



**HAL**  
open science

## Modélisation des systèmes dynamiques évolutifs

Aude Maignan

► **To cite this version:**

| Aude Maignan. Modélisation des systèmes dynamiques évolutifs. 2009. hal-02525067

**HAL Id: hal-02525067**

**<https://hal.science/hal-02525067v1>**

Preprint submitted on 30 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation des systèmes dynamiques évolutifs \*

Aude Maignan  
aude.maignan@imag.fr

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>L'ensemble des matrices booléennes</b>	<b>2</b>
2.1	Propriétés . . . . .	3
2.2	graphes et matrices d'adjacences . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Quelques opérations de graphes</b>	<b>7</b>
3.1	Suppression ou ajout d'une arête du graphe . . . . .	7
3.2	Suppression d'un noeud avec suppression des arêtes incidentes à ce noeud . . . . .	8
3.3	Ajout d'un noeud . . . . .	9
3.4	Déconnection d'un noeud du réseau . . . . .	10
3.5	Affectation des connections d'un noeud à un autre noeud . . . . .	10
3.6	Contraction d'une arête . . . . .	11
3.7	Chemins de longueur 2 passant par un noeud . . . . .	12
3.8	Suppression d'un noeud avec reconnexion des arêtes . . . . .	12
3.9	Joindre totalement ou partiellement un noeud à un graphe . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Les systèmes dynamiques évolutifs</b>	<b>13</b>
4.1	Système hybride étendu . . . . .	13
4.2	Application aux systèmes dynamiques évolutifs . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Exemples de systèmes dynamiques évolutifs</b>	<b>16</b>
5.1	Croissance de graphes . . . . .	16
5.2	Cycle . . . . .	18
5.3	Convergence vers un comportement périodique . . . . .	20
5.3.1	Exemple de convergence dans un cycle de longueur 2 . . . . .	20
5.3.2	Exemple de convergence dans un cycle de longueur 4 . . . . .	22

---

\*Ce rapport a été financé par la région Rhône-Alpes (Projet CalCel)

# 1 Introduction

La modélisation d'une colonie d'individus peut se faire selon deux approches très différentes : Dans la première, les organismes n'apparaissent pas de manière individuelle. On considère alors une densité de population, c'est-à-dire, que l'on considère le nombre d'individus par unité de région ou par unité de volume. Dans la seconde, les dynamiques de chaque individu sont décrites de manière explicite. Ce modèle a donc un point de vue "microscopique". Ce modèle doit mettre en évidence des propriétés collectives déterminées par le comportement de chaque individu. Les individus réagissent grâce aux informations reçu de leur environnement local et des relations locales développées avec les individus de son voisinage. Nous avons choisi de développer le second modèle, et pour se faire, il est non seulement nécessaire de spécifier les états de chaque individu, mais nous devons aussi, à chaque moment, donner l'état de la structure constituée des individus inter-agissants. Le nombre d'individus peut évoluer au cours du temps.

A. Lindenmayer a, le premier, développé un formalisme permettant de simuler le développement d'un organisme multi-cellulaire chaîne [5]. Ce formalisme s'appelle les L-systèmes. Puis, la théorie des L-systèmes n'a cessé de s'enrichir et P. Prusinkiewicz a étendu les L-systèmes afin de simuler les interactions entre une plante qui se développe et son environnement [7, 8, 9].

Dans notre cas, une colonie n'a pas forcément une structure d'arbre et la gestion d'une structure plus complexe nécessite l'utilisation d'un graphe capable d'évoluer au cours du temps. Les noeuds du graphe correspondent alors aux individus et les arêtes aux liens (communication, coopération, échange) entre deux individus.

Nous appelons **système dynamique évolutif** un système dynamique tel que le graphe sur lequel est défini le système évolue au cours du temps.

# 2 L'ensemble des matrices booléennes

Notons  $+$ ,  $\times$  et  $-$  les opérations de disjonction, de conjonction et de négation associées à l'ensemble  $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ . Ces opérations sont définies de manière classique comme suit :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

-	
0	1
1	0

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\mathcal{B}^{n \times n}$  l'ensemble des matrices booléennes carrées d'ordre  $n$ . Nous définissons la somme et le produit de matrices booléennes.

**Définition 2.1.** Soient  $A \in \mathcal{B}^{n \times n}$  et  $B \in \mathcal{B}^{n \times n}$  telles que  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$ .

- On définit la somme de deux matrices booléennes par : 
$$+ : \mathcal{B}^{n \times n} \times \mathcal{B}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{B}^{n \times n}$$
$$(A, B) \rightarrow S$$
 tel que  $S = (s_{ij})$  et  $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

- On définit le produit de deux matrices booléennes par : 
$$+ : \mathcal{B}^{n \times n} \times \mathcal{B}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{B}^{n \times n}$$
$$(A, B) \rightarrow P$$
 tel que  $P = (p_{ij})$  et  $p_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} + b_{kj})$ .
- On définit le complémentaire d'une matrice booléenne par : 
$$\bar{\cdot} : \mathcal{B}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{B}^{n \times n}$$
$$A \rightarrow C$$
 tel que  $C = (c_{ij})$  et  $c_{ij} = \bar{a}_{ij}$ .

## 2.1 Propriétés

Notons

- $0_n$  la matrice de  $\mathcal{B}^{n \times n}$  ayant tous ses coefficients nuls,
- $1_n$  la matrice de  $\mathcal{B}^{n \times n}$  ne contenant aucun coefficient nul,
- $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{B}^{n \times n}$

L'addition de matrices booléennes est associative, commutative et idempotente.  $0_n$  est l'élément neutre de  $\mathcal{B}^{n \times n}$  pour l'addition.  $1_n + A = 1_n$  et  $A + \bar{A} = 1_n$ .

Dans la mesure où une matrice booléenne non nulle n'admet pas d'opposé,  $(\mathcal{B}^{n \times n}, +)$  n'est pas un groupe.

La multiplication de matrices booléennes a peu de propriété : elle est associative et  $0_n$  est absorbant.

Dans la mesure où la propriété d'idempotence n'est pas vérifiée,  $(\mathcal{B}^{n \times n}, +, \times)$  n'est pas une algèbre de boole.

**Définition 2.2.** Notons  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des bijections de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ .  $\mathcal{P}_n$  est appelé groupe de permutations sur  $n$  éléments. Soit  $A = (c_1, \dots, c_n)$  une matrice booléenne d'ordre  $n$ ,  $c_i$  étant la  $i^{eme}$  colonne de  $A$  et soit  $p \in \mathcal{P}_n$ ,  $(c_{p(1)}, c_{p(2)}, \dots, c_{p(n)})$  est obtenue à partir de  $A$  en permutant les vecteurs colonnes. Par extension, on note une telle matrice  $p(A)$ .

**Proposition 2.3.**  $p(A) = Ap(I_n)$

**Preuve** Posons  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{B}^{n \times n}$ ,  $(p(A))_{ij} = a_{ip(j)}$ . Notons  $B = p(I_n) = (b_{ij})$ ,  $b_{ij} = 1$  si  $i = p(j)$  et 0 sinon.

Donc  $(Ap(I_n))_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{ip(j)}b_{p(j)j} = a_{ip(j)}$  et  $p(A) = Ap(I_n)$  □

**Définition 2.4.** On appelle transposition toute permutation de  $\{1, \dots, n\}$  consistant à échanger la place de deux éléments laissant fixe les autres. On note  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des transpositions sur  $n$  éléments.

Pour tout  $p \in \mathcal{P}_n$ , il existe  $(t_1, t_2, \dots, t_s) \in (\mathcal{T}_n)^s$  tel que  $p = t_s \circ t_{s-1} \circ \dots \circ t_1$ .

Ainsi,  $p(A) = t_s \circ t_{s-1} \circ \dots \circ t_2 \circ t_1(A) = t_s \circ t_{s-1} \circ \dots \circ t_2(At_1(I_n)) = \dots = At_1(I_n)t_2(I_n)\dots t_s(I_n)$ .  
et  $t_1(I_n)t_2(I_n)\dots t_s(I_n) = p(I_n)$ .

**Proposition 2.5.** 1.  $\forall t \in \mathcal{T}_n, (t(I_n)) = {}^t(t(I_n))$

2.  $\forall t \in \mathcal{T}_n, (t(I_n))^2 = I_n$ .

**Preuve**

1.  $t$  est une fonction de transposition donc il existe  $(i, j) \in (\{1, \dots, n\})^2$  tel que  $t(i) = j$ ,  $t(j) = i$  et  $i \neq j$ . Si  $l \neq i$  et  $l \neq j$  alors  $t(l) = l$ .

Notons  $(b_{ij}) = t(I_n)$  alors  $b_{ij} = 1$ ,  $b_{ji} = 1$  et pour tout  $l \neq i$  et  $l \neq j$ , on a  $b_{ll} = 1$ . Les autres coefficients de la matrice sont nuls. On en conclut :  $\forall t \in \mathcal{T}_n, (t(I_n)) = {}^t(t(I_n))$ .

2. Notons  $\alpha_{ij} = (t(I_n))_{i,j}$ , et  $((t(I_n))^2)_{ij} = b_{ij}$ .

$\alpha_{ij} = 1$  si  $i = t(j)$  et 0 sinon.

$b_{il} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \alpha_{kl} = \alpha_{it(j)} \alpha_{t(j)l}$  avec  $i = t(j)$ .

- si  $i = l$ ,  $\alpha_{it(j)} = \alpha_{t(j)i} = 1$  et  $b_{ii} = 1$
- si  $i \neq l$ ,  $\alpha_{t(j)l} = 0$  et  $b_{il} = 0$ .

donc  $(t(I_n))^2 = I_n$ .

□

**Proposition 2.6.** La matrice  $A \in \mathcal{B}^{n \times n}$  est inversible si et seulement si

$$\exists p \in \mathcal{P}_n, A = p(I_n).$$

Autrement dit  $A$  est inversible si et seulement si  $A$  est une matrice booléenne ayant un et un seul élément non nul pour chaque ligne et chaque colonne.

**Preuve**  $A \in \mathcal{B}^{n \times n}$  est inversible si et seulement si il existe  $B \in \mathcal{B}^{n \times n}$  telle que  $AB = I_n$  et  $BA = I_n$

Notons  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$ ,  $AB = I_n$  implique  $\sum_{i=1}^n a_{ik} b_{ki} = 1$  donc chaque ligne de  $A$  doit posséder au moins une valeur non nulle. De même,  $BA = I_n$  implique que chaque colonne de  $A$  doit posséder au moins une valeur non nulle.

Prouvons que chaque ligne et chaque colonne doit posséder au plus une valeur non nulle.

Considérons une fonction de permutation  $q \in \mathcal{P}_n$  et  $A = \begin{pmatrix} l_{q(1)} \\ l_{q(2)} \\ \dots \\ l_{q(n)} \end{pmatrix} + E^{ij}$

$\begin{pmatrix} l_{q(1)} \\ l_{q(2)} \\ \dots \\ l_{q(n)} \end{pmatrix}$  est une matrice ayant un élément non nul sur chaque ligne et chaque colonne.

$l_i$  le vecteur ligne tel que  $(l_i)_i = 1$  et  $(l_i)_k = 0$  si  $i \neq k$ .

$E^{ij}$  est la matrice telle que  $(E^{ij})_{ij} = 1$  et  $(E^{ij})_{kl} = 0$  si  $i \neq k$  ou  $j \neq l$ .

De plus on prend pour hypothèse que  $j \neq q(i)$ , ainsi, la matrice  $A$  possède exactement deux éléments non nuls sur la ligne  $l_i$  et deux éléments non nuls sur la colonne  $j$ .

Résolvons  $AB = I_n$ : Si  $l \neq i$ ,  $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl} = 0$  or  $a_{ij} = 1$  et  $a_{iq(i)} = 1$  donc  $b_{jl} = 0$  et  $b_{q(i)l} = 0$  pour tout  $l \neq i$ .

De plus pour tout  $l \neq i$ ,  $\sum_{k=1}^n a_{lk}b_{kl} = a_{lq(l)}b_{q(l)l} = b_{q(l)l} = 1$ . Or il existe  $l \neq i$  tel que  $j = q(l)$  et  $b_{jl} = 0$ . Donc  $A$  n'est pas inversible.

Prouvons que pour tout  $p \in \mathcal{P}_n$ ,  $A = p(I_n)$  est inversible.

$\forall p \in \mathcal{P}_n, \exists (t_1, t_2, \dots, t_s) \in (\mathcal{T}_n)^s, p = t_s \circ t_{s-1} \circ \dots \circ t_1$  et  $t_1(I_n)t_2(I_n)\dots t_s(I_n) = p(I_n)$ . Or  $\forall i = 1, \dots, s, (t_i(I_n))^2 = I_n$  donc

$[t_1(I_n)t_2(I_n)\dots t_s(I_n)][t_s(I_n)t_{s-1}(I_n)\dots t_1(I_n)] = I_n$  et l'inverse de  $A$  est  $t_s(I_n)t_{s-1}(I_n)\dots t_1(I_n)$ .  $\square$

**Corollaire 2.7.**  $\forall p \in \mathcal{P}_n, (p(I_n))^{-1} = (p(I_n))^T$

**Corollaire 2.8.** Notons  $\Pi_n = \{p(I_n), p \in \mathcal{P}_n\}$ ,  $(\Pi_n, \times)$  est un groupe commutatif.

## 2.2 graphes et matrices d'adjacences

Un graphe  $G$  est composé d'un ensemble de noeuds  $V_G$ , et d'un ensemble d'arêtes  $E_G$  tels que  $e \in E_G$  s'il existe deux éléments  $x$  et  $y$  de  $V_G$  tels que  $e = \{x, y\}$ .

On notera ce graphe

$$G = (V_G, E_G)$$

(Tous les éléments de  $E_G$  sont distincts et on ne considère pas le cas où plusieurs arêtes ont les deux mêmes extrémités.) De plus, on note  $|V_G|$  le nombre de noeuds de  $G$ .

Soit  $x \in V_G$ , le voisinage de  $x$  est l'ensemble des noeuds  $y \in V_G$  tels que  $\{x, y\} \in E_G$  (Ces deux noeuds sont dits adjacents). On notera  $\mathbb{N}_G(x)$  ce voisinage. ( $x \notin \mathbb{N}_G(x)$ )

$\mathbb{N}_G(x) \cup \{x\}$  s'appelle le voisinage fermé de  $x$ , on le notera  $\overline{\mathbb{N}_G(x)}$ .

le degré  $d_G(x)$  du noeud  $x$  dans  $G$  est le cardinal de  $\mathbb{N}_G(x)$ .

Un graphe  $G$  peut être défini matriciellement par sa matrice d'adjacence. Pour cela, définissons une fonction bijective d'étiquetage des noeuds  $\sigma : V_G \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  avec  $n = |V_G|$ .

La matrice d'adjacence notée  $C_G$  est définie comme suit :

$\forall u \in V_G, \forall v \in V_G, (C_G)_{\sigma(u)\sigma(v)} = 1$  si les sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents et 0 ailleurs.

$\sigma(u)$  est l'indice de la matrice d'adjacence correspondant au sommet  $u$ .

Pour tout graphe  $G$ , on peut définir au moins une matrice d'adjacence  $C_G$ . Les arêtes de  $G$  n'étant pas orientées,  $C_G$  est symétrique et  $C_G \in \mathcal{B}^{n \times n}$  avec  $n = |V_G|$ .

A l'inverse pour toute matrice symétrique  $C \in \mathcal{B}^{n \times n}$ , il existe un graphe  $G$  tel que  $C$  est une matrice d'adjacence de  $G$ .

Soit  $G = (V_G, E_G)$  un graphe tel que  $|V_G| = n$  et soit  $\sigma$  une fonction d'étiquetage des noeuds de  $V_G$ . Pour tout  $p \in \mathcal{P}_n$ ,  $p \circ \sigma$  est aussi une fonction d'étiquetage et il existe une matrice d'adjacence associée à  $p \circ \sigma$ .

Ainsi à tout graphe  $G$  tel que  $|V_G| = n$ , on peut associer au plus  $n!$  matrices d'adjacence.

**Définition 2.9.** Soit  $A \in \mathcal{B}^{n \times n}$  et  $B \in \mathcal{B}^{n \times n}$  deux matrices booléennes.  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si il existe une matrice  $P \in \mathcal{B}^{n \times n}$  inversible dans  $\mathcal{B}^{n \times n}$  telle que  $A = PBP^{-1}$ .

**Théorème 2.10.**  $A \in \mathcal{B}^{n \times n}$  et  $B \in \mathcal{B}^{n \times n}$  sont semblables si et seulement si  $A$  et  $B$  sont deux matrices d'adjacence d'un même graphe.

**Preuve**

Supposons que  $A$  et  $B$  soient deux matrices d'adjacence du graphe  $G$ . Il existe une fonction d'étiquetage  $\sigma$  telle que  $A$  soit la matrice d'adjacence de  $G$  associée à  $\sigma$ . De plus, notons  $p$  la permutation telle que  $B$  soit la matrice d'adjacence associée à  $p \circ \sigma$ . On a  $p(I_n)A^t(p(I_n)) = B$ , or  ${}^t(p(I_n)) = (p(I_n))^{-1}$  donc  $A$  et  $B$  sont semblables.

Réciproquement, si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors il existe une matrice booléenne inversible  $P$  telle que  $B = PAP^{-1}$ . Comme  $P$  est inversible, il existe une permutation  $p$  telle que  $P = p(I_n)$  et  $P^{-1} = {}^t p(I_n)$ .  $B = p(I_n)A^t p(I_n)$  et  $A$  et  $B$  sont des matrices d'adjacence d'un même graphe. □

**Définition 2.11.** Soit  $G$  un graphe,  $C_G$  une de ses matrices d'adjacence et  $n = |V_G|$ ,  $\{p(I_n)C_G(p(I_n))^{-1}, p \in \mathcal{P}_n\}$  est appelé la classe des matrices d'adjacence de  $G$ , on la note  $\dot{C}_G$  et  $C_G$  est appelé représentant de la classe des matrices d'adjacence de  $G$ .

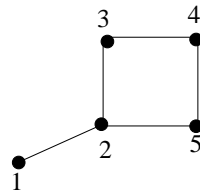
**Définition 2.12.** Deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont isomorphes s'il existe une bijection de  $V_{G_1}$  dans  $V_{G_2}$  qui induit une bijection de  $E_{G_1}$  dans  $E_{G_2}$

En d'autres termes,  $G_1$  et  $G_2$  sont isomorphes s'il existe une bijection  $f$  de  $V_{G_1}$  dans  $V_{G_2}$  telle que

- $\forall e = \{x_1, x_2\} \in E_{G_1}, \exists e' = (f(x_1), f(x_2)) \in E_{G_2}$  et
- $\forall e' = \{y_1, y_2\} \in E_{G_2}, \exists e = (f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) \in E_{G_1}$ .

**Corollaire 2.13.** Deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont isomorphes si et seulement si la classe des matrices d'adjacence de  $G_1$  est égale à la classe des matrices d'adjacence de  $G_2$ .

Dans les exemples de la section suivante, nous considérerons toujours comme graphe de départ le graphe  $G$  tel que  $V_G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $E_G = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$  pour simplifier, nous considérerons que la fonctions d'étiquetage sera l'identité. Dans la représentation du graphe  $G$ , on associe à chaque noeud son étiquette.



a pour matrice d'adjacence :

$$C_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3 Quelques opérations de graphes

Dans la mise en oeuvre d'exemples de systèmes dynamiques évolutifs, nous avons besoin d'un outil qui permette de recalculer la nouvelle forme du graphe à chaque transition discrète. Cette nouvelle forme du graphe peut être due à l'ajout d'un noeud ou d'un groupe de noeuds, l'ajout d'une ou plusieurs arêtes, la suppression d'un ou plusieurs noeuds, la suppression d'une ou plusieurs arêtes. Mais nous pouvons avoir des opérations moins classiques permettant une contraction, un amalgame ou une expansion du graphe.

Nous nous intéressons à des opérations non canoniques de matrices booléennes qui nous permettront de considérer de manière équivalente des transformations de graphe et des opérations matricielles.

Notons

- $I_k$  la matrice identité d'ordre  $k$ ;
- $O_{nm}$  la matrice nulle à  $n$  lignes et à  $m$  colonnes;
- $U_{nm}$  la matrice de 1 à  $n$  lignes et  $m$  colonnes;
- $D^{k,l}$  la matrice à  $k+l$  lignes et à  $k+l+1$  colonnes définie par :

$$\left( \begin{array}{c|c|c} I_k & O_{k,1} & O_{k,l} \\ \hline O_{l,k} & O_{l,1} & I_l \end{array} \right)$$

**Proposition 3.1.**  $D^{kl} {}^t D^{kl} = I_{k+l}$

Dans toute cette section nous notons  $\sigma$  une fonction d'étiquetage des noeuds du graphe  $G$ .

#### 3.1 Suppression ou ajout d'une arête du graphe

Etant donné  $G$  un graphe à  $n$  noeuds tel que  $u \in V_G$  et  $v \in V_G$ . On note  $G + \{u, v\}$  le graphe  $G$  auquel est ajouté l'arête  $\{u, v\}$ .  $V_{G+\{u,v\}} = V_G$  et  $E_{G+\{u,v\}} = E_G \cup \{u, v\}$ . Ajouter une arête entre les noeuds  $u$  et  $v$  de  $G$  revient à ajouter un 1 à la  $\sigma(u)^{eme}$  ligne et  $\sigma(v)^{eme}$  colonne et à la  $v^{eme}$  ligne et  $u^{eme}$  colonne de la matrice d'adjacence de  $G$ .

Soit  $E^{uv}$  la matrice carré d'ordre  $n$  définie comme suit :

$(E^{uv})_{ij} = 1$  si  $(i = \sigma(u) \text{ et } j = \sigma(v))$  ou  $(i = \sigma(v) \text{ et } j = \sigma(u))$

$(E^{uv})_{ij} = 0$  sinon.



alors

$$C_{G+\{u,v\}} = C_G + E^{uv}$$

De même, étant donné  $G$  un graphe à  $n$  noeuds tel que  $u \in V$ ,  $v \in V$  et  $\{u, v\} \in E$ . On note  $G - \{u, v\}$  le graphe  $G$  auquel est supprimé l'arête  $\{u, v\}$ .

$$C_{G-\{u,v\}} = C_G - E^{uv}$$

Remarque : La soustraction n'est pas une opération booléenne classique. Ici on définit une opération booléenne partielle :  $1 - 1 = 0$ ,  $1 - 0 = 1$  et  $0 - 0 = 0$ .

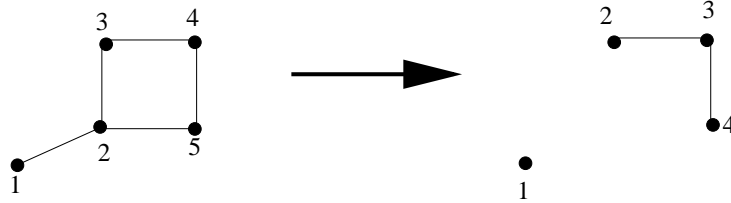
### 3.2 Suppression d'un noeud avec suppression des arêtes incidentes à ce noeud

**Définition 3.2.** Soit  $G$  un graphe et  $u$  un sommet de ce graphe, on note  $G' = G - u$  le graphe  $G$  privé du sommet  $u$ .  $V_{G'} = V_G - \{u\}$  et  $E_{G'} = E_G - \{\{u, v\}, v \in V_G \wedge \{u, v\} \in E_G\}$ .

La suppression d'un noeud revient matriciellement à enlever une ligne et une colonne de la matrice d'adjacence. Notons  $k = \sigma(u)$  ainsi,

$$\begin{aligned} C_{G-u} &= D^{k-1, n-k} \times C_G \times {}^t D^{k-1, n-k} \\ &= \left( \begin{array}{c|c|c} I_{k-1} & O_{k-1,1} & O_{k-1, n-k} \\ \hline O_{n-k, k-1} & O_{n-k, 1} & I_{n-k} \end{array} \right) \times C_G \times \left( \begin{array}{c|c} I_{k-1} & O_{k-1, n-k} \\ \hline O_{1, k-1} & O_{1, n-k} \\ \hline O_{n-k, k-1} & I_{n-k} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Considérons l'exemple suivant où  $G$  a 5 sommets étiquetés et où  $G' = G - 2$ .



$$C_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_{G-2} = D^{1,3} \times C_G \times {}^t D^{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La fonction d'étiquetage de  $C_{G-u}$  n'est plus  $\sigma$  mais elle est obtenue à partir de  $\sigma$ . En effet, notons  $\sigma'$  la fonction d'étiquetage de  $C_{G-u}$ , Pour tout  $v \in V_{G-u}$ , si  $\sigma(v) < \sigma(u)$  alors  $\sigma'(v) = \sigma(v)$  et si  $\sigma(v) > \sigma(u)$  alors  $\sigma'(v) = \sigma(v) - 1$ .

### 3.3 Ajout d'un noeud

**Définition 3.3.** Soit  $G$  un graphe et  $u$  un sommet tel que  $u \notin V_G$ , on note  $G' = G + u$  le graphe  $G$  auquel on ajoute le sommet  $u$ .  $V_{G'} = V_G + \{u\}$  et  $E_{G'} = E_G$ .

Ajouter un noeud est équivalent à rajouter une ligne et une colonne de 0 entre la ligne (respect. la colonne)  $k$  et la ligne (respect. la colonne)  $k+1$  de la matrice. Soit  $\sigma'$  la fonction d'étiquetage de  $G' = G + u$  telle que  $\sigma'(u) = k+1$  et pour tout  $v \in V_G$ , si  $\sigma(v) \leq k$  alors  $\sigma'(v) = \sigma(v)$  et si  $\sigma(v) \geq k+1$  alors  $\sigma'(v) = \sigma(v) + 1$ .

$$C_{G+u} = {}^t D^{k,n-k} C_G D^{k,n-k} = \left( \begin{array}{c|c} I_k & O_{k,n-k} \\ \hline O_{1,k} & O_{1,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & I_{n-k} \end{array} \right) \times C_G \times \left( \begin{array}{c|c|c} I_k & O_{k,1} & O_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & O_{n-k,1} & I_{n-k} \end{array} \right)$$

$$D^{k,n-k} \in \mathcal{M}_{n,n+1}$$

**Proposition 3.4.** Etant donné  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$ , notons par extension  $A+(k) = {}^t D^{k-1,n-k+1} A D^{k-1,n-k+1}$  et  $A-(k) = D^{k-1,n-k} A {}^t D^{k-1,n-k}$  alors, nous avons :

1.  $(A+(k)) \times (B+(k)) = (A \times B) + (k)$
2.  $(A+(k)) + (B+(k)) = (A+B) + (k)$
3.  $(A+(k)) - (k) = A$

En effet, de manière évidente :  $(A+(k)) \times (B+(k)) = {}^t D^{k-1,n-k+1} \times A \times D^{k-1,n-k+1} \times {}^t D^{k-1,n-k+1} \times B \times D^{k-1,n-k+1}$ , or  $D^{k-1,n-k+1} \times {}^t D^{k-1,n-k+1} = I_n$  donc  $(A+(k)) \times (B+(k)) = (A \times B) + (k)$ .

Pour la même raison, on a  $(A+(k)) - (k) = A$ .

**Remarque 3.5.** Dans la mesure où  ${}^t D^{k-1,n-k} \times D^{k-1,n-k} \neq I_{n+1}$ , on n'a pas égalité entre  $(A-(k)) + (k)$  et  $A$ .

**Exemple 3.6.** Reprenons la même matrice que précédemment. Nous souhaitons à présent rajouter une ligne et une colonne à l'emplacement 3 :

$$D^{2,3} = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad {}^t D^{2,3} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$${}^t D^{2,3} A D^{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Déconnection d'un noeud du réseau

**Définition 3.7.** Déconnecter le noeud  $u$  du graphe  $G$  consiste à supprimer toutes les arêtes dont l'une des extrémités est  $u$ .

Soit  $G'$  le graphe  $G$  auquel on a déconnecté le noeud  $u$ ,  $V_{G'} = V_G$  et  $E_{G'} = E_G - \{\{u, v\}, \{u, v\} \in E_G\}$ .

L'opération matricielle relative à la déconnection du noeud  $u$  est :  $C_{G-u+u}$ . Cette opération peut être simplifiée en :

$$C_{G-u+u} = {}^t D^{k-1, n-k} (D^{k-1, n-k} \times C_G \times {}^t D^{k-1, n-k}) D^{k-1, n-k}$$

avec  $\sigma(u) = k$  et

$$\begin{aligned} {}^t D^{k-1, n-k} D^{k-1, n-k} &= \left( \begin{array}{c|c} I_{k-1} & O_{k-1, n-k} \\ \hline O_{1, k-1} & O_{1, n-k} \\ \hline O_{n-k, k-1} & I_{n-k} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c|c} I_{k-1} & O_{k-1, 1} & O_{k-1, n-k} \\ \hline O_{n-k, k-1} & O_{n-k, 1} & I_{n-k} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c|c} I_{k-1} & O_{k-1, 1} & O_{k-1, n-k} \\ \hline O_{1, k-1} & O_{11} & O_{1, n-k} \\ \hline O_{n-k, k-1} & O_{n-k, 1} & I_{n-k} \end{array} \right) \end{aligned}$$

### 3.5 Affectation des connexions d'un noeud à un autre noeud

**Définition 3.8.** soit  $G$  un graphe et  $u$  et  $v$  deux noeuds de  $V_G$ ,  $e = \{u, v\}$  une arête de ce graphe, on note  $G \rightarrow_u v$  le graphe  $G$  tel que l'on affecte à  $v$  toutes les connexions que possède  $u$  ainsi  $V_{G \rightarrow_u v} = V_G$  et  $E_{G \rightarrow_u v} = E_G \cup \{\{v, i\}, \{u, i\} \in E_G\}$ .

Afin de générer le nouveau graphe  $G \rightarrow_u v$  nous définissons une nouvelle opération sur les matrices booléennes appelée somme logique par rapport à deux indices.

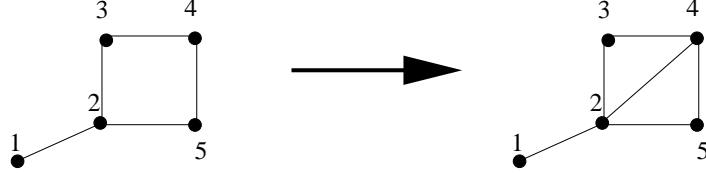
**Définition 3.9 (Somme logique par rapport à deux indices).** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même ordre  $n$ . l'opération de somme matricielle de  $A$  par  $B$  par rapport aux indices  $i$  puis  $j$  est noté  $A +_i B_j$  et est défini par : Pour tout  $l \in [1, n] \cap \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$

$$(A +_i B_j)_{kl} = A_{kl} \text{ si } k \neq i \text{ ou } l \neq i \text{ ou } l = i = k$$

$$(A + {}_i B_j)_{il} = A_{il} + B_{jl} \text{ avec } l \neq i$$

$$(A + {}_i B_j)_{li} = A_{li} + B_{lj} \text{ avec } l \neq i$$

Ainsi  $C_{G \rightarrow_j i} = C_G + {}_i (C_G)_j$   
 et sur l'exemple,



$$\text{et } C_{G \rightarrow_3 2} = C_G + {}_2 (C_G)_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.6 Contraction d'une arête

**Définition 3.10.** soit  $G$  un graphe et  $e = \{u, v\}$  une arête de ce graphe, on note  $G \downarrow e$  la contraction de l'arête  $e$  du graphe  $G$ .  $V_{G \downarrow e} = V_G - \{v\}$  et  $E_{G \downarrow e} = E_G - \{\{x, v\}, x \in V_G \wedge \{x, v\} \in E_G\} \cup \{\{x, u\}, x \in V_G \wedge \{x, v\} \in E_G\}$ .

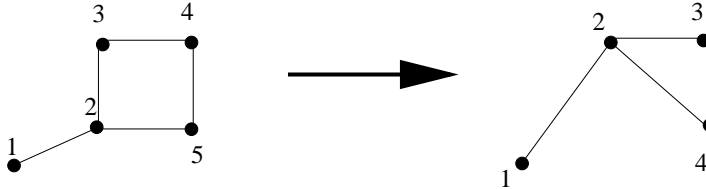
Cette opération se décompose en deux opérations élémentaires qui est : l'affectation des connexions du noeud  $v$  au noeud  $u$  et la suppression du noeud  $v$ .

Ainsi,

$$C_{G \downarrow \{u,v\}} = C_{(G \rightarrow_v u) - v}$$

$C_{G \downarrow \{u,v\}} = C_{(G \rightarrow_v u) - v}$  est égal à  $C_{G \downarrow \{v,u\}} = C_{(G \rightarrow_u v) - u}$  à une permutation de ligne et de colonne près.

Appliquons cette opération à notre exemple précédent :



$$C_{G \downarrow \{3,2\}} = C_{(G \rightarrow_2 3) - 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette opération conserve la connexité d'un graphe.

### 3.7 Chemins de longueur 2 passant par un noeud

**Définition 3.11.** Soit  $G$  un graphe et  $u$  un sommet de ce graphe,  $G \xrightarrow{u}$  est le graphe des chemins de longueur 2 dont le noeud milieu est  $u$ .  $V_{G \xrightarrow{u}} = V_G$  et  $E_{G \xrightarrow{u}} = \{\{i, j\}, \{i, u\} \in E_G \wedge \{u, j\} \in E_G\}$

Nous définissons une opération matricielle appelée produit par rapport à un indice afin de calculer  $G \xrightarrow{u}$ .

**Définition 3.12 (Produit par rapport à un indice).** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même ordre. l'opération de produit matriciel de  $A$  par  $B$  par rapport à l'indice  $i$  et noté  $A *_i B$  et est défini par : Pour tout  $l \in [1, n] \cap \mathbb{N}$  et pour tout  $j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$

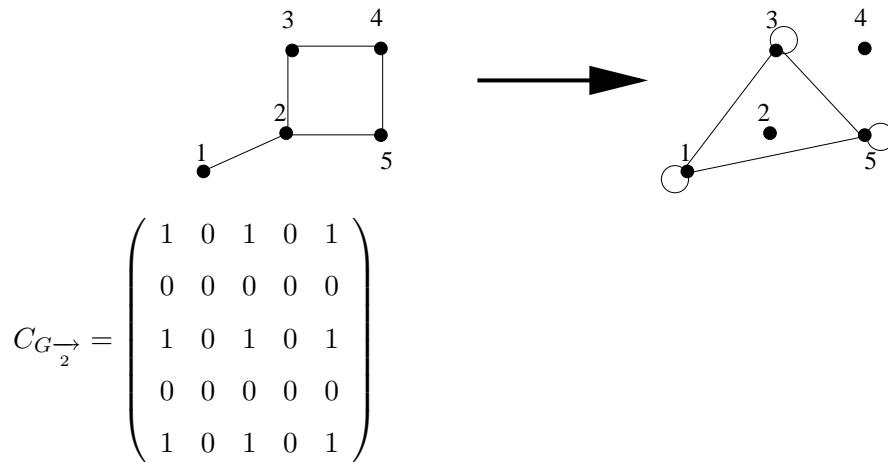
$$(A *_i B)_{lj} = A_{li} \times B_{ij}$$

Ainsi

$$C_{G \xrightarrow{u}} = C_G *_u C_G.$$

Pour cette opération, la matrice nulle est l'élément absorbant, la matrice constituée de 1 est l'élément neutre à droite et à gauche.

Reprenons l'exemple :



### 3.8 Suppression d'un noeud avec reconnexion des arêtes

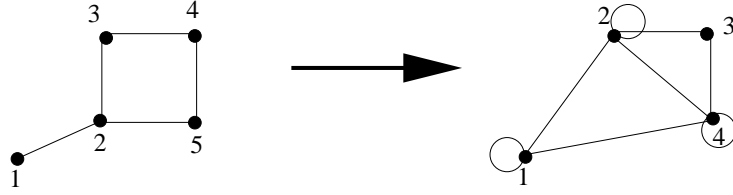
**Définition 3.13.** Soit  $G$  un graphe, on note  $G' = \overline{G - u}$  le graphe  $G$  auquel on a supprimé le sommet  $u$  ( $V_{G'} = V_G - \{u\}$ ) et telles que si  $\{u, v\} \in E_G$  et  $\{u, w\} \in E_G$  alors  $\{v, w\} \in E_{G'}$ .

Cette opération est le produit de deux opérations : La première consiste à calculer les chemins de longueur 2 devant passer par le sommet  $u$  sans être l'une des extrémités. La deuxième opération est l'opération classique de suppression.

Ainsi le graphe  $\overline{G - u}$  a pour opération  $C_{\overline{G - u}} = C_{G - u} + C_{(G \xrightarrow{u}) - u}$ .

Cette opération conserve la connexité d'un graphe.

Sur le même exemple,



$$C_{\overline{G-2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.9 Joindre totalement ou partiellement un noeud à un graphe

**Définition 3.14.** Soit  $G$  un graphe et  $u$  un sommet tel que  $u \notin V_G$ , on note  $G' = \overline{G+u}$  le graphe  $G$  auquel est rajouté le sommet  $u$  connecté à tous les autres sommets de  $G$ .  $V_{G'} = V_G + \{u\}$  et  $E_{G'} = E_G + \{\{u, v\}, v \in E_G\}$ .

Joindre totalement un noeud à un graphe consiste à créer un nouveau noeud et le connecter à l'ensemble des noeuds existants ainsi  $M_{\overline{G+u}} = {}^t D^{n,0} M_G D^{n,0} + \left( \begin{array}{c|c} O_{n,n} & U_{n,1} \\ \hline U_{1,n} & O_{1,1} \end{array} \right)$ .

**Définition 3.15.** Soit  $G$  un graphe et  $u$  un sommet tel que  $u \notin V_G$  et soit  $\mu \subset V$ , on note  $G' = \overline{G+u_\mu}$  le graphe  $G$  auquel est rajouté le sommet  $u$  connecté à tous les autres sommets du sous-ensemble  $\mu$  de  $G$ .  $V_{G'} = V_G + \{u\}$  et  $E_{G'} = E_G + \{\{u, v\}, v \in V_G\}$ .

Matriciellement nous obtenons l'opération suivante :  $M_{\overline{G+u_\mu}} = {}^t D^{n,0} M_G D^{n,0} + \left( \begin{array}{c|c} O_{n,n} & V^\mu \\ \hline {}^t V^\mu & O_{1,1} \end{array} \right)$ .

où  $V^\mu$  est un vecteur de rang  $n$  tel pour tout  $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ , si  $i \in \mu$  alors  $V_i^\mu = 1$  et 0 sinon.

## 4 Les systèmes dynamiques évolutifs

Un système dynamique évolutif comprend des composantes continues (la dynamique des noeuds ou la dynamique des arêtes) et des composantes discrètes (la dynamique du graphe). Il est donc naturel de modéliser un tel système par un système hybride.

La définition d'un système hybride [2], [10], ne nous permet pas de modéliser le changement du graphe. Nous proposons donc une extension de la notion de système hybride que nous appellerons système hybride étendu.

### 4.1 Système hybride étendu

Un système hybride étendu est un ensemble à 8 éléments  $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{D}, \mathcal{A}, \mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{R})$  tel que :

1.  $\mathcal{Q}$  est l'ensemble dénombrable des états discrets.

2.  $\mathcal{E} \subset \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  est l'ensemble des transitions.
3.  $\mathcal{G} = \{G_q, q \in \mathcal{Q}\}$  est un ensemble de graphes.
4.  $\mathcal{D} = \{D_q, q \in \mathcal{Q}\}$  est une collection de domaines liée aux noeuds.  $\forall q \in \mathcal{Q}, D_q = \prod_{x \in V_{G_q}} S_x$  où  $S_x$  est l'ensemble des états du noeud  $x$ .
5.  $\mathcal{A} = \{A_q, q \in \mathcal{Q}\}$  est une collection de domaines liée aux arêtes.  $\forall q \in \mathcal{Q}, A_q = \prod_{y \in E_{G_q}} T_y$  où  $T_y$  est l'ensemble des états de l'arête  $y$ .
6.  $\mathcal{U} = \{U_q, q \in \mathcal{Q}\}$  est la collection des domaines de contrôle.  $\forall q \in \mathcal{Q}, U_q$  est un sous-ensemble de  $\prod_{x \in V_{G_q}} S_x \times \prod_{y \in E_{G_q}} S_y$ .
7.  $\mathcal{F} = \{F_q, q \in \mathcal{Q}\}$  est la collection des champs de vecteurs.  $\forall q \in \mathcal{Q}, F_q : D_q \times A_q \times U_q \rightarrow D_q \times A_q$ . ( $F_q$  définit la dynamique des noeuds et des arêtes)
8.  $\mathcal{H} = \{H_e, e \in \mathcal{E}\}$  est la collection des gardes.  $\forall e = (q, q') \in \mathcal{E}, H_e \subset D_q \times A_q$ .
9.  $\mathcal{R} = \{R_e, e \in \mathcal{E}\}$  est la collection des fonctions resets  $\forall e = (q, q') \in \mathcal{E}, R_e : \mathcal{G} \times H_e \rightarrow \mathcal{G} \times D_{q'} \times A_{q'}$ . On suppose que pour tout  $Z_q \in H_e, R_e(G_q, Z_q) \neq (G_{q'}, \emptyset)$  et  $R_e(G_q, Z_q) \neq (\emptyset, Z_{q'})$ .

Il peut y avoir plusieurs transitions d'origine  $q$ . Soit  $e$  et  $e'$  deux transitions d'origine  $q$ , on peut avoir  $H_e \cap H_{e'} \neq \emptyset$ . ce cas est non déterministe et donne deux graphes différents. A noter que l'on a aussi le cas du non déterminisme à l'intérieur d'une cellule.

## 4.2 Application aux systèmes dynamiques évolutifs

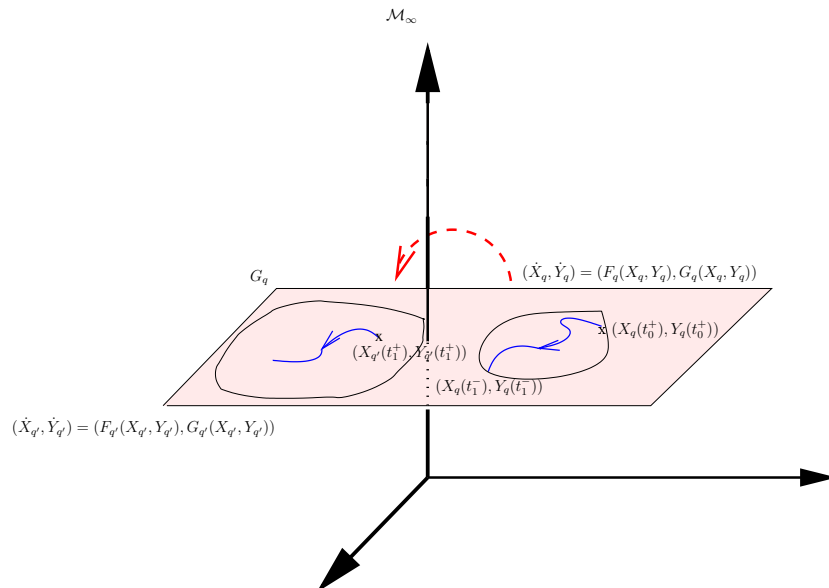
Nous modélisons un système dynamique par un système hybride étendu contenant un ensemble d'état  $\mathcal{Q}$  et, pour chaque état  $q$ ,

1. un graphe  $G_q = (V_q, E_q)$  défini par sa matrice d'adjacence  $C_q$ ,
2. une variable d'état des noeuds  $X_q$  ( $X_q$  est indexée sur  $V_q$  et prend sa valeur dans un domaine  $\mathcal{D}_q$ ),
3. une variable d'état sur les arêtes  $Y_q$  ( $Y_q$  est indexée sur  $E_q$  et prend sa valeur dans un domaine  $\mathcal{A}_q$ ),
4. une dynamique de noeuds  $\dot{X}_q = F_q(X_q, Y_q)$  telle que l'équation  $(\dot{X}_q)_i = (F_q)_i(X_q, Y_q)$  dépend exclusivement de l'état des noeuds du voisinage fermé de  $i$  et des arêtes dont une extrémité est  $i$ ,
5. une dynamique d'arête  $\dot{Y}_q = G_q(X_q, Y_q)$  telle que l'équation  $(\dot{Y}_q)_{(i,j)} = (G_q)_{(i,j)}(X_q, Y_q)$  dépend exclusivement de l'état des noeuds  $i$  et  $j$  et de  $(Y_q)_{(i,j)}$ ,

6. un ensemble de fonctions reset qui permettent de passer d'un état  $q$  vers un autre état  $q'$ . Ces fonctions sont exécutées lorsque  $(X_q, Y_q)$  atteint une frontière du domaine  $\mathcal{D}_q \times \mathcal{A}_q$ . Les fonctions reset ont pour rôle de changer la dynamique des variables  $X$  et  $Y$  à chaque changement d'état et de réinitialiser les valeurs des variables. Elles doivent de plus recalculer le graphe du nouvel état.

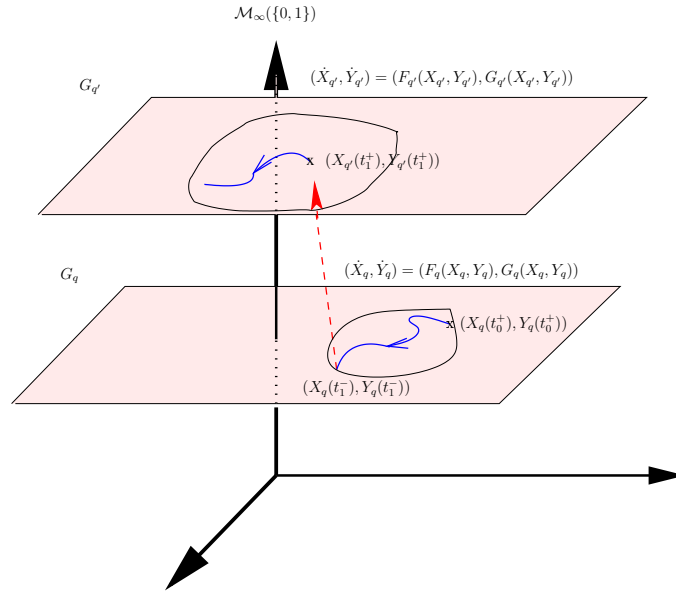
Ainsi, quand  $(X_q, Y_q)$  atteint une frontière du domaine  $\mathcal{D}_q \times \mathcal{A}_q$ , une transition discrète de l'état  $q$  vers l'état  $q'$  s'opère et

- ou bien la matrice d'adjacence  $C_q$  est identique à  $C_{q'}$  et on reste dans le cadre classique des systèmes hybrides.



- ou bien  $C_{G_q}$  et  $C_{G_{q'}}$  sont différentes. Dans ce cas le changement d'état a imposé un changement du graphe. Le nouveau graphe  $G_{q'}$  défini par sa matrice d'adjacence est calculé à partir des fonctions Resets. le nombre de noeuds ainsi que les arêtes peuvent changer. Les fonctions resets permettent de plus de recalculer les dynamiques  $F_{q'}$  et  $G_{q'}$  et de réinitialiser les nouvelles variables  $X_{q'}$  et  $Y_{q'}$ .





L'exemple le plus classique de graphe dynamique évolutif est le réseau informatique. A chaque ordinateur correspond un noeud, à chaque cablage ou connection wifi correspond une arête.  $X_q$  est par exemple la capacité de calcul de chaque ordinateur et  $Y_q$  la capacité de transmission de chaque connection. En biologie, nous sommes contraint à gérer des graphes dynamiques évolutifs dès qu'il s'agit de reproduction ou de mort.

## 5 Exemples de systèmes dynamiques évolutifs

La description de l'évolution de ce type de système dynamique évolutif est complexe. L'espace d'états du système est l'union de tous les espaces d'états des noeuds existants. De plus nous devons décrire l'évolution discrète du graphe au cours du temps.

La modélisation que nous avons choisi, permet sur des exemples de déterminer des comportements cycliques ou des comportements tendant vers un comportement périodique. En effet, la matrice d'adjacence a toujours pour ordre le nombre de noeuds du graphe et à un noeud correspond un indice de la matrice, ainsi il est fréquent lors d'un changement d'état que de nombreux noeuds changent de position dans la matrice et qu'ainsi les noeuds soient renommés au cours du temps. Ainsi un cycle est détecté lorsque deux transitions possédant les mêmes variables d'état et le même graphe sont repérées.

### 5.1 Croissance de graphes

Soit  $V$  un ensemble de cellules. Cet ensemble a un ensemble de connections défini par  $E$ . Cette structure est un graphe  $G = (V, E)$ .  $card(V) = n$ . L'état de la cellule  $i$  est défini par le paramètre  $X_i$ .  $X_i$  obéit à l'équation suivante :

$$(X_q)_i(t) = \left(2 - \frac{\nu_i^q}{2}\right)(t - t_0) + (X_q)_i(t_0)$$

On note  $\nu_i^q$  le nombre de connexions de la cellule  $i$  à l'état  $q$ .

Nous considérons une contrainte de reproduction : Si  $(X_q)_i = 10$  alors on passe de l'état  $q$  vers l'état  $q'$  et une nouvelle cellule connectée à  $i$  est ajoutée. Cette nouvelle cellule sera indexée par  $n + 1$ ,  $(X_{q'})_i = 8$  et  $(X_{q'})_{n+1} = 2$ .  $(D_q)_i = ] - \infty, 10[$ .

Lors d'une reproduction, le changement d'état de  $q$  vers  $q'$  conduit à un nouveau graphe  $G_{q'}$ .

La fonction reset que l'on applique à la matrice d'adjacence  $C_{G_q}$  de  $G_q$  au moment où la cellule  $i$  se reproduit est

$$C_{G_{q'}} = {}^t D^{n,0} C_{G_q} D^{n,0} + \left( \begin{array}{c|c} O_{n,n} & V^i \\ \hline {}^t V^i & O_{1,1} \end{array} \right).$$

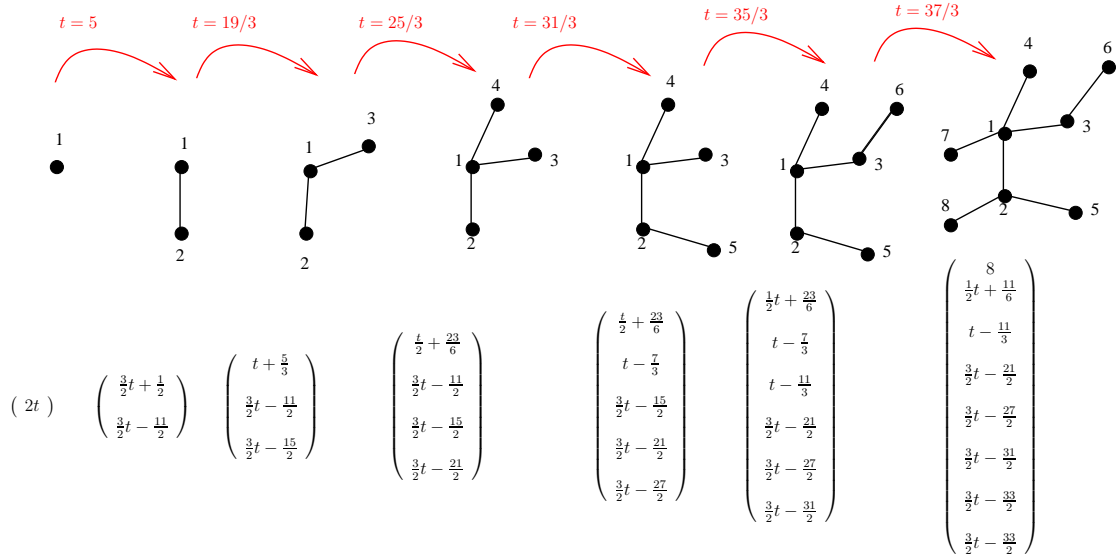
où  $V^i$  est un vecteur à  $n$  ligne tel que  $V_i^i = 1$  et 0 sinon.

Si plusieurs cellules se reproduisent dans le même temps, on effectue une composition de cette même opération.

Au temps  $t = 0$ , supposons qu'il n'y a qu'une seule cellule, l'état du système est alors :  $C_{G_q} = (0)$ ,  $X_q(0) = (0)$ ,  $X_q(t) = (2t)$ .

Le graphe ne change pas jusqu'au temps  $t = 5$ . Au temps  $t = 5$  une transition discrète de  $q$  vers  $q'$  est effectuée : une nouvelle cellule est ajoutée l'état du système devient  $C_{G_{q'}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X_{q'}(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $X_{q'}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}t - \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ .

Voici les premières étapes des changements d'état du système ainsi que l'évolution de  $X_q$ .



L'évolution du système est complètement asynchrone. La suite des temps de transition (définis par un processus déterministe) notée  $\{t_i\}_i$  décrit partiellement le comportement du

flot. Le nombre de noeuds du graphe croit et le degré maximal de chaque noeud est 4. Le domaine des graphes dans lequel évolue ce système n'est pas de cardinal fini. Mais la structure de ce graphe n'est pas extrêmement complexe puisque, si le graphe de départ est un arbre de degré maximal 4, alors, à n'importe quel moment, le graphe est un arbre de degré maximal 4.

## 5.2 Cycle

- A chaque état  $q$  du système on associe un graphe  $G_q$ .
- Chaque noeud  $i$  de  $G_q$  a pour dynamique

$$x_i^q(t) = \frac{6(t - t_q)}{\nu_i^q}$$

où  $\nu_i^q$  est le degré du noeud  $i$  et où  $t_q$  est le temps à partir duquel on est dans l'état  $q$  du système. (On note  $X_q = (x_i^q)_i$ )

- Etant donné une arête  $e = (i, j)$  du graphe  $G_q$ . On définit une dynamique

$$y_{ij}^q(t) = t - (t_{birth})_{ij}$$

où  $(t_{birth})_{ij}$  est la date de création de l'arête  $(ij)$ . ( $y_{ij}^q$  donne l'âge de l'arête  $e = (i, j)$ ). (On note  $Y_q = (y_{ij}^q)_{ij}$ )

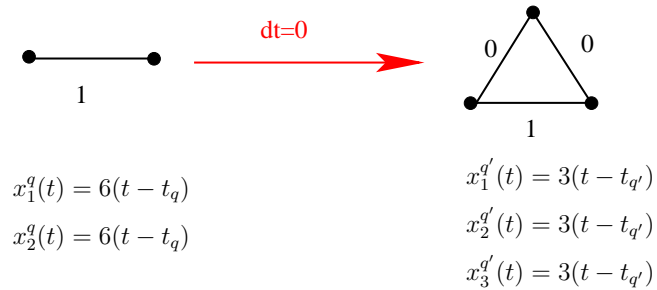
On définit de plus des gardes permettant de sauter d'un état  $q$  vers un état  $q'$ .

- Contraintes de reproductions

Si  $e = (i, j)$  existe et si pour un  $t^*$  donné :

$$x_i^q(t^*) + x_j^q(t^*) \geq 12$$

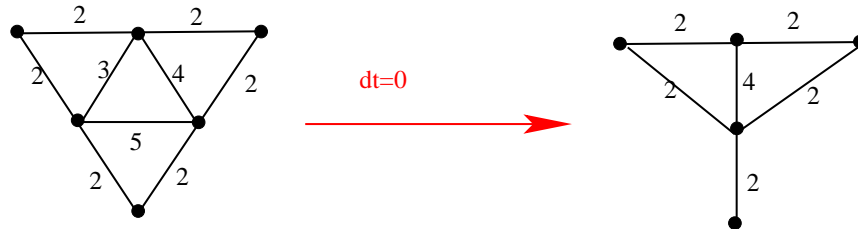
alors un nouveau noeud  $k$  est créé. Les arêtes  $(i, k)$  et  $(j, k)$  ( et  $(k, i)$  et  $(k, j)$ ) sont rajoutés.



De plus,  $y_{ik}^{q'}(t^*) = 0$ ,  $y_{jk}^{q'}(t^*) = 0$ ,  $(y_{ki}^{q'}(t^*) = 0$ ,  $y_{kj}^{q'}(t^*) = 0)$ . Tous les  $x_l^{q'}(t^*) = 0$ .

- Contraintes de décès

Si  $y_{ij}^q(t) \geq 5$  alors  $i$  et  $j$  sont amalgamés au noeud  $i$  si  $i \leq j$  et au point  $j$  sinon.



Du coup

$$D_q = \{X_q(t), (i, j) \in E_q \implies x_i^q(t) + x_j^q(t) < 12\}$$

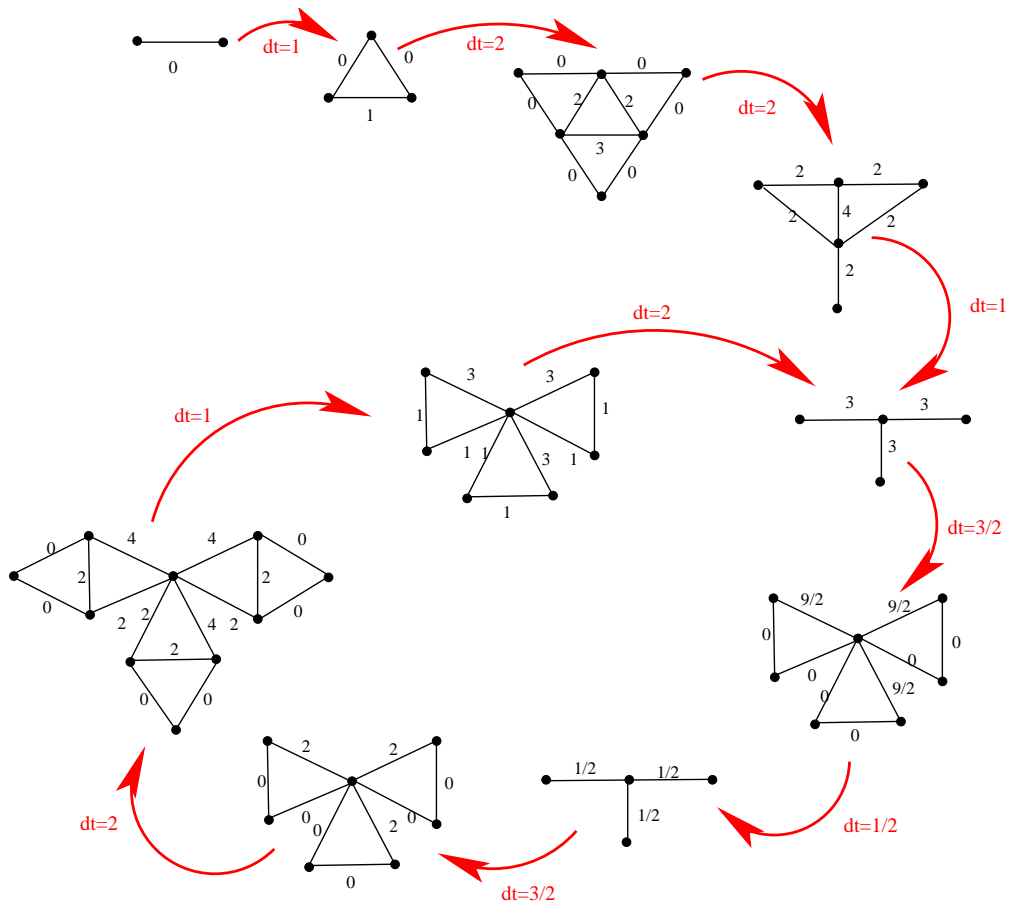
et

$$A_q = \{Y_q(t), (i, j) \in E_q \implies y_{ij}^q(t) < 5\}$$

L'opération matricielle associée à la reproduction consiste à joindre partiellement un noeud à un graphe, celle associée au décès est l'amalgame.

Remarque : Actuellement, si à un temps  $t^*$  donné la garde de reproduction et d'amalgame sont atteintes, Seuls les amalgames seront effectués. (Priorité de l'amalgame)

Voici présenté ci-dessous le résultat de l'exemple dans le cas où le point de départ est constitué d'un couple de cellules connectées :



Remarque : Les valeurs de chaque arêtes d'un graphe correspondent à l'âge de l'arête c'est-à-dire à la variable  $y_{ij}$ .

Sur cet exemple, la dynamique est cyclique et périodique.

### 5.3 Convergence vers un comportement périodique

#### 5.3.1 Exemple de convergence dans un cycle de longueur 2

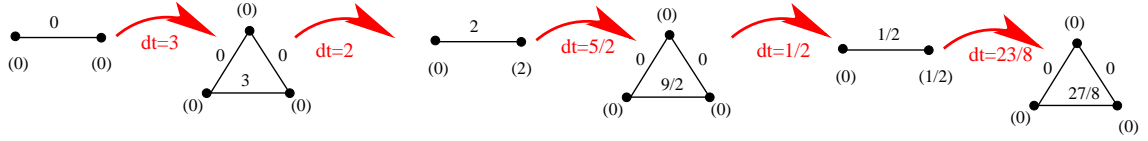
Dans cette section, on considère que la dynamique de chaque noeud est

$$x_i^q(t) = \frac{2(t - t_q)}{\nu_i^q}$$

Les lois de changements de graphes ainsi que la dynamique des arêtes est la même que celles du paragraphe précédent.

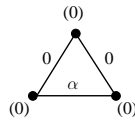
Prenons pour graphe de départ le graphe à 2 sommets et à une arête que nous avons déjà utilisé dans les exemples précédents.

Ainsi le système évolue de la façon suivante :



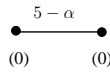
D'un point de vue expérimental, on s'aperçoit que le système est cyclique par rapport au graphe. Mais que les variables  $X_q$ ,  $Y_q$  et  $dt$  évoluent de manière non cyclique. Prouvons que le système est graphe-cyclique.

Etant donné le graphe

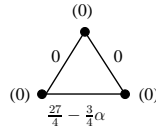


Aucun couple de noeuds ne peut se reproduire en un temps inférieur à 6. La transition suivante est donc une absorption et  $dt = 5 - \alpha$ .

Nous obtenons ainsi à l'étape suivante :



Si  $\alpha > \frac{7}{3}$ , l'étape suivante sera une reproduction,  
 $X_1 + X_2 = 12 \Leftrightarrow 4dt + 5 - \alpha = 12 \Leftrightarrow dt = 3 - \frac{5-\alpha}{4}$   
 et nous obtenons :

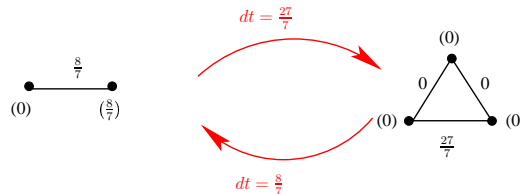


Ce processus est itératif et nous amène à étudier la suite

$$\alpha_{n+1} = \frac{27}{4} - \frac{3}{4}\alpha_n$$

Cette suite converge vers le point fixe  $l = \frac{27}{7}$ .

Et un cycle limite de ce système sera représenté par :



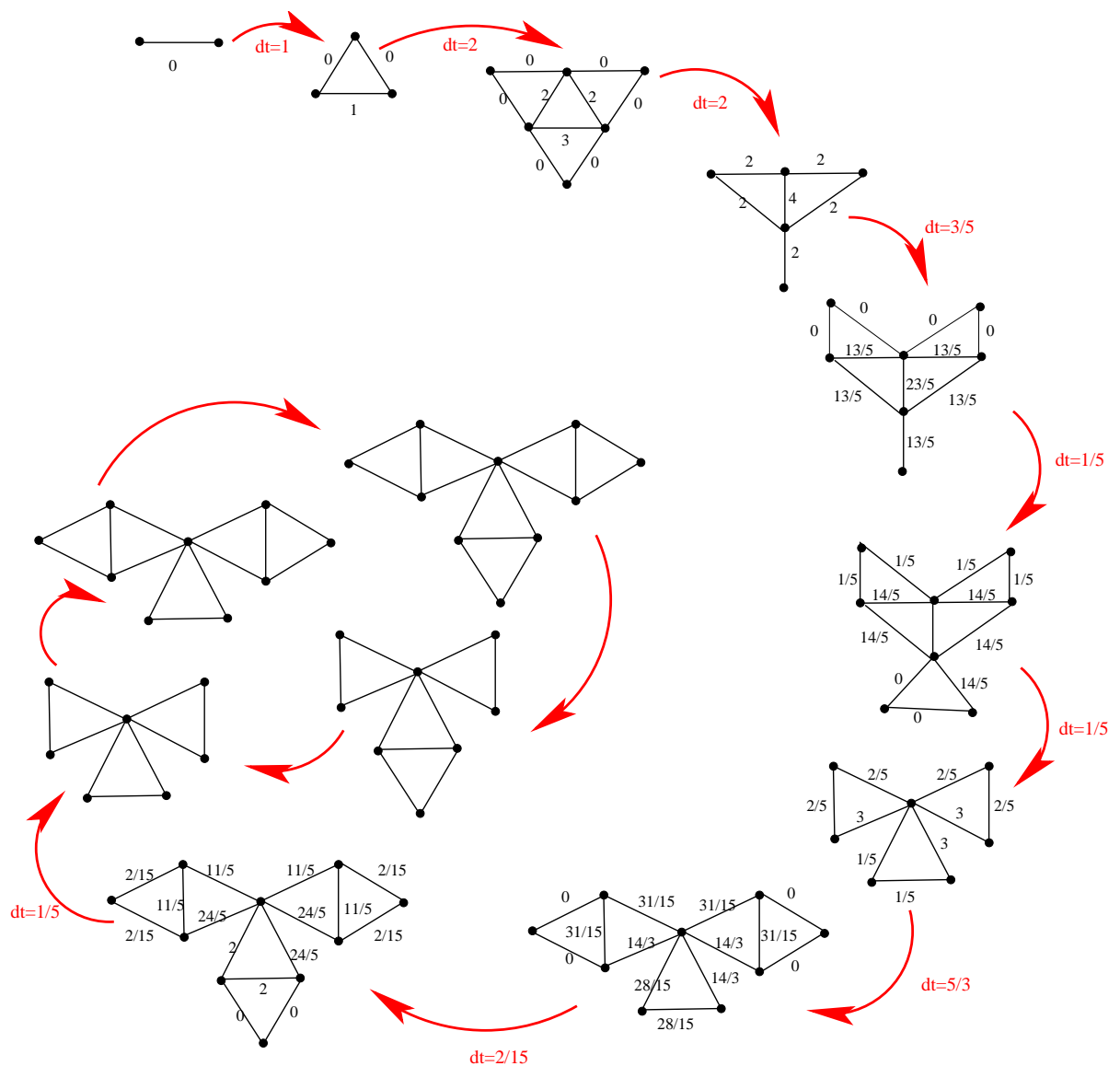
Si  $\alpha \leq \frac{7}{3}$ , le système converge vers un graphe fixe réduit à un point.

### 5.3.2 Exemple de convergence dans un cycle de longueur 4

On réutilise les contraintes et les dynamiques du paragraphe 4.2 mais, on considère à présent que l'énergie des noeuds ne s'annule pas, sauf si il a subi un amalgame ou une reproduction.

L'étude de ce graphe dynamique évolutif est plus complexe. Tout d'abord le comportement du système n'est plus cyclique, néanmoins, d'un point de vue expérimental, il tend vers un comportement périodique.

Voici présenté ci-dessous le résultat de l'exemple dans le cas où le point de départ est constitué d'un couple de cellules connectées :



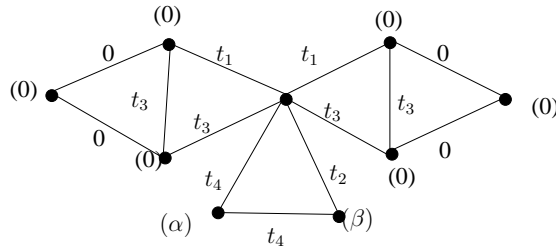
Sur ce graphe, nous constatons que le cycle du graphe est de longueur 4. Il est constitué

- (Etape 9  $\rightarrow$  10) d'une double reproduction,
- (Etape 10  $\rightarrow$  11) puis d'une simple reproduction,
- (Etape 11  $\rightarrow$  12) puis d'une double absorption,
- (Etape 12  $\rightarrow$  9) puis d'une simple absorption.

Le temps du cycle converge vers 2.125 Et la limite de la durée de chaque étape avant transition est : (1.25, 0.125, 0.625, 0.125)

Nous observons d'un point de vue expérimental un cycle comportant quatre graphes. Prouvons que pour cet exemple il existe bien un cycle de longueur 4 qui repose sur ces 4 graphes.

Dans le cycle, à l'étape de la double reproduction nous avons un minimum de variables non connues. La configuration du graphe ainsi que les variables d'états sont les suivants :



$$\text{où } X(t) = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et où } Y(t) = \begin{pmatrix} -\infty & t_1 & t_1 & t_2 & t_3 & t_3 & t_4 & -\infty & -\infty \\ t_1 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ t_1 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ t_2 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ t_3 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ t_3 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ t_4 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Sur le graphe, sont représentés l'état des noeuds entre parenthèses et l'état des arêtes. Beaucoup de valeurs sont nuls car l'état des noeuds se reproduisant s'annule lors d'une reproduction.

Au bout d'un cycle les variables de ce système ont évoluées en :



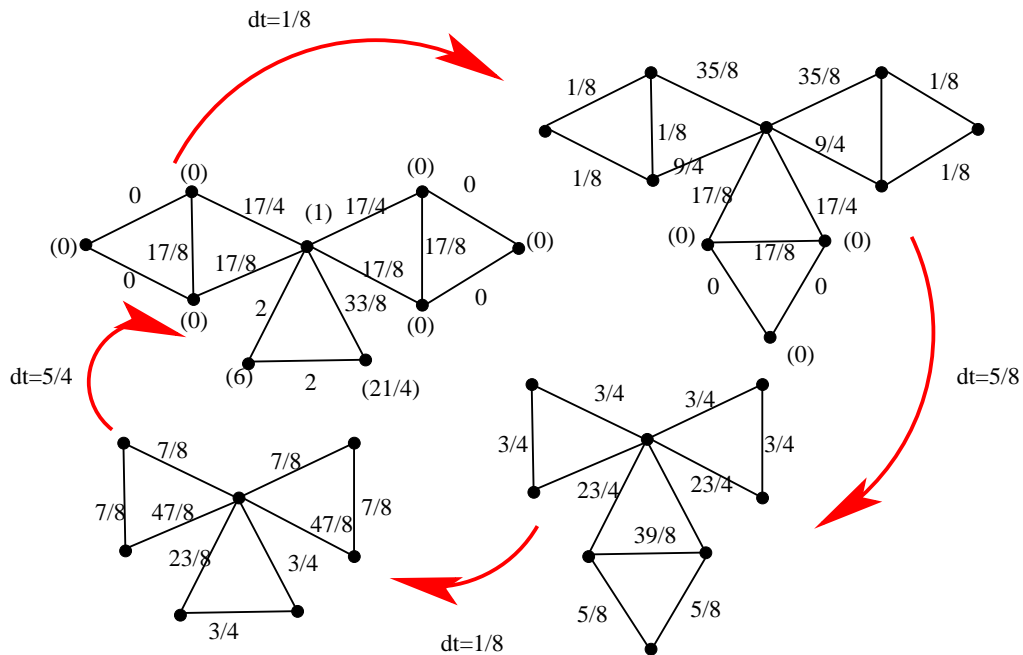
$$X(t) = \begin{pmatrix} t_2 - \frac{13+t_1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-3+6t_2-3t_1+2\alpha+2\beta}{6} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5+\alpha+\beta-t_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et où}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -\infty & t_3 + \frac{17-t_1}{6} & t_3 + \frac{17-t_1}{6} & t_4 + \frac{17-t_1}{6} & \frac{17-t_1}{6} & \frac{17-t_1}{6} & \frac{5+\alpha+\beta-t_1}{6} & -\infty & -\infty \\ t_3 + \frac{17-t_1}{6} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ t_3 + \frac{17-t_1}{6} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ t_4 + \frac{17-t_1}{6} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \frac{17-t_1}{6} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ \frac{17-t_1}{6} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ \frac{5+\alpha+\beta-t_1}{6} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

Ainsi le point fixe au moment du changement d'état décrit précédemment est :

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{21}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y^* = \begin{pmatrix} -\infty & \frac{17}{4} & \frac{17}{4} & \frac{31}{8} & \frac{17}{8} & \frac{17}{8} & 2 & -\infty & -\infty \\ \frac{17}{4} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ \frac{17}{4} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ \frac{31}{8} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ \frac{17}{8} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ \frac{17}{8} & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ 2 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons le cycle suivant :



## References

- [1] J. Della Dora, A. Maignan, L. Tournier, Dynamic systems : an algorithmic point of view, dans les actes de *Transgressive Computing*, pp 3-14, Grenade, Espagne, Avril 2006.
- [2] A. Girard, Analyse algorithmique des systèmes hybrides, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, septembre 2004.
- [3] C. Godsil, G. Royle, Algebraic Graph Theory, Springer.
- [4] J. Gross, J. Yellen, Graph Theory and its applications, CRC press (1999).
- [5] A. Lindenmayer, Mathematical models for cellular interaction in development (Parts I and II) *Journal of Theoretical Biology*, 18:280-315, 1968
- [6] M. Parashar and Craig A. Lee, Introduction to the special issue on Grid Computing. *Proceedings of the IEEE*, vol.93, NO. 3, March 2005 pp 479-483
- [7] P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer, The algorithmic beauty of plants, Springer-Verlag
- [8] P. Prusinkiewicz, J. Hanan, Visualization of botanic structures and processes using parametric L-systems, In D. thalman editor, *Scientific visualization and Graphics Simulations*, pp 183-201, J. Wiley & Sons, 1990.

- [9] P. Prusinkiewicz, M. Hamel, E. Mjolsness, Animation of Plant Development, Proceedings of SIGGRAPH 93 (Anaheim, California, August 1-6) *In Computer graphics Proceedings*, Annual Conference Series, 1993, ACM SIGGRAPH, pp 351-360.
- [10] S. Simic, K.H. Johansson, S. Sastry, J. Lygrros, Towards a geometric theory of hybrid systems, *Hybrid systems : Computation and Control*, N. Lynch, B. H. Krogh (eds), n. 1790 in LNCS, pp 421-436, Springer, 2000.