



HAL
open science

Raisons d'être des grandeurs – le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire.

Christine Chambris

► To cite this version:

Christine Chambris. Raisons d'être des grandeurs – le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire.. Hamid Chaachoua, Annie Bessot, Berta Barquero, Lalina Coulange, Gisèle Cirade, Pierre Job, Anne-Cécile Mathé, André Pressiat, Maggy Schneider, Fabrice Vandebrouck. Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure, 1, La pensée sauvage, pp.170-195, 2021, ISBN 978 2 859 193485. hal-02526669

HAL Id: hal-02526669

<https://hal.science/hal-02526669>

Submitted on 24 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Chambris, C. (2021). Raisons d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, G. Cirade, L. Coulange, P. Job, ... F. Vandebrouck (Éds.), *Perspectives en didactique des mathématiques : Point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*. (Vol. 1, p. 169-196). Grenoble: La pensée sauvage.

Version auteur

RAISONS D'ÊTRE DES GRANDEURS LE CAS DE L'ARITHMÉTIQUE À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Christine Chambris *

RÉSUMÉ

Dans ce cours, j'articule deux résultats anciens : les changements de savoirs de référence au socle de l'arithmétique dans les années 1970 et au socle de la numération dans les années 1980. Je montre d'abord pourquoi la disparition des grandeurs conduit à la disparition des unités relatives (objet introduit à l'occasion), puis une conséquence de ce résultat : les unités de la numération étant des unités relatives, même si elles survivent au changement de savoir de référence en 1970, leur suppression du savoir de référence de la numération en 1980 rend leur vie dans l'arithmétique scolaire très improbable ensuite. Les unités apparaissent donc comme des raisons d'être des grandeurs. Ce résultat est important. Il permet aussi de saisir la multiplicité des rôles des unités dans les mathématiques scolaires jusqu'aux années 1940 et d'éclairer certains problèmes actuels. La méthodologie est originale car elle compare trois terrains : la Chine aujourd'hui, la France jusqu'aux années 1940, la France aujourd'hui. Deux exemples permettent d'envisager la portée des résultats, trois autres sont présentés dans le texte du TD. Une possibilité de liens avec les travaux sur le *unitizing* en psychologie cognitive émerge.

Mots clefs : grandeurs, numération, savoirs de référence, unités, unités de numération, unités relatives.

ABSTRACT

In this course, I articulate two previous results: the changes in reference knowledge of arithmetic in the 1970s and of numeration in the 1980s. I first show why the disappearance of quantities leads to the disappearance of related units (an object introduced on occasion), and then a consequence of this result: the units of numeration being relative units, even though they survive the change of reference knowledge in 1970, their disappearance from the reference knowledge of numeration in 1980 makes their disappearance from arithmetic inevitable. The quantities thus appear as "reasons d'être" for units. This result is important. It also makes it possible to grasp the multiplicity of the roles of units in school mathematics up to the 1940s and to shed light on certain current problems. The methodology is original in that it compares three areas: China today, France until the 1940s, and France today. Two examples make it possible to envisage the scope of the results, three others are presented in the text of the workshop. A possibility of links with work on *unitizing* in cognitive psychology emerges.

Key words: magnitudes, numeration units, place value, quantities, reference knowledge, related units, units.

INTRODUCTION

Ce cours est consacré à l'étude des raisons d'être des grandeurs dans le domaine de l'arithmétique à l'école élémentaire. Il s'ancre dans mes travaux antérieurs dans ce domaine (Chambris, 2007, 2008, 2010, 2018) et aborde des questions nouvelles.

La formulation de questions pour la recherche en termes de raisons d'être vient de la théorie anthropologique du didactique. Pour commencer, je précise comment je comprends ce que peuvent être des raisons d'être. Une première acception des raisons d'être est d'ordre épistémologique, comme l'indique la citation suivante de Chevillard (1998) :

Une société est faite d'œuvres, c'est-à-dire de constructions humaines visant à apporter *réponse à certaines questions, qui sont les raisons d'être de ces œuvres*. Il est facile de *donner une liste d'œuvres – la monnaie, la notion d'angle, les nombres décimaux, la tauromachie [...]*. Il est souvent plus difficile d'énoncer les raisons d'être des œuvres.
[...]

Ensuite, les contenus de l'étude scolaire – qui sont aujourd'hui, pour l'essentiel, des savoirs, c'est-à-dire des œuvres permettant en principe d'accéder à beaucoup d'autres œuvres – apparaissent tout au contraire, fréquemment, fermés sur eux-mêmes, frappés d'*autisme épistémologique*, et en particulier devenus muets sur leurs raisons d'être – en tant qu'œuvres et en tant qu'œuvres inscrites au répertoire de l'École. (pp. 1-2, je souligne)

Je tire de cette citation que les raisons d'être sont des questions. Dans cette première acception des raisons d'être, ces questions vont pouvoir être posées aux élèves et les savoirs à l'étude apparaîtront comme des réponses à ces questions. Cette acception renvoie au premier moment de l'étude, celui de la première rencontre d'un type de tâches, qui ne vient pas forcément au début de l'étude, ou encore aux situations fondamentales de la théorie des

* CY Cergy Paris Université, Laboratoire de didactique André Revuz (EA 4434) (UA, UPD, UPEC, URN)

situations didactiques et aux phases adidactiques. On remarque aussi, sans en tirer aucune conclusion, que dans la courte liste donnée par Chevallard, les deux premières œuvres à étudier sont attachées directement à des grandeurs : la monnaie et la notion d'angle.

Pourtant, chercher les raisons d'être des objets curriculaires ne se limite pas à ce type de questionnement épistémologique. Ainsi, dans un autre texte, à propos de l'introduction au lycée de la tâche « analyse critique de textes dans le cours de mathématiques », Chevallard (2003) signale qu'il faudrait indiquer (aux enseignants, aux élèves, aux parents qui doutent de la pertinence de ce type de tâches quand il s'agit de se préparer au baccalauréat) les raisons d'être de ce type de tâches, à savoir « pourquoi il serait pertinent de lui donner droit de cité dans l'activité de la classe ».

Dotée de ces deux entrées complémentaires dans la question des raisons d'être, une première centrée sur l'épistémologie et une seconde, sans doute plus générale, sur la pertinence, voire la nécessité, de donner droit de cité aux objets dans l'activité de la classe, je vais m'atteler à spécifier la question des raisons d'être aux grandeurs.

En une acception très générale, les grandeurs sont des qualités des objets ou de phénomènes qui ont une dimension quantitative, c'est-à-dire qu'on peut parler de plus ou moins grand ou petit, de peu ou beaucoup à propos de ces qualités. Ainsi, la longueur, la masse, les angles, la durée, mais aussi la monnaie, la densité, la vitesse, la température, etc. sont des grandeurs. Un objet donné a souvent plusieurs attributs quantitatifs, par exemple, si l'on considère un câble électrique, sa longueur, son diamètre, sa masse. Ces grandeurs peuvent être vues comme des propriétés mathématiques de l'objet.

Les grandeurs permettent ainsi d'explorer, de décrire, ou de modéliser les phénomènes quantitatifs. Pour cette raison, elles fournissent des raisons d'être, d'ordre épistémologique, à des objets de plusieurs secteurs des mathématiques, bien sûr les nombres et le calcul en arithmétique, mais aussi les distributions de mesures en statistique, la covariation de grandeurs pour les fonctions, les longueurs et les angles pour déterminer l'égalité des triangles en géométrie, etc. Ici, ce sont les grandeurs qui fournissent des raisons d'être. Cet axe me semble suffisamment important pour dire qu'un type de raisons d'être des grandeurs, autrement dit, ce qui leur donne droit de cité dans la classe, est qu'elles fournissent des raisons d'être à de nombreux objets mathématiques.

Comme annoncé dans mon titre, dans la suite, je vais me limiter aux raisons d'être liées au domaine de l'arithmétique élémentaire. À cette fin je vais d'abord situer les grandeurs dans leurs rapports aux nombres et en donner une définition. Je me concentrerai ensuite sur les raisons d'être des grandeurs, même si j'évoquerai aussi certaines raisons d'être que les grandeurs fournissent aux objets de l'arithmétique.

1. Le rôle des grandeurs dans les fondements des nombres

Freudenthal (1983) situe la place des nombres dans les mathématiques au niveau de l'organisation des phénomènes quantitatifs, et donc des grandeurs :

By means of geometrical figures like triangle, parallelogram, rhombus, or square, one succeeds in organizing the world of contour phenomena; numbers organise the phenomenon of quantity.
(p. 28)

Il est possible que beaucoup de mathématiciens actuels ne voient pas les grandeurs comme des objets mathématiques car leur place dans cette discipline a été radicalement modifiée au XIX^e siècle (Bourbaki, 1984). Pourtant, elles ont été pendant longtemps aux fondements du nombre mais en ont été écartées (*ibid.*). D'une certaine façon, le socle des grandeurs a été remplacé par la théorie des ensembles, dans les mathématiques savantes.

2. Qu'est-ce qu'une grandeur ? Qu'est-ce qu'une unité ?

Dans une approche naïve, une grandeur est ce qui se mesure. Une telle approche implique des unités et, considérant l'expression « 3 centimètres », je dirai que 3 est le nombre-mesure et que le centimètre est l'unité (ou 3 cm une mesure). Il est important de noter que l'unité est relative à une grandeur donnée, celle qu'on mesure. Le centimètre est une *unité de longueur*. Ceci implique qu'un centimètre est une longueur d'une valeur particulière : ■■■■■. La grandeur est la *longueur* et un centimètre est une *valeur de grandeur* (Freudenthal, 1983). Trois centimètres, ■■■■■, est une autre valeur de longueur.

Les grecs anciens considèrent les grandeurs comme des objets premiers et elles n'ont pas été complètement définies dans cette tradition (Bourbaki, 1984). Plusieurs définitions mathématiques des grandeurs ont été proposées depuis la fin du XIX^e siècle, celle d'Hölder (1901/1996) ou encore celle de Kolmogorov (1951/1979). Probablement parce qu'elles n'ont pas d'importance théorique en mathématiques, aujourd'hui il n'y a pas de consensus sur ce qu'est une grandeur. Cependant, la plupart des définitions des grandeurs (scalaires) partagent des propriétés. Je les présente ci-après, en introduisant le vocabulaire que j'utilise ensuite.

En termes modernes, une grandeur est un ensemble. Les éléments de l'ensemble sont des *valeurs de grandeur*.

L'ensemble est ordonné, doté d'une addition qui est commutative et associative.

Soit a et b , deux valeurs de grandeur, la propriété caractéristique est : $a > b$ si et seulement si il existe une valeur de grandeur c telle que $b + c = a$.

La mesure des grandeurs est liée à l'addition des grandeurs : $a + a = 2a$. Si a est une valeur de grandeur donnée, et d une valeur de grandeur telle que $d = 2a$, on dit que « la mesure de d dans l'unité a est 2 » ou « $2a$ est une mesure de d » ou « a est l'unité et 2 est un *nombre-mesure* »¹.

Si la grandeur est *divisible*, pour tout entier naturel n non nul, et pour toute valeur a de la grandeur, il existe une valeur de grandeur b telle que $nb = a$.

Avec des propriétés supplémentaires (axiome d'Archimède, axiome de continuité, indiquées par exemple par Kolmogorov et Hölder), soit a une valeur de grandeur, pour toute valeur de grandeur c , il existe un nombre réel λ tel que : $c = \lambda a$. Dans ce contexte, je dis aussi que la mesure de c dans l'unité a est λ .

Je reviens à un exemple naïf pour donner un point de vue complémentaire sur grandeurs et unités. En France, les huîtres sont vendues à la douzaine. Que fait le marchand pour préparer deux douzaines d'huîtres ? Il prend une huître, la met dans un sac et dit « une », il en prend une autre et dit « deux » ... une autre et dit « douze », « une douzaine ». Il prend ensuite d'autres huîtres, les met dans le sac en disant « une, deux, ..., douze, deux douzaines »².

Dans cet exemple, la douzaine d'huîtres apparaît dans un processus de comptage sophistiqué qui entremêle deux comptes : celui des huîtres et celui des douzaines d'huîtres. Il n'y a cependant qu'une seule grandeur en jeu : « les quantités d'huîtres »³. Pourtant, il y a

¹ Ces expressions ne font pas consensus.

² Il ajoute en général deux huîtres car les huîtres sont souvent vendues « treize à la douzaine » !

³ La question des savoirs de référence pour les grandeurs est ouverte (Chambris, 2008). Dans (Chevallard & Chambris, 2015), en appui sur les traités de métrologie, nous avons proposé que les « collections » relèvent d'une espèce de grandeur unique sans dimension, « le nombre d'entités » (JCGM, 2012). Cette espèce de grandeur est adaptée aux besoins de la métrologie, mais la métrologie est-elle une référence adaptée pour l'arithmétique de l'école ? L'arithmétique élémentaire sollicite une diversité de grandeurs « de la vie courante », souvent discrètes. On le voit dans l'exemple des huîtres, on le verra plus loin avec celui des timbres et avec des pommes dans le texte du TD associé au cours, on a besoin de pouvoir dire que la quantité d'huîtres de Julien est trois fois plus importante que celle de Kim. On peut certes dire que le nombre d'huîtres de Kim est trois fois plus grand que le nombre de timbres de Nadia. Pour autant la comparaison porterait alors sur les nombres « sans unité » et une telle affirmation serait probablement de peu d'intérêt pour modéliser les situations de l'arithmétique élémentaire. Le critère le plus élémentaire pour affirmer que deux collections ont la *même quantité* d'objets est la correspondance biunivoque (*une quantité d'objets* est alors une classe d'équivalence de

deux unités : l'huître et la douzaine d'huîtres. De même, la *dizaine d'huîtres* est une autre unité qui permettrait de compter des huîtres.

Concernant maintenant la figure 1, plusieurs affirmations peuvent être formulées ; par exemple : 1) Il y a 12 groupements de quatre timbres, 2 timbres isolés et 1 groupement de 10 timbres ; 2) Il y a 60 timbres. Ces deux affirmations concernent des quantités. Bien que cela puisse paraître subtil, elles ne sont pas relatives aux mêmes grandeurs. La première concerne trois grandeurs différentes : les quantités de groupements de quatre timbres, de 10 timbres et les quantités de timbres *isolés*. La seconde n'implique qu'une seule grandeur : les quantités de timbres. D'autres unités telles que « la dizaine de groupements de quatre timbres » ou « la dizaine de timbres » permettent de formuler d'autres affirmations relatives aux mêmes grandeurs (et aux mêmes valeurs de grandeurs) (tableau 1). Ces exemples montrent aussi que, bien que la quantité d'objets dans un groupement de dix objets soit toujours une dizaine d'objets (ou dix objets), il n'est pas nécessaire d'avoir des groupements matériels de dix objets pour avoir des dizaines.

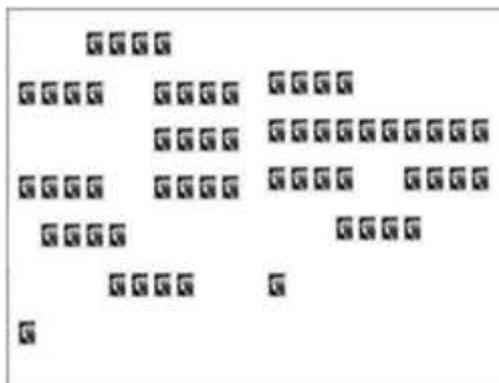


Figure 1. – Des timbres.

	Espèces impliquant des « groupements »			Espèce : quantités de timbres
Espèce de grandeur	Quantités de groupements de quatre timbres	Quantités de timbres isolés	Quantités de groupements de 10 timbres	Quantités de timbres
Affirmation	12 groupements de quatre timbres	2 timbres isolés	1 groupement de 10 timbres	60 timbres
Autre affirmation concernant la même valeur de grandeur	1 dizaine de groupements de quatre timbres et 2 groupements de quatre timbres			6 dizaines de timbres
Unités	un groupement de quatre timbres, une dizaine de groupements de quatre timbres	un timbre isolé	un groupement de 10 timbres	un timbre une dizaine de timbres

Tableau 1. – Grandeurs, unités et valeurs de grandeur impliquant des espèces de grandeurs discrètes.

3. Arrière-plan théorique

Avant de rechercher les raisons d'être des grandeurs en arithmétique, je vais présenter l'arrière-plan théorique qui sous-tend l'étude. Même si ce ne sera pas toujours explicite, cet arrière-plan est la théorie anthropologique du didactique (TAD). Les phénomènes de transposition didactique (Chevallard, 1991), incluant notamment la transposition d'un savoir

collections d'objets). Ce critère ne convoque pas le nombre. J'appelle chaque espèce de grandeur discrète *les quantités de...*

de référence qui est transformé, apprêté, en fonction des besoins de l'institution d'enseignement, occupent une place importante. En effet, la place particulière des grandeurs au sein de l'édifice mathématique, en particulier leur longue présence aux fondements du nombre, amène assez naturellement à s'interroger sur les savoirs utilisés comme référence pour cet enseignement et ce qu'il en résulte dans l'enseignement. Par ailleurs, on comprend facilement que s'intéresser aux raisons d'être des grandeurs en arithmétique conduit à s'intéresser aux relations entre les grandeurs et les objets « ordinaires » de l'arithmétique. Par suite, une autre facette de la TAD qui sous-tend mon propos est l'écologie des savoirs (Artaud, 1998). En effet, l'écologie des savoirs permet d'étudier des questions telles que les suivantes : Comment tel objet vit-il ? Avec quels autres objets vit-il ? Comment meurt-il ? Parmi les outils développés pour étudier l'écologie des savoirs, la notion de besoin trophique permet d'éclairer certains types de relations entre objets d'enseignement. Artaud (1998) la définit comme suit :

La notion de *besoin trophique* est liée en écologie à celle de *chaîne trophique*, soit de chaîne alimentaire du type A se nourrit de B qui se nourrit de C... Les besoins trophiques sont donc les besoins nutritionnels d'un organisme vivant, ce qu'il a besoin de manger pour vivre. En ce qui concerne les objets mathématiques, il s'agit semblablement des objets dont un objet mathématique donné a besoin pour vivre dans l'écosystème considéré, objets qui ne sont d'ailleurs pas uniquement mathématiques. (p. 112)

Ainsi, les besoins trophiques d'un objet d'enseignement, c'est ce dont un objet a besoin pour vivre, ce qu'il va être nécessaire d'introduire (ou d'utiliser) pour faire vivre cet objet dans l'enseignement. Les notions d'habitat et de niche écologique d'un objet outillent également pour ces analyses :

La niche, c'est le métier, l'art de vivre d'un animal ou d'une plante. La niche d'une tarentule, c'est tout ce qu'elle doit faire pour se nourrir et élever ses petits. Pour y parvenir, elle doit s'adapter correctement à l'endroit où elle vit et aux autres habitants de cet endroit [...].

Le lieu physique où l'on vit est appelé, dans le jargon écologiste l'« habitat ». L'habitat est l'adresse, l'emplacement précis où les individus d'une espèce donnée vivent. (Colinvaux, 1993, p. 171, cité par Artaud, 1998, p. 111)

En effet, interroger les relations entre arithmétique et grandeur conduit nécessairement à se poser la question de la niche des grandeurs (ce qu'elles font) dans l'habitat arithmétique.

La notion de praxéologie (Chevallard, 1999) modélise les activités humaines au sein d'institutions. Avec ses quatre composantes (le type de tâches, la technique qui permet de traiter les tâches d'un type, la technologie qui permet de justifier la technique et la théorie qui organise les technologies), la notion de praxéologie permet d'affiner le regard sur les objets à l'étude.

Après cette introduction, ce texte comporte quatre parties et une conclusion. Dans la première je reviens sur mes travaux de thèse sur les grandeurs puis sur la numération afin d'y repérer des raisons d'être des grandeurs. Dans une deuxième partie, je m'attèle à une question non résolue dans ma thèse, celle de l'articulation entre mes résultats sur la numération et ceux sur les grandeurs, ce qui me conduit à identifier une nouvelle raison d'être pour les grandeurs. Dans une troisième partie, je mets à l'épreuve cette nouvelle raison d'être des grandeurs sur d'autres thèmes de l'arithmétique. Dans une quatrième partie, je fais un détour par la psychologie cognitive. Puis je conclus sur les avancées réalisées et je propose des perspectives.

QUESTIONNER L'ÉCOLOGIE DES GRANDEURS EN ARITHMÉTIQUE EN RECHERCHANT LEURS RAISONS D'ÊTRE

Pour commencer, il m'a semblé utile de prendre appui sur mes travaux antérieurs. J'ai entrepris de relire mes résultats, notamment ceux de ma thèse, à la lumière de la question des raisons d'être des grandeurs.

1. Les relations entre grandeurs et nombres dans le curriculum

Dans mes travaux antérieurs (Chambris, 2007, 2008), je me suis interrogée sur les relations entre les grandeurs et les nombres, tout au long du XX^e siècle. Ces relations ont évolué de façon radicale au moment de la réforme des mathématiques modernes. Ce travail m'a amenée à caractériser la situation antérieure à la réforme, les mouvements qui se sont effectués pendant la réforme et les modifications qui ont suivi la réforme.

La réforme des mathématiques modernes est un mouvement international de réforme de l'enseignement des mathématiques (1955-1975) qui visait à rénover l'enseignement des mathématiques dans le contexte de la guerre froide. Ses déclinaisons ont été extrêmement variées selon les pays (Kilpatrick, 2012). En France, avant la réforme des mathématiques modernes, il y a deux grands domaines dans les mathématiques de l'école : l'arithmétique et la géométrie. Il n'y a pas de domaine grandeurs et mesures. Est-ce à dire que les grandeurs ne sont pas enseignées ? Non. Les grandeurs apparaissent mêlées à l'étude de l'arithmétique et à celle de la géométrie (figure 2).

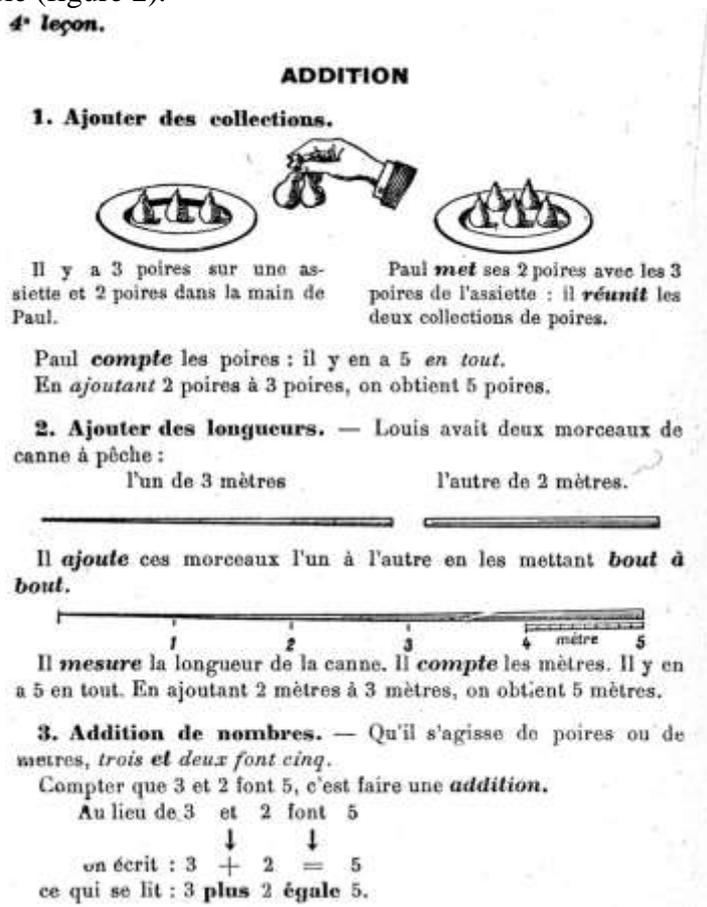


Figure 2. – L'addition au CE1 (Marijon et al., 1947, p. 14).

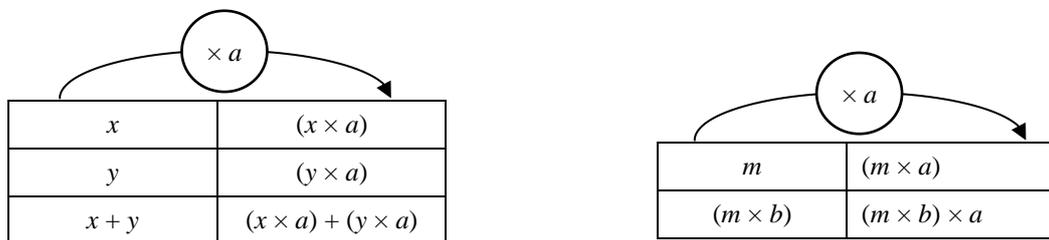
Le programme réformé pour l'école est publié en 1970. Son préambule précise que ce n'est pas un nouveau programme mais une réorganisation du programme précédent, datant de 1945. On observe effectivement une réorganisation des contenus.

Le numérique est regroupé sous l'appellation « Éléments de mathématique » (comme le titre de l'ouvrage de Bourbaki). On retrouve un domaine consacré à la géométrie, intitulé « Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques ». Et il y a création d'un nouveau domaine, intitulé « Exercices pratiques de mesure et de repérage » en cours élémentaire et « Mesures : exercices pratiques » en cours moyen. Une analyse fine de la réorganisation montre que :

- Le domaine « Mesures : exercices pratiques » de 1970 absorbe tout le continu du programme de 1945, à l'exception de ce qui est relatif à la proportionnalité, qui figure dans les « Éléments de mathématiques ». Ce continu concerne aussi bien la mesure des grandeurs continues, notamment l'étude du système métrique, que les problèmes sur les quatre opérations – qui impliquent des grandeurs continues.
- Les grandeurs géométriques sont éliminées de la géométrie. Elles migrent dans le domaine « Mesures : exercices pratiques ».
- Le domaine numérique rassemble, lui, tout ce qui concerne les grandeurs discrètes. Une autre partie de ce domaine est constituée par les relations numériques (qui deviendront les fonctions numériques en 1980). C'est une nouveauté du programme ; elle absorbe la proportionnalité. Ce dernier thème fait apparaître des grandeurs continues, notamment du fait des problèmes d'échelles qui migrent depuis l'ancienne géométrie.

On pourrait croire que les grandeurs sont mises à l'honneur puisqu'elles sont enfin visibles, le domaine « Mesures : exercices pratiques » apparaissant comme le lieu de l'exploration des phénomènes quantitatifs continus, alors qu'avant elles n'avaient pas d'habitat spécifiquement dédié. L'étude des praxéologies évoquées dans les instructions officielles permet de porter un regard différent sur cette création.

En particulier pour le domaine numérique, le travail de transposition est très important même s'il reste inabouti. Par exemple, la technologie pour « définir » le *nombre décimal* repose sur le changement d'unité (en prenant une unité plus grande) pour la mesure en nombre entier d'une grandeur, ce qui ne fait pas des écritures à virgule des nombres décimaux puisqu'elles ne sont qu'une réécriture d'entiers : « Une ville compte 10 850 habitants. Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850. La virgule est utilisée pour repérer le rang du groupement choisi comme unité. » (Programmes, 1970, p. 310) (pour plus de détails, voir Chambris, 2007). En complémentarité, la fraction est introduite comme opérateur équivalent à une chaîne (i.e. une composition) d'opérateurs de multiplication et de division sur des listes d'entiers. La multiplication des fractions est vue comme la composition des « fractions » opérateurs. Même s'il n'est pas impossible de définir l'addition d'opérateurs multiplicatifs, cet objet n'est pas pris en charge par les textes officiels. L'étude de la proportionnalité repose sur les « relations numériques ». Plus précisément, cette relation entre grandeurs est assimilée aux relations *numériques multiplicatives* : « Lorsque l'opérateur est “multiplier par ...” où “diviser par ...” la correspondance qui permet de passer d'une liste à l'autre est la *proportionnalité* » (Programmes, 1970, p. 298). Les propriétés de l'application linéaire sont présentes dans le texte officiel. Elles apparaissent dans des tableaux sous forme littérale mais aussi numérique.



(Programmes, 1970, p. 300)

Les modifications structurelles sont en fait le moyen et le signe de l'élimination des grandeurs des savoirs de référence, alors qu'elles constituaient auparavant le socle de l'arithmétique. Les nombres et opérations sont définis avec des grandeurs discrètes. Le continu – le domaine mesure – peut ainsi être vu comme un domaine d'application pour les nombres. En effet, même si des difficultés liées à la transposition restent non résolues, fractions et décimaux sont introduits sans référence à la mesure des grandeurs continues, un peu comme dans le savoir

académique actuel, qui semble ainsi devenir la référence pour l'école. Les grandeurs sont mises à l'écart, isolées du reste des mathématiques, plutôt que promues (Chambris, 2007, 2008, 2010).

Jusqu'à la réforme mais depuis des temps beaucoup plus anciens, des traités d'arithmétique organisent le savoir en référence aux grandeurs (Harlé, 1987 ; Neyret, 1995). Les traités considérés comme des références (jusqu'en 1945), ceux de Bézout (1821) et de Reynaud (1821)⁴, commencent par un petit discours sur les grandeurs et sur les relations entre grandeurs et nombres, les grandeurs et les nombres partageant ainsi le même habitat. Viennent ensuite la présentation de la numération, puis celle des opérations et du calcul. Le discours sur les grandeurs de Reynaud est le suivant :

Tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution se nomme *quantité*. Lorsqu'on réfléchit sur la nature des quantités, on sent qu'il serait impossible de prendre une idée exacte des grandeurs des quantités de même espèce, si l'on ne choisissait pas parmi elles une certaine quantité qui pût leur servir de terme de comparaison ; cette quantité se nomme unité ; l'assemblage de plusieurs unités de même grandeur compose un *nombre*. La manière de former les nombres, de les énoncer et de les écrire, est l'objet de la *numération* ; et la science qui a pour but d'enseigner à effectuer diverses opérations sur les nombres se nomme *Arithmétique*. (Reynaud, 1821, p. 1)

On notera que Bronner (2008), qui a étudié le numérique dans le secondaire sur la période 1850-2000, trouve des résultats concordants pour ce qui concerne les savoirs de référence et la disparition des grandeurs de ces savoirs de référence au moment de la réforme des mathématiques modernes – même s'il a identifié et caractérisé des périodes transitoires autour de la réforme.

Pour ce qui concerne l'arithmétique, les grandeurs sont donc présentes dans la théorie mathématique qui sert de référence. Cette présence présage donc de niches des grandeurs dans le *logos* des praxéologies de l'arithmétique, à la fois dans la théorie et dans les technologies. Ainsi, indépendamment de l'organisation didactique retenue (en particulier de la théorie de l'apprentissage qui en constitue l'horizon), l'extrait de manuel scolaire de la figure 2 montre par exemple que la formulation des savoirs à enseigner (donc l'organisation mathématique) liés à l'addition dans un manuel de la fin des années 1940 intègre la mesure des grandeurs discrètes et continues.

Après leur mise à l'écart avec la réforme des mathématiques modernes, les modifications curriculaires ultérieures laissent apparaître un certain retour des grandeurs dont j'ai proposé des caractérisations (Chambris, 2007, 2008, 2010). Les grandeurs reviennent, à l'école, dans l'enseignement de l'arithmétique, autrement dit le domaine « Nombres et calculs », dès les années 1980. En étudiant les programmes successifs, j'ai identifié trois grands retours des grandeurs. Le premier thème où reviennent les grandeurs est celui de l'enseignement des nombres non entiers. Même si, dans les premières années, les grandeurs ne sont pas explicites, l'enjeu devient de proposer des problèmes de mesurage (ou de repérage sur la droite graduée) pour lesquels les entiers doivent se montrer insuffisants, les fractions et les décimaux devant alors apparaître comme des nouveaux nombres permettant de résoudre ces problèmes. Ainsi, ce sont les grandeurs qui fournissent des raisons d'être aux nombres pour mener à bien certains types de tâches. Un thème qui apparaît à partir des années 1980 est la droite graduée

⁴ La première édition du traité d'arithmétique de Bézout a été publiée en 1770, la dernière publiée du vivant de l'auteur semble l'avoir été en 1781 (Ferreira & Schubring, sous presse). Reynaud a publié un traité d'arithmétique. Ce n'est pas ce texte qui constitue une référence pour l'école primaire mais ses *Notes sur l'arithmétique* (de Bézout) (Neyret, 1995) que nous appelons « traité de Reynaud ». La première édition en a été publiée entre 1800 et 1806. Pour nos analyses, nous avons utilisé la 9^e édition publiée en 1821. Cette édition, comme d'autres que nous avons consultées, présente dans une première partie le traité de Bézout et dans une seconde partie les notes de Reynaud. Chacune de ces parties a sa propre pagination, auxquelles nous référons si nécessaire.

pour représenter les nombres et les grandeurs (les durées). La représentation des grandeurs m'apparaît comme une raison d'être de la longueur⁵. Un troisième thème est celui de la proportionnalité. Ce thème est un invariant des programmes de l'école et les grandeurs sont toujours présentes dans les tâches, à toutes les époques. En revanche, en 2002, elles reviennent dans les discours proposés pour illustrer les raisonnements des élèves :

Par exemple pour le problème « Il faut mettre 400 g de fruits avec 80 g de sucre pour faire une salade de fruits. Quelle quantité de sucre faut-il mettre avec 1 000 g de fruits ? », les raisonnements peuvent être du type :

- pour 800 g de fruits (2 fois plus que 400), il faut 160 g de sucre (2 fois plus que 80) et pour 200 g de fruits (2 fois moins que 400), il faut 40 g de sucre (2 fois moins que 80). Pour 1 000 g (800 g + 200 g) de fruits, il faut donc 200 g (160 g + 40 g) de sucre ;
- la masse de sucre nécessaire est cinq fois plus petite que la masse de fruits ; il faut donc 200 g de sucre (1 000 : 5 = 200). (Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche, 2002, p. 16)

Dans ce retour des grandeurs à propos de la proportionnalité, les grandeurs fournissent des techniques⁶ accessibles aux élèves de l'école : des types d'explications que les enseignants doivent enseigner aux élèves pour qu'ils résolvent les problèmes. Ces discours ont également une vocation technologique mais dans la mesure où la seule expression arithmétique complète porte sur les nombres plutôt que sur les grandeurs (1 000 : 5 = 200 et non 1 000 g : 5 = 200 g), il me semble justifié de dire que dans ce programme – comme depuis 1970 – la technologie, pour la proportionnalité, ne relève pas des opérations sur les grandeurs mais sur les nombres. Une technologie en appui sur les grandeurs ferait intervenir la fonction linéaire qui à la masse de fruits associe la masse de sucre, par exemple : $x \mapsto x : 5$, où x est une masse.

Cette première enquête au sein des programmes scolaires me permet d'identifier plusieurs types de raisons d'être pour les grandeurs. Notamment, les « retours » des grandeurs à partir des années 1980 rendent visibles les raisons d'être suivantes :

- la représentation des nombres ou d'autres grandeurs par la longueur apparaît comme une raison d'être *pour la longueur* ;
- une raison d'être des grandeurs est qu'elles fournissent des raisons d'être à certaines notions mathématiques, notamment en arithmétique, parce qu'elles permettent de modéliser les phénomènes quantitatifs du monde (par exemple, le nombre comme mesure de grandeur) ;

⁵ Voir par exemple *Interdisciplinary Mathematics and Science (IMS) Learning* : <https://imslearning.org/>. Dans un projet interdisciplinaire, par exemple au grade 1 (élèves de 6-7 ans), les élèves s'intéressent aux animaux présents dans différentes « zones » de la cour de récréation (jardin, herbe, paillage sec, etc.). Ils collectent des données dans des parcelles délimitées pour leur travail, les organisent et les représentent *in fine* dans des diagrammes en bâton. Voir : <https://imslearning.org/wp-content/uploads/2020/10/IMS-Learning-Ecology-Year-1-2018.pdf>.

⁶ On peut discuter s'il s'agit de technologie ou de technique. En effet, si on réfère à Castela et Romo Vázquez (2011), les grandeurs apparaissent dans la dimension pratique de la technologie. Si on considère que la technologie est du côté de la théorie et des propriétés mathématiques, les propriétés en jeu, dans le programme de 2002, restent celles des fonctions linéaires numériques et les unités qui apparaissent dans ces « raisonnements » sont de l'ordre de la technique. En effet, dans ces « raisonnements », les opérations sur les grandeurs ne sont pas formulées dans le symbolisme arithmétique (pas de signe d'égalité pour les opérations avec unités).

Il faut attendre les documents d'accompagnement du programme (publiés dans les années qui suivent) pour que les opérations sur les grandeurs soient considérées comme des objets mathématiques : « Puisque les grandeurs considérées (longueurs, aires, volumes, durées, masses) peuvent s'additionner, se soustraire, être multipliées ou divisées par un nombre, les écritures suivantes sont correctes et leur utilisation est recommandée [...] » (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, 2005, p. 82).

- une entrée praxéologique : les grandeurs sont susceptibles de fournir des praxéologies à enseigner conceptuellement accessibles aux élèves de l'école, par exemple dans l'étude de la proportionnalité.

Ces réintroductions des grandeurs participent de la transposition didactique du savoir de référence. Il est alors intéressant de souligner que les modifications au niveau des savoirs de référence dans le mouvement de la réforme des mathématiques modernes correspondent à des remplacements de savoirs de référence adaptés pour l'enseignement (« savoirs de référence du second ordre », Chambris, 2010, p. 322) par des savoirs de référence utiles aux mathématiciens (« savoirs du premier ordre », *ibid.*). Le choix de savoirs de référence du premier ordre induit la nécessité d'un important travail de transposition didactique (le travail étant déjà amorcé avec les savoirs du second ordre).

2. Le cas de la numération

Ma thèse était centrée sur les relations entre grandeurs et nombres dans la scolarité obligatoire. J'observais une rupture entre les grandeurs et les nombres dans le tournant de la réforme, mais j'ai voulu étudier plus précisément ce changement en le spécifiant aux relations entre système métrique et numération décimale. L'étude de la numération décimale était autrefois très articulée à l'étude du système métrique (Chambris, 2009), voir figure 3.

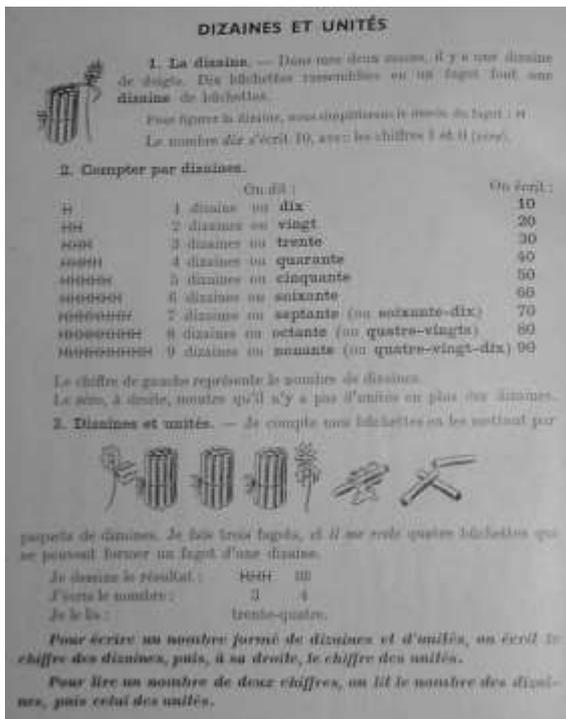


Figure 3. – Numération décimale et système métrique en CEI (Marijon et al., 1957, p. 6 et p. 22).

Avec la création du domaine relatif à la mesure en 1970, les deux thèmes se trouvent dans des domaines différents ce qui n'implique pas forcément des praxéologies différentes dans les deux domaines (voir figure 4 où la technique pour trouver l'écriture chiffrée du nombre consiste à compléter le tableau après avoir compté les unités de chaque ordre).

En revanche, avec les programmes suivants, à partir des années 1980, on observe une séparation radicale entre numération décimale et système métrique. Les praxéologies pour les deux thèmes se différencient alors plus ou moins rapidement. On voit par exemple sur la figure 5 qu'un instrument comme le tableau de numération / conversion est utilisé différemment dans les deux domaines (nombre calé à droite vs. nombres flottants ; considérer chaque chiffre et écrire le nombre qu'il représente en écrivant des zéros à droite et écrire une

somme pour sortir le nombre vs. utiliser des unités métriques et les juxtaposer pour sortir la grandeur du tableau).

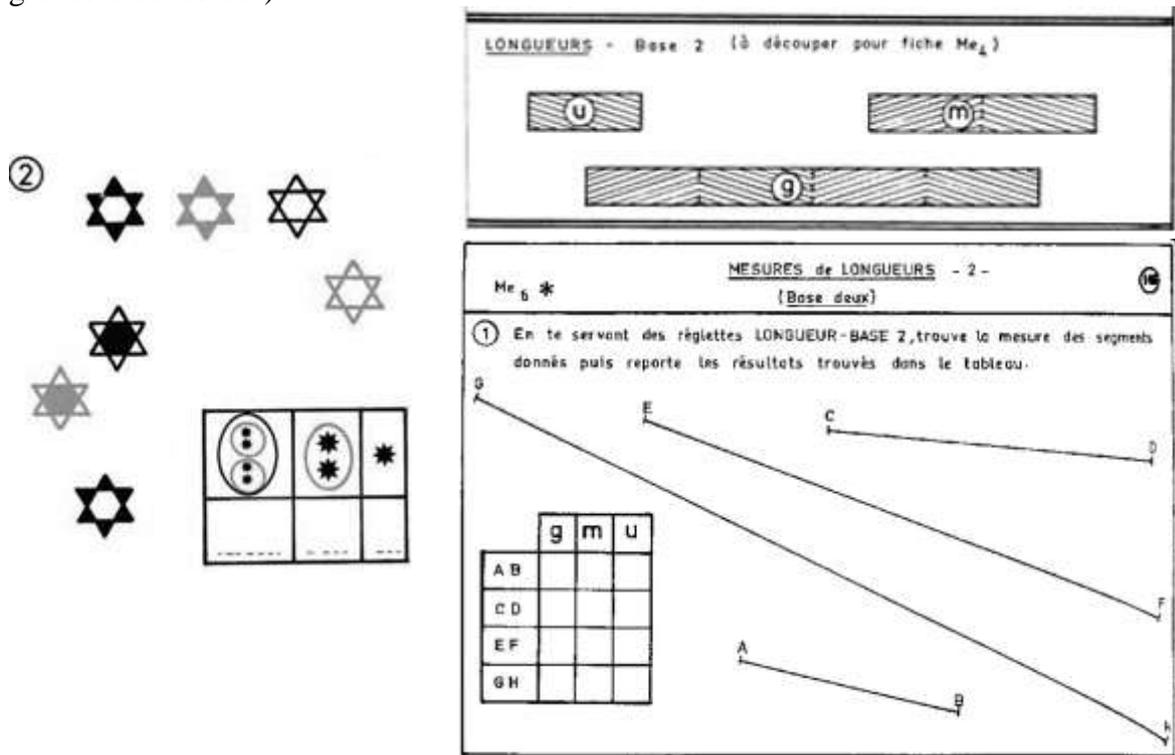


Figure 4. – Mesure dans le discret au CE1 (Eiller et al., 1971, p. 103) et le continu au CE2 (Eiller & Martineu, 1972, p. 143).

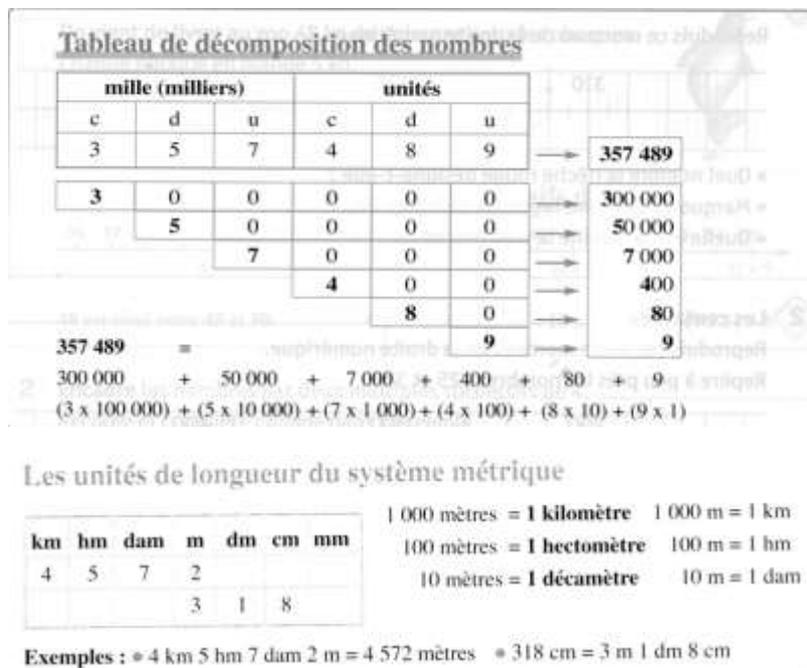


Figure 5. – Numération et système métrique en CE2 (Champeyrache et al., 2002, p. 133 et p. 60).

Pour mieux comprendre la nature de ces modifications, j'ai entrepris de caractériser l'enseignement de la numération, et notamment les évolutions de cet enseignement. J'ai mis en évidence plusieurs phénomènes.

La découverte

Ce qui frappe dans la confrontation de manuels antérieurs à la réforme à des manuels des années 1980, c'est la modification des ostensifs utilisés pour la numération : une sorte de remplacement des mots unités, dizaines, centaines par les écritures chiffrées 1, 10, 100 ainsi que 5×1 , 5×10 et 5×100 voire 5, 50, 500 en lieu et place de 5 unités, 5 dizaines et 5 centaines, comme on le voit sur la figure 6 (Chambris, 2008, 2018).

EXERCICES ET PROBLÈMES

- 1^{re} et 2^e années. — 483. Ecrire en chiffres les nombres suivants : trois cents, sept cents, neuf cents.
 486. Convertir en unités : 3 centaines, 7 centaines, 40 dizaines.
 487. Convertir en dizaines : 8 centaines, 6 centaines, 300 unités.
 488. Convertir en centaines : 500 unités, 20 dizaines, 90 dizaines.
 489. Ecrire de 3 en 3 les nombres de 30 à 60, de 61 à 91, de 52 à 82.
 490. Effectuer : 1^o $300^1 + 400^1 + 200^1$; 2^o $500^1 + 400^1 + 200^1$.
 491. Effectuer : 1^o $900^m - 300^m$; 2^o $800^m - 400^m$; 3^o $700^m - 200^m$.
 492. Effectuer : 1^o $200^m \times 2$; 2^o $300^m \times 2$; 3^o $400^m \times 2$.
 493. Effectuer : 1^o $800^m : 2$; 2^o $600^m : 2$; 3^o $4\ 200^m : 2$.
 494. Un crémier a 300 œufs dans un panier et 400 dans un autre.
 Combien a-t-il d'œufs en tout ?

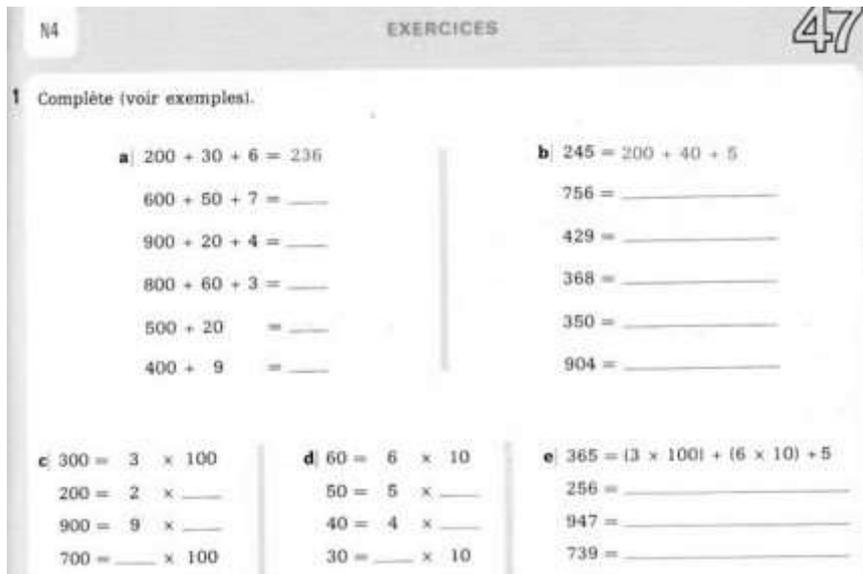


Figure 6. – Les nombres jusqu'à 999 en 1930 (Boucheny & Guérinet, 1930, p. 44) et en 1979 (Eiller, 1979, p. 47).

Une étude de la littérature noosphérique des années 1970-1980 montre que ce n'est pas une substitution qui s'est opérée mais que le travail de transposition didactique a fait son œuvre. Ainsi dans les années 1980, se confirme une modification déjà effective dans quelques manuels de la période de la réforme. La théorie savante de la numération⁷ est introduite comme référence pour l'enseignement de la numération : un nombre entier se décompose de manière unique comme polynôme dans les puissances de la base et l'écriture chiffrée est la juxtaposition des coefficients de ce polynôme. Le nouveau savoir de référence pour la numération emprunte donc à l'algèbre des polynômes.

⁷ À savoir pour tout entier a , $a \geq 2$, pour tout entier n , $n > 0$, il existe un unique entier p , tel que pour tout entier i , $0 \leq i \leq p$, il existe un unique entier r_i , $0 \leq r_i < a$, r_p non nul, tels que $n = \sum_{i=0}^p r_i a^i$.

Une exploration supplémentaire des traités noosphériens antérieurs à la réforme permet d'accéder à la théorie antérieure. Après une introduction générale sur les grandeurs, qui permet de définir l'unité et le nombre, la section suivante porte sur la numération – avant la définition des opérations. Dans cette section sont définis successivement les dix premiers nombres, par ajout de un, puis la dizaine, comme étant l'unité du 2^e ordre, dix unités formant une dizaine. Les dizaines sont ensuite comptées, de 1 à 9 et les neuf premiers nombres sont ajoutés à chaque nombre entier de dizaines, formant ainsi les 99 premiers nombres. La centaine est alors définie comme l'unité du 3^e ordre, dix dizaines, ce qui correspond aussi à 1 de plus que 99. Les traités parlent ainsi des différents ordres d'unités à propos de l'unité simple, de la dizaine, de la centaine. L'écriture chiffrée est alors la juxtaposition des nombres d'unités de chaque ordre (de la droite vers la gauche, avec le signe zéro pour repérer des ordres non représentés, le cas échéant).

Comment le nouveau savoir de référence est-il transposé ? On voit que dans la théorie académique moderne l'entrée dans la numération dépend de l'addition et de la multiplication, ce qui ne va pas de soi lorsqu'il s'agit d'enseigner à des jeunes élèves. De plus, si la juxtaposition des coefficients du polynôme va de soi pour le mathématicien, l'accès à cette conceptualisation de l'écriture chiffrée pour des enfants de 7 à 9 ans semble difficile. Un cas particulièrement délicat est l'expression des puissances de la base : 100 par exemple, puisqu'il faut juxtaposer les coefficients 1 (élément neutre de la multiplication) et 0 (élément absorbant), $100 = 1 \times a^2 + 0 \times a^1 + 0 \times a^0$.

La forme savante, sous forme polynomiale algébrique, est parfois présente dans les guides pour l'enseignant. Pour les élèves, dans les manuels dans les années 1980, elle apparaît transposée, sous la forme : $456 = 4 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1$, voire $456 = 400 + 50 + 6$, ce qui réduit les besoins trophiques en algèbre mais introduit néanmoins des besoins trophiques importants dans la manipulation des expressions arithmétiques. Ceci étant, cette modification semble aussi transformer l'interprétation des coefficients d'un polynôme en un calcul, dans ce premier temps d'enseignement de la numération. On voit d'ailleurs apparaître, au fil du temps, l'addition posée (figure 5) et l'appui sur la lecture orale des nombres (400 quatre cents, 50 cinquante, 6 six qui s'écrit 456) pour justifier l'écriture en chiffres des nombres à partir d'une décomposition additive. Finalement, une façon simple de résumer la situation est que, depuis les années 1980, la seule unité enseignée en numération est le nombre 1 (Chambris, 2012a). Même si les mots dizaines, centaines demeurent, ils désignent les positions de l'écriture chiffrée (1 dizaine est 1 dans la colonne des dizaines), ils ne désignent pas des unités.

Les besoins dans la manipulation des expressions arithmétiques se manifestent par exemple pour justifier la retenue dans les techniques opératoires, y compris l'addition.

$$36 + 27 = 3 \times 10 + 6 + 2 \times 10 + 7 = 3 \times 10 + 2 \times 10 + 13$$

$$13 = 10 + 3$$

$$3 \times 10 + 2 \times 10 + 10 + 3 = (3 + 2 + 1) \times 10 + 3.$$

Dans la théorie classique, la technique se justifie comme suit :

$$3 \text{ d} + 6 \text{ u} + 2 \text{ d} + 7 \text{ u}$$

$$7 \text{ u} + 6 \text{ u} = 13 \text{ u} = 1 \text{ d} + 3 \text{ u} \text{ (7 unités et 6 unités font 13 unités, soit 1 dizaine et 3 unités)}$$

$$3 \text{ d} + 2 \text{ d} + 1 \text{ d} = 6 \text{ d}$$

La théorie « moderne » requiert la transformation d'un 10 en 1×10 puis la mise en facteur de tous les 10 pour justifier les raisonnements sur « les chiffres du nombre ». Les raisonnements sur les unités de la justification classique permettent d'éviter la distributivité de la multiplication. Dans les années 1980, les manuels n'utilisent jamais la forme symbolique en écriture chiffrée des puissances de dix pour cette justification, parfois des écritures avec les dizaines et unités sont introduites à ce moment-là, sans plus de commentaires, ou bien un appui sur le matériel est proposé, avec des échanges, qui permet de faire passer dix choses

d'une colonne à 1 chose dans l'autre ou encore une description purement procédurale, avec des arguments spatiaux est introduite : on aligne les chiffres en partant de la droite, on écrit un seul chiffre par colonne.

Enfin, une conséquence de la disparition de la numération en unités (l'expression des nombres en unités de numération) est la disparition de l'expression des relations entre unités ; il est fréquent de trouver des manuels qui omettent de mentionner telle ou telle relation entre dizaine et centaine, centaine ou millier, etc. En revanche, les noms des unités restent pour désigner les places des chiffres dans l'écriture chiffrée.

Pour finir, une propriété fondamentale de la numération positionnelle qui découle des propriétés élémentaires de la numération est ce que j'ai appelé la propriété de la *troncature*⁸ (Chambris, 2008, p. 404) : dans 3 842, il y a 38 centaines et 42 unités. Je dis que 38 centaines est la *troncature à la centaine* de 3 842. Ainsi, il suffit de « couper » 3 842 à droite de la 3^e position et de retenir les chiffres situés à gauche, pour déterminer combien il contient de centaines. En effet, un raisonnement permet de déterminer le nombre de centaines du nombre qui s'écrit trois, huit, quatre deux : 3 842 signifie 3 milliers 8 centaines 4 dizaines 2 unités (propriété de position). En raisonnant de droite à gauche sur les valeurs des différents chiffres on peut dire que 2 unités sont inférieures à 9 unités, et donc 2 unités est inférieur strictement à 1 dizaine (car 10 unités = 1 dizaine), 4 dizaines et 2 unités est donc inférieur strictement à (4 + 1) dizaines, soit 5 dizaines. Quatre dizaines et 2 unités est donc inférieur strictement à dix dizaines et donc inférieur strictement 1 centaine (car 1 centaine = 10 dizaines). Il y a donc 8 centaines. De plus, comme 1 millier c'est 10 centaines (relation entre les unités), 3 milliers c'est 30 centaines (ou 3 dizaines de centaines). Par suite, 3 842 contient donc 38 centaines et 42 unités. Ce raisonnement (ou un autre en appui sur les valeurs associées aux différents chiffres) semble inconnu de la plupart des ressources pour l'enseignement aujourd'hui (voir la première étude dans le texte des travaux dirigés (TD) associés au cours : Chambris et al., 2021). Avant la réforme, il n'était pas formulé sous cette forme dans les manuels de cours élémentaire (2^e et 3^e années de primaire, élèves de 7-9 ans). En revanche, le découpage du savoir faisait apparaître pour chaque ordre d'unité trois étapes : par exemple pour le 3^e ordre, 1) la centaine, 2) les centaines, 3) entre deux centaines. Dans la deuxième étape, des tâches telles que « combien y a-t-il de centaines, de dizaines, d'unités dans 300 ? » étaient proposées (Chambris, 2008). La troisième étape s'appuie sur la propriété de récurrence de la théorie et « pour les nombres à [3] chiffres on s'appuie sur ce qu'on sait déjà sur les nombres [à 2] chiffres » (Perrin-Glorian, 2012, p. 75). Ainsi, même si ce n'est pas explicite dans les manuels, on peut faire l'hypothèse que le *terrain était préparé* pour, par exemple, trouver le nombre de centaines, de dizaines et d'unités dans un nombre comme 328, à savoir respectivement 3 centaines, 30 dizaines + 2 dizaines, 300 unités + 28 unités.

Il revient à peu près au même de dire que l'introduction de la théorie savante augmente les besoins trophiques ou que les unités de numération maintiennent relativement bas les besoins trophiques en numération, pour des techniques et des technologies relativement puissantes. Cela étant, les institutions ont développé des praxéologies alternatives pour la numération qui s'appuient sur les noms des nombres et les écritures chiffrées des puissantes de dix, qui sont

⁸ De même que « 1,41 », c'est-à-dire 141 centièmes, est la troncature de $\sqrt{2}$ au centième, je dis que 38 centaines (ou encore 3800) est la troncature de 3842 à la centaine. En mathématiques, le mot *troncature* est utilisé pour exprimer qu'on tronque le développement décimal d'un réel r en ne retenant que ses n premières décimales. La troncature d'un réel après sa n -ième décimale est donc un moyen de produire sa valeur approchée décimale dans \mathbf{D}_n à 10^{-n} près par défaut, t_n . Les propriétés de la numération positionnelle sont telles que, si l'on enlève la virgule de l'écriture de t_n , on obtient un nombre entier k_n tel que $k_n \times 10^{-n} = t_n$. La problématique de l'approximation d'un réel à 10^{-n} près s'étend à n'importe quelle précision, y compris pour n négatif. Dans ce cas, k_n est le nombre obtenu en coupant r et en ne retenant que ses chiffres à gauche du « $-n$ »-ième chiffre avant la virgule et on a encore $t_n = k_n \times 10^{-n}$.

assez cohérentes, qui ont des coûts cognitifs relativement bas, une certaine efficacité et une certaine stabilité (Chambris, 2012b, 2014) ; même si on peut penser 1) d'une part, que certains besoins ne sont pas pris en charge, 2) d'autre part, que des tentatives de prise en charge révèlent des besoins sur les unités dans l'institution (voir la partie sur le calcul soustractif dans le texte des travaux dirigés (TD) associés au cours : Chambris et al., 2021).

L'invention du nom et sa réception

Les expressions « unités de la numération » (Chambris, 2008, p. 404) et « numération en unités » (*ibid.*) que j'ai introduites renvoient à l'expression des nombres avec des unités qu'étaient la dizaine, la centaine, etc. On retrouve le terme *unité* employé dans les traités de Bézout et Reynaud, *les différents ordres d'unités* (Bézout, 1821, p. 4 ; Reynaud, 1821, p. 1), expression qui n'a plus cours dans les manuels aujourd'hui.

L'expression « unités de numération » a largement diffusé depuis ma thèse. Pourtant, ce qui, à mes yeux, caractérise cet objet, à savoir qu'il s'agit d'*unités*, diffuse mal. Le point 2 de l'introduction précise cet aspect. Quoi qu'il en soit, ce qui a bel et bien disparu à la suite de ces modifications curriculaires des années 1970-1980 ce sont les dizaines, centaines, qui sont des unités d'un type particulier.

Tout cela étant dit, la relation directe entre les évolutions dans la numération et la disparition des grandeurs du socle théorique de l'arithmétique ne va pas de soi, car la disparition des unités de numération semble surtout liée au changement de théorie en numération. En quoi la théorie classique sur la numération est-elle dépendante de l'environnement théorique des grandeurs ?

QUELLE ARTICULATION ENTRE LA MODIFICATION DU SAVOIR DE RÉFÉRENCE SUR LES GRANDEURS ET LA DISPARITION DES UNITÉS (EN NUMÉRATION) ?

Pour étudier cette question, je fais un détour par l'Extrême-Orient. Dans son ouvrage *Knowing and teaching elementary mathematics*, publié en 1999, tiré de sa thèse préparée aux Etats-Unis et dirigée par Lee Shulman, la chercheuse chinoise Liping Ma compare les connaissances des enseignants américains et chinois. Concernant la numération, les praxéologies chinoises ressemblent à celles évoquées précédemment, avant la réforme, en France (Chambris, 2008, 2018). Ma (2013) précise que l'arithmétique scolaire chinoise est sous-tendue par une théorie qui repose sur la notion d'unité. Je fais alors l'hypothèse que les traités classiques, qui reposent eux sur les grandeurs, partagent des similarités avec la théorie chinoise. Mon projet est alors d'utiliser la théorie chinoise pour éclairer le rôle joué par les unités dans les traités classiques⁹.

1. Un détour par la Chine

Ce projet est rendu possible par la 23^e étude ICMI, étude consacrée à l'arithmétique des nombres entiers. À cette occasion, Liping Ma (Ma & Kessel, 2018) a exposé ce qu'elle présente comme étant une théorie sous-jacente à l'enseignement actuel de l'arithmétique en Chine, c'est-à-dire :

the central pieces of the theory – the definition system and axioms for whole numbers – distilled from the textbooks of the nineteenth-century USA and twentieth-century China listed in the references. (p. 441)

⁹ Conséquemment, je n'essaierai pas de préciser les spécificités éventuelles de la théorie chinoise. Ce serait un autre travail.

Bien que s'appuyant entre autres sur des textes américains du XIX^e siècle, le texte de Ma et Kessel va au-delà. Il inclut notamment le symbolisme des parenthèses et les propriétés des opérations arithmétiques sur les entiers (commutativité, associativité, distributivité, mais également de nombreuses autres impliquant soustraction et division qui ne font pas l'objet d'un enseignement spécifique en France). Le domaine numérique couvert par le texte de Ma (tout comme le champ de la 23^e étude ICMI) est l'arithmétique des nombres entiers.

La première définition dans la théorie est celle de l'unité (toutes les traductions en français, rassemblées dans l'annexe 1, sont de nous).

Definition 1 A single thing, or one, is called a *unit* or *unit one*.

A group of things or a group of units, if considered as a single thing or one, is also called a *unit*, a *unit one* or a *one* (Fig. 18.1) [figure 7]. (Ma & Kessel, 2018, p. 442)

Le premier type d'unité est appelé « 'one-as-one' unit » (*ibid.*) alors que le second type est appelé « 'many-as-one' unit » (*ibid.*).

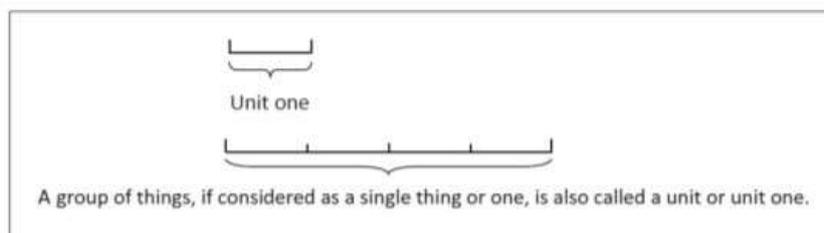


Figure 7. – *The definition of unit (Fig. 18.1).*

Viennent ensuite la deuxième définition, celle du nombre, puis celles des nombres abstraits et concrets.

Definition 2 A *number* is a unit (one) or a collection of units (ones).

[...]

Definitions 3 and 4 An *abstract number* is a number whose units are not named.

A *concrete number* is a number whose units are named. (*Ibid.*, p. 443)

À propos de la numération décimale, Ma et Kessel écrivent :

The position of a digit in a numeral is called the *place* of a digit. The largest digit in any place represents nine units. Each ten units is written as one unit in one place to the left. (*Ibid.*, p. 445)

Viennent ensuite la définition des opérations, en commençant par l'addition. Je reviendrai plus tard sur la multiplication.

Definition 6 The *sum* of two numbers is a third number which contains as many units as the other two numbers taken together. (*Ibid.*, p. 446)

Ce qui constitue le socle de la théorie arithmétique chinoise, ce sont les unités. Si ce texte coïncide apparemment pour partie avec l'acception courante des unités comme unités de mesure, un cm, un kilogramme¹⁰, auxquelles on peut ajouter les unités pour les grandeurs discrètes, une pomme... il semble aussi s'en éloigner puisque 3 cm, 3 kilogrammes et 3 pommes semblent aussi devoir être considérés comme des unités. De même, 1 et 3 sont aussi des unités.

Ce point de vue sur les unités et les nombres semble peu représenté dans l'institution d'enseignement aujourd'hui en France et, de ce fait, peut surprendre le lecteur. Est-ce que ce point de vue sur les unités éclaire notre question sur les unités de numération et les grandeurs ?

¹⁰ Dans leur texte, Ma et Kessel n'introduisent que des unités pour des grandeurs discrètes. En appui sur d'autres textes de Ma, je discute ce point dans (Chambris, soumis) et suggère qu'il est raisonnable de considérer que cette théorie de l'arithmétique inclut le continu.

Revenons à la présentation chinoise de la numération, en commençant par rappeler une citation précédente.

The position of a digit in a numeral is called the *place* of a digit. The largest digit in any place represents nine units. Each ten units is written as one unit in one place to the left. (*Ibid.*, p. 445)

Cette formulation d'une théorie pour la numération partage des similitudes avec la théorie de la numération qu'on trouve dans les traités de Reynaud ou Bézout. Des unités successives sont construites, de dix en dix fois plus grandes. Chaque dizaine d'unités s'écrit comme une seule unité, un rang plus à gauche. Ce qui fonde la théorie de *l'arithmétique* chinoise, c'est l'unité car découlent de l'unité, la théorie de la numération mais aussi la définition des opérations. Ce qui fonde la théorie de la *numération* classique, c'est l'unité. Comment les traités classiques sont-ils structurés ? Quels rôles joue l'unité vis-à-vis des autres objets dans la théorie classique de l'arithmétique ? Les traités classiques commencent par une introduction sur les grandeurs. Qu'en est-il de la suite ?

2. Retour aux traités des XVIII^e et XIX^e siècle en France

Comme je l'ai indiqué, le texte de Ma commence par la définition de l'unité, contrairement aux traités de Bézout et Reynaud qui commencent par une introduction sur les relations entre grandeurs et nombres. Pourtant, dans la suite, les textes classiques et le texte de Ma présentent des similitudes frappantes¹¹.

Après l'introduction sur les grandeurs, est présentée dans les traités classiques une construction de la numération déjà évoquée, puis sont définis les nombres abstraits et concrets dans des termes similaires à ceux de la théorie chinoise. Viennent ensuite les opérations, en commençant par l'addition :

Le but de l'ADDITION est de calculer un nombre nommé SOMME, qui contienne à lui seul toutes les unités de plusieurs autres nombres. (Reynaud, 1821, p. 6)

Cette définition est proche de la définition chinoise. La définition de la multiplication aussi. J'essaie maintenant de comprendre comment pourraient se connecter le texte français et le traité chinois. Je reviens à l'introduction des traités français. Celui de Reynaud commence comme suit :

Tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution se nomme *quantité*. Lorsqu'on réfléchit sur la nature des quantités, on sent qu'il serait impossible de prendre une idée exacte des grandeurs des quantités de même espèce, si l'on ne choisissait pas parmi elles une certaine quantité qui pût leur servir de termes de comparaison ; cette quantité se nomme *unité* ; l'assemblage de plusieurs unités de même grandeur compose un *nombre*. (*Ibid.*, p. 1)

J'attire l'attention sur ce qui me semble constituer une des fonctions de ce passage du traité. Il définit la relation entre grandeur et nombre par le truchement de l'unité. Par suite, au regard du texte chinois, j'attribue à cette introduction une fonction supplémentaire : celle qui consiste à définir l'unité. Par ailleurs, cette définition offre une vue large sur ce qu'est l'unité. Le traité de Bézout précise d'ailleurs que :

L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de termes de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce. (Bézout, 1821, p. 1)

¹¹ Ma (Ma & Kessel, 2018) précise d'ailleurs : « Although this theory underlies present-day school arithmetic in China, an important stage of its development occurred in Europe and the USA, initiated by the spread of mass education in the middle of the nineteenth century. » Elle ajoute que des éléments proviennent d'arithmétiques commerciales du XVI^e siècle.

Par suite, comme dans le texte chinois, le traité autorise à prendre n'importe quelle quantité¹², par exemple 3 onces, comme unité¹³. Si le texte chinois indique que l'unité est un objet primitif, le traité met les grandeurs en amont et les utilise pour définir l'unité.

3. Une première conclusion sur les unités de numération

Je reviens enfin à mon enquête sur les unités de numération et la relation entre la modification du savoir de référence sur les grandeurs et la disparition des unités en numération. Le traité autorise à considérer les *quantités* 10 ou 10 jetons comme des unités. La locution dizaine (ou une dizaine de jetons) est un moyen langagier pour exprimer l'unité mais n'importe quelle valeur de grandeur peut servir d'unité. Donc, je considère que, en termes de quantité (ou de grandeur), c'est bien la *quantité de pommes qu'il y a dans dix pommes* (à savoir 10 pommes) qui est l'unité.

Il me semble légitime de dire maintenant que la disparition des grandeurs du savoir de référence induit la disparition de l'arithmétique des unités qui ne sont pas 1 ou 1 *u* où *u* est une unité concrète. Pour autant, le maintien du savoir de référence avec les unités en numération (visible en particulier dans la section du programme sur les décimaux en 1970) leur permet probablement de survivre dans la période 1970-1980.

Est-ce que les unités auraient pu survivre *longtemps* en numération malgré la disparition des grandeurs de la théorie de référence pour l'arithmétique en 1970 si la théorie de référence pour la numération n'avait pas été modifiée ? Il est difficile de répondre à cette question. En revanche, il me semble que la suppression des grandeurs du savoir de référence de l'arithmétique puis celle des unités de celui de la numération rend la vie des unités « qui ne sont pas un » extrêmement difficile, voire impossible dans les classes aujourd'hui même si des textes curriculaires affirment qu'elles ont une place à occuper. Elles ne vivent pas dans l'institution et les faire vivre supposerait probablement une infrastructure qui n'existe pas aujourd'hui, si tant est qu'il faille en mettre une au point. J'y reviendrai en conclusion.

UNE RAISON D'ÊTRE DES GRANDEURS EST DE FOURNIR DES UNITÉS

Je vais poursuivre cette enquête sur les raisons d'être, en affirmant une raison d'être des grandeurs qui découle de ce qui précède. Une raison d'être des grandeurs est de fournir des unités, car toute valeur de grandeur peut servir d'unité.

Dans cette partie, pour explorer davantage le paysage de l'arithmétique au-delà de la numération des entiers, je vais d'abord évoquer la multiplication, puis les nombres non entiers. Je terminerai en proposant une caractérisation des unités de l'arithmétique.

¹² Les nombres, 1, dix et les fractions unitaires sont considérés comme des unités dans le traité de Bézout (Reynaud ne formule pas le fait que les quantités soient des unités). Cela implique que le nombre, sans unité, est considéré comme une grandeur qui peut donc être mesurée comme les autres grandeurs et que tout nombre (on exclura les irrationnels) puisse être considéré comme une unité.

¹³ Pour étayer cette affirmation, d'ordre théorique, il peut être utile d'ajouter que Bézout (1821) précise par exemple dans la section relative à la numération d'une part : « on est convenu que de dix unités on en ferait une seule » (p. 2) et d'autre part : « Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en est indifférent en lui-même, pourvu qu'on puisse mesurer les quantités qu'on a dessein de mesurer » (p. 5). À propos de la numération des fractions, il ajoutera : « Pour se faire une idée nette des fractions, il faut concevoir que la quantité qu'on a prise d'abord pour unité, est elle-même composée d'un certain nombre d'unités plus petites ; comme l'on conçoit par exemple, que la livre est composée de vingt parties ou de vingt unités plus petites, qu'on appelle *sous*. » (p. 48).

1. Le cas de la multiplication

Retour en Chine

Dans l'article de Ma et Kessel (2018), la multiplication est présentée comme suit :

Definition 10 The *product* of two numbers is a third number which contains as many units as one number taken as many times as the units in the other.

The operation of finding the product of two numbers is called *multiplication*. (For example, how much is three taken four times?)

This quantitative relationship is obviously more sophisticated than that of the sum of two numbers. First of all, there is a new type of unit in this relationship: in Fig. 18.8 [figure 8], each copy of the first number is a new 'many-as-one' unit created by considering a group of units as a single thing.

Second, unlike the relationship 'sum of two numbers', the product of two numbers involves two types of units: 'one-as-one' and 'many-as-one' units. This is illustrated by Fig. 18.8 [figure 8].

Third, in Fig. 18.8 [figure 8], the units of the second number determine the number of copies of the first number. The 'one-as-one' units in the collection of copies form the third number, which is the product. [...]

Definition 11 *Multiplicand* is the number to be taken. The *multiplier* is the number that indicates how many times the multiplicand is taken.

Multiplicand is the number represented by the first term in a multiplication expression. It is represented by the term at the left of the multiplication sign. (p. 452-453)

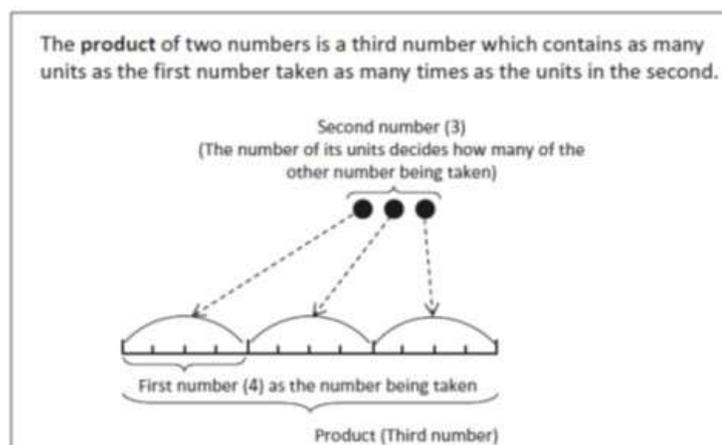


Figure 8. – Fig. 18.8 - The definition of product of two numbers (*ibid.*, p. 453).

Cette entrée dans la multiplication peut paraître complexe mais elle a le mérite de se rattacher directement aux unités et d'exploiter des potentialités offertes par les unités : un considéré comme un et plusieurs considéré comme un. Cette définition nécessite de considérer simultanément plusieurs niveaux d'unités : les unités « simples » qui mesurent le multiplicande, les unités simples qui mesurent le multiplicateur (nombre abstrait), les « many-as-one » *units* que le multiplicateur compte.

Retour aux traités du XVIII^e et XIX^e siècle

Je présente maintenant la définition de la multiplication dans le traité de Reynaud. Elle partage des caractéristiques communes avec la définition chinoise mais les unités n'y sont pas explicites. Est-ce que les unités sont implicites dans cette définition ?

Le but de la MULTIPLICATION est de calculer un nombre nommé, PRODUIT, qui soit composé avec un nombre connu, nommé MULTIPLICANDE, de la même manière qu'un nombre donné, nommé MULTIPLICATEUR, est composé avec l'unité. De sorte que pour obtenir le produit, il suffit d'effectuer sur le multiplicande les mêmes opérations qu'il faudrait faire sur l'unité pour former le multiplicateur. [...] Ainsi, pour multiplier 5 par 3, on observe que le multiplicateur 3 étant composé de trois fois l'unité, le produit doit être composé de trois fois le multiplicande 5. (Reynaud, 1821, p. 10)

La définition de la multiplication passe par l'expression (implicite) de la mesure d'une même grandeur dans deux unités : (1) le multiplicande comme unité, (2) l'unité dans laquelle s'exprime le multiplicande (ou plus simplement l'unité du multiplicande). Le produit s'exprime dans l'unité du multiplicande. Le texte de Ma et Kessel est limité aux entiers. Toutefois, une conséquence des définitions de Reynaud et Bézout est qu'on peut définir la multiplication de la même façon pour les entiers et pour les fractions, ce que font ces auteurs. Ainsi, pour $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$ ($\frac{7}{5}$ est le multiplicateur, $\frac{3}{4}$ est le multiplicande), $\frac{3}{4}$ est l'unité et $\frac{7}{5}$ le nombre d'unités à prendre. La définition de la multiplication exprime que calculer le produit consiste à déterminer la mesure dans l'unité 1 de la grandeur qui mesure $\frac{7}{5}$ avec $\frac{3}{4}$ comme unité. Plusieurs façons de calculer sont envisageables que je ne détaille pas (voir Reynaud, 1821, p. 28 ; Bézout, 1821, p. 59 ; texte des TD : Chambris et al., 2021, troisième partie), mais le calcul fait intervenir une unité intermédiaire, le vingtième. Les connaissances et savoirs sur les unités qu'engage le calcul sont pour partie envisagées dans le texte des TD.

Par ailleurs, définir une opération suppose aussi de s'interroger sur la façon dont les propriétés vont être abordées. Le texte des TD vise aussi à relancer ou à alimenter une réflexion sur la question.

Une difficulté curriculaire

En effet, la définition de la multiplication des nombres rationnels ou décimaux n'est pas une question simple (Roditi, 2002). Dans les ingénieries de référence, celle de Brousseau et Brousseau (1987) et celle de Douady et Perrin (1986), la multiplication est définie de façons différentes. Et d'après Perrin (communication personnelle), cette définition a été l'occasion de débats vifs entre les concepteurs de ces ingénieries. Brousseau et Brousseau introduisent la multiplication des fractions par les compositions d'applications linéaires (l'optimist). Douady et Perrin utilisent les aires de rectangles. Dans le curriculum actuel, cette question ne semble guère résolue (Coulange & Train, communication personnelle, 2019) puisqu'on peut lire dans une note de bas de page du vadémécum pour la formation des référents mathématiques de circonscription que « $1/3$ d'une chose se traduit par $1/3 \times$ chose, le “de” signifiant mathématiquement toujours “ \times ” ».

2. Unités en relation pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres

Comme je l'ai indiqué à propos de la disparition des unités de numération, un problème majeur qui se pose avec l'introduction de la théorie savante est celui de l'élévation des besoins trophiques en algèbre pour traiter la numération. Une conséquence est un phénomène massif de transposition et finalement une réduction des potentialités technologiques. La contraposée de ce résultat est que les unités pourraient contribuer à réguler ou contenir les besoins trophiques de l'arithmétique. Je l'ai aussi évoqué pour le calcul de l'addition et les retenues.

Avec le cas de la multiplication, nous avons vu comment un jeu sur les différents types d'unités permet de définir l'opération, tout en assurant une continuité des entiers aux nombres non entiers. Les unités semblent ainsi doter la théorie de technologies potentiellement nécessaires pour l'enseignement apprentissage des nombres et des quatre opérations à l'école (même si d'autres voies sont possibles comme des ingénieries l'ont montré).

Il est bien connu que la mesure des grandeurs est une source des raisons d'être pour les extensions successives des ensembles de nombres. Dans ce troisième temps, à propos des raisons d'être des grandeurs liées aux unités, je vais m'intéresser aux unités dont les grandeurs dotent la théorie. Plus précisément, ce que révèle l'identification du rôle des unités dans la théorie, c'est la possibilité de considérer simultanément plusieurs unités, des unités en

relations quantitatives. Et en particulier, le fait qu'un objet mesuré peut à son tour devenir unité. Les unités de numération constituent une série de telles valeurs de grandeurs qui tour à tour sont mesurées, puis mesurent.

Fraction as measure sequence

Cortina et Visnovska (Cortina, Višňovská & Zúñiga, 2014) travaillent dans le cadre de la Realistic Mathematics Education (impulsé par Freudenthal). Ils ont développé une séquence d'enseignement pour l'apprentissage des fractions. Ils travaillent dans des milieux particulièrement difficiles avec le projet de faire apprendre *tous* les élèves. Il semble qu'ils obtiennent des résultats intéressants au plan des apprentissages (Vale & Graven, 2018 ; Visnovska & Cortina, 2017). La première expérimentation de l'ingénierie a été faite au Mexique, avec un grand nombre de séances. Plus récemment, ils ont adapté la séquence d'enseignement pour qu'elle puisse être réalisée, en 3^e année de primaire (élèves de 8-9 ans), en quatre séances, en Afrique du Sud¹⁴. L'enseignement a été dispensé, dans trois classes, par une chercheuse (Vale) qui a travaillé avec Cortina et Visnovska à l'adaptation au contexte. Je vais présenter rapidement l'ingénierie et j'y analyserai le rôle que jouent les unités.

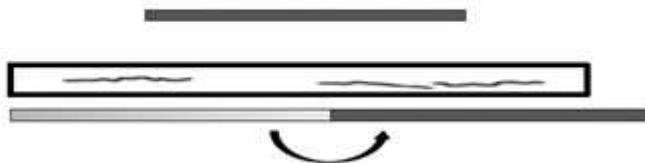
Le but est de faire travailler aux élèves la relation d'ordre inverse entre taille du dénominateur et taille de la fraction. Dans l'ingénierie, c'est la propriété de relation inverse entre taille des unités et nombre d'unités dans la mesure d'une longueur qui me semble plutôt être travaillée. Les fractions unitaires étant considérées comme des unités.

- Dans un premier temps, les élèves apprennent à mesurer avec des instruments corporels : la main, les pieds. Ils apprennent dans des routines l'importance de bien aligner, de ne pas superposer, de ne pas laisser d'espace entre les reports de longueurs et mettent ces règles en relation avec la mesure obtenue. Par exemple, s'il y a des espaces entre les reports, le nombre d'unités reporté peut être moindre.
- Dans un second temps, ils rencontrent la nécessité de disposer d'une unité commune pour pouvoir utiliser des mesures obtenues par autrui. L'unité commune est une baguette (dont la taille est 24 cm environ mais les élèves ne le savent pas).
- Dans un troisième temps, ils constatent que cette baguette ne permet pas de trouver des mesures différentes pour des objets de tailles différentes. Tous les enfants de la classe mesurent 4 unités et un petit peu !
- Dans un quatrième temps, pour résoudre ce problème, ils fabriquent des sous-unités dont la longueur est telle que, quand on mesure la référence avec un « petit de 2 » (Otibele, en Afrique du Sud), la référence mesurera 2 petits de 2. Ils utilisent ces unités pour mesurer et utilisent une notation transitoire pour noter leurs mesures. Ils fabriquent ensuite des petits de 3, puis des petits de 4, etc. (figure 9).
- Le symbolisme des fractions est introduit vers la fin de la séquence.

¹⁴ Des ressources développées dans le cadre de ce projet (South African Numeracy Chair Project) sont téléchargeables : <https://www.ru.ac.za/sanc/teacherdevelopment/miclegr4-7/>. Elles ne correspondent pas complètement à ce qui a été proposé aux élèves.

Mama Khanyi started to make an otibele. She cut the stem to make a piece that would fit along the stick exactly TWO times.

First she cut this piece and placed it along the stick to test if it fit exactly TWO times...



Is this a real otibele?

Would a real otibele be shorter or longer than this?

Figure 9. – Extrait de l'album pour enfant, *Mama Khanyi and the Pots* (Vale, Graven, Višňovská & Ford, 2019, p. 30) conçu dans le cadre du projet en Afrique du Sud et sur lequel s'appuie le scénario de la séquence mise en œuvre (SANCP, 2019).

L'ingénierie partage des ressorts avec celle de Douady et Perrin par exemple, en particulier avec la définition des demi, tiers, quart étant ce qui va 2 fois, 3 fois, 4 fois dans l'unité. Une des particularités de cette proposition didactique me semble cependant être le travail explicite et systématique réalisé sur les sous-unités en relation avec l'unité de référence, autrement dit l'introduction de mesures avec des nombres entiers d'unités pour des unités « fractionnaires » (ou sous-multiples de l'unité de référence – dont le nom n'est pas celui des fractions mais dont la définition y réfère). Les sous-unités constituent des objets mathématiques qui constituent des savoirs, en soi, à la fois comme longueurs puis comme nombres. Elles sont utilisées pour des mesures en nombres entiers (la bande mesure 5 petits de 2). Les nombres non entiers sont ensuite introduits en appui sur les savoirs enseignés au préalable. L'ingénierie ne prend en charge que le début du processus d'enseignement des rationnels. Il me semble alors raisonnable de dire que les sous-unités, qu'il s'agisse de longueurs ou de nombres, constituent des savoirs importants dans l'apprentissage de l'arithmétique (par le truchement de cette ingénierie, au moins) qui ne sont pas visibles dans le curriculum ordinaire.

Articuler l'apprentissage des nombres décimaux avec les unités métriques

Le projet d'enseignement évoqué dans la deuxième section du texte des TD associés au cours (Chambris et al., 2021), plus empirique, repose sur l'utilisation du système métrique, avec une visée analogue : prendre appui sur les tailles d'unités métriques, et notamment leurs tailles relatives, pour construire les unités décimales, puis le nombre décimal. Nous y verrons des difficultés que soulève un tel projet, notamment en termes de savoirs ou connaissances disponibles sur les unités dans l'institution.

3. Unités relatives

Les unités que j'ai mises en évidence dans la section *Un détour par la Chine* sont des unités d'un type particulier, spécifique de l'arithmétique. En effet, pour être *fonctionnelle en arithmétique*, une unité ne peut être « seule ». Elle doit être associée à (au moins) une autre unité et une relation quantitative (i.e. numérique) doit être établie entre les deux. En effet, pour penser que 3 cm est une unité, il faut envisager 3 cm comme une longueur (qui va donc mesurer d'autres longueurs) et simultanément concevoir la façon dont 3 cm est « conçu », sa taille, son rapport à 1 cm, c'est-à-dire $3 \text{ cm} = 3 (1 \text{ cm})$ (je propose d'introduire cette notation et de la lire, 3 dans l'unité 1 cm, on a ainsi $3 (1 \text{ cm}) = 1 (3 \text{ cm})$) ; de même pour penser que 10 est une unité, il faut penser que 10 est une unité qui mesure les nombres et son rapport à 1 (par exemple, $10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ou $5 + 5$ ou $5 + 2 + 3$ ou ce que

j'obtiens quand j'ai pris 1 dix fois, etc.) ; enfin, pour penser que $1/3$ est une unité, il faut penser que c'est un nombre qui mesure des nombres et son rapport à 1 : $1/3$ est l'unité avec laquelle 1 mesure 3, $3 (1/3)=1$. Je dirai donc que 3 cm, 10 ou encore $1/3$ sont des *unités relatives* aux *unités simples* 1 cm ou 1¹⁵.

Dans le cas de la multiplication, l'expression du multiplicande¹⁶ $b u$ (un nombre b suivi d'une unité u) peut être considérée comme une unité. Cette unité est *relative* à l'unité *simple* u dans laquelle le multiplicande et le produit s'expriment. Cette approche reste compatible avec le cas où multiplicande et / ou multiplicateur sont des fractions. Elle rend ainsi nécessaire un troisième type d'unités relatives, par exemple $3/4 u$. Ce cas est compatible avec la partie introductive des traités classiques.

Nous avons fait le choix – au moins dans les deux textes de l'école d'été – d'appeler *unités relatives* ces unités qui sont autres que l'unité simple considérée et qui peuvent donc être définies à partir d'une relation quantitative (numérique¹⁷) avec cette unité simple. Comme nous allons le voir dans la section suivante, un courant de la psychologie cognitive a identifié des objets considérés comme des *units* qui semblent partager des similitudes avec ces unités relatives. Dans ce champ, le nom qui leur est attribué (en anglais), depuis les années 1980, est « *composite unit* ».

UN DÉTOUR PAR LA PSYCHOLOGIE COGNITIVE : LE *UNITIZING*

Dans cette dernière partie sur les unités comme raisons d'être des grandeurs, je fais un détour par la psychologie cognitive. Le *unitizing* est une opération mentale au sens de Piaget. Von Glasersfeld (1981) la décrit comme une opération de segmentation de l'expérience, permettant d'isoler un aspect de l'expérience tout en le laissant ancré dans le tout.

Quelques travaux portent sur la géométrie mais d'assez nombreux travaux, aux États-Unis principalement, emmenés par Steffe et Von Glasersfeld, ont décrit la manifestation du *unitizing* dans l'apprentissage des nombres et du calcul. Les travaux décrivent des types de raisonnements plus ou moins sophistiqués que les sujets mettent en œuvre en appui sur des opérations mentales qui convoquent des « entités mentales » que les chercheurs appellent unités. Ces unités sont plus ou moins flexibles, plus moins sophistiquées. Steffe et Von Glasersfeld s'inscrivent dans le courant du constructivisme radical. Un type d'unités avancé, les « composites units » (Steffe, Cobb & von Glasersfeld, 1988), intervient dans l'apprentissage de la numération (*ibid.* ; Cobb & Wheatley, 1988), de la multiplication (par exemple, Steffe, 1992) et des fractions (par exemple, Hackenberg & Tillema, 2009). Une unité composite est « a unit the mind produces by putting together smaller units (e.g., 5 is a unit made of five 1s, or 3 and 2) » (Tzur, 2019, p. 29).

Je résume ci-après la présentation des niveaux de complexité du raisonnement multiplicatif faite par Hackenberg et Tillema (2009)¹⁸. Ces auteurs identifient trois niveaux fondamentaux. Ils prennent appui sur le problème des vacances pour les décrire : *Susan est partie en vacances 3 semaines. Combien de jours a-t-elle été en vacances ?*

¹⁵ Choisir un nom pour un objet qu'on introduit est une entreprise délicate. J'ai choisi le qualificatif *relative* pour exprimer le fait qu'il y a une relation à un autre objet. Cet objet est une autre unité (le plus souvent l'unité simple mais d'autres cas pourraient se présenter). Ce n'est pas forcément très heureux car *relative* attend un comparatif. Néanmoins, je ne retiens pas l'expression « many-as-one unit » ou « unités plusieurs pour un » qui suggère une unité plus grande que l'unité simple. Dans le cas des fractions par exemple cette expression ne me semble pas pertinente.

¹⁶ Nous nous limitons au cas des rationnels.

¹⁷ Cette relation est de type « mesure » entre les unités : $r = 3 s$ ou $s = 3 r$ ou $r = \frac{3}{4} s$.

¹⁸ Le lecteur intéressé aura bien sûr tout intérêt à lire les travaux originaux.

Selon les auteurs, le premier concept multiplicatif consiste à coordonner deux niveaux d'unités en activité. La coordination d'unités la plus basique consiste ainsi à insérer une unité composite dans les unités d'une autre unité composite. Il implique deux niveaux d'unités, par exemple la coordination multiplicative de 7 et 3 implique d'insérer 7 unités dans chacune des 3 unités, dans la résolution du problème. Cela se manifeste dans le comptage de 1 en 1, jusqu'à $7 : 1 \rightarrow 7, 8 \rightarrow 14, 15 \rightarrow 21$.

Le deuxième concept multiplicatif consiste à intérioriser deux niveaux d'unités. Ce deuxième niveau de coordination d'unités manifeste ainsi l'intériorisation des niveaux. Par suite il permet d'autres stratégies. Avec le problème des vacances de Susan, l'élève est capable par exemple de dire 7 et 7, 14, et encore 6, 20 et 1 de plus 21. La différence majeure avec le raisonnement précédent consiste à être capable d'utiliser l'unité 7 comme un matériel et d'opérer avec : 7 peut être décomposé et recomposé. Avec ce niveau de développement, les sujets peuvent manifester un troisième niveau de coordination dans l'activité. Par exemple, ils peuvent déterminer le nombre de jours supplémentaires si Susan a augmenté ses vacances de 9 semaines. De plus, ils peuvent calculer le nombre de jours total si on le leur demande, en réutilisant 21 et 63, à savoir 84 jours. En revanche, pour compter le nombre total de semaines, ils partiraient de 84 et compteraient de 7 en 7. Ainsi, ils ne peuvent pas réutiliser 9 et 3 pour déterminer le nombre total de semaines. Il faudrait intérioriser trois niveaux d'unités différents pour cela, en particulier gérer le 3^e niveau : *unit of units of units*.

Je retiens de ces travaux qu'ils décrivent le progrès dans les raisonnements multiplicatifs (et additifs aussi) en s'appuyant sur des « entités » mentales liées à la suite des nombres, que leurs inventeurs appellent « units ». Dans ces raisonnements sont d'abord conçues des unités, puis des unités constituées de plusieurs unités, puis des unités constituées elles-mêmes d'unités composées d'unités, l'enjeu étant de pouvoir opérer simultanément avec les différents niveaux d'unités. Cette capacité constitue alors une ressource pour les sujets pour traiter les situations multiplicatives (et additives).

Même si l'articulation entre les unités relatives et les unités composites reste à faire, en particulier envisager comment les résultats dans un champ peuvent fructifier en prenant en compte ceux de l'autre champ, les similitudes sont troublantes entre cette façon de concevoir des unités en relation décrite par les psychologues et les unités relatives que j'ai mises en évidence dans ce texte.

CONCLUSION

Ce cours m'a amenée à revisiter mes travaux de thèse et en particulier à préciser si ce n'est élucider le rôle des unités dans la théorie de l'arithmétique des traités classiques, qui a façonné les savoirs à enseigner en primaire jusqu'aux années 1940 et dans une moindre mesure jusqu'à la réforme des mathématiques modernes. Il semble que dans la Chine d'aujourd'hui, des praxéologies similaires vivent. Les unités de numération sont des unités et ces unités provenaient des grandeurs, toute grandeur pouvant être prise comme unité. Aujourd'hui, ces unités ne vivent probablement pas dans l'enseignement des mathématiques de l'École en France et les tentatives de réintroduction ne semblent pour l'heure guère concluantes. Ce déficit semble problématique, par exemple lorsqu'on essaie de faire vivre des techniques de calcul mental qui les mobiliseraient ou encore pour lorsqu'on essaie d'articuler enseignement des décimaux et des unités métriques ou encore pour élucider certaines propriétés de la multiplication (voir le texte des TD associés au cours : Chambris et al., 2021).

Les unités apparaissent comme des ressources possibles dans l'étude de différents secteurs de l'arithmétique, en particulier au niveau des technologies, avec des besoins trophiques assez réduits, mais aussi pour élever le savoir au sens où elles constituent des *objets de savoir* peu visibles si ce n'est invisibles dans le curriculum français. Faire vivre des unités, diverses,

complexes, me semble alors constituer une raison d'être importante des grandeurs. Le travail de Cortina et Visnovska me semble apporter des perspectives intéressantes pour alimenter la réflexion sur des ingénieries impliquant les unités.

J'ai évoqué comment un processus mental, les « composite units », étudié par la psychologie cognitive, permet de décrire des entités dont la manipulation semble essentielle pour développer des raisonnements dans la manipulation des nombres et du calcul et qui partagent des similitudes avec les unités mathématiques « relatives ». Cette conjonction est troublante même si la nature du lien entre les deux types d'objets reste à élucider.

J'ai fait des choix pour ce cours et finalement, je n'ai parlé que de façon très allusive des raisons d'être pour l'étude des phénomènes quantitatifs, comme la longueur et toutes les autres grandeurs qu'on étudie à l'école, la durée, la monnaie, etc. Connaître ces grandeurs, comment elles se comparent, s'ajoutent, se mesurent est crucial pour appréhender le monde mais plus encore si on se place dans la perspective d'un appui nécessaire sur les grandeurs pour enseigner l'arithmétique. En particulier, le travail présenté lors des TD (Chambris et al., 2021) interroge la disponibilité chez les élèves des relations multiplicatives (être 3 fois plus grand que l'unité) et sa relation avec mesurer 3 unités.

Pour finir, faut-il essayer de changer le savoir de référence en arithmétique pour y introduire des unités ? Répondre à cette question serait hautement spéculatif et il me semble qu'en l'état actuel, on peut dire que l'existant présente un certain nombre de trous, dont on peut penser qu'il serait intéressant de les combler, pour l'apprentissage des élèves. Mais « que faut-il introduire ? » et « comment ? » sont des questions compliquées, auxquelles sans doute, un programme de recherche pourrait essayer de répondre. On sait qu'introduire un objet nouveau a un coût, en termes de formation, peut avoir des effets déstabilisants sur le système et, à l'heure actuelle, nos travaux sont de l'ordre de l'état des lieux et nous essayons de nous doter d'outils pour réfléchir à des alternatives.

RÉFÉRENCES

- ARTAUD, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz & M.-H. Salin (Éds), *Actes de la IX^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Caen : ARDM et IUFM.
- BÉZOUT, E. (1821). Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie. In E. Bézout & A. A. L. Reynaud, *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie par Bézout avec des notes et des tables de logarithmes par A. A. L. Reynaud* (9^e éd.). Consulté à : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q.r=reynaud%20bezout?rk=21459;2>
- BOUCHENY, G. & GUÉRINET, A. (1930). *L'arithmétique au cours élémentaire (1^{re} et 2^e année)*. Paris : Larousse.
- BOURBAKI, N. (1984). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris : Masson.
- BRONNER, A. (2008). La question du numérique dans l'enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires. In A. Rouchier & I. Bloch (Éds), *Perspectives en didactique des mathématiques* (pp. 17-45). Grenoble : La pensée sauvage.
- BROUSSEAU, G. & BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. Comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence*. Bordeaux : IREM.
- CASTELA, C. & ROMO VÁZQUEZ, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(1), 79-130.
- CHAMBRIS, C. (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM*, 69, 5-31.
- CHAMBRIS, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels* (Thèse de doctorat). Téléchargeable à <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/>
- CHAMBRIS, C. (2009). Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2^{ème} et 3^{ème} années de primaire). In C. Ouvrier-Bufferet & M.-J. Perrin-Glorian (Éds), *Actes du colloque DIDIREM. Approches plurielles en didactique des mathématiques - Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?* (pp. 211-222). Paris : Laboratoire de didactique André Revuz & Université Paris Diderot.
- CHAMBRIS, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20^e siècle : théories et écologie. *Recherches en didactique des mathématiques*, 30(3), 317-366.
- CHAMBRIS, C. (2012a). Consolider la maîtrise de la numération et des grandeurs à l'entrée au collège. Le système métrique peut-il être utile ? *Petit x*, 89, 5-32. http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/squelettes/fic_x.php?num=89&rang=1
- CHAMBRIS, C. (2012b). Évolution des organisations mathématiques sur la numération au vingtième siècle en France. In M.-J. Perrin-Glorian (Éd.), *Éclairages sur l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire* (pp. 51-

- 72). Cahier du laboratoire de didactique André Revuz, n°4, novembre 2012.
<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS12003.pdf>
- CHAMBRIS, C. (2014). Contribution à propos de la numération décimale. In Conseil supérieur des programmes (Éd.), *Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C 2, C3 et C4*. Disponible sur Eduscol : http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/23/3/Chambris_Christine_-_MCF_-_CSP_363233.pdf
- CHAMBRIS, C. (2018). The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: a case study of whole numbers in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 97(2), 185-207.
<https://doi.org/10.1007/s10649-017-9790-3> (<http://rdu.be/DCM3>).
- CHAMBRIS, C. (soumis). The unit: a critical mathematical structure at the core of elementary arithmetic.
- CHAMBRIS, C., COULANGE, L., RINALDI, A.-M. & TRAIN, G. (2021). Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux - Potentialités. In H. Chaachoua et al. (Éds), *Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures* (pp. xx-yy). Grenoble : La pensée sauvage.
- CHAMPEYRACHE, G. & FATTA, J.-C. (2002). *Le nouveau Math Elem. CE2*. Paris : Belin.
- CHEVALLARD, Y. (1991). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné (2^e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1998). Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui. In IUFM d'Aix-Marseille (Éd.), *Défendre et transformer l'école pour tous* (CD-ROM). Marseille : IUFM.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=19
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- CHEVALLARD, Y. (2003). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée : raisons d'être, fonctions, devenir. In M. Bridenne (Éd.), *Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées*. (pp. 1-26). Dijon : IREM. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Nouveaux_dispositifs_didactiques_au_college_et_au_lycee.pdf
- CHEVALLARD, Y. & CHAMBRIS, C. (2015). *Grandeurs et nombres : quelques remarques pour un programme*.
<http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/GrandeuretombresYCCC.pdf>
- COBB, P. & WHEATLEY, G. (1988). Children's Initial Understandings of Ten. *Focus on learning problems in mathematics*, 10(3), 1-28.
- COLINVAUX, P. A. (1993). *Invitation à l'écologie*. Paris : Seuil.
- CORTINA, J.-L., VIŠŇOVSKÁ, J. & ZÚÑIGA, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal*, 26(1), 79-99.
- DOUADY, R. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1986). *Liaison École-Collège : Nombres décimaux*. Paris : IREM.
<http://numerisation.univ-irem.fr/PS/IPS86019/IPS86019.pdf>
- EILLER, R., BRINI, R., MARTINEU, M., RAVENEL, S. & RAVENEL, R. (1979). *Math et calcul. CE2*. Paris : Hachette.
- EILLER, R. & MARTINEU, M. (1972). *Math et calcul. CE2*. Paris : Hachette.
- EILLER, R., MARTINEU, M., BRINI, R., CORNIBÉ, R. & PRADILLON, F. (1971). *Math et calcul. CE1*. Paris : Hachette.
- FERREIRA, D. & SCHUBRING, G. (sous presse) "Complex numbers" and the problem of multiplication between quantities, *Historia Mathematica*.
- FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York, NY : Kluwer.
- HACKENBERG, A. J. & TILLEMMA, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 1-18.
- HARLÉ, A. (1987). L'image du nombre dans les manuels d'arithmétique de l'enseignement primaire au début du XX^{ème} siècle. In Groupe d'Histoire des Mathématiques (Éds), *Fragments d'histoire des mathématiques II* (pp. 22-84). Paris : APMEP.
- HÖLDER, O. (1901/1996). The axioms of quantity and the theory of measurement (Traduit et annoté par Joel Michell et Catherine Ernst). *Journal of mathematical psychology*, 40, 235-252.
- JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY. (JCGM). (2012). *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM). 3rd edition. 2008 version with minor corrections*.
https://www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM_200_2012.pdf
- KILPATRICK, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM Mathematics Education*, 44, 563-571.
<https://doi.org/10.1007/s11858-012-0393-2>
- KOLMOGOROV, A. N. (1951/1979). *Quantity*. Moscou : Great Soviet Encyclopedia.
- MA, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.
- MA, L. (2013). A critique of the structure of U.S. elementary school mathematics. *Notices of the AMS*, 60(10), 1282-1296.
- MA, L. & KESSEL, C. (2018). The Theory of School Arithmetic: Whole Numbers. In M. Bartolini-Bussi & X. Sun (Éds), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades* (pp. 439-463). Springer Open.
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-63555-2.pdf>
- MARIJON, A., MASSERON, R. & DELAUNAY, E. (1947). *Cours d'arithmétique. Le calcul à l'école primaire. Cours élémentaire*. Paris : Hatier
- MARIJON, A., MASSERON, R. & DELAUNAY, E. (1957). *Cours d'arithmétique. Le calcul de 7 à 9 ans*. Paris : Hatier
- MINISTÈRE DE LA JEUNESSE, DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA RECHERCHE. (2002). *Mathématiques. Cycle des approfondissements (cycle 3)*. Paris : CNDP.
http://cache.media.education.gouv.fr/file/20172018/97/0/math_Ecole_C3_827970.pdf
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE. (2005). *Grandeurs et mesure à l'école élémentaire*. In *Mathématiques. École primaire. Documents d'accompagnement des programmes*. Paris : CNDP.
- NEYRET, R. (1995). *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres* (Thèse de doctorat). Grenoble : Université Joseph Fourier.

- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2012). Épilogue : Des savoirs pour enseigner la numération. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 4, 73-75.
- PROGRAMMES. (1970). Programme et instructions pour l'enseignement mathématique du 2 janvier 1970. In A. J.-C. Bertrand (Éd.), *Le guide des instituteurs* (pp 281-320). Le Puy-en-Velay.
- REYNAUD, A. A. L. (1821). Notes sur l'arithmétique. In E. Bézout & A. A. L. Reynaud, *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie par Bézout avec des notes et des tables de logarithmes par A. A. L. Reynaud* (9^e éd.). Consulté à : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q.r=reynaud%20bezout?rk=21459;2>
- RODITI, É. (2002). *La multiplication des nombres décimaux. Enjeux, transpositions didactiques et contraintes d'enseignement* (Cahier de DIDIREM, 39). Paris : IREM. <http://numerisation.univ-irem.fr/PS/IPS02002/IPS02002.pdf>
- SANCP (South African Numeracy Chair Project) (2019) *MICLE Session 1 & 2 Handbook*. Rhodes : Rhodes University. Disponible à <https://www.ru.ac.za/sanc/teacherdevelopment/miclegr4-7/>
- STEFFE, L. P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences*, 4(3), 259-309.
- STEFFE, L. P., COBB, P. & VON GLASERSFELD, E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York, NY : Springer-Verlag.
- TZUR, R. (2019). Elementary conceptual progressions: reality check + implications. Plenary. In J. Novotná & H. Moraová (Éds), *Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics* (p. 29-40). Prague : Charles University, Faculty of Education. <https://www.semt.cz/proceedings-19.pdf>
- VALE, P. & GRAVEN, M. (2018). Facilitating conceptual engagement with fractions through suspending the use of mathematical terminology. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Éds), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 331-338). Umeå, Suède : PME.
- VALE, P., GRAVEN, M., VIŠŇOVSKÁ, J. & FORD, C. (2019). *Mama Khanyi and the Pots. A mathematical story and activity book*. Makhanda, Afrique du Sud : South African Numeracy Chair Project, Rhodes University. https://www.ru.ac.za/media/rhodesuniversity/content/sanc/documents/SANC_Storybook.pdf
- VIŠŇOVSKÁ, J. & CORTINA, J. L. (2017). Learning to support all students' fraction understanding. In J. Novotná & H. Moraová (Éds), *Equity and diversity in elementary mathematics education. Proceedings of International Symposium Elementary Mathematics Teaching 17. Prague August 20-25, 2017* (pp. 430-440). Prague : Charles University, Faculty of Education.
- VON GLASERSFELD, E. (1981). An Attentional Model for the Conceptual Construction of Units and Number. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(2), 83-94.

ANNEXE 1

Cette annexe regroupe les traductions en français des définitions proposées dans l'article de Ma et Kessel (2018).

Définition 1 Une seule chose, ou un, est appelée *unité* ou l'*unité un*.

Un groupe de choses ou un groupe d'unités, considéré comme une seule chose ou un, est aussi appelée une *unité*, ou l'*unité un* ou *un* (Fig. 18.1) [figure 7].

Un ou une chose est une conception primitive avec laquelle nous sommes nés. La définition de l'unité est abstraite de cette conception. C'est le point de départ du système de définition.

Définition 2 Un *nombre* est une unité (un) ou une collection d'unités (des unités)

Définitions 3 et 4 Un *nombre abstrait* est un nombre dont les unités ne sont pas nommées.

Un *nombre concret* est un nombre dont les unités sont nommées.

[...]

La position d'un chiffre dans une écriture chiffrée est appelée la *place* du chiffre. Le plus grand chiffre, quelle que soit sa place, représente 9 unités. Chaque dix unités / dizaine d'unités est écrite comme une unité une place plus à gauche.

Définition 6 La somme de deux nombres est un troisième nombre qui contient autant d'unités que les deux autres nombres pris ensemble.

Définition 10 Le *produit* de deux nombres est un troisième nombre qui contient autant d'unités que le premier nombre pris autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre.

L'opération qui consiste à trouver le produit de deux nombres est appelée *multiplication*. (Par exemple, combien vaut trois pris quatre fois ?)

Cette relation quantitative est de façon évidente plus sophistiquée que celle de la somme de deux nombres. Premièrement, il y a un nouveau type d'unités en relation : sur la Fig. 18.8 [figure 8], chaque copie du premier nombre est une nouvelle unité de type « plusieurs considéré comme un » créée en considérant un groupe d'unités comme une chose unique.

Deuxièmement, contrairement à la relation « somme de deux nombres », le produit de deux nombres implique deux types d'unités : des unités « un considéré comme un » et des unités « plusieurs considéré comme un ». Ceci est illustré par la Fig. 18.8 [figure 8].

Troisièmement, sur la Fig. 18.8 [figure 8], les unités du second nombre déterminent le nombre de copies du premier nombre. Les unités « un considéré comme un » dans la série des copies forment le troisième nombre, qui est le produit.

Définition 11 Le *multiplicande* est le nombre qui est pris. Le *multiplieur* est le nombre qui indique combien de fois le multiplicande est pris.

Le multiplicande est le nombre représenté par le premier terme dans l'expression d'une multiplication. Il est représenté à gauche du signe multiplié.

REMERCIEMENTS

Je remercie le Comité scientifique et d'organisation de l'école d'été de m'avoir invitée et de m'avoir proposé d'étudier la question des raisons d'être des grandeurs, et en particulier les responsables scientifiques du thème Gisèle Cirade et André Pressiat. Je remercie aussi Lalina Coulange, Anne-Marie Rinaldi et Grégory Train qui ont accepté la proposition d'un TD pour accompagner le cours.