



HAL
open science

Les rencontres amoureuses; une approche par la theorie des jeux.

Marc Arold Rosemond

► **To cite this version:**

Marc Arold Rosemond. Les rencontres amoureuses; une approche par la theorie des jeux.. 2020.
hal-02533919

HAL Id: hal-02533919

<https://hal.science/hal-02533919v1>

Submitted on 8 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Les rencontres amoureuses; une approche par la théorie des jeux.

Auteur : Marc Arold ROSEMOND

Think Tank associée: Catch Up Haïti

Université : Centre de Techniques de Planification et d'Economie Appliquée (CTPEA)

Dans cet article nous nous posons une question très simple, quelle est l'issue d'un rendez-vous amoureux entre deux personnes ? Nous voulons modéliser ce phénomène et prédire à partir d'un modèle les comportements des différents participants à ce rendez-vous. La question paraît simple et banale car les relations sociales de types romantiques, les histoires de galanteries sont présentes dans toutes les cultures à travers les musiques, les films, la poésie. Tous exaltent l'amour, ce sentiment qui fait perdre la tête et qui pousse selon les dires à soulever les montagnes. Cette simplicité que l'on prétend n'est plus vraie si l'on essaie de poser formellement la question : qu'est-ce qui détermine l'issue finale d'un rendez-vous ? Existe-il une constante dans ces rendez-vous qui nous permettrait de postuler sur leur dénouement ? les réponses seront pour la plupart non cohérentes, contradictoires voir inimaginables, même sur le plan scientifique, il est difficile d'analyser cette question. L'idée communément admise pour ce type de phénomène est que les deux personnes sont en dehors de toute rationalité et de ce fait il devient impossible de modéliser leurs comportements. Ce type de phénomène est laissé le plus souvent à des artistes, des poètes et acteurs car pour le scientifique, il est impossible de comprendre les raisons du cœur. La modélisation devient alors compliquée, elle fait appel à un certain nombre de concepts et exige un certain nombre d'hypothèses. Ainsi, pour avoir un cadre d'analyse cohérent nous utiliserons la théorie des jeux comme outil de modélisation afin de prédire non seulement les comportements des différents acteurs mais aussi les stratégies optimales qui leur permettraient de maximiser leurs attentes. Ce papier vise non seulement à donner une vision générale et scientifique de ce phénomène en le plaçant dans un environnement contrôlé, mais aussi à donner aux sites de rencontre une approximation plus juste des issues d'un rendez-vous afin de rendre plus performants les algorithmes de sélection. En effet, les algorithmes que l'on retrouve généralement dans les sites de rencontre prennent souvent compte des mauvaises sélections, des mauvais comportements mais ne prennent pas en compte l'idée suivant laquelle les gens participant aux rendez-vous conditionnent l'issue de celui-ci en fonction de leurs attentes. Ainsi, nous voulons montrer à travers ce papier des mécanismes permettant de satisfaire les deux parties.

Une histoire de jeu

La théorie des jeux ou la science et l'art de la stratégie est devenue depuis les années 80 un outil puissant pour modéliser les situations où il y a interactions stratégiques entre deux ou plusieurs agents. L'abstraction mathématique qu'elle utilise fait sa force, car elle ne se restreint pas à la sphère économique, mais s'étend à toute situation où deux ou plusieurs entités sont en interactions stratégiques. Cette force fait de la théorie un instrument de modélisation des comportements les plus utilisés aujourd'hui que ce soit dans la finance, dans les politiques publiques mais aussi dans des situations peu orthodoxes comme la gestion des enfants par les parents par une relation d'agence. Dans un article intitulé « Mating, dating, and mathematics : it's all in the game », Mark Colyvan (2010) imagine la vie de couple et la modélise comme un jeu coopératif dynamique où deux agents coopèrent pour trouver un bonheur qu'ils ne pourraient trouver en étant seul. Cette dernière définition du mariage qu'utilise Colyvan vient de Gary Becker (1974), figure de proue de l'impérialisme économique. L'idée qu'il existe une possibilité d'utiliser les outils de l'économie mathématique en général et de la théorie des jeux en particulier n'est donc pas nouveau. Une vaste littérature existe sur l'utilisation des outils de la théorie des jeux dans la modélisation des phénomènes sociaux¹.

A ce stade, il nous faut répondre à la question élémentaire de la définition d'un jeu. Au lieu de donner une définition formelle/ mathématique d'un jeu, nous donnerons une définition descriptive qui

¹ Voir « Introduction à la théorie des jeux et à l'art de la stratégie, page 30 » et « cours de théorie des jeux, Shmuel ZAMIR, page 5 » pour un approfondissement des domaines d'application de la théorie des jeux.

nous permettra d'identifier les ingrédients constitutifs de notre modèle. Pour avoir un jeu, il faut les joueurs, leurs préférences, la fonction d'utilité qui traduit ces préférences, les stratégies qui sont à leur disposition ainsi que les règles du jeu et le comportement des joueurs entre eux (coopération ou non). Nous expliquerons brièvement ces éléments car ils constituent les éléments clés de la modélisation.

Les préférences d'un joueur sont un système de choix cohérent ou non qu'il fait lorsque se présente devant lui deux situations. En théorie des jeux, nous supposons que les choix sont rationnels c'est-à-dire que lorsque le joueur se présente dans une situation avec toutes les informations disponibles, il va prendre la décision qui maximise sa fonction d'utilité. Mathématiquement, une relation de préférences sur un ensemble d'alternatives est une relation binaire sur cet ensemble. C'est la donnée d'un ensemble de paires d'éléments (x, y) pour lesquels nous écrivons $x \succcurlyeq y$. La relation de préférence est rationnelle si elle est complète, transitive². Les préférences des joueurs sur l'ensemble des alternatives sont, vous y conviendrez, difficilement mesurables. Comment représentez mathématiquement le fait que j'aime plus les femmes noires que les femmes blanches, ou inversement ? Pour contourner ce problème, on utilise non pas les préférences directement mais une fonction d'utilité. Cette dernière est une correspondance³ sur l'ensemble des préférences du joueur. Là où la théorie des jeux se distingue de la *microéconomie classique* c'est dans la traduction de la fonction d'utilité, la microéconomie classique maximise une fonction isolée, c'est à dire sans prendre en compte les décisions des autres joueurs tandis que la théorie des jeux permet aux joueurs de maximiser leurs fonctions d'utilité en tenant compte des stratégies des autres joueurs.

Le concept clé de la théorie des jeux c'est la notion d'équilibre, plus précisément la notion d'équilibre de Nash. L'équilibre de Nash représente une situation ou point dans lequel toute déviation de la part d'un joueur réduirait son utilité. Pour atteindre à cet équilibre, les règles du jeu sont alors déterminantes car elles permettent non seulement de respecter les engagements mais aussi une assurance du respect des normes. Arrivé à l'équilibre de Nash, il n'est dans l'avantage d'aucun joueur de changer de stratégie(s).

Un rendez-vous stratégique

Loin de nous l'idée de nous perdre dans la romance de la scène, nous adopterons pour ne pas tomber dans ce piège une méthodologie adaptée et à chaque fois nous ferons les hypothèses adéquates. Dans le cadre de notre travail, les deux joueurs sont en interactions stratégiques car les actions de l'un des joueurs influent significativement sur le niveau d'utilité des autres joueurs. Une stratégie se définit comme étant un plan complet qui décrit l'action qu'un joueur peut prendre avec un niveau d'informations données. Matthias Laureus définit l'interaction stratégique comme étant une situation où le bien être du joueur 1 dépend du bien-être du joueur 2 et qu'en même temps le bien être du joueur 2 dépend du bien-être du joueur 1. Ainsi, chaque joueur doit intégrer dans sa fonction de comportement les décisions des autres joueurs⁴. Imaginez une femme et un homme allant à un rendez-vous galant, la femme s'attend à ce que l'homme satisfasse ses attentes, elle se fait une idée sur l'issue de ce rendez-vous et fera tout pour que celui-ci se passe selon le plan qu'elle a établi. Dans ce contexte, elle ne peut se permettre de négliger les actions de l'homme car si elle le fait, elle risque de ne pas réaliser son objectif qui est la maximisation de son bien-être. De ce fait, les actions de l'homme influencent le niveau d'utilité de la femme. L'homme de son côté se comporte de la même

² « Cours de théorie des jeux, Shmuel ZAMIR, page 11 ».

³ Une correspondance est une relation pour laquelle un élément dans l'ensemble de départ a au moins une image dans l'ensemble d'arrivé.

⁴ « Introduction à la théorie des jeux et à l'art de la stratégie, page 15 ».

manière. Il vient dans le rendez-vous avec des objectifs précis, un plan d'actions et des stratégies qu'il utilisera au cours du rendez-vous pour essayer d'atteindre ses objectifs. Dans la description du phénomène, il peut sembler que nous écartons toute émotion et que nous supposons que les deux personnes sont froides et calculatrices. Dans le cadre de notre modélisation, on est conscient du ressenti des personnes, le fait qu'ils soient en interactions sociales impliquent forcément cette variable et ne pas la prendre en compte aurait été une erreur. Cependant, nous l'intégrons dans les préférences traduites par la fonction d'utilité. Si l'un des joueurs arrive au rendez-vous et que pendant le rendez-vous il tombe amoureux de l'autre impliquera une action qu'elle prend dans son ensemble de stratégies. Néanmoins, nous supposons qu'il/elle choisira cette option que si elle maximise sa fonction d'utilité. Dès lors, l'utilisation de la théorie des jeux pour modéliser ce phénomène prend tout son sens.

Nous supposons deux joueurs, un homme (joueur 1) et une femme (le joueur 2). Il existe une symétrie dans le rôle des joueurs et aucun ordre de grandeur n'apparaît dans les numéros, il s'agit seulement d'éléments purement descriptifs. Le joueur 1 peut arriver au rendez-vous avec deux idées : ou bien il veut passer une agréable soirée sans arrière-pensée (sexe) avec un désir de continuer l'histoire avec la femme ou bien il vient avec un seul objectif, la ramener chez lui pour le sexe sans donner suite à la relation. Ce choix de stratégies importe de donner une explication. Il est le résultat d'un certain nombre d'hypothèses afin de circonscrire le phénomène et de s'assurer qu'aucun facteur exogène ne vient perturber le modèle. Il est clair que l'homme et/ou la femme peut venir avec une idée et changer d'avis pendant le rendez-vous, nous supposons que la résolution est prise une fois pour toute. Cette hypothèse peut paraître discutable dans le sens où nous pouvons nous demander si l'interaction stratégique tient dans un tel contexte. La réponse est positive dans la mesure où la théorie des jeux ne remet pas en question le fondement logique des stratégies mais indiquent les niveaux optimaux selon des stratégies données. De plus, le fait de savoir que les joueurs ne vont pas changer de stratégies n'écarte pas l'interaction stratégique, au contraire en venant avec une idée arrêtée, cela rend plus intéressante le rendez-vous. La modélisation devient certes plus simple mais ne retire en aucun cas le jeu entre les deux joueurs.

Le joueur 2 dispose des mêmes stratégies que le joueur 1, la femme peut venir avec l'idée de passer un moment agréable et poursuivre la relation. De même, elle peut venir pour le sexe sans donner suite à la relation. Les hypothèses faites pour le joueur 1 tiennent aussi pour le joueur 2. Une fois les stratégies des joueurs établies il nous faut les préférences des joueurs traduit par la fonction d'utilité. Établir les préférences des joueurs est une tâche très compliquée et représente le cœur de la modélisation. De ce fait, une méthodologie appropriée s'avère nécessaire. Remarquons tout d'abord que les joueurs disposent des mêmes stratégies que nous noterons (PSS : passer une soirée sexe) ou (NPSS : ne pas passer une soirée sexe équivalent à donner une suite à la relation), il s'agit d'une hypothèse restrictive qui nous permet de contrôler la situation. De ce fait, quatre scénarios peuvent se présenter :

Premièrement, les deux joueurs viennent avec l'idée de passer une soirée sexe qui correspond alors à un vecteur de stratégies (PSS, PSS) l'abscisse représente la stratégie du premier joueur et l'ordonnée celle du second joueur. Deuxièmement, les deux joueurs peuvent venir avec l'idée de poursuivre la relation qui correspond alors au vecteur de stratégies ($NPSS, NPSS$). Dans les deux autres situations, l'un quelconque des deux joueurs peut venir avec l'idée de passer une soirée sexe qui correspond aux vecteurs de stratégies respectivement ($NPSS, PSS$) quand c'est l'homme qui vient passer une soirée sans sexe et ($PSS, NPSS$) quand la femme veut poursuivre la relation.

Nous pouvons dès lors discuter des choix des différents joueurs, nous assumons au prime abord que les joueurs sont rationnels, plus encore que la rationalité est connaissance commune. Si les joueurs viennent avec des idées différentes, il est clair que les deux partiront bredouille car nous avons supposé qu'ils ne changent pas de comportement lors du rendez-vous quel que soit le facteur exogène. Dès lors, le résultat de la fonction d'utilité où le PAYOFF associé à ce vecteur est (0,0). Maintenant deux situations restent à analyser, les cas où les joueurs viennent avec les mêmes idées, on ne peut ici rien supposer mais on peut écrire de manière abstraite les paiements attendus par les deux joueurs. Les vecteurs de paiements deviennent $(NPSS, NPSS) = (\pi^1, \pi^2)$ et $(PSS, PSS) = (\pi'^1, \pi'^2)$. Le plus grand problème réside dans le fait que nous ne pouvons pas ordonner l'ensemble de ces paiements car ils dépendent de l'importance qu'accordent les joueurs aux différentes stratégies. Nous ne savons pas par exemple quelle importance accorde le joueur 1 au fait de passer une soirée sans sexe. De même, il est impossible de savoir a priori π'^2 car nous ne savons pas si le joueur 2 préfère plus une soirée sans lendemain pour la relation que de donner suite au rendez-vous. Pour contourner ce problème, nous attribuerons des probabilités à chaque stratégie qui traduira l'importance que donne le joueur à la stratégie en question. Nous passons ainsi en stratégies mixtes.

Écrivons les choses formellement,

Soit $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ le jeu en stratégie pure que nous avons décrit avec N le nombre de Joueur, ainsi $N = 2$; A_i l'ensemble des stratégies pour le joueur i , $A_i = \{NPSS, PSS\}$ pour $i = 1, 2$ et u_i l'ensemble de paiements associés aux différentes stratégies.

Ce jeu peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

Matrice de gains des joueurs			
joueur 1		joueur 2	
		NPSS	PSS
	NPSS	(π^1, π^2)	(0,0)
PSS	(0,0)	(π'^1, π'^2)	

Résolution du jeu

A partir de ce jeu en stratégie pure nous pouvons dériver le jeu en stratégie mixte⁵

$$G' = \langle N, (\Delta(A_i)), (u_i) \rangle \text{ avec } \Delta(A_i) = \{(\sigma^1, \sigma^2) \in R^2 / \sum_{k=1}^n \alpha_k^i = 1\},$$

où k est le nombre de stratégies donc $k = 2$, σ^1 la distribution de probabilité pour les stratégies du joueur 1 et σ^2 la distribution pour les stratégies du joueur 2. Soit maintenant p la probabilité que le joueur 1 choisisse la stratégie NPSS et $1 - p$ la probabilité qu'il choisisse PSS alors $\sigma^1 = (p, 1 - p)$. De même, en notant q la probabilité que le joueur 2 choisisse la stratégie NSPP alors $\sigma^2 = (q, 1 - q)$. Pour illustrer cette définition, supposons que $p = 0.8$, cela traduit le fait que le joueur 1 choisira la stratégie NPSS avec une probabilité 0.8. L'équilibre en stratégie mixte donnera une distribution de probabilité, à défaut de donner les stratégies optimales cet équilibre donne le nombre de fois qu'il faut choisir une stratégie donnée pour avoir un résultat optimal.

⁵ Pour un approfondissement des jeux en stratégies mixtes, le lecteur pourra consulter : « théorie des jeux et économie de l'information, Abdelkader GLIZ » et « A course in *game theory*, Martin J Osborne et Ariel Rubinstein »

En intégrant les stratégies mixtes, la structure des fonctions d'utilité change, celles-ci suivent par hypothèse la fonction d'utilité espéré de Von Neumann et Morgenstern qui s'écrit :

$$U_1(\sigma^1, \sigma^2) = (p \ 1 - p) \begin{pmatrix} \pi^1 & 0 \\ 0 & \pi'^1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 1 - q \end{bmatrix}$$

Ainsi

$$U_1 = pq(\pi^1 + \pi'^1) - (p + q)\pi'^1 + \pi'^1 \quad (1)$$

Pour le joueur 1.

De même,

$$U_2(\sigma^1, \sigma^2) = (q \ 1 - q) \begin{pmatrix} \pi^2 & 0 \\ 0 & \pi'^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 - p \end{bmatrix}$$

Et

$$U_2 = pq(\pi^2 + \pi'^2) - (p + q)\pi'^2 + \pi'^2 \quad (2)$$

Pour le joueur 2.

Ces deux fonctions (U_1 et U_2) sont continues et admettent des maximums locaux pour les variables p et q . Nous voulons déterminer la meilleur correspondance $p(q)$ du Joueur 1 pour que sa strategie mixte $\sigma^1 = (p, 1 - p)$ soit la meilleur réponse à la stratégie mixte $\sigma^2 = (q, 1 - q)$ du joueur 2. Concrètement, nous voulons savoir quelle est la meilleure stratégie mixte que devrait adopter le joueur 1 sachant les stratégies mixtes du joueurs 2. En dérivant l'expression (1) par rapport à q et en annulant l'expression trouvée, nous obtenons

$$p^*(q) = \frac{\pi'^1}{\pi^1 + \pi'^1} \quad (3)$$

En utilisant le même procédé, nous trouvons pour le joueur 2

$$q^*(p) = \frac{\pi'^2}{\pi^2 + \pi'^2} \quad (4)$$

En utilisant les expressions (3) et (4) nous pouvons écrire les correspondances de meilleures réponses pour les joueurs 1 et 2.

$$p(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q > \frac{\pi'^1}{\pi^1 + \pi'^1} \\ \in [0,1] & \text{si } q = \frac{\pi'^1}{\pi^1 + \pi'^1} \\ 0 & \text{si } q < \frac{\pi'^1}{\pi^1 + \pi'^1} \end{cases}$$

Et

$$q(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p > \frac{\pi'^2}{\pi^2 + \pi'^2} \\ \in [0,1] & \text{si } q = \frac{\pi'^2}{\pi^2 + \pi'^2} \\ 0 & \text{si } q < \frac{\pi'^2}{\pi^2 + \pi'^2} \end{cases}$$

L'équilibre de Nash en stratégie mixte est le point de rencontre entre les deux graphes $p(q)$ et $q(p)$ et s'écrit $\sigma^* = (\sigma^{*1}, \sigma^{*2})$ avec

$$\sigma^{*1} = \left(\frac{\pi'^1}{\pi^1 + \pi'^1}, \frac{\pi^1}{\pi^1 + \pi'^1} \right) \text{ et } \sigma^{*2} = \left(\frac{\pi'^2}{\pi^2 + \pi'^2}, \frac{\pi^2}{\pi^2 + \pi'^2} \right)$$

Pour vérifier que l'équilibre obtenu est bien un équilibre de Nash, supposons que le joueur 1 pense que le joueur 2 accorde une importance q à stratégie NPSS tel que

$$q < \frac{\pi'^1}{\pi^1 + \pi'^1}$$

Le paiement du joueur 1 devient $\pi^1 * q$ En adoptant la stratégie NPSS et $\pi'^1 * (1 - q)$ en choisissant la stratégie PSS. Ce choix de stratégie n'est pas optimal car le joueur 1 peut augmenter strictement son paiement en jouant la stratégie pure PSS. En effet, si $q < \frac{\pi'^1}{\pi^1 + \pi'^1}$

Alors,

$$(\pi^1 + \pi'^1)q - \pi'^1 < 0$$

Et

$$\pi^1 q - \pi'^1(1 - q) < 0$$

Cette dernière expression représente la différence entre les deux paiements pour les deux stratégies est donc négative.

Ainsi il peut augmenter son utilité en jouant la stratégie pure PSS jusqu'à ce que les deux paiements s'égalisent.

De même s'il pense que le joueur 2 accorde une importance q à la stratégie NPSS telle que

$$q > \frac{\pi'^1}{\pi^1 + \pi'^1}$$

Alors

$$\pi^1 q - \pi'^1(1 - q) > 0$$

Il peut augmenter strictement son paiement en choisissant de joueur la stratégie pure NPSS. Dans les deux cas, il aura intérêt à dévier de l'équilibre obtenu. Ces équilibres ne sont donc pas des équilibres

de Nash. Cependant, au point d'équilibre σ^{*1} il est indifférent aux choix de stratégies du joueur 2, c'est-à-dire que peu importe l'importance que le joueur 2 accorde à la soirée en question, son utilité espérée sera égale pour toutes les stratégies.

Résultats du modèle

Le modèle que nous avons utilisé est un modèle de base, toutes les hypothèses que nous avons faites permettent de simplifier le phénomène au maximum afin d'avoir des résultats beaucoup plus précis. Imaginez le modèle comme une maison, le premier travail consiste à construire une fondation solide sur laquelle toute la maison, aussi complexe que nous voulons, va être construite.

Notre modélisation nous permet de conclure que le meilleur comportement pour les deux personnes c'est l'effet de surprise, le fait de rester imprévisible. Cet équilibre suit le même principe que celui des gardiens de but lors des séances de tirs au but. Il n'est dans l'avantage d'aucun gardien quand le joueur en face peut deviner dans quelle direction il plongera. De même, il n'est dans l'avantage d'aucun joueur (homme ou femme) d'être prévisible sur le fait qu'il privilégie ou non le sexe. Le mécanisme qui randomise leurs choix selon la distribution établie permettra de surprendre l'autre joueur peu importe son choix. En effet l'une des propriétés de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes est le principe d'indifférence qui établit qu'à ce point d'équilibre, seules les stratégies pures qui sont des meilleures réponses ont une probabilité positive et rapportent toutes le même paiement. Ainsi selon cette règle, peu importe leurs stratégies, à condition de choisir suivant la distribution de probabilité, les joueurs ont moins de chance de perdre dans le processus d'interactions stratégiques. On peut aussi voir cet équilibre de Nash comme le meilleur comportement à avoir selon les anticipations sur les choix possibles de l'autre joueur. L'autre résultat plus ou moins intéressant de ce modèle est que l'équilibre obtenu pour le joueur 1 ne dépend pas des choix du joueur 2 et réciproquement. Ce qui veut dire que lorsque l'on se donne une idée dès le départ, l'issue du rendez-vous est complètement déterminé par le joueur.

Le principal inconvénient vient du fait que ce mécanisme est soumis à une règle aléatoire. En effet, le fait que le jeu se déroule en une seule fois (*one shot game*), nous ne pouvons prédire avec exactitude la stratégie optimale qui prévaudrait dans toutes les situations, le mieux que nous puissions faire c'est établir, comme on l'a fait, une fonction stochastique de comportement. De plus, la force de notre modèle peut aussi être sa plus grande faiblesse. Le fait que le résultat obtenu est indépendant du choix des autres joueurs implique que le joueur peut appliquer cette stratégie pour n'importe quel joueur. Or tous les hommes ne sont pas les mêmes. De même pour les femmes. Ainsi, ce modèle est fait pour un joueur avec des idées arrêtées sur le sexe opposé.

Ce modèle est la base d'une modélisation plus poussée. En effet, l'hypothèse que les gens viennent avec une idée toute faite dans le rendez-vous est pour le moins trop restrictive. Dans la réalité les gens changent souvent leur a priori, les facteurs exogènes comme le comportement de la personne en face, la façon de parler, la capacité d'envoyer des signaux, etc. Le fait de modéliser la situation la plus simple permet de complexifier le modèle au fur et à mesure. Supposons que nous voulions prendre en compte un facteur exogène comme les croyances des joueurs qui les permettront de prendre des décisions sur le fait de changer ou non leurs idées dans le rendez-vous. Dans ce cas, les jeux de Bayes sur la modélisation des jeux à information imparfaite ainsi que les modèles de signaux permettront de résoudre ce problème. C'est ce que nous verrons dans la section suivante.

Quand les idées changent...

Dans la première partie nous avons fait l'hypothèse que les joueurs ne changeraient pas de stratégies durant le rendez-vous. Cette hypothèse, même si elle nous a facilité la tâche quant à la modélisation, ne permet pas de prendre en compte une grande réalité dans les rendez-vous, le plaisir du rendez-vous lui-même. En effet, pendant le rendez-vous, plusieurs choses peuvent se passer, il existe une multitude de possibilités qui peut pousser l'un quelconque des joueurs à changer de stratégies. Nous allons donc dans cette partie relâcher cette hypothèse en supposant que les décisions ne sont pas arrêtées, nous supposons qu'elles seront prises pendant le rendez-vous.

Nous supposons toujours les deux joueurs, l'homme et la femme. Cependant, nous considérons deux ensembles C_1, C_2 représentant les caractéristiques respectives de l'homme et de la femme. Ces caractéristiques peuvent être visibles comme par exemple la couleur des yeux, la couleur de la peau, sa parure extérieure ou invisibles comme l'âge, les qualités, les défauts, etc. Nous sommes conscients du fait que les deux joueurs peuvent avoir des perceptions sur les caractéristiques invisibles comme l'âge mais nous écartons cette possibilité. En fait, les caractéristiques invisibles sont ceux que l'autre joueur ignore. Ainsi,

$$C_i = \sum_{j \in \{v, inv\}} C_i^j \text{ Avec } i=1,2$$

Les joueurs ne peuvent observer directement les caractéristiques invisibles mais ils peuvent envoyer des messages qui seront alors suivis de réponses.

Nous pouvons donc écrire mathématiquement le message comme une fonction d'un ensemble de question (quel âge as-tu ? quels sont tes qualités ? Tes défauts ? Veux-tu vraiment une relation sérieuse ? ou c'est juste pour le sexe ?) que nous considérerons comme exogène.

$$\xi: Q_i \rightarrow M^i$$

Dès lors, on peut postuler sur les réponses et ces derniers nous donnerons le type de personne qu'est le joueur en question.

Soit alors φ la fonction de réponse telle que

$$\varphi: M^i \rightarrow R^i$$

Nous pouvons nous attendre à deux catégories de personnes, ceux qui ont révélé parfaitement leurs caractéristiques invisibles, dans ce cas $R^i = C^{inv}$ qui sont de type A ou ceux qui ont menti sur leur caractéristiques invisibles, $R^i \neq C^{inv}$ qui eux sont de type B. Nous écrivons donc

$$\vartheta_i: R^i \rightarrow T_i \text{ tel que } \vartheta_i(R^i) = A \text{ si } R^i = C^{inv} \text{ et } \vartheta_i(R^i) = B \text{ sinon}$$

Le joueur qui envoie le message ne sait pas de quel type est l'autre joueur, il se fait une idée de celui-ci au travers des messages reçus qu'il interprète. Il est clair que dans cette application le joueur i peut se tromper sur le type de l'autre joueur, ainsi l'information privée ne concerne plus ses caractéristiques privées mais son type.

Soit p_i la distribution de probabilité pour les croyances du joueur i sur le type de l'autre joueur. Il devient clair alors que cette mesure de probabilité est différente pour chaque joueur car chacun se fait une idée non seulement sur le type que le joueur lui attribue mais aussi sur le type de l'autre joueur.

Nous pouvons ainsi résumer le jeu en le plaçant dans un contexte bayésien. Il s'écrit alors

$$G = \langle N, \Omega, A_i, T_i, \vartheta_i, p_i, \geq_i \rangle$$

Telle que N représente le nombre de joueur donc $N = \{1,2\}$, Ω représente les états de nature qui décrivent le type des joueurs, dans notre cas $\Omega = \{A,B\}$. Il faut préciser que dans cette logique découle

$$A = \bigcup_{\vartheta_i^{-1}(t_i) \in C^{inv}} \{t_i\}$$

Et

$$B = \bigcup_{\vartheta_i^{-1}(t_i) \notin C^{inv}} \{t_i\}$$

Nous devons donc trouver l'équilibre bayésien de Nash. Cet équilibre est tel que $\forall i \in N, \forall t_i$, il existe un joueur (i, t_i) (un joueur i de type t_i). Dès lors, l'ensemble des profils d'action tenant compte des signaux reçus et interprétés par les deux joueurs est :

$$A^* = \times_{j \in N} (\times_{t_j \in T_j} A_j)$$

Nous pouvons réécrire cet ensemble en $A^* = (\times_{t_1 \in T_1} A_1) \times (\times_{t_2 \in T_2} A_2)$ où

$$\times_{t_1 \in T_1} A_1 = \{(NPSS_1, A_1), (NSPP_1, B_1), (PSS_1, A_1), (NPSS_1, B_1)\}$$

Et

$$\times_{t_2 \in T_2} A_2 = \{(NPSS_2, A_2), (NSPP_2, B_2), (PSS_2, A_2), (NPSS_2, B_2)\}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A^* = & \{ \{(NPSS_1, A_1), (NPSS_2, A_2)\}, \{(NPSS_1, A_1), (NPSS_2, B_2)\}, \{(NPSS_1, A_1), (PSS_2, A_2)\}, \\ & \{(NPSS_1, A_1), (PSS_2, B_2)\}, \{(NPSS_1, B_1), (NPSS_2, A_2)\}, \{(NPSS_1, B_1), (NPSS_2, B_2)\}, \\ & \{(NPSS_1, B_1), (PSS_2, A_2)\}, \{(NPSS_1, B_1), (PSS_2, B_2)\}, \{(PSS_1, A_1), (NPSS_2, A_2)\}, \\ & \{(PSS_1, A_1), (NPSS_2, B_2)\}, \{(PSS_1, A_1), (PSS_2, A_2)\}, \{(PSS_1, A_1), (PSS_2, B_2)\}, \\ & \{(PSS_1, B_1), (NPSS_2, A_2)\}, \{(PSS_1, B_1), (NPSS_2, B_2)\}, \{(PSS_1, B_1), (PSS_2, A_2)\}, \{(PSS_1, B_1), (PSS_2, B_2)\} \} \end{aligned}$$

Pour interpréter un élément de A^* , considérons le premier $\{(NPSS_1, A_1), (NPSS_2, A_2)\}$, le premier couple représente l'action prise par le joueur 1 sachant que son type est A_1 et le second couple représente celle prise par le joueur 2 sachant que son type est A_2 . Ce qui fait que les éléments de A^* peuvent être représenté par $a^* = (a^*(1), a^*(2))$, le premier renvoyant au joueur 1 et le second au joueur 2.

Quel que soit l'action prise dans A^* , c'est-à-dire $\forall a^* \in A^*$, cela génère une loterie $L(a^*, t_i)$ sur $A \times \Omega$. Brièvement, une loterie L sur un ensemble fini X est une liste de probabilité (p_1, \dots, p_n) telle que $\sum p_i = 1$ où p_i représente la probabilité d'apparition du i^{eme} élément de X .

Par simplicité, notons $A^* = \{a^*_i\} i = 1,16$. Ainsi, pour le premier élément a^*_1 , la loterie générée pour le joueur 1 est $L_1(a^*_1, t_i) = (L_1(a^*_1, A), L_1(a^*_1, B))$

Avec

$$L_1(a^*_1, t_i) = [p(a^*_1(1), A), p(a^*_1(2), A), p(a^*_1(1), B), p(a^*_1(2), B)]$$

Cependant, cette loterie est telle que la probabilité qu'elle associe à $(a^*_2(2), \omega)$ est égale à $\frac{p(\omega)}{p(\vartheta_i^{-1}(t_i))}$ si $\omega \in \vartheta_i^{-1}(t_i)$ et zéro sinon.

La dernière expression de la loterie devient

$$L_1(a^*_1, A) = [p(a^*_1(1), A), p(a^*_1(2), A), 0, 0]$$

Nous pouvons donc écrire que $p(a^*_1(1), A) = 1 - p(a^*_1(2), A)$.

De même,

$$L_1(a^*_1, B) = [0, 0, p(a^*_1(1), B), p(a^*_1(2), B)]$$

Et

$$p(a^*_1(1), B) = 1 - p(a^*_1(2), B)$$

Nous devons pour trouver l'équilibre de Nash établir sur A^* une relation d'ordre. Pour ce faire, nous utiliserons les loteries sur $A \times \Omega$.

Ainsi pour deux éléments de A^* , a^* et b^* la relation d'ordre sera telle que

$$a^* \geq_{(i, t_i)} b^* \Rightarrow L(a^*, t_i) \geq_i L(b^*, t_i)$$

Nous rappelons aussi que dans un environnement incertain, de même pour les préférences dans un environnement certain, les préférences pour les loteries peuvent se traduire à travers les utilités espérées. Ainsi,

$$L(a^*, t_i) \geq_i L(b^*, t_i) \Leftrightarrow U[L(a^*, t_i)] \geq_{\mathbb{R}} U[L(b^*, t_i)]$$

Avec $U[L(a^*, t_i)] = \sum_{i=1}^n U_i p_i$ où les U_i sont les utilités rattachées à chaque scenario et les p_i la probabilité de leur survenance.

Au final l'équilibre de Nash est donné par résolution du programme

$$\operatorname{argmax}_{a^* \in A^*} U_i[L(a^*, t_i)]$$

Marc Arold ROSEMOND

Economiste; statisticien

Email: marcarold.rosemond@catchuphaiti.org

Bibliographie

- 1) *Mating, Dating and Mathematics; it's all in the game.* Mark Colyvan
- 2) Introduction à la théorie des jeux et à l'art de la stratégie, Mathias Laureus.
- 3) Cours de Théorie des jeux ; Shmuel ZAMIR en collaboration avec Rida LARAKI
- 4) A course in game theory, Martin J Osborne et Ariel Rubinstein
- 5) Théorie des jeux et économie de l'information, Abdelkader GLIZ
- 6) *Gary Becker, theory of marriage*, 1974