



**HAL**  
open science

# Stabilnost linearnih dinamičkih sistema sa vremenskim kašnjenjem

Vukan Turkulov, Milan Rapačić, Rachid Malti

► **To cite this version:**

Vukan Turkulov, Milan Rapačić, Rachid Malti. Stabilnost linearnih dinamičkih sistema sa vremenskim kašnjenjem. ETRAN, Jun 2019, Srebrno Jezero, Serbia. hal-02526062

**HAL Id: hal-02526062**

**<https://hal.science/hal-02526062>**

Submitted on 31 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Stabilnost linearnih dinamičkih sistema sa vremenskim kašnjenjem

Vukan Turkulov, Milan R. Rapaić, Rachid Malti

**Apstrakt**—U ovom radu bavimo se problemom određivanja oblasti stabilnosti linearnih, vremenski invarijantnih sistema sa višestrukim vremenskim kašnjenjima. Prikazani metod je iterativan, a zasniva se na primeni Rošeove teoreme i fundamentalne teoreme matematičke analize. Izlaganja su ilustrovana primerom.

**Ključne reči:** stabilnost; analiza sistema; vremensko kašnjenje.

□

## I. UVOD

Stabilnost je jedna od osnovnih karakteristika dinamičkih sistema. Stabilnost linearnih, vremenski invarijantnih (Linear Time Invariant, LTI) sistema konačne dimenzije može se odrediti pomoću nula karakteristične jednačine sistema. Sistemi beskonačne dimenzije, kako im i samo ime kaže, imaju neograničen broj rešenja karakteristične jednačine. Otuda je za ovakve sisteme nepogodno, a najčešće i nemoguće, ispitivati stabilnosti direktnom proverom položaja svakog pola.

Među najčešće sretanim sistemima beskonačne dimenzije su sistemi sa vremenskim kašnjenjem. Karakteristična funkcija ovakvih sistema može se u opštem obliku zapisati kao

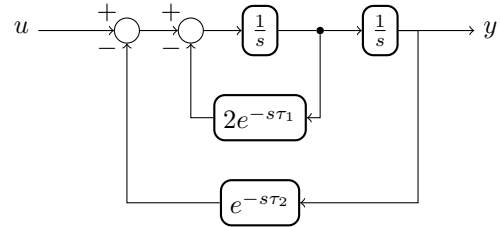
$$f(s, e^{-s\tau_1}, e^{-s\tau_2}, \dots, e^{-s\tau_n}), \quad (1)$$

gde vrednosti  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  predstavljaju čista vremenska kašnjenja prisutna u sistemu. Pogodno je sva kašnjenja predstaviti jednim vektorom  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]$ . Od značaja je ispitati stabilnost sistema u zavisnosti od parametara  $\tau$ , odnosno odrediti oblast stabilnosti sistema u prostoru parametara  $\tau$ .

Ukoliko sistem poseduje vremensko kašnjenje isključivo na ulazu i/ili izlazu, funkcija prenosa sistema je oblika  $G_0(s) = G(s)e^{-s\tau}$ , gde je  $G(s)$  racionalna funkcija prenosa. Stabilnost takvih sistema konvencionalno se ispituje Nikvistovim kriterijumom [1]. Metode za analizu nekih klasa sistema sa kašnjenjem predstavljene su u [2] [3] [4] i [5]. Interesantan alternativan pristup koji se zasniva na GMK prikazan je u [6].

Cilj ovog rada je uvođenje opšteg iterativnog postupka (algoritma) za analizu stabilnosti LTI sistema sa višestrukim vremenskim kašnjenjima. Bez gubitka opštosti, u ovom radu ćemo postupak primeniti na primer sistema sa višestrukim

V. Turkulov (vukan\_turkulov@uns.ac.rs), M. R. Rapaić (rapaja@uns.ac.rs) – Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija  
R. Malti({firstname.lastname}@ims-bordeaux.fr) – Univ. Bordeaux, IMS – UMR 5218 CNRS, Francuska



Slika 1. Blok dijagram sistema opisanog modelom [2].

kašnjenjem opisan sledećim matematičkim modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1(t - \tau_1) - x_2(t - \tau_2) + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

gde je  $t$  vreme,  $x_1$  i  $x_2$  promenljive stanja sistema,  $u$  ulazni signal,  $y$  izlazni signal, a  $\tau_1$  i  $\tau_2$  čista vremenska kašnjenja. Blok dijagram sistema opisanog ovim modelom prikazan je na slici [1].

Prilagodićemo pristup razvijen za analizu stabilnosti frakcionih sistema predložen u [7] i [8]. Postupak se zasniva na poznavanju neke određene vrednosti parametara  $\tau^0$  za koje je sistem stabilan. Počevši od date vrednosti  $\tau^0$ , iterativno određujemo vrednosti  $\tau$  za koje je sistem takođe stabilan. Na ovaj način pravimo “skokove” po određenoj pravoj u prostoru parametara  $\tau$ , garantujući da je sistem stabilan na svakom “preskočenom” intervalu.

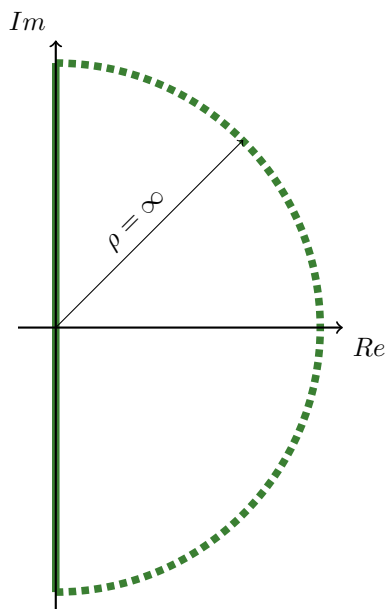
Rad je podeljen u sledeće celine. U poglavlju [II] prikazana je matematička osnova predloženog postupka. U poglavlju [III] nalazi se primena predloženog postupka na sistem opisan modelom [2]. Zaključak je dat u poglavlju [IV].

## II. OPIS ALGORITMA

Predloženi postupak vrši analizu stabilnosti sistema duž odabrane prave u prostoru parametara  $\tau$ . Pogodno je kretanje po odabranoj pravoj opisati jednim realnim parametrom  $\theta$  kao

$$\tau = \tau_0 + \theta\tau_p \quad (3)$$

gde je  $\tau_0$  tačka kroz koju prolazi odabrana prava, a  $\tau_p$  jedinični vektor paralelan sa odabranom pravom. Stabilnost sistema dalje možemo diskutovati u zavisnosti od parametra  $\theta$ . Postupak možemo potom primenjivati na proizvoljan broj pravih u prostoru parametara  $\tau$ , analizirajući stabilnost duž svake od njih.



Slika 2. Grafički prikaz konture  $C$  u kompleksnoj  $s$  ravni

Na odabranoj pravoj, karakterističnu funkciju sistema možemo preko novouvedenog parametra  $\theta$  izraziti kao  $f(s, \theta)$ . Pretpostavka postupka je poznavanje neke vrednosti  $\theta_0$  za koju je sistem stabilan. Za takvo  $\theta_0$ , funkcija  $f(s, \theta_0)$  nema nijednu nulu u desnoj kompleksnoj poluravni. Takođe, pretpostavljamo da je funkcija  $f(s, \theta)$  analitička u desnoj kompleksnoj poluravni za svaku vrednost parametra  $\theta$ .

Predloženi postupak se oslanja na Rošeovu teoremu [9], koja je formulisana na sledeći način:

**Teorema 1.** Ukoliko za dve kompleksne funkcije  $f$  i  $g$  koje su holomorfne unutar zatvorene konture  $\mathcal{K}$  važi  $|g(s)| < |f(s)|$  za svako  $s$  na konturi  $\mathcal{K}$ , onda funkcije  $f$  i  $f + g$  imaju isti broj nula unutar konture  $\mathcal{K}$ .

Rošeovu teoremu možemo primeniti na karakterističnu funkciju  $f(s, \theta)$  i konturu  $C$  koja obuhvata celu desnu poluravan, kao što je prikazano na slici [2]. Kontura  $C$  se sastoji iz dva segmenta - imaginarne ose gde je  $s = j\omega$  za  $\omega \in \mathbb{R}$ , i polukruga beskonačnog poluprečnika gde je  $s = \rho e^{j\varphi}$  za  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Ukoliko je  $|f(s, \theta) - f(s, \theta_0)| < |f(s, \theta_0)|$  za svako  $s \in C$ , onda  $f(s, \theta)$  i  $f(s, \theta_0)$  imaju isti broj nula u desnoj poluravni. S obzirom na to da  $f(s, \theta_0)$  nema nijednu nulu u desnoj poluravni, ovaj uslov bi garantovao da ni  $f(s, \theta)$  nema nijednu nulu u desnoj poluravni. Dakle, sistem je sigurno stabilan za one vrednosti parametra  $\theta$  za koje važi

$$|f(s, \theta) - f(s, \theta_0)| < |f(s, \theta_0)|, \forall s \in C. \quad (4)$$

U interesu nam je da pronađemo što veću vrednost  $\theta$  za koju važi uslov (4). Pored toga, uslov (4) predstavlja konzervativnu granicu stabilnosti, što ćemo ilustrirati sledećim primerom: recimo da postoji  $\theta_1$  takvo da nejednakost (4) važi za  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ , a ne važi za  $\theta > \theta_1$ . Drugim rečima,

$\theta_1$  je najveća vrednost parametra  $\theta$  za koju je uslov Rošeove teoreme ispunjen. Na osnovu te činjenice možemo zaključiti da je sistem sigurno stabilan za  $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ . Međutim, moguće je da postoji neko  $\theta > \theta_1$  za koju je sistem takođe stabilan, iako uslov (4) nije ispunjen. Upravo je ovo razlog zbog kog je predloženi postupak iterativan. Kada pronađemo vrednost  $\theta_1$  za koju je sistem sigurno stabilan, ponavljamo postupak tražeći novu vrednost  $\theta_2$  za koju važi nejednakost  $|f(s, \theta_2) - f(s, \theta_1)| < |f(s, \theta_1)|, \forall s \in C$ . Na ovaj način iterativno pravimo korake kroz prostor parametara, pri čemu možemo sa sigurnošću da tvrdimo da je sistem stabilan u svakom pređenom koraku.

Posmatrajmo sada uslov (4). Jednostavno je dokazati da data nejednakost važi na kružnom luku konture  $C$  ukoliko koeficijent uz najveći stepen promenljive  $s$  karakteristične funkcije sistema ne zavisi od parametra  $\theta$ . Izazov je pokazati za koju vrednost  $\theta$  data nejednakost važi na segmentu konture koji se poklapa sa imaginarnom osom. Primitimo da je funkcija  $f(s, \theta)$  simetrična u odnosu na realnu osu za sve sisteme sa realnim koeficijentima. Zbog toga je dovoljno proveriti da li je uslov Rošeove teoreme ispunjen na gornjoj polovini imaginarne ose. Ovime se problem svodi na određivanje vrednosti  $\theta$  za koje važi

$$|f(j\omega, \theta) - f(j\omega, \theta_0)| < |f(j\omega, \theta_0)|, \forall \omega \in \mathbb{R}^+. \quad (5)$$

Nažalost, kao što ćemo pokazati u poglavlju III nejednakosti ovog oblika uglavnom nisu pogodne za rad. Iskoristićemo fundamentalnu teoremu analize [10] kako bismo dobili nejednakosti koje su konzervativnije, ali pogodnije za rad.

**Teorema 2.** Neka su  $f(x)$  i  $F(x)$  funkcije realne promenljive na zatvorenom intervalu  $[a, b]$ , tako da važi

$$F'(x) = f(x). \quad (6)$$

Ukoliko je funkcija  $f$  integrabilna na intervalu  $[a, b]$ , onda važi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (7)$$

Fundamentalnu teoremu analize ćemo primeniti na levu stranu nejednakosti (5). Iako je  $f$  kompleksna funkcija, duž imaginarne ose je možemo posmatrati kao funkciju realne promenljive  $\omega$ , koristeći zapis

$$f(j\omega, \theta) = f(\omega, \theta) = f_R(\omega, \theta) + j f_I(\omega, \theta) \quad (8)$$

gde su  $f_R(\omega, \theta)$  i  $f_I(\omega, \theta)$  realni i imaginarni delovi funkcije  $f(\omega, \theta)$ . Primenom fundamentalne teoreme na izraz sa leve strane nejednakosti (5) dobijamo

$$f(j\omega, \theta) - f(j\omega, \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial f_R}{\partial \theta}(\omega, \beta) d\beta + j \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial f_I}{\partial \theta}(\omega, \beta) d\beta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\omega, \beta) d\beta \quad (9)$$

Uvrštavanjem dobijenog izraza, nejednakost (5) postaje

$$\left| \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) d\beta \right| < |f(j\omega, \theta_0)|, \forall \omega \in \mathbb{R}^+. \quad (10)$$

Iako nam je u interesu da pronađemo što veće  $\theta$  za koje nejednakost važi, možemo radi jednostavnosti uzeti konzervativniju vrednost  $\theta$  za koju možemo da tvrdimo da nejednakost važi. Kao posledica korišćenja konzervativnih vrednosti i nejednakosti, “skokovi” koje vršimo duž posmatrane prave biće manji. Drugim rečima, što konzervativnije vrednosti uzimamo, biće potrebno više iteracija da “pređemo” isti interval duž posmatrane prave.

Uzimajući to u obzir, levu stranu nejednakosti (10) možemo zameniti konzervativnijim izrazima

$$\left| \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) d\beta \right| \leq \int_{\theta_0}^{\theta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right| d\beta \quad (11)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right| d\beta \leq \left( \max_{\theta_0 \leq \beta \leq \theta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right| \right) (\theta - \theta_0). \quad (12)$$

Uvođenjem smene  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  koja predstavlja promenu ili “pomeraj” parametra  $\theta$  i primenom konzervativnijih granica, nejednakost (10) postaje

$$\Delta\theta < \frac{|f(j\omega, \theta_0)|}{\max_{\theta_0 \leq \beta \leq \theta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right|}, \forall \omega \in \mathbb{R}^+. \quad (13)$$

Dakle, ako nejednakost (13) važi za neki pomeraj  $\Delta\theta$ , sistem će biti stabilan za  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ . Pošto nejednakost mora da važi za svako  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , “dozvoljene” korake možemo izraziti uzimajući u obzir najmanju moguću vrednost izraza sa desne strane nejednakosti:

$$\Delta\theta < \min_{\omega} \frac{|f(j\omega, \theta_0)|}{\max_{\theta_0 \leq \beta \leq \theta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right|} \quad (14)$$

Opšti pregled postupka za analizu stabilnosti sistema sa karakterističnom funkcijom  $f(s, \theta)$  prikazan je kao Algoritam 1. Promenljiva  $\varepsilon$  koristi se kao kriterijum zaustavljanja algoritma.

---

#### Algoritam 1: Opšti pregled algoritma

---

$\theta_k = \theta_0;$

$\Delta\theta = \infty;$

**while**  $\Delta\theta > \varepsilon$  **do**

$$\left[ \begin{array}{l} \Delta\theta = \min_{\omega} \frac{|f(j\omega, \theta_k)|}{\max_{\theta_k \leq \beta \leq \theta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right|}; \\ \theta_k = \theta_k + \Delta\theta; \end{array} \right.$$

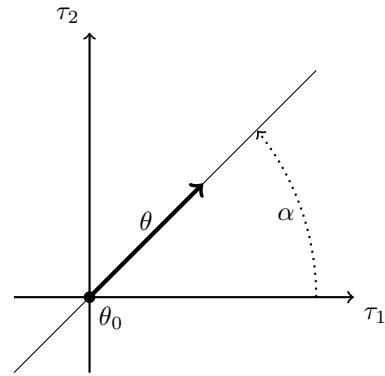

---

### III. PRIMER

Postupak ćemo primeniti na sistem sa karakterističnom funkcijom

$$f(s, \tau_1, \tau_2) = s^2 + 2se^{-s\tau_1} + e^{-s\tau_2}. \quad (15)$$

Stabilnost ispitujemo duž jedne prave u ravni parametara  $\tau_1 O\tau_2$ , kao što je prikazano na slici 3. Prava prolazi kroz



Slika 3. Ravan parametara  $\tau_1 O\tau_2$

koordinatni početak, i određena je uglom  $\alpha$ . Kretanje po pravoj opisujemo parametrom  $\theta$ , tako da važi

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \theta \cos(\alpha) \\ \tau_2 &= \theta \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (16)$$

Radi preglednijeg zapisa, koristićemo oznake  $a_1 = \cos(\alpha)$  i  $a_2 = \sin(\alpha)$ . Karakteristični polinom sistema izražen u zavisnosti od parametra  $\theta$  je

$$f(s, \theta) = s^2 + 2se^{-sa_1\theta} + e^{-sa_2\theta}. \quad (17)$$

Za  $\theta_0 = 0$ , lako je utvrditi da je sistem stabilan. Za primenu algoritma neophodno je dokazati da nejednakost (4) važi na luku konture  $\mathcal{C}$ . U našem primer, nejednakost (4) postaje

$$\begin{aligned} & \left| 2s(e^{-sa_1\theta} - e^{-sa_1\theta_0}) + (e^{-sa_2\theta} - e^{-sa_2\theta_0}) \right| \\ & < \left| s^2 + 2se^{-sa_1\theta_0} + e^{-sa_2\theta_0} \right|. \end{aligned} \quad (18)$$

Smenom  $s = \rho e^{j\varphi}$  za  $\rho \rightarrow \infty, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , nejednakost (18) je očigledno ispunjena za bilo koju vrednost parametara  $\theta$  i  $\alpha$  zbog većeg stepena promenljive  $s$  u desnoj strani nejednakosti u odnosu na levu.

Ovde ukazujemo na razlog za korišćenje fundamentalne teoreme analize. Dokazivanje nejednakosti (18) na imaginarnoj osi za  $s = j\omega$  nije jednostavno. Primenom fundamentalne teoreme analize dobijamo nejednakosti sa kojima je jednostavnije raditi. U skladu sa tim, dozvoljeni korak  $\Delta\theta$  određujemo iz nejednakosti (14) umesto direktno iz (18).

Naravno, veličina koraka u opštem slučaju zavisi od parametara  $\theta$  i  $\alpha$ . Prvo ćemo da posmatramo imenilac iz nejednakosti (14) koji možemo označiti sa

$$c = \frac{1}{\max_{\theta_0 \leq \beta \leq \theta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right|}. \quad (19)$$

Diferenciranjem funkcije  $f(s, \theta)$  i smenom  $s = j\omega$  dobijamo

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 2\omega^2 a_1 e^{-j\omega a_1 \theta} - j\omega a_2 e^{-j\omega a_2 \theta}. \quad (20)$$

Apsolutna vrednost ovog izraza je

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right| = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (21)$$

gde je

$$\begin{aligned} A &= 2\omega^2 a_1 \cos(\omega a_1 \theta) - \omega a_2 \sin(\omega a_2 \theta) \\ B &= -2\omega^2 a_1 \sin(\omega a_1 \theta) - \omega a_2 \cos(\omega a_2 \theta) \end{aligned} \quad (22)$$

Dalje računamo vrednost  $c$  određenu izrazom (19). Pošto vrednost  $c$  figuriše u izrazu čiju minimalnu vrednost tražimo, možemo umesto tačne vrednosti promenljive  $c$  koristiti njenu konzervativniju granicu:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\max_{\theta_0 \leq \beta \leq \theta} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right|} \\ &\geq \frac{1}{\max_{\beta \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(j\omega, \beta) \right|} \\ &\geq \frac{1}{\left| 2\omega^2 a_1 + \omega a_2 + j(2\omega^2 a_1 + \omega a_2) \right|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(2a_1\omega^2 + a_2\omega)} \end{aligned} \quad (23)$$

Sada nejednakost (14) postaje

$$\Delta\theta < \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{\omega} \frac{|f(j\omega, \theta_0)|}{2a_1\omega^2 + a_2\omega}. \quad (24)$$

Računanjem apsolutne vrednosti u brojiocu, nejednakost postaje

$$\Delta\theta < \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{\omega} \frac{(\omega^4 - 4\omega^3 s_1 + \omega^2(4 - 2c_2) + 4\omega s_{\alpha} + 1)^{\frac{1}{2}}}{2a_1\omega^2 + a_2\omega}. \quad (25)$$

gde je  $s_1 = \sin(a_1\omega\theta_0)$ ,  $c_2 = \cos(a_2\omega\theta_0)$  i  $s_{\alpha} = \sin(\sqrt{2}\omega\theta_0 \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}))$ . Traženje minimuma ovog izraza bi u opštem slučaju bilo složeno, te ćemo opet tražiti konzervativniju granicu minimuma. Primitimo da za izraz od kog tražimo minimum važi

$$\begin{aligned} &\frac{(\omega^4 - 4\omega^3 s_1 + \omega^2(4 - 2c_2) + 4\omega s_{\alpha} + 1)^{\frac{1}{2}}}{2a_1\omega^2 + a_2\omega} \\ &\geq \frac{(\omega^4 - 4\omega^3 + 2\omega^2 - 4\omega + 1)^{\frac{1}{2}}}{2\omega^2 + \omega} = g(\omega). \end{aligned} \quad (26)$$

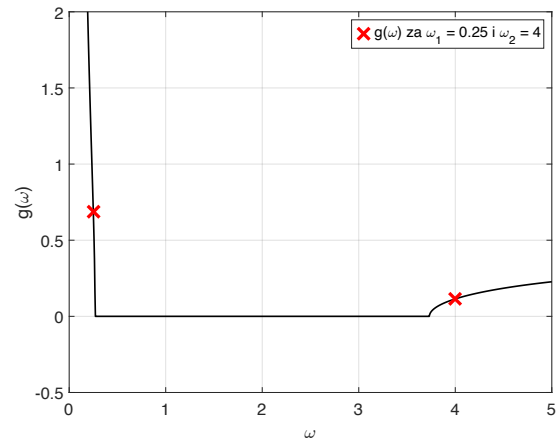
Nejednakost je dobijena uzimajući u obzir činjenicu da sinusne i kosinusne funkcije uzimaju vrednosti u intervalu  $[-1, 1]$  (podsećamo da su  $a_1$  i  $a_2$  takođe prostoperiodične funkcije).

Lako je utvrditi da za  $\omega \in (0, \frac{1}{4}] \cup [4, \infty)$  važi

$$\frac{(\omega^4 - 4\omega^3 + \omega^2 - 4\omega + 1)^{\frac{1}{2}}}{2\omega^2 + \omega} > 0.1. \quad (27)$$

Ovo tvrđenje je ilustrovano slikom 4. Skrećemo pažnju na činjenicu da je izraz pod korenom brojioca u (25) sigurno nenegativan. Uzimanjem najmanjih mogućih vrednosti trigonometrijskih funkcija, u korenu brojioca funkcije  $g(\omega)$  dobijen je polinom koji je negativan za neke vrednosti promenljive  $\omega$ . Zbog toga vrednost funkcije  $g(\omega)$  može biti kompleksna. Prilikom crtanja ove funkcije, na mestima gde funkcija poprima kompleksne vrednosti nacrtana je vrednost 0.

Na osnovu (27) zaključujemo da je i vrednost izraza pod minimumom u nejednakosti (25) veća od 0.1 za  $\omega \in$



Slika 4. Prikaz funkcije  $g(\omega)$

$(0, \frac{1}{4}] \cup [4, \infty)$ . Dalje ćemo minimum tražiti na intervalu  $\omega \in [\frac{1}{4}, 4]$ . Zbog ograničenosti intervala, možemo uvesti gornje ograničenje na vrednost imenioca i tvrditi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}} \min_{\omega \in [\frac{1}{4}, 4]} \frac{(\omega^4 - 4\omega^3 s_1 + \omega^2(4 - 2c_2) + 4\omega s_{\alpha} + 1)^{\frac{1}{2}}}{2a_1\omega^2 + a_2\omega} \geq \\ &\frac{1}{36\sqrt{2}} \left( \min_{\omega \in [\frac{1}{4}, 4]} (\omega^4 - 4\omega^3 s_1 + \omega^2(4 - 2c_2) + 4\omega s_{\alpha} + 1) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

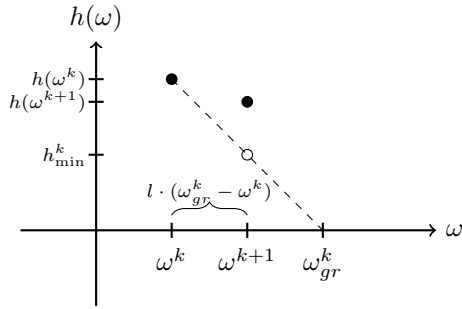
Problem se sada svodi na određivanje minimuma izraza  $h(\omega) = \omega^4 - 4\omega^3 s_1 + \omega^2(4 - 2c_2) + 4\omega s_{\alpha} + 1$  na intervalu  $\omega \in [\frac{1}{4}, 4]$ . Zbog ograničenosti intervala, moguće je pronaći gornju granicu za vrednost izvoda funkcije  $h$  na posmatranom intervalu:

$$\max_{\omega \in [\frac{1}{4}, 4]} \left| \frac{dh}{d\omega} \right| \leq 500 + |\theta_0|(256a_1 + 32a_2 + 16\sqrt{2}|a_3|) \quad (29)$$

Izvedenu gornju granicu izvoda funkcije  $h$  ćemo označiti simbolom  $\gamma$ . Koristeći ovu činjenicu, moguće je numerički pronaći donju granicu minimuma funkcije  $h(\omega)$  na intervalu  $\omega \in [\frac{1}{4}, 4]$ . Počnimo od tačke  $\omega = \frac{1}{4}$ . Računanjem vrednosti funkcije u toj tački (koja je sigurno pozitivna) i poznavajući gornju granicu izvoda funkcije na datom intervalu, zaključujemo da je funkcija  $h(\omega)$  sigurno veća ili jednaka nuli na intervalu  $\omega \in [\frac{1}{4}, \frac{h(\frac{1}{4})}{\gamma}]$ . Najveću vrednost  $\omega$  za koju možemo da tvrdimo da važi  $h(\omega) \geq 0$  označićemo sa  $\omega_{gr} = \frac{h(\frac{1}{4})}{\gamma}$ . Možemo uzeti proizvoljan broj iz intervala  $[\frac{1}{4}, \omega_{gr})$  kao novu vrednost promenljive  $\omega$ , i ponoviti postupak. Na ovaj način iterativno prelazimo interval  $[\frac{1}{4}, 4]$ , uvek birajući novu vrednost promenljive  $\omega$  po pravilu

$$\omega^{k+1} = \omega^k + l(\omega_{gr}^k - \omega^k), \quad (30)$$

gde promenljiva  $l \in (0, 1)$  određuje na koji način biramo novu vrednost  $\omega^{k+1}$  iz dozvoljenog intervala  $[\omega^k, \omega_{gr}^k]$ .



Slika 5. Grafički prikaz numeričkog traženja minimuma

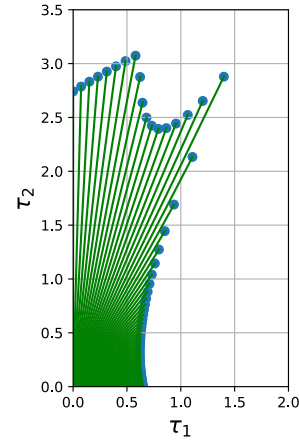
Donju granicu minimuma prilikom svakog koraka ažuriramo po pravilu

$$h_{\min}^k = \min \left( h_{\min}^{k-1}, (1-l)h(\omega^k) \right). \quad (31)$$

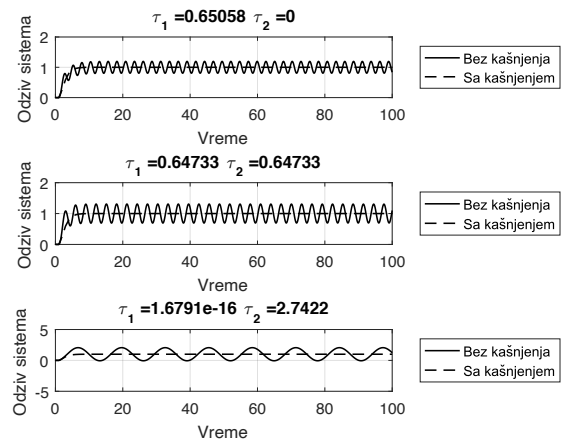
Jedna iteracija ovog postupka grafički je prikazana na slici 5. Zanimljivo je proučiti uticaj parametra  $l$  na efikasnost algoritma. Što je  $l$  veće, broj iteracija neophodnih da se “pređe” interval  $[\frac{1}{4}, 4]$  biće manji, ali će dobijena donja granica minimuma biti konzervativnija. Tokom eksperimenata smo za vrednost ovog parametra koristili  $l = \frac{1}{2}$ .

Koristeći navedene postupke, moguće je implementirati Algoritam 1 za primer koji smo analizirali u ovom radu. Dati algoritam pronalazi granicu stabilnosti duž jedne prave u ravni parametara  $\tau_1 O \tau_2$ . Na slici 6 nalazi se grafički prikaz rezultata algoritma primenjenog na više prava u ravni parametara, koristeći kriterijum zaustavljanja  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Računarski kod koji reprodukuje dobijene rezultate javno je dostupan na repozitorijumu [https://github.com/MoonRaven/stability\\_analysis](https://github.com/MoonRaven/stability_analysis). Numeričkom simulacijom moguće je proveriti stabilnost krajnje tačke sa svake prave, kako bi se utvrdio ispravan rad algoritma. Rezultati simulacije za tri takve tačke prikazani su na slici 7. Za svaku tačku dat je upoređan prikaz odziva sistema bez kašnjenja i sa kašnjenjima odgovarajućim za tu tačku. U svim slučajevima sistem je pobuđen step funkcijom  $u(t) = h(t)$ .

U ovom relativno jednostavnom primeru, stabilnost je moguće ispitati i iterativnom primenom Nikvistovog kriterijuma. Diskutovaćemo dobijene rezultate i na ovaj način, u cilju dodatne verifikacije dobijene oblasti stabilnosti. Posmatrani sistem sadrži unutrašnju i spoljašnju petlju, kao što se vidi na slici 1. Zbog toga je neophodno Nikvistov kriterijum primeniti prvo na unutrašnju petlju sistema, potom na spoljašnju. Na slici 8 prikazani su Nikvistovi dijagrami za tri odabrane tačke iz ravni parametara. Sve tri tačke pripadaju pravoj određenoj uglom  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  i za svaku tačku su prikazani dijagrami unutrašnje i spoljašnje petlje. Na osnovu skicirane oblasti stabilnosti sa slike 6 očekivano je da se prva tačka nalazi unutar oblasti stabilnosti, da je druga tačka bliska granici stabilnosti i da je treća tačka nestabilna. Prikazani Nikvistovi dijagrami potvrđuju očekivane rezultate; unutrašnja petlja sistema je uvek stabilna, ali je spoljašnja petlja granično stabilna za drugu i nestabilna za treću tačku.



Slika 6. Grafički prikaz rezultata



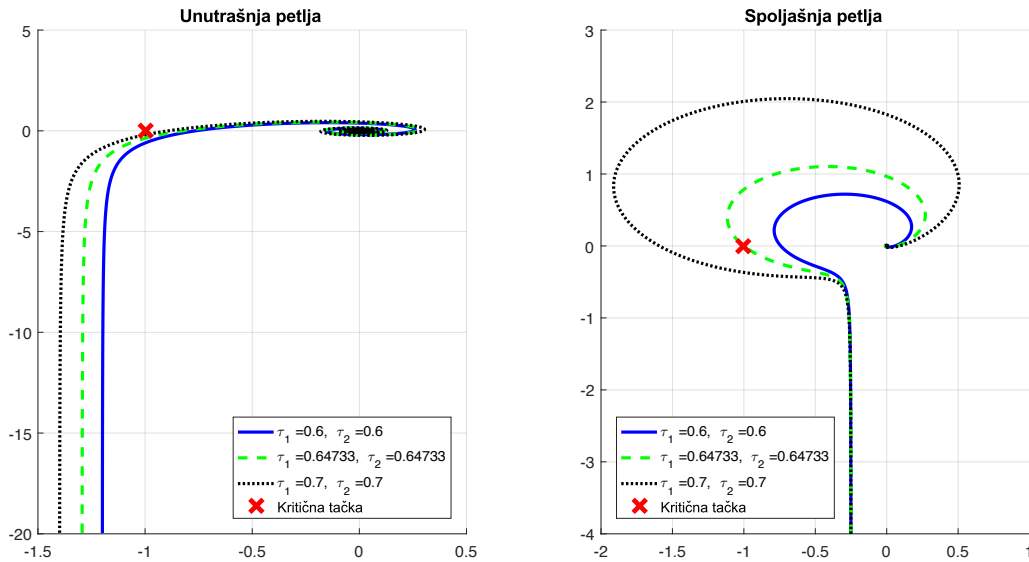
Slika 7. Numerička simulacija krajnjih tačaka intervala

Ovde ukazujemo i na činjenicu da je za diskusiju Nikvistovog dijagrama spoljašnje petlje potrebno poznavati broj nestabilnih polova unutrašnje petlje. Drugim rečima, neophodno je porediti broj obuhvata oko kritične tačke za spoljašnju i unutrašnju petlju. Ovo ćemo ilustrovati Nikvistovim dijagramima posmatranog sistema za kašnjenja  $\tau_1 = \tau_2 = 0.8$ . Odgovarajući dijagrami su prikazani na slici 9. Činjenica da Nikvistova kriva spoljašnje petlje ne obuhvata kritičnu tačku  $-1 + 0j$  nam ukazuje na to da je sistem nestabilan, zbog toga što Nikvistova kriva unutrašnje petlje obuhvata kritičnu tačku jednom.

#### IV. ZAKLJUČAK

U ovom radu smo prikazali algoritam za ispitivanje stabilnosti dinamičkih sistema sa višestrukim vremenskim kašnjenjima. Iako je postupak ilustrovan na primeru sistema sa dva vremenska kašnjenja, jasno je da se na direktan način može proširiti i na sisteme sa većim brojem kašnjenja. Prikazanim postupkom, stabilnost se ispituje duž fiksiranih





Slika 8. Nikvistovi dijagrami spoljašnje i unutrašnje petlje za tri odabrane tačke iz ravni parametara



Slika 9. Nikvistovi dijagrami sistema za  $\tau_1 = \tau_2 = 0.8$

pravaca u prostoru kašnjenja. Međutim, kao što je pokazano u radu, uzastopnom primenom na niz ovakvih pravaca moguće je skicirati oblik oblasti stabilnosti.

U daljem radu, bavićemo se proširenjem prikazanog algoritma. Konkretno, bavićemo se stabilnošću šire klase sistema sa beskonačno stepeni slobode, uključujući i sisteme sa distribuiranim parametrima. Takođe, po ugledu na [7] i [8], bavićemo se proširenjem algoritma kojom se stabilnosti direktno garantuje u oblasti, a ne samo duž pravca.

#### ZAHVALNICA

M.R.R. se zahvaljuje na podršci Ministarstvu Prosvete, nauke i tehnološkog razvoja R. Srbije, projektima TR32012 i TR33018.

#### LITERATURA

- [1] Eric A. Faulkner. *Introduction to the Theory of Linear Systems*. Springer, 1969.

- [2] Su Juing-Huei, Fong I-Kong, and Tseng Chwan-Lu. Stability analysis of linear systems with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1341–1344, June 1994.
- [3] Frédéric Gouaisbaut and Dimitri Peaucelle. Delay-dependent stability analysis of linear time delay systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(10):54 – 59, 2006. 6th IFAC Workshop on Time Delay Systems.
- [4] Griengrai Rajchakit. Stability analysis of linear systems with time delays. *Journal of Sound and Vibration - J SOUND VIB*, 51, 01 2012.
- [5] Abdelaziz Hmamed, Hicham El Aiss, and Ahmed El hajjaji. Stability analysis of linear systems with time varying delay: An input output approach. In *2015 IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1756–1761, 12 2015.
- [6] Tomislav B. Šekara and Milan R. Rapačić. A revision of root locus method with applications. *Journal of Process Control*, 34:26 – 34, 2015.
- [7] *Stability of fractional incommensurate systems*, July 2016.
- [8] Rachid Malti and Milan Rapačić. Sufficient stability conditions of fractional systems with perturbed differentiation orders. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):14557 – 14562, 2017. 20th IFAC World Congress.
- [9] C. Berg. *Complex Analysis*. Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, 2008.
- [10] S.G. Krantz and S.G. Krantz. *Handbook of Complex Variables*. Birkhäuser Boston, 1999.

#### ABSTRACT

This paper focuses on the problem of obtaining a stability region of linear, time-invariant systems with multiple time delays. The presented method is iterative and is based on the application of the Rouché's theorem and the fundamental theorem of calculus. The method is illustrated with an example.

**Stability of linear dynamical systems with time delays**  
V. Turkulov, M. R. Rapačić, R. Malti