sortie de dimension infinie.

Définition 1: Le symbole $\eta(\xi)$ (appelé symbole diffusif) d'une O.P.D. de symbole $H(p)$ est défini, lorsqu'il existe, comme solution de l'équation intégrale au sens des distributions (1) :

$$H(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\eta(\xi)}{p + \xi} d\xi, p \in i\mathbb{R} \quad (1)$$

On montre aisément que le symbole diffusif $\eta(\xi)$ peut être obtenu par transformation de Laplace inverse de la réponse impulsionnelle $h(t)$ associée à l'opérateur $H(p)$. La Représentation Diffusive est donc une utilisation à contre sens de la T.L. (2).

$$\eta(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(p) \quad (2)$$

Le symbole diffusif (lorsqu'il existe) caractérise entièrement l'opérateur.

La Représentation Diffusive permet alors d'obtenir une réalisation dynamique d'état classique (mais de dimension infinie), appelée Réalisation Diffusive (3), se prêtant bien à l'approximation et conduisant à des simulations numériques dans le domaine temporel à la fois simples, stables, précises et peu coûteuses en calcul.

B. Réalisation diffusive

Définition 2: La relation $i(t) = H(p) v(t)$ s'exprime sous forme de l'équation d'état dite réalisation "diffusive" :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\xi, t) = -\xi \psi(\xi, t) + e(t), \psi(\xi, 0) = 0 \\ s(t) = \int_0^{+\infty} \eta(\xi) \psi(\xi, t) d\xi \end{cases} \quad (3)$$

III. MODELISATION

Le système considéré est un condensateur plan-plan, le diélectrique est homogène et linéaire, En conséquence des interactions entre les différents dipôles, le modèle de Debye doit être étendu, en prenant en compte une distribution "continue" des temps de relaxation, permettant d'obtenir un déplacement électrique $D(p)$ en fonction du champs $E(p)$:

$$D(p) = \varepsilon_0 \left[(\varepsilon_\infty + 1) + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^{+\infty} \frac{v(\tau)}{1 + \tau p} d\tau \right] E(p) ; \quad (4)$$

ε_s : Constante diélectrique statique (Basses fréquences),
 ε_∞ : Permittivité hautes fréquences .
 $v(t)$ représente une fonction de distribution normalisée des temps de relaxation tel que :

$$\int_0^{+\infty} v(\tau) d\tau = 1. \quad (5)$$

On définit alors une permittivité complexe

$$\varepsilon^*(p) = (\varepsilon_\infty + 1) + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^{+\infty} \frac{v(\tau)}{1 + \tau p} d\tau, \quad (6)$$

qui découle naturellement de la représentation diffusible (1) par simple changement de variables ($\xi=1/\tau$). La nouvelle fonction de distribution $\eta(\xi) = \tau.v(\tau)$ introduite en 1956 par J.R.Mcdonald et M.K. Brachman [6] est en fait le symbole diffusif (1). On peut en particulier (Tableau 1) calculer le symbole $\eta(\xi)$ associé à chacun des modèles empiriques fractionnaires utilisés en génie électrique (Cole-Cole, Cole-Davidson, etc., [5]).

Permittivité $\varepsilon^*(p)$	Symbole $\eta(\xi)$	
$\frac{1}{1 + \tau_0 p}$	$\delta(\xi - \xi_0)$	$\xi_0 = 1/\tau_0$
$\frac{1}{p^\alpha}$	$\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{1}{\xi^\alpha}$	$0 < \alpha < 1$
$\frac{1}{(1 + \tau_0 p)^\alpha}$	$\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{1}{(\xi - \xi_0)^\alpha}$	$\xi > \xi_0$
$\frac{1}{1 + (\tau_0 p)^\alpha}$	$\frac{\sin(\alpha \pi)}{\pi} \frac{1}{(\frac{\xi}{\xi_0})^\alpha + 2 \cos(\alpha \pi) + (\frac{\xi_0}{\xi})^\alpha}$	$0 < \alpha < 1$

Tableau 1 : Exemples de symboles diffusifs

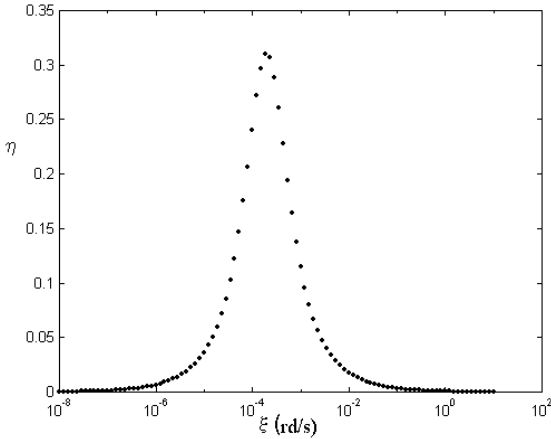


Figure 1 : $\eta(\xi)$ Symbole simulé dans le cas Cole-Cole

Afin d'illustrer ce propos nous avons simulé un diélectrique présentant une relaxation de type Cole-Cole (7).

$$\varepsilon^*(p) - (\varepsilon_\infty + 1) = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{(1 + \tau_0 p)^\alpha}; \quad \varepsilon_s = 10 \quad \tau_0 = 5.10^3 \text{ s} \quad (7)$$

$$\varepsilon_\infty = 2 \quad \alpha = 0,7$$

En intégrant une partie purement résistive au modèle précédent on obtient un déplacement électrique $D(p)$:

$$D(p) = \left[\varepsilon_0 (\varepsilon_\infty + 1) + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^{+\infty} \frac{v(\tau)}{1 + \tau p} d\tau + \frac{\sigma}{p} \right] E(p). \quad (8)$$

La Figure 2 représente la partie réelle et imaginaire de la permittivité tracée à partir du symbole diffusif (points) et à partir de (7) ($p=j\omega$) en trait plein.

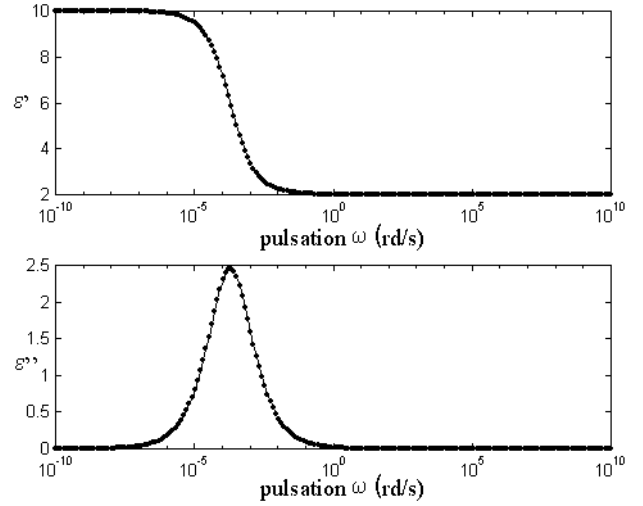


Figure 2 : $\varepsilon'(\omega)$ partie réelle et $\varepsilon''(\omega)$ partie imaginaire de la permittivité

On peut sous représentation diffusible appliquer un signal quelconque reproduisant par exemple des contraintes particulières des signaux de l'Electronique de Puissance. L'avantage de cette représentation par rapport à une méthode FFT est, outre un traitement numérique plus léger, la possibilité d'interconnexion de systèmes dont certains peuvent être non linéaires. Par exemple le cas du couplage câble long + moteur électrique traité dans [2] et [7] où pour une alimentation par un onduleur de tension le câble [11] et le moteur [12] ont un comportement non standard.

IV. IDENTIFICATION

Nous traitons ici l'identification du système (8) à partir de la simulation temporelle. On pourra se reporter à [8][9] pour l'identification de processus réels dans les cas magnétique et diélectrique. La forme réalisation diffusible (3), permet une identification numérique du symbole par projection orthogonale. L'opérateur H (1), est supposé convolutif (et donc indépendant du temps) : le symbole $\eta(\xi)$ est alors indépendant du temps. Le cas non convolutif, où $\eta(t, \xi)$ impliquant une identification par un modèle d'identification récursif du type filtre de Kalman-Bucy est traité dans [10]. On considère donc le vecteur colonne de sortie $\underline{D}(t) = \{D(t_m)\}_{m=1:M}$ correspondant à la réponse simulée du système soumis à une entrée $\underline{E}(t)$. L'identification revient alors à chercher le symbole approché $\tilde{\eta}$ qui permet de minimiser le critère quadratique (distance Euclidienne) (9)

$$\min_{\tilde{\eta}} \left\| \underline{D} - \underline{\Psi}_{k,m} \tilde{\eta} \right\|^2, \quad (9)$$

où $\underline{\Psi}$ est la matrice associée à la représentation diffusible de l'entrée $E(t)$:

$$\underline{\Psi}_{k,m} = \Psi(\xi_k, t_m) = \int_0^{t_m} e^{-\xi_k(t_m - \tau)} E(\tau) d\tau. \quad (10)$$

La solution unique de (9) est donc donnée par le pseudo-inverse

$$\tilde{\eta} = (\underline{\Psi}'_{k,m} \underline{\Psi}_{k,m})^{-1} \underline{\Psi}'_{k,m} \underline{D}^{(1)}. \quad (11)$$

(1) L'opérateur ' est l'opérateur dual (transposé-conjugué dans cas de matrices complexes).

Pour la mise en œuvre de cette méthode d'identification, le point crucial réside dans le choix du maillage. En effet, outre le placement dicté par la dynamique du système à identifier, les points délicats pour l'identification sont le nombre (K) de ξ_k sur la plage choisie et la séparation entre les relaxations lentes (ξ_{\min}) et la partie purement conductive (σ). Un nombre trop grand de ξ_k entraîne une oscillation du symbole due à une convergence faible sous approximation (identification sous intégrale). Le choix de K dépendra aussi et surtout de la richesse harmonique de la réalisation diffusive de l'entrée (ψ). Un bruit blanc en entrée permet une meilleure identification du symbole, en tolérant un nombre de ξ_k plus important. En ce qui concerne la séparation de la partie conductive des relaxations lentes, le problème posé n'est pas nouveau : il faut s'assurer d'avoir atteint le régime permanent pour admettre dans l'identification un intégrateur pur correspondant à la partie purement conductrice de la relaxation. La difficulté vient de la présence d'un effet « mémoire longue » qui conduit à une extinction très lente des régimes transitoires.

Le temps de simulation est de $3 \cdot 10^5$ s et la période d'échantillonnage de 30s. Nous choisissons de répartir les ξ_k pour l'identification de manière logarithmique entre $5 \cdot 10^{-6}$ et $2 \cdot 10^{-2}$ en prenant $K=15$. Après avoir généré la réalisation diffusive ψ de l'entrée (10), le symbole est identifié par pseudo inversion. Le résultat est présenté sur la Figure 3 où le symbole identifié est comparé au symbole tracé, pour le modèle de Cole-Cole. La différence de permittivité $\varepsilon_s - \varepsilon_\infty$ déterminée par l'identification est de 8.0874. La conductivité identifiée est égale à $4.9912 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}$. (conductivité simulée = $5 \cdot 10^{-6}$).

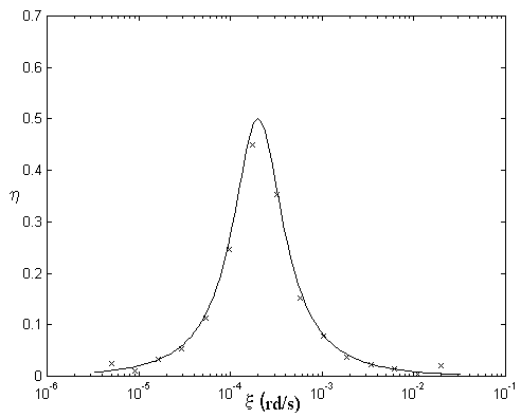


Figure 3 : Comparaison du symbole identifié (x) et du symbole simulé.

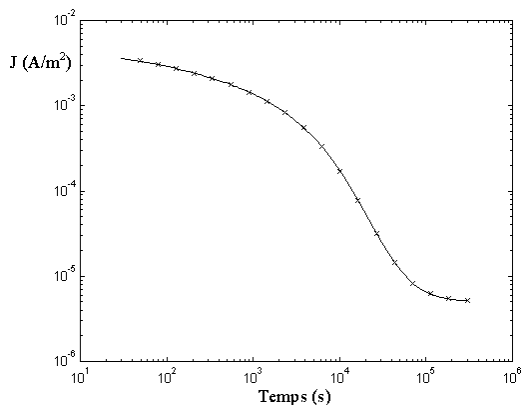


Figure 4 : Densité de courant identifié (x) et simulé.

La détermination de la densité de courant se fait très facilement par la dérivation du déplacement électrique (Figure 4). Cette dérivation ne pose pas de problèmes numériques car le modèle dérivé est régulier.

V. CONCLUSION

La représentation diffusive permet une réalisation dynamique adaptée au traitement des phénomènes existant dans les matériaux magnétiques ou isolants en génie électrique ayant un comportement pseudo-différentiels. Ceci nous a permis de simuler temporellement une relaxation de type Cole-Cole dans le cadre d'un condensateur plan-plan, puis d'identifier le symbole associé à ce type de modèle empirique. Des éléments du placement des ξ_k lors de l'identification ont été donnés ce qui nous a permis de mettre en lumière le lien entre le maillage et le relevé temporel associé à l'identification et d'entrevoir les difficultés pour les systèmes réels en termes d'oscillations du symbole. Pour palier ce problème on peut régulariser le symbole en lui imposant une forme a priori (ce qui revient à considérer un sous-espace de dimension finie de symbole réguliers). En effet pour les systèmes passifs le symbole tendant à s'annuler pour les hautes fréquences, il peut être approché par une somme d'exponentielles décroissantes ou de fonctions puissances.

Références

- [1] G. Montseny, "Diffusive representation of pseudo-differential time-operators, ESAIM: Proc. vol 5, pp 159-175, December 1998, URL: <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/proc-Vol5.14/proc-Vol5.14.htm>.
- [2] P.Bidan, T.Lebey, G.Montseny, C.Neascu, J.Saint-Michel "Transient Voltage Distribution in inverter fed motor winding", IEEE Transaction on Power Electronics, Vol 16,N 1, janvier 2001, pp 92-100.
- [3] P.Bidan, T.Lebey, G.Montseny, C.Neascu, "Modèle pseudo-différentiel d'une bobine à noyau de fer et simulation par réalisation diffusive. Application aux bobinages d'une machine tournante", à paraître dans la *Revue Internationale de Génie Electrique*, Vol. 5 n°3-4, 2002
- [4] G.Montseny, J.Audounet, B.Mbodje. "Optimal models of fractional operators and application to systems with fading memory". Conférence IEEE Systems, Man and Cybernetics, pp 65-70, Le Touquet, France, octobre 1993.
- [5] R.Coelho, B. Aladenize, "Les Diélectriques : Propriétés diélectriques des matériaux isolants", Collection Traité des Nouvelles Technologies, série Matériaux', Editions Hermès, 1993.
- [6] J.R. McDonald, M.K Brachman, "Linear-System Integral Transform Relation", *Rev. of Modern Physics*, Vol 28, 4 , octobre 1956, pp 393-422.
- [7] L.Laudebat, C.Neascu, P.Bidan, T.Lebey, "Use of Adjustable Speed Drives (A.S.D.) for low voltage rotating machines : An overview of problems and their solutions.", conférence SDEMPED'01, pp 423-426, Grado, Italie, 1-3 septembre 2001.
- [8] L.Laudebat, P.Bidan, "Quelques resultants d'identification et de poursuite sous représentation diffusive de modèle pseudo-différentiels en Génie Electrique", Conférence JDA'01, Toulouse, France, 25-27 septembre 2001.
- [9] L.Laudebat, P.Bidan, G.Montseny, "Optimal Identification of Non Standard Dynamics By Means of Diffusive Representation", soumis à publication à IEEE Circuit & Systems.
- [10] L.Laudebat, P.Bidan, "Identification et Poursuite Optimales par Filtre de Kalman-Bucy sur le Symbole Diffusif" Journées Opérateur Pseudo-Différentiels et Représentation Diffusive Nantes, 22-23 Mai 2002.
- [11] A. von Jouanne, P.N. Enjeti, "Design Considerations for An Inverter Output Filter to Mitigate the Effects of Long Motor Leads in ASD Applications", IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 33, No. 5, 1997, pp.1138-1145.
- [12] N.Retière, M.Ivanès, "An Introduction to Electric Machine Modeling by Systems of Non-Integer Order. Application to double-Cage Induction Machine", IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, Déc 1999, pp.1026-1032.