



**HAL**  
open science

# UN MODÈLE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS DANS LES SITUATIONS DIDACTIQUES : ÉTUDE DES NIVEAUX DE PREUVES DANS UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION DE LIMITE

Isabelle Bloch, Patrick Gibel

► **To cite this version:**

Isabelle Bloch, Patrick Gibel. UN MODÈLE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS DANS LES SITUATIONS DIDACTIQUES : ÉTUDE DES NIVEAUX DE PREUVES DANS UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION DE LIMITE. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2011. hal-02525901

**HAL Id: hal-02525901**

**<https://hal.science/hal-02525901>**

Submitted on 31 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN MODELE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS DANS LES  
SITUATIONS DIDACTIQUES : ETUDE DES NIVEAUX DE  
PREUVES DANS UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT DE LA  
NOTION DE LIMITE

Isabelle Bloch\*, Patrick Gibel\*

MODELLING REASONING IN PROBLEM SOLVING SITUATIONS:  
DIFFERENT LEVELS OF PROOF IN THE TEACHING OF LIMITS

**Abstract** – In this paper we present a model in order to analyse the reasoning processes produced in solving problems situations (situations with an adidactical dimension). Argumentations can be identified by elements of different nature: language, calculations, formulas, graphs... These elements are usually interpreted as signs in a representative setting or as elements of a proof or a demonstration. We choose not to emphasize these components, but to explain that three axes are useful in order to analyse reasoning: the first one is linked to the level of milieu in the situation, which establishes more or less the form and logical status of the mathematical statements; the second one is stated with respect to the functions of the reasoning processes; the third dimension is a semiotic one that considers the forms of the statements. We perform this study using the Theory of Didactical Situations (TDS) and Peirce's semiotic theory. We exemplify this model with an experimental analysis of reasoning processes in a situation about calculus, with 17-years old scientific students.

**Key-words:** adidactical situations, proof, reasoning, representative settings, calculus, limit.

UN MODELO PARA ANALIZAR EL RAZONAMIENTO PRODUCIDO  
EN SITUACIONES DIDACTICAS: ESTUDIO DE LOS NIVELES DE  
PRUEBAS EN LA ENSEÑANZA DE LA NOCION DE LIMITE

**Resumen** – En este trabajo presentamos un modelo para analizar el razonamiento producido en situaciones didácticas que implican una dimensión de investigación (situaciones con una dimensión adidáctica). Los razonamientos se traducen por elementos del lenguaje, cálculos, escritura, gráficos que habitualmente se interpretan como signos de un registro de representación, o como elementos de una fase de prueba o demostración. En lugar de centrarnos sobre estos aspectos, mostramos tres ejes necesarios para

---

\* Université de Bordeaux, LACES (Laboratoire Culture, Education, Société) –  
isabelle.bloch@u-bordeaux4.fr – patrick.gibel@aquitaine.iufm.fr

analizar los razonamientos: el primero está unido al medio en la situación, nivel en el que están vinculados la forma y el estatus lógico de las proposiciones; el segundo se refiere a las funciones del razonamiento; el tercero es un eje de naturaleza semiótica basado en el análisis de las representaciones. Este estudio utiliza dos marcos teóricos complementarios: la Teoría de las Situaciones Didácticas y la semiótica de Peirce. Ejemplificamos este modelo mediante el análisis de razonamientos que surgen en las diferentes fases de una situación en una dimensión adidáctica: la situación del copo de nieve de Von Koch con estudiantes de secundaria de 17 años.

**Palabras-claves:** situaciones adidacticas, pruebas, razonamientos, registro de representación, cálculo, límite.

#### RESUME

Dans ce texte nous présentons un modèle afin d'analyser les raisonnements produits dans les situations didactiques comportant une dimension de recherche (situations à dimension adidactique). Ces raisonnements se traduisent par des éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques, qui sont habituellement interprétés comme des signes appartenant à un registre de représentation, ou comme des éléments d'une phase de preuve ou de démonstration. Plutôt que de nous focaliser sur l'un ou l'autre de ces aspects, nous montrons que trois axes sont nécessaires pour analyser les raisonnements : le premier est attaché au niveau de milieu dans la situation, niveau auquel sont liés la forme et le statut logique des énoncés émis ; le deuxième concerne les fonctions du raisonnement ; le troisième est un axe de nature sémiotique basé sur l'analyse des représentations. Cette étude est conduite en articulant deux cadres théoriques complémentaires : la TSD et la sémiotique de Peirce. Nous illustrons notre propos par l'analyse des raisonnements entrepris dans les différentes phases d'une situation comportant une dimension adidactique : la situation du flocon de Von Koch en fin de secondaire.

**Mots-clés :** situations à dimension adidactique, preuve, raisonnement, répertoire de représentations, analyse, limite.

## INTRODUCTION

La recherche de caractéristiques des raisonnements des élèves dans l'enseignement des mathématiques est concomitante des premières études sur cet enseignement : les premières questions sur les capacités des élèves à raisonner, prouver, démontrer ont été posées il y a déjà longtemps dans les bulletins de spécialistes et dans les premiers travaux de didactique, et n'ont cessé depuis d'enrichir la littérature sur cet enseignement, que ce soit d'un point de vue professionnel (cf. par exemple les publications de l'APMEP et Repères IREM) ou didactique : la 19<sup>e</sup> étude ICMI sur la preuve en est une illustration (<http://ocs.library.utoronto.ca/index.php/icmi/8>). Les actes de cette étude (Lin, Hsieh, Hanna & de Villiers 2009), en deux volumes de plus de trois cents pages chacun, témoignent de l'ampleur du travail.

Si, comme on peut bien le penser, la principale préoccupation professionnelle a été et continue à être de se demander comment amener les élèves à 'bien raisonner' et à démontrer, beaucoup de recherches en didactique se focalisent plutôt sur les fonctions et les formes du raisonnement et leur place dans l'activité mathématique. De ce point de vue, deux approches coexistent : d'une part des observations empiriques de raisonnements spontanés d'élèves, avec une étude des indices cognitifs identifiables ; et d'autre part, la production de modèles différents se centrant tantôt sur les registres sémiotiques utilisés par les professeurs et les élèves, tantôt sur la fonction des raisonnements, tantôt sur le guidage par le professeur... tantôt, encore, sur le caractère local ou global des assertions et de leur mode de preuve.

Notre ambition est d'élaborer un modèle multidimensionnel permettant une visibilité des raisonnements produits dans certaines situations didactiques. Un postulat de notre travail est que la Théorie des Situations Didactiques (TSD, cf. Brousseau 1998) fournit un cadre premier pour cette étude ; et notamment que l'analyse des fonctions du raisonnement dans les niveaux de milieux – précisés plus loin – permet une catégorisation. Ce cadre devra cependant être complété par des outils d'analyse locale, et par une analyse des fonctions des raisonnements et des signes (formels, langagiers) qui le soutiennent, notamment en nous référant à la sémiotique peircienne. Nous inscrivons aussi cette recherche dans la continuité de plusieurs études récentes (nous les discutons ci-dessous) qui ont analysé l'un ou l'autre aspect de l'argumentation en classe.

Les travaux de didactique ont mis l'accent sur différentes caractéristiques des preuves et du raisonnement. Nous n'entreprendrons pas une analyse exhaustive des recherches, laquelle dépasserait largement le cadre de cet article. Si l'on consulte les sites de *La Lettre de la Preuve*<sup>1</sup> et *l'Etude ICMI 19* (voir plus haut), on trouve une abondance de substantifs qui s'avère révélatrice des nombreuses approches et de leur champ d'application. Pour ne donner que quelques exemples de termes fréquemment rencontrés dans les publications sur le raisonnement et la preuve, on peut citer : conjecture, explication, argumentation, signification, justification, généralisation ; rationalité, évidence, certitude ; formulation, résolution, validation, vérification, décision ; inférence, déduction, abduction ; langage, sémiotique, théorèmes, preuves empiriques, preuves formelles, preuves syntaxiques, sémantiques... Certains chercheurs travaillant dans le cadre de la TSD ont notamment analysé les formes et les fonctions des raisonnements et explications en situation didactique (Moreira, 1993 ; Orus Baguena & Greslard, 1994 ; Mopondi, 1995).

Nous n'allons certes pas reprendre tous ces éléments. Nous comptons cependant intégrer à notre modèle les travaux qui éclairent le raisonnement du point de vue de ses fonctions dans la situation, ou du point de vue des représentations produites et de leur statut. Nous nous appuyerons de façon privilégiée sur le travail de thèse de Gibel (2004) qui porte précisément sur les fonctions du raisonnement en référence aux niveaux de milieux dans les situations adidactiques.

Après une étude de travaux récents particulièrement pertinents pour notre recherche, nous donnons une définition des principaux termes employés dans cet article ; nous détaillons notre modèle et l'appliquons à une situation d'entrée dans l'Analyse élémentaire en classe de Première scientifique française<sup>2</sup>.

## L'ETUDE DU RAISONNEMENT EN SEMIOTIQUE ET DANS LES RECHERCHES EN DIDACTIQUE

### 1. La sémiotique peircienne

C.S. Peirce est un philosophe pragmatiste étasunien de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, qui a conçu un système sémiotique permettant de rendre compte de la production et de l'interprétation des signes,

---

<sup>1</sup> <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990910.html>

<sup>2</sup> Grade 11, élèves de 17–18 ans dans un cursus scientifique général.

notamment autres que langagiers. Ainsi la sémiotique générale de C.S.Peirce est conçue pour l'étude de signes de nature très variée, et donc particulièrement adaptée aux mathématiques. De plus Peirce ne dissocie pas pensée et signe, et propose une interprétation dynamique du lien entre un signe et un objet, interprétation qui peut permettre de penser les changements de statut des symboles et des énoncés, en particulier dans un processus d'enseignement / apprentissage des mathématiques. Cette prise en compte de l'aspect dynamique permet également d'aller plus loin que l'étude de la simple mise en œuvre des registres de représentation : cet aspect est associé à la dimension opérationnelle des ostensifs mathématiques, c'est-à-dire à la possibilité qu'ils offrent de fabriquer de nouveaux signes par des règles plus ou moins algorithmiques. La pragmatique de Peirce – c'est-à-dire la mise en œuvre des catégories de son système sémiotique dans des situations – permet ainsi d'engager une réflexion sur des mécanismes envisageables de construction de situations adidactiques qui s'appuieraient sur cette dynamique. Il est également possible d'analyser, soit a priori, soit a posteriori, les *sémioses* à l'œuvre dans une situation, c'est-à-dire les processus interprétatifs possibles ou effectifs dans le système de signes disponibles.

Soulignons les dimensions fortes de la pragmatique peircienne<sup>3</sup> :

- Dans cette pragmatique, il n'y a pas d'un côté *la pensée*, de l'autre *les signes* qui la 'représentent' qui en 'rendent compte', voire qui la 'médiatisent' : la pensée est dans sa nature même un signe.
- Tout signe est triadique et composé de 3 éléments qui sont des fonctions et non des attributions : le *representamen* : R ; l'*objet* O : ce qui représenté par R ; l'*interprétant* I : ce qui met en relation R et O. Ainsi que le dit Peirce (1978) :

Ma définition est la suivante : un representamen est sujet d'une relation triadique avec un second appelé son objet, pour un troisième appelé son interprétant, cette relation triadique étant telle que le representamen détermine son interprétant à entretenir la même relation triadique avec le même objet pour quelque interprétant. (Op. cité, p.117)

Ces trois places sont des fonctions identifiées dans un processus sémiotique donné : ainsi 'Pomme' peut être *representamen* de l'objet pomme, ou 'Pomme' peut se trouver *interprétant* du mot 'golden', ou 'Pomme' est *objet* du mot 'apple' dans une traduction. Dans un

---

<sup>3</sup> Pour une description moins schématique de la pragmatique peircienne, se reporter aux références : Everaert-Desmedt (1990), Tiercelin (1993), les écrits de C.S. Peirce, et le site [www.signosemio.com](http://www.signosemio.com)

processus sémiotique l'interprétant d'un signe est dépendant du contexte d'interprétation, ou des arrière-plans, si l'on préfère. Ainsi 'apple' peut aussi renvoyer à une marque d'ordinateur...

Le sens d'un signe n'est jamais figé : l'interprétation est un processus dont le sens final est en devenir. Si un signe est vu comme une triade, l'interprétant de cette triade peut à son tour devenir un representamen, point de départ d'une nouvelle triade-signe et par conséquent d'une nouvelle interprétation.

Tout phénomène (partant, chaque instance de la pensée-signe) appartient à l'une des trois catégories suivantes : *priméité* (catégorie de la qualité générale, de la possibilité : signes vus comme des *icônes*), *secondéité* (catégorie de l'existence, des faits, des actions et réactions, signes qui sont des *indices*), *tiercéité* (catégorie de la loi, de la médiation et signes *symboles-arguments*). Ainsi, un signe peut être une *icône* (priméité) de ce à quoi il renvoie, comme la Tour Eiffel de Paris ; il peut être un *indice* (secondéité) comme un panneau routier indiquant 'Paris' ; il peut être un signe-règle, comme un plan de Paris.

Les phénomènes mathématiques et les signes qu'ils induisent, y compris dans l'enseignement, appartiennent tous à l'ordre de la secondéité ou tiercéité : les interprétants mathématiques d'une situation conduisent à énoncer des règles, des propriétés. Cependant :

1) toutes les règles mathématiques ne sont pas de même niveau : l'interprétation mathématique de '3' nécessite une relation de signe-règle indiciel – qui nous dit quelque chose de son objet – car il y a une loi qui met en relation le signe '3' et le cardinal d'un ensemble à trois éléments. Par contre '145' est un signe-règle 'argumental', qui implique la tiercéité et que Peirce appelle *symbole* : pour relier ce signe au cardinal convenable, il faut de plus connaître la règle de numération employée.

Un argument est un signe dont l'interprétant représente son objet, comme étant un signe ultérieur par le moyen d'une loi. (Ibidem, p.183).

2) les élèves ne voient pas toujours les signes avec l'interprétant du niveau requis : ainsi un nombre peut n'être vu par certains élèves que comme une succession de chiffres. Un *representamen* sera interprété de façon variable selon le niveau de la sémiose dans laquelle se trouve l'interprétant effectif, et un signe produit à un certain niveau peut être interprété à un niveau inférieur : c'est la 'déflation interprétative'. Précisons que ce phénomène de déflation interprétative se produit régulièrement à tous les niveaux d'enseignement des mathématiques, et il est compatible avec la théorie peircienne du sens comme étant à *venir* : le professeur énonce un concept dont la compréhension ne pourra mieux advenir que dans les

relations futures du même concept avec les objets mathématiques de la même théorie ou des théories connexes, pensons par exemple aux concepts de limite ou d'intégrale.

Dans notre usage de la sémiotique peircienne, nous garderons les trois désignations icône, indice, symbole/argument : une interprétation iconique est de l'ordre de l'intuition, éventuellement sur un schéma, une figure (la suite des figures est d'aire finie...); un signe indiciel est de l'ordre d'une proposition (« la formule  $(4/3)^n$  indique que cela grandit indéfiniment »); un symbole/argument est de l'ordre d'une preuve mathématique («  $(4/3)^n$  peut dépasser n'importe quel  $10^p$  »).

## 2. Peirce et l'analyse des raisonnements mathématiques

Avant de repréciser quelques points de la TSD, nous exposons quelques éléments qui nous paraissent particulièrement significatifs pour éclairer notre position épistémologique relativement à l'utilisation des théories peirciennes. Nous citons largement Otte (2006) qui a développé ce point de vue.

Dans cette épistémologie, on ne peut distinguer un concept de ses représentations ; les mathématiques sont considérées comme n'ayant pas de sens fondamental, ni dans leurs théories structurelles, ni par rapport à l'objectivité intuitive de la perception des objets et de leurs relations. Signe et sens sont des processus, ainsi que le montre Peirce (1978, 1995) ; et, ainsi que l'explique Tiercelin (1993), dans la pragmatique peircienne, on ne peut distinguer signe et pensée.

Otte rappelle aussi que, en citant Peirce,

“Consciousness is used to denote the *I think*, the unity of thought ; but the unity of thought is nothing but the unity of symbolization. Unity of thought is nothing but consistency, or the recognition of it. Consistency belongs to every sign, so far as it is a sign.” (Peirce, CP 5.513-15 and 7.585, incite dans Otte 2006, p.25)

Et Otte ajoute :

The symbol is the mediate between conscious feeling and objective reaction and should provide this interaction with a certain form of representation. This is the only manner in which we can know, that is, by constructing a relevant representation of some kind. (Ibid., p.25)

Pour Otte, suivant Peirce, la cognition n'est rien d'autre qu'une confrontation entre sujet et objet ; cette confrontation, ajoutons-nous, amène à construire des représentations – des signes : ces signes rendent compte, dans cette interaction, du sens de l'objet. Les objets apparaissent eux-mêmes, dans la confrontation, sous la forme de symbolisations, de situations modélisables, en bref de premiers signes décodables d'une certaine façon.

Dans l'épistémologie peircienne, ces considérations sur la façon de connaître, donc d'apprendre, se doublent de réflexions du même ordre sur la nature des mathématiques (cf. ci-dessus). Ainsi la conception basée sur l'intuition a priori d'objets mathématiques spontanés, existant et se donnant à voir dans le quotidien, à partir desquels les autres objets sont construits (Euclide), non plus que la conception formelle, ne sont adéquates avec une vue des objets comme construits pragmatiquement et développés selon les nécessités des théories et de leurs applications. Citons encore Otte :

Mainly pragmatic reasons are responsible for the choice of axioms, reasons that are related to the development of mathematical knowledge and the construction of theories. But what about the problem of explanation then? To explain amounts to exhibiting the meaning of something. Mathematics has, however, no definite meaning, neither in the structural intra-theoretical sense nor with respect to intuitive objectivity. Signs and meanings are processes... (Ibid. p.31)

Ainsi une preuve ne donnera pas non plus de sens ni ne pourra fournir d'explication sur le pourquoi de sa construction et des caractéristiques des objets pour lesquels elle est conçue : pour Peirce (1995), les mathématiques s'occupent à tirer des conclusions nécessaires, et à définir l'état idéal ou hypothétique des choses. Les preuves sont donc constituées de jugements apodictiques (c'est-à-dire des assertions) montrant qu'un énoncé est nécessaire ; de plus elles tirent leur caractère général du fait de substituer des hypothèses à des conceptions isolées. Il s'ensuit que leur caractère de généralisation est tout à fait essentiel ; il s'effectue par une substitution d'une déclaration générale à plusieurs constats ponctuels. Dans le milieu objectif (au sens de la TSD, cf. § 1.4), il existe une suite de déclarations ponctuelles sur les objets mathématiques manipulés ; une preuve constitue alors une synthèse de ces formulations locales. Du même coup, cette synthèse étend le domaine de validité de chacune des assertions ponctuelles relatives à des objets locaux (que l'on songe par exemple à l'algèbre, vue comme généralisation de faits arithmétiques).

Dans le corpus étudié – sur les limites – il est tout à fait frappant de voir comment, à partir d'un certain niveau de finalisation de la situation, tous les argumentaires trouvent leur aboutissement dans une formule très simple, mais néanmoins convaincante, parce qu'elle a été précédée du processus antérieur. Il n'est donc guère étonnant qu'en tant que chercheurs utilisant la TSD comme cadre principal, nous soyons intéressés par cette façon de concevoir les interactions cognitives et sémiotiques : l'un des buts de la TSD est en effet de proposer des situations adéquates à un objet de savoir, et d'étudier la

confrontation qui peut être organisée entre cette situation et les connaissances des élèves.

De ce point de vue, l'étude des signes produits est opérationnelle à deux niveaux : soit dans une perspective de diagnostic, ainsi que nous l'avons utilisée en ASH (Bloch 2008) ; ou bien, dans l'analyse a posteriori où elle corrobore l'analyse a priori en termes de milieux, afin d'attester de l'activation prévue des connaissances et de l'issue en termes de savoir. C'est cette dernière fonction que nous lui attribuons dans ce texte.

### **3. Situations adidactiques, niveaux de milieux et entrée dans un processus de preuve**

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement issues de situations fondamentales d'un savoir dans la TSD a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (cf. Legrand 1997). Notons toutefois que les situations parfois dites adidactiques sont des réalisations, dans la contingence, de modèles d'une situation fondamentale d'un savoir : en ce sens, ces situations comportent des phases plus ou moins adidactiques ou à dimension adidactique (cf. Bloch, 1999), et des phases didactiques. L'élaboration et l'analyse a priori de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés ; l'analyse a posteriori vérifie une concordance raisonnable du déroulement effectif avec la situation anticipée.

Le modèle de structuration du milieu que nous utilisons est celui de Bloch (2006), issu primitivement du modèle de Margolinas (1994) mais modifié pour tenir compte du rôle du professeur dans les situations adidactiques. Dans ce texte nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux, et plus précisément, à l'élaboration et à la construction du *milieu expérimental a priori* relatif à notre situation, et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence (Bloch 2006).

La TSD définit ainsi trois champs de construction et d'analyse des situations : le champ *théorique*, domaine de l'élaboration des situations fondamentales d'un savoir, essentiellement épistémologique et qui élabore la construction du jeu théorique d'une situation avec ses variables mathématiques. Le champ *expérimental a priori* s'occupe de la déclinaison de cette situation mathématique à un niveau donné d'enseignement, du jeu possible des élèves et des variables didactiques à conserver, suivant les connaissances des élèves et leurs possibilités d'entrée dans le jeu (conditions de la dévolution). Ce deuxième niveau est celui où se fait l'analyse a priori de la situation, afin de garantir, autant que faire se peut, une réalisation en adéquation avec le niveau

épistémologique. Enfin le troisième niveau est celui de la contingence, où, comme dit ci-dessus, la mise en œuvre de la situation nécessite en général une alternance de phases didactiques et adidactiques, et où l'observation permet, a posteriori, d'attester de ce que le savoir visé a pu, ou non, être mis en jeu dans le travail des élèves et du professeur.

Le tableau ci-dessous résume les niveaux de milieu – de M1 à M-3 – correspondant à la *situation expérimentale*. Les niveaux négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions (apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique), car c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (milieu heuristique) et le milieu de référence que nous pourrions voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

M1 Milieu didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	
M0 Milieu d'apprentissage : institutionnalisation	E0 : Elève	P0 : Professeur enseignant	S0 : situation didactique	
M-1 Milieu de référence : formulation & validation	E-1 : E- apprenant	P-1 : P régulateur	S-1 : situation d'apprentissage	a-
M-2 Milieu objectif : action	E-2 : E- agissant	P-2 : P dévolueur observateur	S-2 : situation de référence	didac
M-3 Milieu matériel	E-3 : E- objectif		S-3 : situation objective	tique

**Tableau 1** – La structuration du milieu

Les situations que nous envisageons d'analyser dans une perspective d'étude des raisonnements correspondent à une construction dans ce modèle de milieu, comme nous le montrerons dans l'analyse a priori de la situation du flocon de Von Koch ; de plus, remarquons que dans les situations à dimension adidactique le savoir se montre comme nécessaire – dimension pointée par Otte à la suite de Peirce, et explorée également par Sackur, Assude, Maurel, Drouhard et Paquelier (2005) – dans la mesure où il s'agit de situations retournées, c'est-à-dire que la consigne présente dans le milieu de référence est une condition à atteindre : il faut trouver les états qui permettront que les objets désignés vérifient la condition précitée (cf. Bloch 2005). Notons que la notion de *situation retournée* est un concept émergent de l'ingénierie didactique, c'est-à-dire un résultat d'ingénierie – ici de la situation du jeu des envahisseurs (Bloch 2005) et de la situation

Graphiques et chemins (Bloch 2003) – candidat à être réinvesti comme concept de cette théorie. C'est ce que Bessot (2011) appelle un concept issu d'une ingénierie phénoménotechique.

Cette élaboration du milieu écarte, de fait, des approches "pseudo expérimentales" dénoncées, par exemple, par Bartolini-Bussi (2009) et qui, montrant comme évident un savoir contingent, ne peuvent faire entrer les élèves dans un processus de justification.

Remarquons brièvement la concordance trouvée également dans l'approche de Arzarello, Paola et Sabena (2009) qui ont observé trois phases dans un processus de preuve sur une situation de recherche de limite et de pente d'une tangente : ces phases correspondent à une augmentation progressive de la généralité des objets mathématiques traités. Ces étapes correspondent à des sauts légitimant petit à petit les conjectures par des procédures *abductives* (étant donné un résultat, on imagine une hypothèse dont il puisse découler logiquement) : on retrouve encore Peirce. Les phases signalées par Arzarello et al. marquent le passage d'une phase exploratoire à une phase déductive, conformément au changement de niveau de milieu, du milieu objectif heuristique au milieu de référence (cf. Gibel 2006).

Arzarello et al. notent aussi que, dans la situation qu'ils proposent, les étudiants ne sont pas arrivés jusqu'à un processus achevé de preuve – et ce processus n'était pas attendu, dans la mesure où la situation étant une situation de première approche de l'Analyse, ces étudiants ne disposaient pas d'une théorie de référence pouvant leur permettre d'explicitier une preuve correcte du résultat cherché dans la théorie. C'est aussi ce qui se produit dans la situation du flocon de Von Koch, et nous ne manquerons pas de pointer les limites que cela induit dans le raisonnement des élèves.

Pour Healy (2000) cependant, le processus de généralité n'est pas forcément linéaire, et les étudiants peuvent balancer d'un cas particulier à une procédure générale. Du reste, l'expérience singulière peut, pour cette auteure, avoir des vertus dont le cas général n'est peut-être pas porteur. De façon similaire, lors de la mise en œuvre de situations à dimension adidactique nous observons des allers-retours entre le milieu objectif et le milieu de référence. Ces allers-retours ne nuisent pas nécessairement aux raisonnements, comme déjà signalé dans Bloch (1999) et comme nous le retrouvons dans l'étude actuelle.

#### **4. L'analyse des raisonnements en situation de validation**

L'analyse fine des raisonnements produits en situation de validation ne peut se restreindre à une analyse en termes de calcul propositionnel basée sur la logique dialogique de Lorenzen, ainsi que l'indique Durand-Guerrier (2007). Celle-ci met en évidence que le modèle de

Lorenzen ne suffit pas pour comprendre et analyser l'activité mathématiques en situation de validation et fait l'hypothèse que :

Ce modèle contribue à donner [de l'activité mathématique] une image déformée, en exacerbant le travail sur les énoncés au détriment du travail sur les objets, leurs propriétés et les relations mutuelles qu'ils entretiennent. (Durand-Guerrier 2007, p.23)

Barrier (2008), s'appuyant sur cette précédente recherche, met en évidence la limite de ce modèle pour l'analyse de situations de validation explicite et justifie ainsi la nécessité de proposer un modèle qui tienne compte de la dimension sémantique des raisonnements produits par les élèves. Il insiste sur le fait qu'il n'est pas possible, lors de l'analyse fine des dialogues en situation de validation, de séparer le travail sur les objets, qui constituent le milieu, du travail sur les énoncés produits par les élèves. Afin d'intégrer cette dimension sémantique, Barrier fait le choix d'analyser les interactions entre élèves en utilisant la sémantique de Hintikka (Hintikka & Sandu, 1997) permettant ainsi de conjuguer l'analyse syntaxique et l'analyse sémantique. Hintikka pose ainsi le problème en termes de jeu intérieur (formel, syntaxique) et extérieur (sémantique).

Dans la situation que nous analysons, les élèves ont successivement à conjecturer sur des objets particuliers, puis à énoncer des formules. À ces occasions on peut observer de façon répétée le phénomène de jeu sémantique permettant de s'assurer que deux formules proposées sont bien équivalentes. Ceci rejoint aussi l'hypothèse de Barallobres (2007) selon lequel l'usage des formules comme outils de calcul

permet de donner du sens à l'équivalence de deux expressions algébriques qui, au départ, objectivent un ensemble d'actions 'différentes' (Barallobres 2007, p.41).

Dans notre expérimentation, le passage observé, dans certains groupes, d'un calcul formel à une phase calculatoire 'donnant du sens' correspond bien à cette alternance de jeu intérieur – la rémanence dans le formel – et de jeu extérieur : le basculement dans une action sémantique. Cette alternance nous paraît également renvoyer aux niveaux de connaissances de Drouhard (2007) : le syntaxique contrôle la procédure (connaissances de niveau I) alors que le sémantique contrôle le sens (connaissances de niveau II). Le tout s'exprime notamment dans les aspects pragmatiques de la communication, comme il est prévu chez Hintikka – nous le verrons à l'œuvre dans les formulations étudiées dans la partie expérimentale.

## UN MODELE MULTIDIMENSIONNEL POUR L'ANALYSE DES RAISONNEMENTS

### 1. Les trois axes d'analyse des raisonnements

Le terme *raisonnement*, dans le cadre de la didactique des mathématiques, tend à couvrir un champ plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. Pour cette raison nous avons pris comme définition de base celle proposée par Oléron :

Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but. (Oléron 1977, p.9)

En concordance avec les analyses précédentes, nous retenons les caractéristiques des raisonnements mathématiques qui nous intéressent : la confrontation à un milieu heuristique pour leur construction ; le passage à un milieu de référence pour établir la généralité et le caractère de nécessité des propriétés trouvées ; le guidage adéquat dans la situation ; enfin, la fonction des différents énoncés apodictiques, soit de preuve soit de décision.

Au final, nous sommes amenés à retenir trois axes qui orientent notre analyse des raisonnements des élèves dans une situation. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux, ou modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

- Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension didactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent, ce que nous illustrerons dans la partie 3 (application du modèle à une situation précise).
- Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à mettre ces deux axes en relation, en montrant comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieu et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.
- Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idoneité aux attendus de et le rôle dans

la situation. Des exemples de tels observables sont donnés dans le paragraphe 3. ci-dessous.

## 2. Les fonctions du modèle

Ce modèle doit nous permettre :

- d'affiner l'analyse a priori des niveaux de milieu de manière à pouvoir anticiper les signes et les raisonnements ;
  - d'identifier les situations de décision, de formulation ou validation, en les reliant aux phases didactiques et aux phases d'institutionnalisation (analyse a posteriori) ;
  - d'analyser les signes produits en situation et de les relier aux niveaux des raisonnements élaborés par les élèves,
- ... et, en définitive, de porter une appréciation sur l'adéquation des signes, des raisonnements et des connaissances produits aux enjeux de la situation.

Nous allons maintenant préciser ce qu'est, et comment se construit et s'identifie le *répertoire de représentations* à l'œuvre dans les situations adidactiques. Notons qu'une situation de recherche conduit les élèves à élaborer de nombreux signes plus ou moins experts et adaptés, c'est ce qu'on appelle l'entropie phénoménologique (production d'une abondance d'ostensifs : Marty 1990 ; Bloch 2008). Nous avons en effet observé que les situations adidactiques conduisent spontanément à une production de signes variés, qui est issue du traitement des connaissances dans la situation, et qui devra être refermée sur le savoir. Cette entropie phénoménologique se manifeste, dans la phase heuristique notamment, par des représentations – des symboles, des dessins, des écritures, du langage (des déclarations), des gestes, que le professeur aura à charge d'interpréter au niveau idoine : icône, indice ou argument, suivant le niveau de milieu et la fonction de production, afin d'orienter le traitement des raisonnements. Ainsi une intuition produite à partir d'un schéma sera interprétée comme une icône ; une proposition mathématique basée sur une formule algébrique aura le statut d'un indice (« C'est  $4^n$  donc ça tend vers l'infini... »), et la production d'un argument de type : « pour tout  $p$ ,  $4^n$  dépasse  $10^p$  si  $n$  est plus grand que... » sera considéré comme un symbole/argument.

## 3. Le répertoire didactique et le répertoire de représentations

L'ensemble des moyens sémiotiques que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue le répertoire didactique de la classe tel que l'a défini Gibel (2004). Les situations choisies par l'enseignant déterminent la capacité de l'élève à organiser, en confrontation au

milieu de la situation, ses procédures de résolution et donc son répertoire. La fonction principale du répertoire est de faciliter la communication dans la classe, en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver, et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, une suite d'actions, une formulation ou une justification (Ibid.).

Le répertoire didactique de la classe est identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'explicitier, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation. Le répertoire de représentations est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures ; il convient d'y adjoindre également les éléments langagiers (énoncés oraux et/ou écrits), permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.

Le répertoire de représentations comporte deux composantes liées à la chronogenèse (pour la première) et au milieu de la situation :

- La composante liée au répertoire antérieur, c'est-à-dire les différentes représentations liées aux connaissances antérieures ;
- La deuxième composante apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des *connaissances* de son répertoire. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations liées à la situation. Cette composante est le *système organisateur*.

Nous distinguons donc dans le répertoire didactique deux types d'objets : d'une part la collection d'énoncés que nous appelons *registre des énoncés*, et d'autre part ce qui permet de l'organiser et de l'utiliser qui est désigné par *système organisateur* (Gibel, 2004). Le système organisateur est ce qui permet à l'élève de réactiver des énoncés déjà rencontrés dans des situations antérieures, mais aussi de générer de nouvelles formules en articulant entre eux certains énoncés, ou en les combinant afin de répondre à la situation.

Ainsi, dans la situation proposée, les élèves disposent de formulations intuitives liées à leur connaissance des suites et au contexte (« ça grandit sans s'arrêter », « ça augmente toujours mais ça reste borné »), ainsi qu'aux connaissances sur les écritures décimales illimitées ; ils s'appuient également sur les schémas du fractale étudié (icônes de limites) ; enfin, la situation va les conduire à des formules algébriques puis des débats sur l'existence et la nature des limites. A terme les formulations, avec l'aide du professeur, se muent en symboles du système de preuve de l'Analyse (Bloch 2002).

Lorsque le sujet agit dans une situation, il met alors en œuvre deux catégories de connaissances : la connaissance elle-même qui lui

permet de résoudre directement la situation, ou des moyens indirects qui correspondent à une élaboration de cette connaissance, laquelle résultera alors, *in fine*, du fonctionnement du système organisateur.

#### **4. Fonctions didactiques des raisonnements selon les types de situations**

Dans une situation, un raisonnement peut jouer différents rôles. Ses fonctions peuvent être diverses : conjecturer, décider, prouver, démontrer. Cependant un raisonnement n'est pas, de par sa nature même, une décision ou une preuve : mais, dans le milieu de la situation où il intervient, il prend l'une ou l'autre fonction. De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, comme l'indiquent Margolinas (1994) et Brousseau et Gibel (2005), un très grand nombre de situations plus ou moins emboîtées. Celles qui nous intéressent plus précisément sont celles qui émergent dans le groupe classe et qui influencent le processus collectif commun auquel le professeur veut aboutir. De plus, ainsi que le notent également Brousseau et Gibel, on ne peut attribuer un raisonnement à un actant que si l'on peut être sûr de ses motivations intrinsèques relatives à la situation :

Pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont en partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être accepté comme « effectif ». (...) Si l'élève déduit B de sa connaissance de ce qu'attend le professeur, il fait un raisonnement, très différent de celui qui n'utilise que le répertoire mathématique et la connaissance du fait A. L'observateur doit donc montrer que la production du raisonnement prêté à ce sujet est motivée par une intention de sa part, qu'elle répond à un but. (Brousseau et Gibel, 2005, p.16)

La dimension adidactique de la séquence étudiée doit cependant contribuer à la production de raisonnements plus riches et plus variés : nous attendons du modèle qu'il soit adéquat pour la description et l'analyse des argumentations.

#### **5. Le modèle**

En prenant en compte les trois axes (fonctions des raisonnements ; niveaux d'utilisation des signes comme icône, indice, argument ; répertoire de représentation) dans chaque niveau de milieu  $M_{-2}$ ,  $M_{-1}$ ,  $M_0$ , nous parvenons au tableau suivant. Les niveaux matriciels indiqués (R1.1, etc.) serviront de référence lors de l'analyse du corpus : la progression des indices matriciels va en principe de pair

avec la sophistication et la formalisation croissantes des raisonnements et des signes.

Le tableau 2 illustre de façon synthétique le modèle utilisé ; il indique les signes et raisonnements attendus dans chaque niveau de milieu, à partir de l'analyse a priori réalisée pour la situation prévue. Nous avons codé en SYNT ou SEM les dimensions possibles, syntaxiques ou sémantiques, rencontrées dans les différents niveaux d'argumentation. Remarquons cependant que les dimensions syntaxique et sémantique ne sont pas spécifiques du niveau d'adéquation à la situation : en effet, des élèves peuvent fort bien utiliser leurs connaissances anciennes de façon syntaxique mais ne pas entrer dans les requis de la situation, ce qui rendra ces essais peu opérants ; par ailleurs le travail syntaxique, une fois mis en forme, joue un indéniable rôle sémantique, que tous les mathématiciens (re)connaissent.

	<b>Milieu M-2</b>	<b>Milieu M-1</b>	<b>Milieu M0</b>
<b>Fonctions des raisonnements</b>	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
<b>Niveaux d'utilisation des symboles</b>	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions...)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques : ici symboles de l'Analyse
<b>Niveau d'actualisation du répertoire</b>	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.

**Tableau 2** – Le modèle milieux/répertoire/symboles

## 6. Méthodologie

Conformément au tableau, l'application du modèle à la situation se fera suivant une méthodologie d'analyse des milieux (pour l'analyse a

priori et a posteriori de la situation) et des productions sémiotiques des élèves et du professeur (pour la dimension d'étude a posteriori du répertoire).

- a. Dans la première ligne du tableau, nous examinons le niveau de milieu où se situent les élèves : soit un niveau heuristique (calculs exploratoires, conjectures intuitives, dessins, ...), soit un niveau de déclaration de formules, de propriétés, et de début de justification de type algébrique ; nous regardons aussi le niveau M0 puisque, dans une situation à dimension adidactique, l'institutionnalisation n'est pas l'exclusivité du professeur, ou du moins celui-ci s'appuie fortement sur les productions des élèves.
- b. La deuxième ligne met en relation les productions des élèves et la nature des signes associés. La dialectique signes/milieu est évidemment relativement prévisible : au milieu M-2 sont associés plutôt des productions de type heuristique, et au milieu M-1 des formules, assertions générales, conjectures déjà quelque peu formalisées – dont la forme dépend bien sûr de la situation et de ses composantes mathématiques et épistémologiques.
- c. La troisième ligne traduit l'actualisation du répertoire de représentations, en particulier, l'abandon de procédures anciennes ou intuitives et l'adoption de preuves relevant (dans le cas de la situation étudiée) de l'Analyse.

En conclusion, nous classons donc les raisonnements, calculs, formules, en fonction des caractéristiques de la situation et des connaissances manifestées par les élèves dans la phase précédente, lesquelles attestent du niveau de milieu où ils se situent, et de la nature des signes produits.

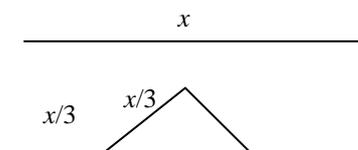
Remarquons que, dans la situation étudiée (recherche de limites), les formulations du type «  $n$  est grand » signifieront une appartenance au milieu objectif (et aux signes iconiques/indiciels) car peu précises et ne permettant pas de calcul décisionnel, alors que des formulations comme :  $(4/9)^n < 10^{99}$  si  $n > \dots$  sont des symboles – arguments du milieu de référence. En clair, dans notre modèle, on ne peut donner, pour l'analyse du raisonnement, de critères indépendants de la situation : ceci nous l'affirmons comme une caractéristique nécessaire d'une telle construction théorique. C'est l'analyse a priori, et la cohérence didactique et épistémologique de la situation, qui permettent d'attester d'un niveau de raisonnement.

## APPLICATION DU MODELE A LA SITUATION DU FLOCON DE VON KOCH

### 1. La situation : enjeux, milieux, analyse a priori

La situation du flocon de Von Koch a été proposée dans une publication de l'IREM de Poitiers (Gaud, Guichard, Parpay, Sicre et Chrétien 1996) comme étant adéquate pour une première introduction de la notion de limite. Dans sa thèse, Bloch (2000) a étudié sa mise en œuvre dans des classes de Première scientifique. Les extraits présentés ici proviennent de ce corpus.<sup>4</sup>

La figure initiale est un triangle équilatéral que l'on transforme en coupant chaque segment en trois et en enlevant la partie centrale, que l'on remplace par deux segments de même longueur (à l'extérieur pour le flocon, à l'intérieur pour l'anti-flocon, cf. IREM de Poitiers, 1995).



**Figure 1.** – Schéma de construction du flocon de Von Koch

Il résulte de la construction que le périmètre de la figure est multiplié à chaque étape par  $4/3$ . La formule que l'on obtient pour le périmètre de la  $n$ -ième construction  $F_n$  est donc :  $P_n = P_0 \times (4/3)^n$ .

Pour l'aire de la figure  $F_n$ , compte tenu du fait qu'à chaque étape on ajoute  $4^{n-1}$  triangles, chacun d'aire  $1/9$  de l'aire des triangles précédents, on obtient finalement, après avoir sommé la série géométrique correspondante :  $A_n = A_0 + \frac{3}{5} A_0 [1 - (\frac{4}{9})^n]$ .

Cette situation est une situation à dimension adidactique confrontant les élèves à un objet fractal obtenu comme résultat du processus à l'infini, et dont on cherche à déterminer le périmètre et l'aire. Ces mesures ne peuvent s'obtenir qu'à l'issue d'une recherche de limite. L'enjeu de la situation est que les élèves puissent avoir l'idée intuitive de ce processus de calcul « à l'infini » ; cependant, ils ne pourront accéder seuls aux arguments mathématiques justifiant la limite. La professeure devra donc intervenir pour donner des éléments

<sup>4</sup> L'intégralité du script des séances figure sur le site TEL, au lien suivant : [http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/60/35/PDF/Bloch\\_these\\_total.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/60/35/PDF/Bloch_these_total.pdf)

de justification acceptables à ce moment-là par la classe. L'ensemble du travail se déroule sur trois séances de deux heures, sur un temps total d'une semaine et demie. Le travail en groupes permet l'homogénéisation des procédures et la diffusion des stratégies dans la classe.

Le but de la situation est de faire calculer, par les élèves, le périmètre et l'aire du flocon : comme il s'agit d'un fractal, c'est-à-dire d'une figure imaginaire obtenue à l'issue d'un processus infini, nous faisons l'hypothèse que la situation va confronter les élèves à l'idée de limite ; de plus, nous tablons sur le fait que les élèves percevront la nécessité de critères pour distinguer les différentes sortes de limites, car le flocon a un périmètre infini et une aire finie. La situation prévoit l'introduction de la notion de limite à partir de conjectures sur des grandeurs relatives à un objet géométrique : ainsi les élèves disposent d'une entrée dans un milieu matériel qui permet de s'appuyer sur des représentations initiales d'ordre figural pour la dévolution du problème. Les éléments d'argumentation devront cependant être fournis en partie par la professeure dans un épisode didactique, car les élèves n'ont, à ce stade, pas d'outils de définition et de preuve de ce qu'est une limite, infinie ou non. En ce sens il s'agit d'une situation à *dimension adidactique* (Mercier 1995 ; Bloch 1999).

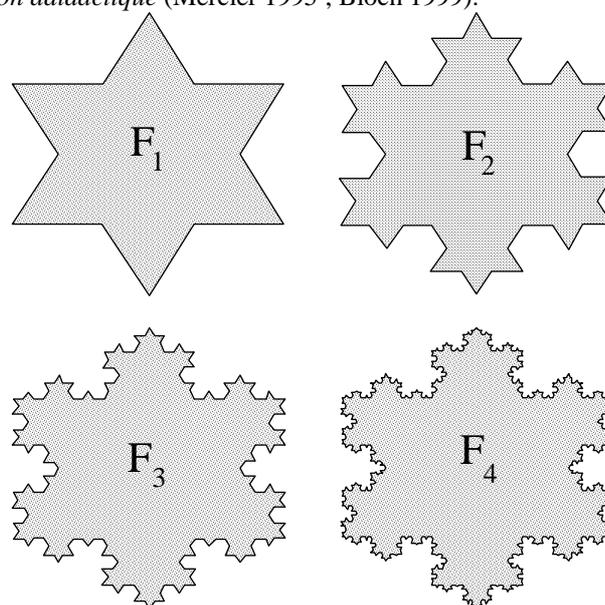


Figure 2. – Etapes F1 à F4 du flocon de Von Koch

*S.3 La situation objective : l'acteur objectif et le milieu matériel*

Le milieu matériel est donc constitué par les figures  $F_0, F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$ , qui ont été construites chez eux par les élèves. L'enseignant a tracé la figure initiale  $F_0$ , qui est un triangle équilatéral, et leur a communiqué, sous la forme du schéma (Figure 1), la règle de transformation pour obtenir la figure  $F_{n+1}$  à partir de la figure  $F_n$ .

*S.2 La situation de référence : Sujet agissant et milieu objectif*

Le milieu objectif est constitué de l'ensemble des figures  $F_n$  ( $n$  quelconque) résultant de la construction des générations successives de figures. Ces figures fonctionnent alors comme un indice – au sens peircien – de la figure 'finale'  $F_\infty$  (F 'infinie') ; cet indice est un appui fort pour la dévolution du problème. En effet, cette représentation permet de visualiser (d'imaginer) le flocon final et d'anticiper la tâche de calculer son périmètre et son aire.

Les actions du sujet agissant sur le milieu objectif ont pour objet :

- d'une part de calculer le périmètre et l'aire des cinq premières figures que les élèves ont construites  $F_0, F_1, F_2, F_3$  et  $F_4$  ;
- d'autre part de déterminer, en fonction de  $n$  quelconque, les expressions algébriques du périmètre  $P_n$  et de l'aire  $A_n$  de la figure géométrique  $F_n$ . Ces expressions algébriques vont alors prendre le statut d'*argument* au niveau du milieu objectif, indiquant que le problème a une solution puisqu'un algorithme permet d'y accéder.

*S.1 La situation d'apprentissage : Elève apprenant et milieu de référence*

Le milieu de référence est constitué des conjectures sur les limites des suites  $(A_n)$  et  $(P_n)$ . L'élève va produire des calculs et des raisonnements assimilables à des éléments de preuve ou de réfutation de ces conjectures. Ils visent à apporter la preuve de la validité ou de la non-validité de la conjecture. Ils pourront vraisemblablement être de différentes natures :

- sémantiques : dans ce cas les élèves ont recours à une expérimentation numérique, et étudient, en calcul instrumenté, le comportement des suites  $(A_n)$  et  $(P_n)$  lorsque  $n$  devient 'grand'.
- syntaxiques : les élèves ont recours au calcul algébrique afin d'étudier le comportement des suites  $(A_n)$  et  $(P_n)$  lorsque  $n$  devient 'grand'. Ils commencent à élaborer un répertoire de décisions de limites (fonctionnement du système organisateur).

Lorsque les élèves auront recours au calcul instrumenté, il est probable que l'enseignante devra faire un apport de connaissances, sur le mode de la validation de l'Analyse. Pour cela elle devra effectuer le lien entre les résultats obtenus par le calcul et les propriétés des suites

telles qu'elles doivent être utilisées afin de produire une preuve ou une démonstration de la conjecture. Elle sera donc amenée à intervenir pour relancer la situation à un niveau où la question de la limite doit recevoir une réponse argumentée. Cette intervention didactique permet de dévoluer la question théorique de ce qu'est une limite, et nous pouvons considérer qu'elle relance une phase didactique.

Nous avons identifié quelques questions et éléments de validation qui pourront être mis dans le milieu :

- si  $P_n$  dépasse la capacité de la calculatrice 'vers le haut', peut-il également dépasser n'importe quel nombre, et donc peut-on en déduire que :  $\forall M > 0, \exists n_0 > 0 / \forall n > n_0, P_n > M$  ?

- si les élèves observent, lors de l'expérimentation numérique instrumentée, que  $A_n$  se stabilise lorsque  $n$  grandit peut-on en déduire que l'aire devient constante? Sinon, le milieu matériel permet-il d'infirmer cette conjecture, et comment interpréter ce phénomène?

#### *S<sub>0</sub> : la situation didactique*

Le jeu relatif à l'étude de la limite de la suite  $(P_n)$  consiste à formuler une conjecture sur un nombre  $N$ , par exemple de la forme  $10^p$ , qui puisse être dépassé par  $(P_n)$ , en formulant une condition sur  $n$ .

La recherche de la limite de la suite  $(A_n)$  est plus complexe : en effet les connaissances des élèves à ce stade ne leur permettent pas de raisonner directement sur une limite éventuelle de la suite  $(A_n)$ . Il faut d'abord que les élèves déterminent le terme général de cette suite et identifient ce qui dépend de  $n$ ,  $(4/9)^n$ . Ceci nécessite qu'ils soient capables de mettre en évidence ce terme dans l'écriture algébrique de la suite  $(A_n)$ , ce que la situation ne garantit pas ; si ces connaissances sont défaillantes le professeur devra intervenir pour que tous les élèves disposent d'une formulation de la suite  $(A_n)$  dont le comportement, lorsque  $n$  tend vers l'infini, puisse être objet d'étude.

#### *Les variables didactiques*

La première figure  $F_0$  est un triangle équilatéral de côté 18 cm : ainsi elle tient dans une feuille de papier millimétré format A4. Il en résulte que l'aire de  $F_0$  (ainsi que de toutes les figures  $F_n$  et de  $F_\infty$ ) est un nombre irrationnel, ce qui est une valeur de variable didactique importante : si la valeur de l'aire avait été entière, les élèves auraient pu inférer cette valeur par un effet de contrat didactique. Ainsi par exemple si l'on trouvait 3,9999998 les élèves auraient pu être tentés de dire que cela donnait un résultat de 'presque 4'. Une valeur irrationnelle, ne pouvant se prêter à cette induction, est un levier pour une procédure argumentative de recherche de la limite.

Par ailleurs, le flocon offre un cas exceptionnel de figure de périmètre infini et d'aire finie : ces valeurs de variables didactiques sont décisives, car elles permettent de justifier que l'on ait besoin de critères pour discriminer les comportements respectifs des deux suites.

## 2. Déroulement de la séquence : phases didactiques et adidactiques

### *Le déroulement de la séquence*

La séquence étudiée comporte trois séances en classe. Nous résumons la première et explicitons, pour les deux dernières, les différentes phases du déroulement en indiquant leur(s) fonction(s). Nous concentrerons ensuite nos analyses sur les phases correspondant au milieu de référence.

**Séance 1 :** Elle correspond aux calculs sur les figures construites, et à l'établissement des formules algébriques du périmètre et de l'aire de  $F_n$ . Afin de dévoluer le problème et d'aider aux calculs, les élèves ont reçu le schéma (voir ci-dessus) explicitant la transformation faite lorsque l'on passe de  $n$  à  $n+1$ , avec ce commentaire :

Chaque segment de longueur  $x$  se transforme en 4 nouveaux segments de longueur  $x/3$ .

**Séance 2 :** Elle conduit à une exploration des valeurs prises par le périmètre et l'aire des figures  $F_n$  à l'aide de calculs instrumentés, dans le milieu objectif. On y trouve d'abord un rappel des formulations algébriques de  $A_n$  et  $P_n$  ; l'énoncé du problème. « Que deviennent  $A_n$  et  $P_n$  lorsqu'on itère le processus de construction de  $F_n$  indéfiniment ? » qui conduit à la dévolution de la situation. Viennent ensuite les énoncés des premières conjectures relatives aux limites des suites  $(A_n)$  et  $(P_n)$ , les conclusions relatives aux calculs instrumentés de  $P_n$  et de la suite  $(A_n)$  ; il s'ensuit un débat relatif à la croissance de la suite  $(A_n)$  et des énoncés de conjectures sur  $(A_n)$  et  $(P_n)$ . Lors d'une phase didactique la professeure procède à l'explicitation des moyens disponibles pour valider les conjectures. Une situation de décision conduit alors au calcul sur des exemples génériques (Balacheff 1987) puis au cas général.

**Séance 3** Travail sur la suite  $(A_n)$  : établissement de sa limite. On met au point de la formule algébrique définitive, sur laquelle vont porter les calculs et conjectures.

La professeure fait ensuite le lien entre les méthodes utilisées pour l'établissement de la limite de  $(P_n)$  et celle que l'on peut envisager pour l'étude de la suite  $(A_n)$ . Il y a identification de  $(4/9)^n$  comme terme significatif de la suite, et du fait que la suite de terme général  $(4/9)^n$  est décroissante, puis dévolution de la traduction syntaxique de la

propriété : " $(4/9)^n$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ". Il y a un recours au système organisateur, sollicité afin de faire une transposition du cas : « suite tendant vers l'infini » au cas : « suite tendant vers zéro ». De ce fait, la professeure sollicite un passage du sémantique au syntaxique.

Dans la formulation de la démarche à suivre pour trouver la limite de  $(4/9)^n$ , en s'inspirant de ce qui a été fait pour  $P_n$ , on observe un travail syntaxique pour prouver que l'on peut rendre  $(4/9)^n$  plus petit que  $10^{-p}$ . Le sémantique vient ensuite comme une connaissance de niveau II justifiant le calcul syntaxique. Enfin il s'agit de conclure sur la limite de  $(4/9)^n$  puis de faire un retour rapide sur la limite de  $(A_n)$ , en utilisant implicitement l'algèbre des limites.

#### *Les situations didactiques et adidactiques*

L'enseignante attend des élèves qu'ils se posent la question de ce que deviennent l'aire et le périmètre de la suite des  $(F_n)$ . Les différents groupes produisent des raisonnements appuyés sur les ostensifs à leur disposition : figures, calculs... et les échangent entre eux. Remarquons que, dans les trois occurrences de fonctionnement de cette situation, les classes de procédures se sont révélées remarquablement stables (critère de reproductibilité).

L'enseignante vise un maintien de l'adidacticité de la situation et demande aux élèves de produire des raisonnements étayés. Les élèves doivent passer ainsi d'une phase de formulation, non argumentée, qui s'apparente à une conjecture, à une phase de décision qui s'appuie sur une justification mathématique de la validité ou de la non-validité d'une conjecture. Balacheff la définit ainsi :

Dans le cas de séquences didactiques décrites par Gras (1983) (...), les élèves sont invités à anticiper, à prédire, ce que sera l'image d'une figure donnée. On se trouve alors dans ce que nous appellerons une situation de décision, elle demande la mobilisation de moyens de décision et donc de moyens de validation, sans que pour autant soit exigée la production explicite de preuves. C'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite.

Dans la situation de décision, les opérations intellectuelles du raisonnement hypothético-déductif (...) peuvent être mises en œuvre sans que pour autant une preuve soit produite. Les contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution. Eventuellement, en tant que mathématicien, nous reconnaitrons une organisation qui est de l'ordre de la démonstration, mais ici elle est dans le cas du fonctionnement du sujet un outil et non un objet. (Balacheff, 1987, p.153)

Cette fonction est mobilisée soit à l'initiative des élèves pour se convaincre, soit à l'initiative de l'enseignante : on l'observe par

exemple lorsque l'enseignante a pour objectif de faire expliciter aux élèves les critères de validité sur les limites. Nous avons, à chaque fois que nécessaire, pointé les propositions vraies qui sont produites sans nécessairement avoir le statut d'une démonstration finalisée et mise en forme. Nous notons – une fois de plus – que les situations (à dimension) didactiques sont riches en épisodes de ce type ; c'est aussi ce qui fait leur intérêt épistémologique, ainsi que le souligne très fortement Legrand (1997) pour les situations de débat scientifique. Elles mettent les élèves en situation de validation sur différentes configurations et avec des statuts variés, et leur permettent donc d'explorer de nombreuses facettes de l'activité de preuve.

### 3. Les raisonnements dans la situation du flocon

Dans ce paragraphe, nous analysons différents épisodes de la séquence proposée selon les trois axes qui définissent notre modèle, ceci afin de mettre en évidence et d'explicitier les différents raisonnements produits par les élèves, et les régulations de l'enseignante.

Ces épisodes sont extraits des séances 2 et 3. Nous faisons référence aux numéros des interactions tels qu'ils y apparaissent. Pour faciliter le repérage du lecteur, nous retranscrivons certains passages, et effectuons une numérotation interne de l'interaction : (1), (2)...

#### Séance 2 – Episode 1

Dans l'extrait suivant, l'enseignante commence par effectuer un rappel des formulations de  $A_n$  et  $P_n$ , obtenues lors de la séance précédente :

001 P : (1) Alors aujourd'hui, on va continuer en trois étapes ; d'abord, je vais faire un rappel, où on était arrivé hier sur le calcul de  $P_n$  et  $A_n$  : je vais rappeler la question qu'on s'était posée, puis, (2) vous allez essayer de répondre à cette question. (3) On fera un débat là-dessus.

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M-2 : dévolution (1) Présentation de la finalité de chacune des phases de la séance. (2) Évocation de la mise en projet : appel à une prise de position. (3) Évocation du projet de débat et du dispositif associé.	L'enseignante explicite l'organisation de la séance afin de communiquer le projet de débat. Elle insiste sur une condition nécessaire à ce débat : chaque élève devra prendre position par rapport à la question objet d'étude.

001 P. : (1) Je rappelle où on en était pour  $P_n$  et  $A_n$ .  
(2) Je vous demande de noter le débat, de noter les questions qu'on s'est posées, parce que ce qui va être important aujourd'hui comme souvent en mathématiques c'est les questions qu'on se pose.  
(3) Pour  $P_n$  pas de difficulté, on était arrivé à :  $P_n = P_o (4/3)^n$   
(4) Pour l'aire : on avait mis en facteur

$$A_n = A_0 + 3 A_0 \left[ \frac{1}{9} + \frac{4}{9^2} + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^n} \right]$$

Pour bien me repérer dans cette somme, j'appelle les termes  $u_1, u_2, \dots, u_n$  ; ça va être une suite géométrique mais c'est pratique de leur donner des noms pour ensuite bien écrire la raison et calculer.

(5) Tout le monde avait trouvé la raison...

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
(1) Lien avec la séance précédente (2) Formulation de la spécificité du contrat didactique. (3) Institutionnalisation de la formulation algébrique de $P_n$ (4) Formulation provisoire des termes afin de faciliter la poursuite du calcul. (5) Interrogation portant sur la valeur de la raison de la suite géométrique ( $u_n$ ), pour fédérer le groupe.	L'enseignante souhaite insister sur l'importance à accorder aux formulations des questions objets d'étude. Elle souligne la nécessité de produire une formulation consistante de chacune des questions étudiées. Explicitation de l'enjeu didactique et de connaissances d'ordre II : les questions en mathématiques et la dénotation (Sackur et al. 2005)

002 Es : 4/9

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M-2 La réponse de l'élève est idoine.	La raison de la suite est désormais un élément du répertoire didactique de la classe.

003 P : (1) alors maintenant, j'applique la formule qui dit que le crochet ça va donc être égal à : premier terme, voilà,  $1/9$ , ensuite multiplié par 1 moins  $4/9$  exposant  $n$  c'est le nombre de termes, puisqu'ils vont de 1 à  $n$ . Et sur 1 moins  $4/9$  ; on avait dit  $1 - 4/9 = 5/9$  Diviser par  $5/9$  c'est multiplier par  $9/5$  donc voilà :

$$A_0 + 3A_0 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^n \right]$$

Voilà ; les 9 se simplifient. On l'avait laissé comme ça.

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M0 de la phase précédente / M-2 de la nouvelle situation (travail sur la suite $A_n$ ) (1) Dénotation des calculs visant une formulation algébrique réduite de $A_n$ . L'enseignante formule et justifie les étapes du calcul, et elle institutionnalise l'expression algébrique simplifiée de la suite ( $A_n$ ).	La production de ces écritures algébriques est un enjeu majeur de la situation de référence et celles-ci appartiennent désormais au répertoire didactique de la classe. La justification des étapes du calcul doit favoriser les usages des énoncés en tant qu'éléments du système organisateur. La formule de ( $A_n$ ) est alors un argument algébrique : R3.2 ou R3.3, un argument symbolique spécifique de l'Analyse sur lequel des hypothèses vont pouvoir être faites.

004 P : (1) Alors maintenant la question qu'on se pose : que deviennent  $P_n$  et  $A_n$  quand on a itéré le procédé "jusqu'à l'infini". (La question est écrite au tableau ; les élèves notent).

La formulation 'jusqu'à l'infini' peut introduire un effet de contrat didactique, et aurait pu être remplacée par 'indéfiniment'.

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M-2 : Dévolution de la question relative aux comportements des suites ( $A_n$ ) et ( $P_n$ ) lorsque $n$ tend vers l'infini. (1) Formulation et écriture au tableau par l'E de la question mise à l'étude.	La formulation "itéré le procédé jusqu'à l'infini" correspond ici à un indice de limite : R2.1

### Séance 2 – Episode 2 - résumé

Cet épisode met en lumière l'explicitation du contrat didactique destiné à favoriser l'ouverture sur des registres différents. La professeure demande aux élèves de se positionner sur les moyens disponibles pour répondre à la question. Des élèves proposent de « donner des valeurs à  $n$  » (phase heuristique, niveau R21).

### Séance 2 – Episode 3

Il s'agit d'une régulation introduisant le questionnement sur le domaine numérique de l'étude : pour quelles valeurs de  $n$  va-t-on pouvoir tester les calculs ? Nous savons qu'à ce niveau d'études (classe de Première S, et premier contact avec la notion de limite) il n'y a rien d'évident, pour les élèves, à ce que la formulation  $n \rightarrow +\infty$  se traduise par : il peut être intéressant de calculer pour des 'grandes' valeurs de  $n$  (cf. aussi Bloch, Chiocca, Job & Schneider 2007, sur la pratique des nombres dans l'enseignement secondaire).

016 P : (1) les valeurs qu'on prend, elles vont être en rapport avec la question qu'on se pose. (2) C'est quoi la question ?

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
(1) Recentrage sur le projet de M-2, plus précisément sur la question objet d'étude ; demande de formulation du lien existant entre la question étudiée et le domaine numérique en adéquation (2) Reformulation	Cette régulation est nécessaire au maintien de l'adidacticité de la situation d'apprentissage. Appel à des signes au moins indiciaires relatifs à la question à résoudre.

017 Flora : qu'est-ce que ça fait quand  $n$  est grand.

018 Jérôme : on va prendre des grandes valeurs alors...

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M-2 : Reformulation, de la question et prise de position (décision) sur des valeurs "grandes".	La reformulation de Flora ramène à une étude dans un intervalle dont les bornes sont 'grandes'. Les élèves ne

	spécifient pas l'ordre de grandeur. R2.1 est cependant atteint.
--	--

#### Séance 2 – Episode 4

Cet épisode s'inscrit dans le débat sur la croissance de la suite  $(A_n)$ .

111 Frédéric : Si on prend la figure du fractal, on peut le mettre dans un hexagone, donc son aire, elle dépassera jamais : celle de l'hexagone : on peut donner une limite ; en fait c'est borné.

112 Es : Pourquoi ça dépassera pas? (Exclamations) sur ta figure ça dépassera pas, mais pourquoi ça a une limite ? Voilà ! Donne-nous tes hypothèses! Quelle est l'origine de ton fondement? (rires)

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M-2 : Raisonnement visant à établir que la suite $(A_n)$ est bornée car la suite de figures $(F_n)$ serait incluse dans l'hexagone (inscrit dans le cercle de rayon $6\sqrt{3}$ cm) : R1.1 La suite de figures est (selon sa déclaration) contenue dans l'hexagone.	Frédéric se réfère au milieu objectif, constitué par la suite de figures $(F_n)$ fonctionnant de façon iconique pour produire une conjecture basée sur une intuition géométrique, sans la moindre preuve. On peut noter la polysémie du terme 'limite' dans cet échange : limite comme 'borne' ou limite mathématique ; et la sémantique fournie par l'argument (non justifié) des aires.

#### Séance 2 – Episode 5

Cet épisode se réfère au débat sur la limite de la suite  $(A_n)$ .

121 Yaëlle : l'aire elle va toujours augmenter, jusqu'à l'infini elle prendra des valeurs, mais qui n'arriveront jamais à l'aire de l'hexagone, voilà.

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
Début de l'entrée dans M-1 : Raisonnement correspondant à la formulation d'une conjecture. Yaëlle distingue le rang de la suite, $n$ , et la valeur de la suite $(A_n)$ . La valeur de la suite $(A_n)$ étant majorée par la valeur de l'aire de l'hexagone et ceci quel que soit le rang $n$ .	Raisonnement qui traduit la mise en perspective de deux niveaux de milieu : le milieu de référence (cadre numérique dans lequel la conjecture a été produite) et le milieu objectif, constitué des figures, qui constitue le cadre géométrique : R1.2, R2.2

122 Sandra : oui voilà!

123 Yaëlle : ça rajoutera des décimales; ça tendra vers l'aire de l'hexagone mais ça l'atteindra jamais.

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M-1 Raisonnement en relation avec le comportement de la suite $(A_n)$ : R1.2	Son raisonnement repose sur sa représentation des nombres décimaux. Elle utilise son répertoire

<p>Yaëlle exprime que la suite <math>(A_n)</math> sera croissante mais que les valeurs ajoutées seront de plus en plus petites et que la suite tendra vers l'aire de l'hexagone.</p> <p>Les nombres évoqués font désormais partie du milieu de référence, au lieu de rester cantonnés au milieu objectif.</p>	<p>de représentation des nombres décimaux et les résultats du calcul instrumenté. Ceci lui permet de concevoir l'évolution de la suite <math>(A_n)</math> comme la modification des rangs successifs associés à la partie décimale de <math>A_n</math>. Il y a enrichissement du système organisateur : R3.2</p> <p>Les nombres sont utilisés comme des arguments sur la façon d'approcher la limite : il s'agit d'arguments topologiques : R2.2</p>
---	--

124 P : (1) c'est intéressant ce qu'elle dit Yaëlle, ça veut dire qu'on fait la distinction entre ce qui se passe pour  $n$  et ce qui se passe pour les valeurs de la suite.

(2) Et peut-être il se passe pas la même chose pour  $P_n$  et pour  $A_n$ . Parce que tout ce que j'entends, ça laisserait penser que le périmètre et l'aire ils augmentent forcément en même temps.

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
<p>Renforcement de M-1</p> <p>(1) L'enseignante institutionnalise la déclaration de Yaëlle après l'avoir reformulée en utilisant le vocabulaire adéquat : elle distingue le <i>rang</i> de la suite de la <i>valeur</i> du terme correspondant. Elle établit le comportement de la suite <math>(A_n)</math> telle que Yaëlle l'a décrit : le rang de la suite devient infini alors que la valeur de la suite croissante demeure finie.</p>	<p>L'enseignante se saisit de la déclaration idoine de Yaëlle, qui repose sur des arguments sémantiques pour décrire le raisonnement syntaxique relatif au comportement asymptotique de la suite <math>(A_n)</math>.</p> <p>L'enseignante a la volonté de modifier le système organisateur des élèves relatif aux nombres décimaux (Bloch, &amp; al. 2007) : niveau R2.3</p>

### Séance 3 – Episode 1

En début de séance 3, l'enseignante rappelle les résultats obtenus à l'issue de la séance 2 : les élèves ont étudié, par le recours au calcul algébrique, le comportement de la suite  $(P_n)$ . Ils ont, dans un premier temps, effectué des calculs correspondant à des exemples génériques du type  $P_n > 10^{3033}$ , puis ils ont établi le calcul algébrique dans le cas général. L'enseignante institutionnalise le résultat obtenu la veille :  $P_n$

dépasse  $10^p$ , en prenant :  $n > \frac{p - \log 54}{\log \frac{4}{3}}$  puis elle indique :

C'est ça la définition, c'est la preuve, qu'on peut donner, qu'une suite tend vers plus l'infini, c'est qu'on arrive à lui faire dépasser n'importe quel nombre, aussi grand qu'on veut.

Elle note la formule :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M0 Institutionnalisation d'une définition contextualisée de limite infinie de suite.	Tous niveaux R1.3 (preuve 'algébrique'), R2.3 (arguments pouvant être réinvestis), R3.3 (éléments théoriques relatifs à la limite : définition donnée en langage formel et en langue naturelle)

Les élèves notent alors la formule et ce commentaire :

$P_n$  non borné ; étant donné  $10^p$ ,  $p$  aussi grand qu'on veut : 'arbitrairement grand',  $P_n$  dépasse  $10^p$  à condition que  $n$  soit assez grand.

### Séance 3 – Episode 2

La professeure dévolue la recherche de la limite de  $A_n$  :

$$004 P : \text{Voilà. On trouve } A_n = \frac{8}{5}A_0 - \frac{3}{5}A_0 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Pour  $P_n$  on a dit qu'il avait une limite infinie. Alors les questions qu'on s'était posées : est-ce que  $A_n$  est bornée ; est-ce que  $A_n$  « tend vers un nombre » ? A quoi est-ce que ça se verrait que  $A_n$  tend vers un nombre - étant donné qu'on a su le faire pour  $P_n$  qui tendait vers l'infini. Là vous cherchez, chaque groupe met sur un papier : voilà ce qu'on pense et voilà comment on ferait pour le prouver. Ensuite on en discutera.

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M-1 Dévolution de l'analyse du comportement asymptotique de la suite $(A_n)$ et demande de preuve des résultats avancés.	La dévolution de la recherche de la limite de $(A_n)$ repose clairement sur un appel de l'enseignante à utiliser cette institutionnalisation et à réinvestir la démarche utilisée pour la recherche de la limite de $(P_n)$

Les élèves commencent alors à se focaliser sur le terme  $(4/9)^n$ . Ce travail sur  $(4/9)^n$  est ensuite repris et approfondi.

027 Florence : il faut regarder pour  $(4/9)^n$

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M-1 Première identification du terme $(4/9)^n$ comme l'argument décisif pour le comportement de la suite $(A_n)$ . Les élèves anticipent la limite de ce terme comme devant être nulle. Le lien entre le milieu objectif des triangles ajoutés, et le milieu de recherche de preuve, a été fait très tôt par Yaëlle (ci-dessus).	Certains élèves sont déjà dans des jeux d'intérieur (syntaxiques) sur le calcul ultérieur de la limite de $(A_n)$ : R2.3. Il s'ensuit, pour d'autres, un retour au milieu objectif numérique afin de montrer, grâce à la calculatrice, que $(4/9)^n$ devient 'petit'. (interactions 18 à 25)

## Séance 3 – Episode 4

040 Sandra (va au tableau) : par exemple  $(4/9)^n < 10^{-99}$

041 P Pourquoi ? Alors voilà, on a dit qu'on essayait de montrer que  $(4/9)^n$  avait pour limite zéro, on va le rendre plus petit qu'un nombre très petit, par exemple que  $10^{-99}$ .

042 Sandra : et on a trouvé  $n$ , et  $n > 282$ .

043 P : A ton avis Sandra, est-ce que ça ressemble à une des conditions qu'on avait trouvée pour le périmètre ?

044 Sandra : Oui,  $n$  augmente.

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
Calcul générique (au sens de Balacheff) qui va pouvoir ensuite être généralisé. C'est une première étape dans la démarche d'établissement de la preuve.	Le réinvestissement du système organisateur s'effectue bien : les élèves distinguent le rang de la suite et la valeur de la suite. L'intervention de Sandra est clairement de nature sémantique mais propose une conjecture étayée R1.2 ; elle renvoie à la logique de la recherche de limite : lorsqu'on essaie de rendre $(4/9)^n$ 'petit' on doit trouver que la variable augmente. Ici $n > 282$ est un <i>indice</i> de ce que le calcul 'se déroule bien' dans la logique de l'infini : R2.3

## Séance 3 – Episode 5

047 Karine : Nous on a fait avec  $10^p$

048 P : Ah oui, très bien. Le groupe de Karine, elles ont mis :  $(4/9)^n < 10^p$  où  $p$  est un entier positif bien sûr.

049 Laurent : Ca fait  $n > -p/\log(4/9)$

050 Sylvain : Je comprends pas pourquoi on change le signe (< devient > dans la division).

051 Caroline : Mais  $\log 4/9$  est négatif !

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
M0 Raisonnement R1.3. Formalisation de la preuve dans la théorie mathématique et généralisation. L'intervention de Caroline sur le signe de $\log 4/9$ est également syntaxique, contrairement à l'intervention précédente ( $n$ augmente) : elle explique la logique du calcul, qui, faisant diviser par un négatif, impose de trouver une condition du type : $n$ plus grand que...	Le recours au calcul générique n'est pas apparu comme nécessaire dans ce groupe. Les élèves ont transposé la preuve de la limite de $(P_n)$ dans le cas nouveau qui est posé. La formule établie pour $(P_n)$ se couple au système organisateur et le système obtenu permet de faire fonctionner directement une ébauche du système de preuve de l'analyse : R2.3 et R3.3

052 P : oui, Caroline, très bien,  $\log 4/9 < 0$ , voilà pourquoi ça change le sens de l'inégalité. Autrement dit est-ce qu'on est arrivé à une condition du même type que celle du périmètre ?

On est arrivé à prouver qu'on peut rendre  $(4/9)^n$  aussi petit qu'on veut, plus petit que n'importe quel nombre de la forme  $10^{-p}$  ; ça veut dire quoi, là ?

053 Laurent : ça veut dire que ça se rapproche de zéro.

Nature et fonction - Milieux	Signes et répertoire
<p>M0 : Synthèse de la signification du calcul relativement à la question de départ sur la limite de <math>(4/9)^n</math>. Raisonnement sur l'adéquation du calcul à la question posée.</p>	<p>La professeure renforce la dimension sémantique en reprenant l'argument de Caroline et en insistant sur le fait que cela conduit à une condition 'du même type que celle du périmètre' pour <math>n</math>. Les élèves montrent, par leurs réactions, qu'ils relient bien ce calcul à la nature de la limite : R2.2</p>

La conclusion de la séance est une synthèse qui utilise implicitement l'algèbre des limites pour conclure sur la limite de  $(A_n)$ .

#### 4. Bilan de la situation du flocon

Durant ces séances, les élèves sont passés du milieu objectif heuristique (figures des premières étapes de la construction utilisées comme des signes iconiques) à un milieu de référence, les signes associés suivant eux aussi une progression ainsi que le répertoire de représentations, conformément aux axes du tableau. Les premiers calculs sur des icônes du flocon ont établi que la recherche de la limite d'une suite impliquait de considérer de 'grandes' valeurs de la variable (indice de limite), ce qui a été fait en calcul instrumenté ; puis, un milieu de référence a été construit, qui conduisait à comparer le terme général de la suite à des puissances de dix (début de preuve formelle de l'Analyse, symboles de limites). Pour le calcul de l'aire, l'identification du terme qui varie est une première étape indiciaire (« C'est la limite de  $(4/9)^n$  qui détermine le comportement de la suite »), puis le même critère formel de comparaison aux puissances de dix, négatives cette fois-ci, conduit au résultat moyennant une utilisation implicite de l'algèbre des limites. Ce faisant, le répertoire des élèves a inclus des éléments formels plus complexes que les signes algébriques (assertions de type 'pour tout  $p$  on peut trouver  $n$  tel que') qui sont des *arguments* de calcul analytique. Il a inclus aussi des représentations figuratives de ce que peut être une suite de limite infinie ou finie, ce qui est d'un intérêt incontestable pour leur apprentissage de l'Analyse : les symboles formels ne sont supérieurs aux icônes que lorsque l'on a appris à se passer de ces dernières.

## CONCLUSION

### 1. Le modèle et la structure des raisonnements analysés

La situation du flocon permet d'aborder la notion de limite sans que cette notion ne soit introduite auparavant par ostension. En ce sens elle est bien porteuse d'une dimension adidactique significative (malgré ses moments didactiques inévitables), de sorte qu'elle puisse ensuite prendre une place dans le système organisateur du répertoire de représentation des élèves.

Remarquons que la dévolution de la recherche des limites de l'aire et du périmètre du flocon s'effectue par paliers, et qu'à chaque palier correspondent des étapes de calcul, des étapes sémiotiques, et des étapes de raisonnements. Ainsi, au départ l'aire et le périmètre sont calculés d'abord en calcul posé, puis en calcul instrumenté ; lors de la prise de conscience de la limitation de ce dernier, on passe à des conjectures sur des formules algébriques. Les formulations correspondantes passent de « on prend  $n$  grand », à des résultats de calcul instrumenté où «  $n$  prend des valeurs aussi grandes que l'on veut », même si l'on est limité par la calculatrice ; et  $P_n$  dépasse  $10^{99}$ . Le calcul de  $A_n$  'bloquant' plus rapidement, le calcul algébrique prendra la suite ; mais on aura pu voir les nombres figurant dans la phase de conjectures prendre successivement le statut *d'indice* du comportement des suites, puis d'argument (*symbole*) de ce que ce comportement doit être modélisé par des règles spécifiques. Dans ces étapes nous pouvons reconnaître le fonctionnement du système organisateur. La structure ainsi mise en évidence peut se déduire du tableau du 2.5 ; elle peut aussi se schématiser de la façon suivante :

1. M-2 : Calculs et moyens heuristiques (icônes ou indices)
2. M-1 : Enrichissement des énoncés, arguments génériques (indices), conjectures, passage au syntaxique
3. M0 : Décisions étayées, ostensifs organisés, arguments symboliques.

En termes de milieux et variables didactiques, nous avons repéré l'importance, non seulement de la présence conjointe d'une suite tendant vers l'infini et d'une suite tendant vers une limite finie, mais de la recherche d'une formule de *suite* géométrique et de *série* géométrique. Une série permet en effet de garder la mémoire du terme précédent dans l'ajout des petits triangles, ce qui autorise la visualisation de l'évolution de la figure. Le travail est alors ancré dans les constructions de départ du milieu objectif et permet les allers-retours dans les milieux, allers-retours que nous avons signalés (Bloch 1999).

Dans cette situation, les élèves ont la possibilité de travailler dans des registres différents, qui supportent chacun des procédures complémentaires et susceptibles d'offrir des liens logiques aux raisonnements. Les élèves peuvent ainsi mettre en œuvre des contrôles de compatibilité des différentes conjectures et preuves produites. La disponibilité des registres est suffisante pour que les jeux entre le syntaxique et le sémantique soient présents : les jeux d'extérieur (les recours à des argumentations d'ordre sémantique) se basent sur des connaissances des registres numérique, graphique, géométrique, connaissances étroitement liées au répertoire de représentations des élèves. De façon prévisible, les jeux d'intérieur (le calcul syntaxique) relèvent ici, quant à eux, quasi exclusivement du registre algébrique. En effet le registre des preuves de l'Analyse ne peut être disponible à ce moment d'introduction. On peut seulement observer que la structure syntaxique du raisonnement relatif à  $(P_n)$  est reprise, en l'adaptant, par certains élèves lors de la recherche de la limite de  $(A_n)$ .

Par ailleurs, l'analyse de la situation donne bien à voir le système organisateur qui percole d'ailleurs dans les groupes : en effet, les élèves utilisent manifestement des connaissances antérieures (formules de la somme de  $n$  termes d'une suite géométrique, conception des décimaux et de la suite des décimales, idée de ce que peut être une fonction de variable  $n$ , transposition des raisonnements établis pour  $(P_n)$  afin d'étudier  $(A_n)$ ) et sont capables de les organiser et de les utiliser à des fins de décision et de déduction, intégrant ainsi la dimension de généralisation signalée dans la partie théorique. Les connaissances mobilisées dans la situation sont elles-mêmes remises en jeu dans le système organisateur.

Dans la séance 2, trois comportements possibles de suites sont possibles et sont évoqués par certains élèves : suite croissante bornée ou non (la suite  $(P_n)$  est à un moment supposée bornée par la moitié des élèves), suite croissante bornée (ce qui les déstabilise car le comportement est peu visible sur la calculatrice) ou suite décroissante minorée (évoquée dans la discussion sur l'aire et le périmètre).

## **2. Discussion de la pertinence du modèle**

Le modèle nous a permis d'analyser les raisonnements comme étant des réactivations et des confrontations de connaissances, le tout se traduisant en situation par des énoncés et des représentations. Pour cela nous sommes appuyés à la fois sur la notion de milieu, de répertoire de représentations, et de niveau sémiotique. Ce que nous avons mis en évidence, c'est la progression des énoncés, conjectures, décisions, signes associés, et l'intégration, dans le système organisateur, d'éléments syntaxiques caractéristiques de l'Analyse.

La dimension adidactique apparaît comme nécessaire à la production autonome de raisonnements des élèves, ce qui n'étonnera guère. Les milieux offrent aux élèves la possibilité de débattre de la validité des conjectures en référant aux éléments, notamment syntaxiques, qui sont introduits au fur et à mesure du développement de la situation. Notons qu'un milieu de référence, porteur de la nécessité mathématique, contient obligatoirement des éléments syntaxiques, même si ces derniers peuvent se placer dans différents registres. Cette dimension syntaxique repose ici, bien entendu, sur la théorie mathématique sous-jacente (l'Analyse), enseignée plus tard.

Nous avons pu voir également que les situations de décision proposées (demander aux élèves de se positionner sur une conjecture) ont permis d'engendrer une grande richesse de raisonnements, ces derniers référant à des niveaux de milieux différents, suivant le répertoire de représentations des élèves impliqués. Mais indépendamment du niveau de départ, le travail des groupes prouve que la majorité des élèves réussit à utiliser les arguments sur lesquels repose la preuve formelle, du type :  $[(4/9)^n < 10^{-p} \text{ si } n > \dots]$

### 3. L'adéquation du modèle aux études de situations

Nous avons aussi utilisé ce modèle pour analyser (a posteriori) des situations dans des contextes très différents, par exemple l'enseignement de la proportionnalité en Sixième, ou « Le nombre le plus grand » en classe de CM2. Il nécessite certes une analyse a priori rigoureuse de la situation étudiée, et une définition concomitante des signes attendus comme significatifs de la résolution de cette situation.

Au risque de nous répéter, la dimension sémiotique nous paraît essentielle dans la perspective de la construction d'un modèle général : dans une situation où les milieux sont moins bien définis, notamment, le repérage du statut des signes utilisés est un indicateur précieux de l'identification des niveaux où se situent les élèves et des raisonnements. Ici nous pouvons voir que l'entrée dans la preuve de la nature de la limite s'accompagne de la production beaucoup plus serrée d'arguments, alors que les phases heuristiques sont caractérisées par la présence d'actions et de signes indiciels nombreux et variés. La variété est d'ailleurs ce qui caractérise les signes iconiques ou indiciels, et ce qui fait leur richesse pour l'entrée dans les raisonnements.

### 4. Apports et limites du modèle

Certes, la complexité de l'étude des signes et raisonnements, produits dans les situations didactiques, ne permet pas toujours de les décrypter afin d'élucider leur fonction ; et surtout, cela ne peut être fait qu'a

posteriori – il s’agit d’une analyse de ce qui a été produit dans la réalisation effective. Néanmoins cela éclaire la situation, notamment du point de vue de sa reproductibilité. De plus, le modèle prend en compte, non seulement les raisonnements valides, mais aussi les raisonnements incorrects ou incomplets, ce qui permet de les interpréter et de les traiter comme des énoncés contingents, au sens de Durand-Guerrier (2007).

Le modèle ne vise pas à hiérarchiser les raisonnements, et de ce point de vue on peut penser ne pas avoir progressé, puisqu’un signe ne pourra être pointé comme icône, indice ou argument que par sa fonction et le moment de sa survenue dans la situation. Cependant cette restriction a son pendant positif : le modèle permet de prendre en compte toutes les productions dans le raisonnement, sans se limiter au formel. De plus, la relativité du statut des signes implique que le modèle peut être utilisé à tous niveaux de l’enseignement des mathématiques.

#### REFERENCES

- ARZARELLO F., PAOLA D., SABENA C. (2009) Proving in early calculus. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.) (2009) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol.1, pp.35–40). Taipei : The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University..
- BALACHEFF N. (1987) Processus de preuve et situation de validation, *Educational Studies in Mathematics* 18(2) 147–176.
- BARALLOBRES G. (2007) Introduction à l’algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés. *For the learning of mathematics. An International Journal of Mathematics Education* 27(1) 39–44.
- BARRIER T. (2008) Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Éducation et didactique* 2 35–58.
- BARTOLINI-BUSSI M. (2009) Proof and proving in Primary school: An experimental approach. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.) (2009) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol.1, pp.53–58). Taipei : The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- BESSOT A. (2011) L’ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations, in *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, 27-54. Coordonné par Margolinas C., Abboud-Blanchard, Bueno-Ravel L., Douek N., Flückiger A., Gibel P., Vandebrouck F. & Wozniak F., Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BLOCH I (1999) L’articulation du travail mathématique du professeur et de l’élève dans l’enseignement de l’analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2) 135–193.
- BLOCH I. (2000) *L’enseignement de l’analyse à la charnière lycée/Université*. Doctorat de l’Université de Bordeaux I.

- BLOCH I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* 52, 3–28.
- BLOCH I. (2005) Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' d'une situation. In Salin M. H., Clanché P., Sarrazy B. (Eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp.143-152). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BLOCH I. (2006) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*. Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7.
- BLOCH I. (2008) Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif, *Les sciences de l'Éducation, Pour l'ère nouvelle, Numéro spécial* 41-1 (Coordonné par Bailleur M.) 91-114, Université de Caen.
- BLOCH I., CHIOCCA C.-M., JOB P., SCHNEIDER M. (2007) Du numérique aux limites : quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse ? In Rouchier A., Bloch I. (Eds.) *Perspectives en Didactique des Mathématiques, Actes de la XIII<sup>ème</sup> Ecole d'Été, (Cédérom)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU G., GIBEL P. (2005) Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics* 59, 13–58.
- CONNE F. (1992) Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(2/3) 221–270.
- DROUHARD J.-P. (2007) Prolegomènes épistémographiques à l'étude des transitions dans l'enseignement des mathématiques. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes du colloque EMF 2006 (Cédérom)*. Sherbrooke : Éditions du CRP.
- DURAND-GUERRIER V. (2007) Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. In Rouchier A. (Ed.) *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ? (Cédérom)*. Bordeaux : IUFM d'Aquitaine.
- EVERAERT-DESMEDT N. (1990) *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce*. Liège : Mardaga.
- GAUD D., GUICHARD J., PARPAY S., SICRE J.P., CHRETIEN C. (1996) *Les fractales, réflexions et travaux pour la classe*. Poitiers : IREM.
- GIBEL P. (2004) *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques*, Doctorat de l'Université de Bordeaux 2.
- GIBEL P. (2006) Raisonnement et argumentation : Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes du colloque EMF 2006 (Cédérom)*. Sherbrooke : Éditions du CRP.
- HEALY L. (2000) Connections between the empirical and the theoretical? Some considerations of students' interactions with examples in the proving process. In Paolo Boero, G. Harel, C. Maher, M. Miyazaki (organisers) *Proof*

- and *Proving in Mathematics Education: ICME 9 TSG 12*. Tokyo/Makuhari, Japan. Available on: [www-didactique.imag.fr/preuve/ICME9TSG12/index.html](http://www-didactique.imag.fr/preuve/ICME9TSG12/index.html)
- HINTIKKA J. & SANDU J. (1997) Game-Theoretical Semantics. In Van Benthem J., Ter Meulen A. (Eds.) *Handbook of Logic and Language*, (pp.361–410). Amsterdam : Elsevier.
- LEGRAND M. (1997) La problématique des situations fondamentales, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(2) 221–279.
- LIN F.-L., HSIEH F.-J., HANNA G., DE VILLIERS M. (Eds.) (2009) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (2 vols.). Taipei : The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University. En ligne : <http://ocs.library.utoronto.ca/index.php/icmi/8>.
- MARGOLINAS C. (1994) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In Margolinas C. (Ed.) *Les débats de didactique des mathématiques*, (pp.89–102). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- MARTY R. (1990) *L'algèbre des signes*. Amsterdam : John Benjamins.
- MERCIER A. (1995) Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations didactiques. In Margolinas C. (Ed.) *Les débats de didactique des mathématiques* (pp.157-168). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- MOPONDI B. (1995) Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 15(3) 7–52.
- MOREIRA M. (1993) *Le traitement de la vérité mathématique à l'école*. Doctorat de l'Université de Bordeaux 1.
- OLERON P. (1977) *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.
- ORUS BAGUENA P., GRESLARD D. (1994) Rôle de l'interaction sociale et de la situation a-didactique dans la gestion du raisonnement naturel dans la relation didactique. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavnigot P. (Eds.) *Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp.268–275). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- OTTE M. (2006) Proof and explanation from a semiotical point of view, *Revista Latino-Americana de Matematica Educativa Numero especial 2006* 23–43: [www.clame.org.mx/relime.htm](http://www.clame.org.mx/relime.htm)
- PEDEMONTE B. (2007) Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(3) 313–348.
- PEIRCE C. S. (1995) *Le raisonnement et la logique des choses* (Trad. par Chauviré C., Thibaud P., Tiercelin C. de l'édition anglaise commentée de Ketner K.L. et Putnam H.). Paris : Éditions du Cerf, 1995. (Edition originale - Cahiers de Cambridge, 1878)
- PEIRCE C. S. (1978) *Écrits sur le signe (traduction et commentaires de Deledalle, G.)*. Paris : Seuil.
- SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J.P., PAQUELIER Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(1) 57–90.
- TIERCELIN C. (1993) *La pensée signe. Études sur C.S. Peirce*. Nîmes : Jacqueline Chambon.