

Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques

Equations algébriques réduites

Marc Olive

LMT - Secteur matériaux - ENS Paris-Saclay

Cachan 05 Mars 2020

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

Plan de présentation

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

A l'origine : la cristallographie

- La notion de symétrie d'un cristal se traduit mathématiquement par un **groupe de symétrie**
- Dans le domaine de la cristallographie, une classification des "symétries possibles" a pu être établie :
 - ▶ 32 groupes ponctuels : ce sont des **sous-groupes** du groupe $O(3)$ des transformations orthogonales
 - ▶ 230 groupes d'espaces : sous-groupes du groupe des déplacements euclidiens (avec les translations)

Curie - 1894

Je pense qu'il y aurait intérêt à introduire dans l'étude des phénomènes physiques les considérations sur la symétrie familières aux cristallographes.

- Principe de Curie : les symétries du réseau s'appliquent au modèle mathématique
- Cas particulier : matériau centro-symétrique, pas d'effet piézoélectrique

Des cristaux à l'élasticité linéaire

- Symétries d'un cristal connues, comment passer à l'élasticité linéaire ?
- Première idée (Love - 1927) : *groupe de symétrie* G du cristal fixé (groupe ponctuel), imposer les mêmes symétries au *tenseur d'élasticité*
- Tenseur d'élasticité d'ordre 4 : il ne "voit" que les rotations
- Sur les 32 groupes cristallographiques, il n'en reste plus que 11 :

$$\mathbf{1}, \mathbf{Z}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{D}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{D}_4, \mathbf{Z}_6, \mathbf{D}_6, \mathbf{T}, \mathbf{O}$$

- Problème : décrit-on ainsi toutes les *anisotropies* en élasticité linéaire ?

Les premières explorations

- "Force brute" (Love, dicit Forte–Vianello) : imposer des symétries à la forme matricielle d'un tenseur d'élasticité, d'où 9 "formes distinctes"
- Idée contre-intuitive : créer une élasticité isotrope, donc ajouter le groupe $SO(3)$ qui n'est pas un groupe cristallographique
- Dans la lancée, certains (Schouten notamment) ajoute l'isotropie transverse avec le sous-groupe $O(2)$
- Découverte : $\mathbb{Z}_6, \mathbb{D}_6$ et $O(2)$ donnent la même forme
- Au final, cela fait donc $11 - 2 + 2 - 1 = 10$ "formes" d'anisotropies différentes

Plan de présentation

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

- Le point de départ est la *loi de Hooke généralisée*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon},$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des petites déformations et \mathbf{E} le *tenseur d'élasticité*

- Un tenseur d'élasticité est un tenseur d'ordre 4 qui possède les *symétries indicelles*

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij}$$

qui définit un *espace vectoriel* $\mathbb{E}la$ de dimension 21 (en 3D)

Matériaux élastiques homogènes

- Matériau élastique homogène donné : tenseur d'élasticité défini dans une **orientation donnée**
- Nouvelle orientation obtenue par $g \in O(3)$, le tenseur d'élasticité

$$\bar{\mathbf{E}} = \rho(g)\mathbf{E}, \quad \bar{E}_{ijkl} = g_{ip}g_{jq}g_{kr}g_{ls}E_{pqrs}$$

caractérise le **même matériau**

- Matériau élastique homogène modélisé par une **orbite**

$$\text{orb}(\mathbf{E}) := \{\rho(g)\mathbf{E}, \quad g \in O(3)\} = \{\rho(g)\mathbf{E}, \quad g \in \text{SO}(3)\}$$

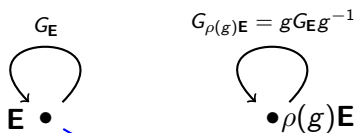
Anisotropies de l'élasticité linéaire (Forte–Vianello - 1994)

- Matériau élastique donné par une orbite $\text{orb}(\mathbf{E})$, avec $\mathbf{E} \in \mathbb{E}1a$, comment caractériser un **type de symétrie** ?
- Première étape : pour $\mathbf{E} \in \mathbb{E}1a$, définir le **groupe de symétrie**

$$G_{\mathbf{E}} := \{g \in \text{SO}(3), \quad \rho(g)\mathbf{E} = \mathbf{E}\}$$

qui donne les symétries dans une orientation donnée

- Deuxième étape : on rassemble tous les sous-groupes issus d'une même orbite



$$[G_{\mathbf{E}}] = \{gG_{\mathbf{E}}g^{-1}, g \in \text{SO}(3)\}$$

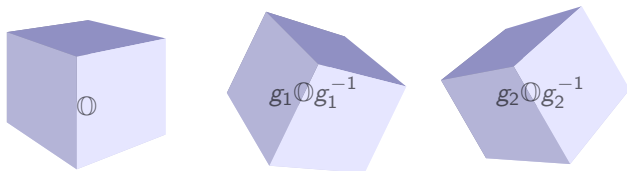
Un même matériau : $\text{orb}(\mathbf{E})$

Exemple de la symétrie cubique

- Dans une certaine base orthonormée $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, un matériau a pour symétrie

$$G_{\mathbf{E}} = \mathbb{O} = \{g \in \text{SO}(3), \quad g\mathbf{e}_i = \pm\mathbf{e}_j, \quad \det(g) = 1\}$$

- Pour toute nouvelle orientation donnée par g_1, g_2, etc , la symétrie sera donnée par $g_1\mathbb{O}g_1^{-1}$, etc (tous les **conjugués** de \mathbb{O})



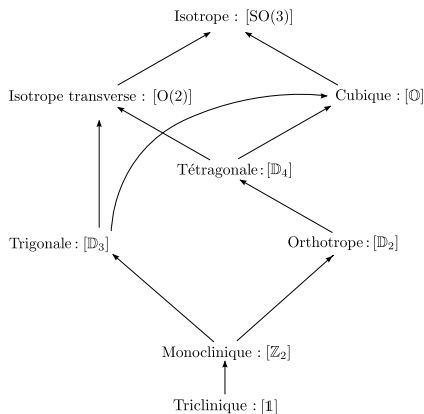
Définition de l'anisotropie et résultat de Forte–Vianello

Définition

Pour tout matériau homogène donné par $\text{orb}(\mathbf{E})$, le type d'anisotropie (ou classe de symétrie) est donnée par la **classe de conjugaison** $[G_{\mathbf{E}}]$

Théorème (Forte–Vianello - 1996)

Pour l'espace \mathbb{E}^3 , il n'existe que 8 classes de symétries : triclinique, monoclinique, orthotrope, tétragonale, trigonale, isotrope transverse, cubique et isotrope



- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

Classes de symétrie et plans de symétrie

- Pour obtenir une classe de symétrie d'un matériau $\text{orb}(\mathbf{E})$, il faut *a priori* trouver **toutes les rotations** $g \in \text{SO}(3)$ telles que

$$\rho(g)\mathbf{E} = \mathbf{E}$$

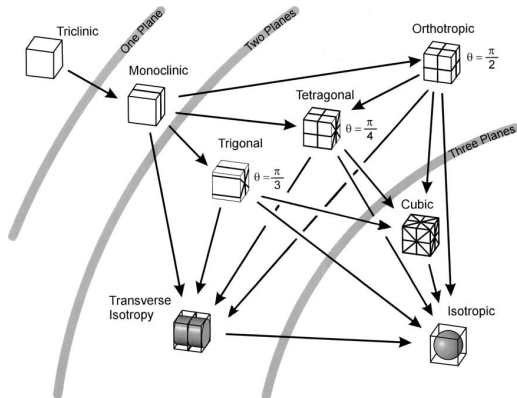
- Les rotations sont engendrées par les symétries planes
- On peut se **contenter de chercher des symétries planes**

$$\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{E} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}) := \mathbf{q} - 2\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est un vecteur normal unitaire qui définit un plan (orthogonal)

- Chadwick et al. (2001) : le nombre et la nature des plans de symétrie caractérise la classe de symétrie

Classification par plans de symétrie



Source : Chadwick, P., Vianello, M., & Cowin, S. C. (2001). A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11), 2471-2492.

Détermination de plans de symétrie

- Résoudre l'équation $\rho(\mathbf{q} - 2\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu})\mathbf{E} = \mathbf{E}$ d'inconnues $\boldsymbol{\nu} = (x, y, z)$: 21 équations algébriques de degré 8
- Amélioration : le résultat de Cowin (3 équations de degré 4), mais non constructif (deuxième condition)

Théorème (Cowin (1989))

Let $\boldsymbol{\nu}$ be a unit vector. Then $\boldsymbol{\nu}$ is the normal to a symmetry plane for an elasticity tensor \mathbf{E} if and only if

$$\begin{cases} [(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}] \times \boldsymbol{\nu} = 0 \\ [(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\nu}] \times \boldsymbol{\nu} = 0 \end{cases}$$

for all unit vectors $\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{\nu}$, \times being the cross-product.

Plan de présentation

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

Plan de présentation

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

Tenseurs et représentation linéaire de $O(3)$

- Un tenseur \mathbf{T} d'ordre n sur \mathbb{R}^3 est une **forme n-linéaire**

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}$$

- On définit **deux représentations linéaires** de $O(3)$

$$(\rho_n(g)\mathbf{T})(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) := \mathbf{T}(g^{-1}\mathbf{x}_1, \dots, g^{-1}\mathbf{x}_n), \quad \hat{\rho}_n(g) := \det(g)\rho_n(g)$$

- Dans une base orthonormée \mathbf{e}_i

$$\begin{aligned} T_{i_1 \dots i_n} &= \mathbf{T}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) \\ (\rho_n(g)\mathbf{T})_{i_1 \dots i_n} &= g_{i_1 j_1} \dots g_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \end{aligned}$$

- Traduction physique : pour $\hat{\rho}_n$ on parle de **pseudo-tenseur**

Objectif et stratégie

- Pour un tenseur totalement symétrique \mathbf{S} , trouver axes et plans de symétrie
- Traduction initiale : trouver $\boldsymbol{\nu}$ unitaire tel que

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S} &= \mathbf{S}, & \rho(\mathbf{r}(\boldsymbol{\nu}, \pi))\mathbf{S} &= \mathbf{S} \\ \mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}) &= \mathbf{q} - 2\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}, & \mathbf{r}(\boldsymbol{\nu}, \pi) &= -\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})\end{aligned}\quad (1)$$

- Equations (1) de degré $2n$ en $\boldsymbol{\nu} = (x, y, y)$ à passer en équations de degré n
- Les ingrédients : Une bonne dose d'opérations tensorielles (en intrinsèque), un soupçon de polynômes homogènes, et des reseaux de neurones

Opération covariante : point de départ

Définition (Total symmetrization)

The total symmetrization of \mathbf{T} , noted $\mathbf{T}^s \in \mathbb{S}^n$, is the n th order tensor defined by

$$\mathbf{T}^s(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbf{T}(\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(n)}).$$

where \mathfrak{S}_n is the permutation group of n elements.

Covariance

Cette opération est **covariante** (commute avec l'action)

$$\rho(g)(\mathbf{T}^s) = (\rho(g)\mathbf{T})^s$$

Autres opérations covariantes

Définition (Symmetric tensor product)

The *symmetric tensor product* between two symmetric tensors $\mathbf{S}^1 \in \mathbb{S}^p(\mathbb{R}^3)$ and $\mathbf{S}^2 \in \mathbb{S}^q(\mathbb{R}^3)$ is

$$\mathbf{S}^1 \odot \mathbf{S}^2 := (\mathbf{S}^1 \otimes \mathbf{S}^2)^s \in \mathbb{S}^{p+q}(\mathbb{R}^3).$$

Définition (r -contraction)

The r -contraction between a n th-order symmetric tensor $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^n(\mathbb{R}^3)$ and $\mathbf{w}^r := (\mathbf{w} \otimes \dots \otimes \mathbf{w})$ (where $r \leq n$) is defined by :

$$(\mathbf{S}^{(\cdot)} \mathbf{w}^r)_{i_1 i_2 \dots i_{n-r}} = S_{i_1 i_2 \dots i_{n-r} j_1 \dots j_r} w_{j_1} \dots w_{j_r}, \quad \mathbf{S}^{(\cdot)} \mathbf{w}^r \in \mathbb{S}^{n-r}.$$

Un nouveau venu : produit vectoriel généralisé

Définition (Generalized cross product)

The *generalized cross product* between two totally symmetric tensors $\mathbf{S}^1 \in \mathbb{S}^p(\mathbb{R}^3)$ and $\mathbf{S}^2 \in \mathbb{S}^q(\mathbb{R}^3)$ is defined as

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 := \left(\mathbf{S}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S}^1 \right)^s \in \mathbb{S}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3),$$

with $\boldsymbol{\varepsilon}$ Levi-Civita symbol in \mathbb{R}^3 .

In any orthonormal basis (\mathbf{e}_i) , it writes as

$$\left(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 \right)_{i_1 \dots i_{p+q-1}} := \left(\varepsilon_{i_1 j k} S_{j i_2 \dots i_p}^1 S_{k i_{p+1} \dots i_{p+q-1}}^2 \right)^s, \quad \varepsilon_{ijk} = \det(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Exemples de produits vectoriels généralisés

- Pour deux vecteurs $\mathbf{u} = (u_i)$ et $\mathbf{v} = (v_j)$ on retrouve le produit vectoriel

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_k = \varepsilon_{kij} u_i v_j$$

- Pour $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$ diagonale telle que $\mathbf{a}\mathbf{e}_i = \lambda_i$ on obtient

$$\mathbf{a}^2 \times \mathbf{a} = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_1 \odot \mathbf{e}_2 \odot \mathbf{e}_3 \in \mathbb{S}^3$$

Conséquences de la covariance

Reduction Lemma

Let $\boldsymbol{\nu}$ be any unit vector and $g \in O(3)$ such that $g\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_3$, then

$$\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{T} = \mathbf{T} \iff \rho(\mathbf{s}(\mathbf{e}_3))(\rho(g)\mathbf{T}) = \rho(g)\mathbf{T}$$

meaning that $\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})$ is a plane symmetry of \mathbf{T} iff \mathbf{e}_3 is a plane symmetry of $\rho(g)\mathbf{T}$.

Symétrie plane Oxy

$\rho(\mathbf{s}(\mathbf{e}_3))\mathbf{T} = \mathbf{T}$ if and only if

$T_{i_1 \dots i_n} = 0$ whenever the occurrences of 3 in the set $\{i_1, \dots, i_n\}$ is odd.

Clé pour une récurrence

Transmission lemma

For any unit vector $\boldsymbol{\nu}$, and for any $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^n(\mathbb{R}^3)$, $g \in O(3)$:

$$\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S} = \mathbf{S} \implies \rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))(\mathbf{S} \binom{(k)}{\cdot} \boldsymbol{\nu}^k) = (-1)^k \mathbf{S} \binom{(k)}{\cdot} \boldsymbol{\nu}^k$$

for any non-zero integer k

Exemples

- Si $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$ invariant par $\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})$ alors $\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) = -\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}$, donc $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}$ est **colinéaire** à $\boldsymbol{\nu}$
- Si $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^4$ est invariant par $\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})$ alors $\mathbf{S} \binom{(2)}{\cdot} \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2$ est lui aussi invariant

Plan de présentation

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - **Equation tensorielle intrinsèque**
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

Tenseurs totalement symétriques et polynômes homogènes

- Tenseur totalement symétrique $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^n$ d'ordre n **identifié** à un polynôme homogène de degré n

$$\mathbf{S} \in \mathbb{S}^n \mapsto p(\mathbf{x}) := \mathbf{S}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x})$$

- Exemple très connu

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathbb{S}^2 \mapsto p(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

- Réciproque : par **polarisation**

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \Big|_{t_1 = \dots = t_n = 0} p(t_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + t_n \mathbf{x}_n).$$

Symétries planes et axiales : écriture par opération covariante

Lemme

Let \mathbf{S} be any totally symmetric n th order tensor. Then

$$\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k \boldsymbol{\nu}^k \odot \left(\mathbf{S}^{(k)} \boldsymbol{\nu}^k \right)$$

and

$$\rho(\mathbf{r}(\boldsymbol{\nu}, \pi))\mathbf{S} = (-1)^n \rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S}$$

Sketch of proof

On reconnaît la [formule du binôme de Newton](#) via le polynôme homogène

$$(\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S})(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x} - 2\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{x} \rangle \boldsymbol{\nu}, \dots, \mathbf{x} - 2\langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{x} \rangle \boldsymbol{\nu})$$

Premiers exemples

- Pour un tenseur $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$

$$\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{a} = \rho(\mathbf{r}(\boldsymbol{\nu}, \pi))\mathbf{a} = \mathbf{a} - 4\boldsymbol{\nu} \odot (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 4(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}.$$

- Pour $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^3$

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S} = \mathbf{S} - 6\boldsymbol{\nu} \odot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 12\boldsymbol{\nu} \odot \boldsymbol{\nu} \odot (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) \\ - 8[(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}]\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}\end{aligned}$$

- Idée : se débarrasser des termes de plus haut degré

Plan de présentation

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

Proposition

Let $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ and $\boldsymbol{\nu}$ a unit vector. Then

- ① $\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})$ is a plane symmetry (resp. $\mathbf{r}(\boldsymbol{\nu}, \pi)$ is an axial symmetry) of \mathbf{a} if and only if

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu} = 0, \quad (2)$$

- ② $\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})$ is a plane symmetry of *pseudo-tensor* \mathbf{a} if and only if

$$\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{a} = -\mathbf{a} \iff \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\nu} \odot (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0 \quad (3)$$

Remarque

On reconnaît dans l'équation (2) la condition pour $\boldsymbol{\nu}$ d'être un **vecteur propre**

De l'ordre 2 à l'ordre 3 (plan de symétrie)

- Soit $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^3$ tel que $\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S} = \mathbf{S}$
- Par le lemme de transmission on sait que $\mathbf{a} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2$ est tel que

$$\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

- En appliquant le résultat précédent on en déduit que

$$\mathbf{a} - 2\boldsymbol{\nu} \odot (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0 \text{ donc } \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu} - 2\boldsymbol{\nu} \odot (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0$$

- L'équation initiale était

$$6\boldsymbol{\nu} \odot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) - 12\boldsymbol{\nu} \odot \boldsymbol{\nu} \odot (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 8[(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}] \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{\nu} = 0$$

Axes et plans de symétrie pour l'ordre 3

Théorème

Let \mathbf{S} be a totally symmetric tensor of order 3 and $\boldsymbol{\nu}$ be a unit vector, then

- ① $\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S} = \mathbf{S}$ (i.e. $\boldsymbol{\nu}$ defines a plane symmetry of \mathbf{S}) if and only if

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu} - 2\boldsymbol{\nu} \odot (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0.$$

- ② $\rho(\mathbf{r}(\boldsymbol{\nu}, \pi))\mathbf{S} = \mathbf{S}$ (i.e. $\boldsymbol{\nu}$ defines an axis of symmetry of \mathbf{S}) if and only if

$$[\mathbf{S} - 3\boldsymbol{\nu} \odot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu})] \times \boldsymbol{\nu} = 0$$

Remarque

Pour généraliser la notion de **vecteur propre**, il n'y a pas de choix canonique

Plan de présentation

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

Tenseurs et pseudo-tenseurs d'ordre 4

Théorème

Let $\boldsymbol{\nu}$ be a unit vector and $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^4$

- ① $\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S} = \mathbf{S}$ (i.e $\boldsymbol{\nu}$ defines a plane symmetry — or an axial symmetry— for \mathbf{S}) if and only if

$$\left[\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu} - 3\boldsymbol{\nu} \odot (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) \right] \times \boldsymbol{\nu} = 0. \quad (4)$$

- ② $\rho(\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu}))\mathbf{S} = -\mathbf{S}$ (i.e $\boldsymbol{\nu}$ defines a plane symmetry for pseudo-tensor \mathbf{S}) if and only if

$$\mathbf{S} - 4\boldsymbol{\nu} \odot (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 4\boldsymbol{\nu} \odot \boldsymbol{\nu} \odot (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0;$$

Remarque

L'équation (4) peut être une définition pour la généralisation de la notion d'un vecteur propre d'un tenseur totalement symétrique d'ordre 4.

Vers des modèles pour l'an 30 000

Il existe des équations algébriques explicites de degré n (et non $2n$) qui caractérisent les axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques d'ordre $n \geq 1$ (et donc d'ordre 500).

title

La preuve, très technique, utilise un résultat démontré en [combinatoire](#) (Gessel, I., Viennot, G., 1985. Binomial determinants, paths, and hook length formulae) sur l'inversibilité d'une matrice binomial

$$(C)_{ij} := \begin{cases} \binom{2i}{2i-j} & \text{if } 2i - j \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{est inversible}$$

Plan de présentation

- 1 Anisotropie et plans de symétries en élasticité linéaire
 - Un point d'histoire
 - Venu de Milan
 - Retrouver une classe
- 2 Axes et plans de symétries de tenseurs totalement symétriques
 - Représentation linéaire de $O(3)$ et opérations covariantes
 - Equation tensorielle intrinsèque
 - Tenseurs d'ordre 2 et 3
 - Au delà de l'ordre 4
- 3 Application aux tenseurs d'élasticité et piézoélectrique

Décomposition équivariante

- Pour $\mathbf{E} \in \mathbb{E}a$, on note $\mathbf{E}^s \in \mathbb{S}^4$ sa partie totalement symétrique et on écrit $\mathbf{E} = \mathbf{E}^s + \mathbf{A}$

$$E_{ijkl}^s = \frac{1}{3}(E_{ijkl} + E_{ikjl} + E_{iljk}), \quad A_{ijkl} = \frac{1}{3}(2E_{ijkl} - E_{ikjl} - E_{iljk}).$$

- On peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{q} \otimes_{(2,2)} \mathbf{a}$ avec \mathbf{a} combinaison linéaire du **tenseur de dilatation** $\mathbf{d} = \text{tr}_{12} \mathbf{E}$ et du **tenseur de voigt** $\mathbf{v} = \text{tr}_{13} \mathbf{E}$

$$\mathbf{y} \otimes_{(2,2)} \mathbf{z} = \frac{1}{3}(\mathbf{y} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \underline{\otimes} \mathbf{z} - \mathbf{z} \underline{\otimes} \mathbf{y}),$$
$$(\mathbf{y} \underline{\otimes} \mathbf{z})_{ijkl} := \frac{1}{2}(y_{ik}z_{jl} + y_{il}z_{jk})$$

- Au final on une **décomposition équivariante**

$$\mathbf{E} \simeq (\mathbf{E}^s, \mathbf{a}) \in \mathbb{S}^4 \oplus \mathbb{S}^2, \quad \rho_4(g)\mathbf{E} \simeq (\rho_4(g)\mathbf{E}^s, \rho_2(g)\mathbf{a})$$

Théorème

Let \mathbf{E} be an elasticity tensor, \mathbf{E}^s its totally symmetric part and $\mathbf{d} = \text{tr}_{12} \mathbf{E}$ the dilatation tensor. The necessary and sufficient condition for unit vector $\boldsymbol{\nu}$ to be a normal to a symmetry plane—in an equivalent manner for $\langle \boldsymbol{\nu} \rangle$ to be an axis of symmetry—for tensor \mathbf{E} are

$$\begin{cases} \left[\mathbf{E}^s \cdot \boldsymbol{\nu} - 3\boldsymbol{\nu} \odot (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\nu}) \right] \times \boldsymbol{\nu} = 0 \\ (\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Tenseur piézoélectrique

- En notant \vec{E} le champ électrique, en l'absence de contrainte on a la relation linéaire

$$\epsilon = \mathbf{P} \cdot \vec{E}, \quad \epsilon_{ij} = P_{ijk} E_k$$

où $\mathbf{P} \in \mathbb{P}ieze$ est appelé tenseur piézoélectrique (avec $P_{ijk} = P_{jik}$).

- On a une **décomposition équivariante**

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^s + \mathbf{q} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{q} \odot \mathbf{w} + \frac{1}{3} (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + {}^t(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\epsilon})),$$

où \mathbf{P}^s est la partie totalement symétrique de \mathbf{P} ,

$$(\mathbf{P}^s)_{ijk} = \frac{1}{3} (P_{ijk} + P_{ikj} + P_{kji}), \quad \mathbf{w} = \frac{3}{4} (\text{tr}_{12} \mathbf{P} - \text{tr}(\mathbf{P}^s)), \quad \mathbf{a} = (\mathbf{P} : \boldsymbol{\epsilon})^s$$

- On peut donc écrire $\mathbf{P} \simeq (\mathbf{P}^s, \mathbf{a}, \mathbf{w})$ où \mathbf{a} est un **pseudo-tenseur** d'ordre 2

Axes et plans de symétrie du tenseur piézoélectrique

Théorème

Let $\mathbf{P} = (\mathbf{P}^s, \mathbf{a}, \mathbf{w}) \in \text{Piez}$ be a Piezo-electricity tensor and $\boldsymbol{\nu}$ be a unit vector.

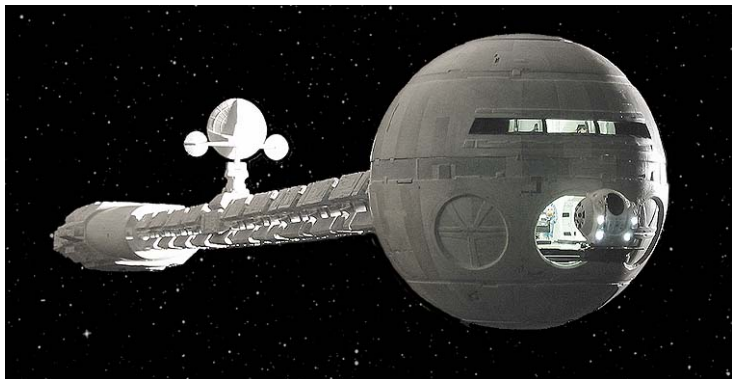
- ① The plane $\boldsymbol{\nu}^\perp$ is a symmetry plane of \mathbf{P} if and only if

$$\begin{cases} \mathbf{P}^s \cdot \boldsymbol{\nu} - 2\boldsymbol{\nu} \odot (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{P}^s \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0, \\ \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\nu} \odot (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 0, \\ \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

- ② The axis $\langle \boldsymbol{\nu} \rangle$ is a symmetry axis of \mathbf{P} if and only if

$$\begin{cases} [\mathbf{P}^s - 3\boldsymbol{\nu} \odot (\mathbf{P}^s \cdot \boldsymbol{\nu})] \times \boldsymbol{\nu} = 0, \\ [\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu}] \times \boldsymbol{\nu} = 0, \\ \mathbf{w} \times \boldsymbol{\nu} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Merci pour votre attention



Construction de l'Odyssee - modèle tensoriel d'ordre 500 - 1 plan de symétrie