



HAL
open science

Annulateurs circulaires et conjecture de Greenberg

Jean-François Jaulent

► **To cite this version:**

| Jean-François Jaulent. Annulateurs circulaires et conjecture de Greenberg. 2020. hal-02519397v1

HAL Id: hal-02519397

<https://hal.science/hal-02519397v1>

Preprint submitted on 26 Mar 2020 (v1), last revised 20 Jul 2022 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Annulateurs circulaires et conjecture de Greenberg

Jean-François JAULENT

Résumé. Étant donné un corps abélien réel F de groupe G_F et un nombre premier impair ℓ , nous définissons le sous-groupe circulaire $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ du pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_F$ et nous montrons que pour tout morphisme galoisien ρ de $\tilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, l'image $\rho(\tilde{\mathcal{E}}_F)$ annule le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}}_F$. Nous en déduisons une preuve de l'analogie logarithmique de la conjecture de Solomon.

Utilisant enfin le théorème de déploiement de la ramification modérée au-dessus de la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique, nous prouvons que le même résultat d'annulation vaut pour l'image $\rho(\mathcal{N}_F)$ du pro- ℓ -groupe des normes universelles, ce qui démontre en particulier la conjecture de Greenberg dans le cas semi-simple $\ell \nmid [F : \mathbb{Q}]$ dès que $\tilde{\mathcal{C}}_F$ est cyclique.

Abstract. Given a real abelian field F with group G_F and an odd prime number ℓ , we define the circular subgroup $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ of the pro- ℓ -group of logarithmic units $\tilde{\mathcal{E}}_F$ and we show that for any Galois morphism $\rho : \tilde{\mathcal{E}}_F \rightarrow \mathbb{Z}_\ell[G_F]$, the subalgebra $\rho(\tilde{\mathcal{E}}_F)$ annihilates the ℓ -group of logarithmic classes $\tilde{\mathcal{C}}_F$. We deduce from this a proof of the logarithmic version of the Solomon conjecture.

Using finally the deployment theorem of the tame ramification above the cyclotomic \mathbb{Z}_ℓ -extension, we show that the same annihilation result holds for $\rho(\mathcal{N}_F)$, where \mathcal{N}_F is the pro- ℓ -group of universal norms. This proves the Greenberg conjecture in the semi-simple case $\ell \nmid [F : \mathbb{Q}]$ when $\tilde{\mathcal{C}}_F$ is cyclic.

Table des matières

Introduction	2
1 Éléments circulaires et unités logarithmiques	3
1.1 Rappel sur les classes et unités logarithmiques	3
1.2 Éléments cyclotomiques logarithmiques	4
1.3 Unités logarithmiques circulaires	5
2 Annulateurs circulaires des groupes de classes logarithmiques	6
2.1 Application du Théorème de Čebotarev	6
2.2 Lemmes d'annulation logarithmiques	7
2.3 Annulation des classes logarithmiques réelles	8
3 Normes universelles et conjecture de Greenberg	9
3.1 Énoncé du Théorème principal	9
3.2 Preuve du lemme de réduction	10
3.3 Application à la conjecture de Solomon	11
Appendice : régulateur classique et régulateur logarithmique	12
Bibliographie	13

Introduction

Les ℓ -groupes de classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}}_F$ introduits dans [11] sont des invariants arithmétiques canoniques attachés à un corps de nombres F pour chaque nombre premier ℓ .

Ces groupes, qui sont finis sous la conjecture de Gross-Kuz'min, donc inconditionnellement pour F abélien, s'apparentent aux groupes de classes de diviseurs des corps de fonctions (ils s'obtiennent comme quotient du groupe des diviseurs de degré nul par son sous-groupe principal), sont liés aux noyaux sauvages de la K -théorie et interviennent naturellement en théorie d'Iwasawa. Par exemple, la conjecture de Greenberg sur la trivialité des invariants structurels attachés aux ℓ -groupes de classes dans la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique F_∞/F revient à postuler que le ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{C}}_F$ des classes logarithmiques de F capitule dans F_∞ pour F totalement réel (cf. [15, 16]).

La première ambition de ce travail est de transposer aux groupes de classes logarithmiques des corps abéliens réels les théorèmes d'annulation obtenus par Thaine, Rubin, All et al. (cf. [1, 4, 6, 22, 24, 26, 27]) pour les groupes de classes habituels. Nous introduisons pour cela la notion d'unité logarithmique circulaire en intersectant le ℓ -adifié du groupe des éléments circulaires à la Sinnott avec le pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_F$. C'est l'objet de la section 1.

Ce point acquis, la section 2 suit l'approche de Rubin [24] et de All [1] pour établir un premier théorème d'annulation (Th. 9) :

Théorème A. *Étant donné un corps abélien réel F de groupe de Galois G_F et ℓ un premier impair, pour tout morphisme galoisien ρ de $\tilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, l'image $\rho(\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$ du sous-groupe des unités logarithmiques circulaires annule le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}}_F$.*

La section 3 enfin, prend appui sur le théorème de déploiement de la ramification modérée établi en collaboration avec Maire (cf. [18, 13, 19]) pour prouver un second résultat (Th. 12) :

Théorème B. *Étant donné un corps abélien réel F de groupe de Galois G_F et ℓ un premier impair, pour tout morphisme galoisien ρ du pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, l'image $\rho(\mathcal{N}_F)$ du groupe des normes universelles annule le ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{C}}_F$ des classes logarithmiques.*

De ces deux théorèmes principaux résultent deux conséquences. La première est un critère suffisant de validité de la conjecture de Greenberg pour les corps abéliens réels (Cor. 14) :

Théorème C. *La conjecture de Greenberg pour un corps abélien réel F et le premier impair ℓ est satisfaite dès lors que sont réunies les deux conditions suivantes :*

- (i) *Le pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_F$ est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -libre.*
- (ii) *Le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}}_F$ est $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -monogène.*

Et la première condition est automatiquement satisfaite si le degré $[F : \mathbb{Q}]$ de F est étranger à ℓ .

La seconde est une version logarithmique d'un résultat conjecturé par Solomon (Th. 16) :

Théorème D. *Soient F un corps abélien réel, G_F son groupe de Galois, ℓ un nombre premier impair, \mathfrak{l} une place de F au-dessus de ℓ et $\mathbb{Z}_\mathfrak{l}$ l'anneau des entiers du complété \mathfrak{l} -adique $F_\mathfrak{l}$; puis ϑ le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -morphisme du pro- ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques de F dans $F_\mathfrak{l}[G_F]$ défini par :*

$$\vartheta(\varepsilon) = \sum_{\sigma \in G_F} \text{Log}_\mathfrak{l}(\varepsilon^\sigma) \sigma^{-1}.$$

Alors, pour tout élément \mathfrak{a} de l'algèbre $F_\mathfrak{l}[G_F]$ tel qu'on ait $\mathfrak{a}\vartheta(\tilde{\mathcal{E}}_F) \subset \mathbb{Z}_\mathfrak{l}[G_F]$, il vient :

- (i) *L'image $\mathfrak{a}\vartheta(\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$ du pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques circulaires annule $\mathbb{Z}_\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}}_F$.*
- (ii) *L'image $\mathfrak{a}\vartheta(\mathcal{N}_F)$ du pro- ℓ -groupe des normes universelles annule $\mathbb{Z}_\mathfrak{l} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}}_F$.*

Rappelons enfin qu'en présence des racines ℓ -ièmes de l'unité les éléments de Stickelberger et leurs reflets permettent également de construire des annulateurs galoisiens pour les ℓ -groupes de classes logarithmiques (cf. [17]), lesquels valent tant pour les composantes imaginaires, comme dans le cas classique (cf. [28]), que pour celles réelles, à la manière de Gras et Oriat (cf. [9, 23]).

1 Éléments circulaires et unités logarithmiques

1.1 Rappel sur les classes et unités logarithmiques

Soient ℓ un nombre premier donné et F un corps de nombres. À chaque place finie \mathfrak{p} de F , il est attaché dans [11] une application à valeurs dans \mathbb{Z}_ℓ , définie sur le groupe multiplicatif $F_{\mathfrak{p}}^\times$ du complété de F en \mathfrak{p} par la formule :

$$\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = \nu_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}), \text{ pour } \mathfrak{p} \nmid \ell; \quad \text{et} \quad \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = -\frac{1}{\deg \mathfrak{p}} \text{Log}_\ell(N_{F_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(x_{\mathfrak{p}})), \text{ pour } \mathfrak{p} | \ell;$$

où Log_ℓ désigne le logarithme d'Iwasawa et $\deg \mathfrak{p}$ est un facteur de normalisation, dont l'expression exacte est sans importance ici, destiné à assurer que l'image de $F_{\mathfrak{p}}^\times$ soit dense dans \mathbb{Z}_ℓ . Cette application induit un morphisme surjectif du compactifié ℓ -adique du groupe multiplicatif $F_{\mathfrak{p}}^\times$

$$\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim F_{\mathfrak{p}}^\times / F_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$$

dont le noyau, dit *sous-groupe des unités logarithmiques* de $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$,

$$\tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}} = \{x_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \mid \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = 0\}$$

s'identifie par la Théorie ℓ -adique locale du corps de classes (cf. [12]) au sous groupe normique de $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ associé à la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique $F_{\mathfrak{p}}^c$ de $F_{\mathfrak{p}}$. C'est donc l'analogie du groupe

$$\mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}} = \{x_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} \mid \nu_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = 0\}$$

des unités de de $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$, qui correspond, lui, à la \mathbb{Z}_ℓ -extension non-ramifiée de $F_{\mathfrak{p}}$.

Soit maintenant \mathcal{J}_F le *ℓ -adifié du groupe des idèles de F* , i.e. le produit $\mathcal{J}_F = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{res}} \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ des compactifiés $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$ des groupes multiplicatifs des complétés $F_{\mathfrak{p}}$, restreint aux familles $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ dont presque tous les éléments tombent dans le sous-groupe unité $\mathcal{U}_F = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}}$. La Théorie ℓ -adique globale du corps de classes (cf. [12]) établit un isomorphisme de groupes topologiques compacts entre le ℓ -groupe des classes d'idèles \mathcal{C}_F défini comme quotient

$$\mathcal{C}_F = \mathcal{J}_F / \mathcal{R}_F$$

de \mathcal{J}_F par son sous-groupe principal $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$ et le groupe de Galois $G_F = \text{Gal}(F^{\text{ab}}/F)$ de la pro- ℓ -extension abélienne maximale de F . Dans la correspondance ainsi établie (cf. [11, 12]) :

- (i) Le groupe de normes associé à la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique $F^c = F_\infty$ de F est le sous-groupe des idèles de degré nul : $\tilde{\mathcal{J}}_F = \{x = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{J}_F \mid \deg(x) = \sum_{\mathfrak{p}} \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) \deg \mathfrak{p} = 0\}$.
- (ii) Le groupe de normes associé à la plus grande sous-extension F^{lc} de F^{ab} qui est localement cyclotomique (i.e. complètement décomposée sur F^c en chacune de ses places) est le produit $\tilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$ du sous-groupe $\tilde{\mathcal{U}}_F = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}}$ des unités logarithmiques locales et de \mathcal{R}_F .
- (iii) En particulier, le groupe de Galois $\text{Gal}(F^{\text{lc}}/F^c)$ s'identifie au quotient $\tilde{\mathcal{C}}_F = \tilde{\mathcal{J}}_F / \tilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$, autrement dit au quotient du groupe $\tilde{\mathcal{D}}_F = \tilde{\mathcal{J}}_F / \tilde{\mathcal{U}}_F$ des diviseurs logarithmiques de degré nul par son sous-groupe principal $\mathcal{P}\ell_F = \mathcal{R}_F \tilde{\mathcal{U}}_F / \tilde{\mathcal{U}}_F$, le numérateur $\tilde{\mathcal{D}}_F$ s'identifiant au sous-groupe $\tilde{\Theta}_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$ des diviseurs de degré nul de la somme formelle $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$.
- (iv) Et le noyau $\tilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{R}_F \cap \tilde{\mathcal{U}}_F$ du morphisme $\text{div} : x \mapsto \sum_{\mathfrak{p}} \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x) \mathfrak{p}$ de \mathcal{R}_F dans $\tilde{\mathcal{D}}_F$ est le sous-groupe des normes cyclotomiques (locales comme globales) de \mathcal{R}_F .

Définition. Nous disons que $\tilde{\mathcal{C}}_F = \tilde{\mathcal{J}}_F / \tilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F \simeq \tilde{\mathcal{D}}_F / \mathcal{P}\ell_F$ est le ℓ -groupe des classes logarithmiques (de degré nul) du corps F et que $\tilde{\mathcal{E}}_F$ est le pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques globales.

Le quotient $\tilde{\mathcal{C}}_F^* = \mathcal{J}_F / \tilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$, qui s'identifie non canoniquement à la somme directe de $\tilde{\mathcal{C}}_F$ et de \mathbb{Z}_ℓ , est, par convention, le pro- ℓ -groupe des classes logarithmiques de degré arbitraire.

Comme expliqué dans [11], la conjecture de Gross-Kuz'min (pour le corps F et le premier ℓ) revient à postuler la finitude du (pro)- ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{C}}_F$ ou, de façon équivalente, que le \mathbb{Z}_ℓ -rang du pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques \mathcal{E}_k est la somme $r_F + c_F$ des nombres de places réelles et complexes de F . Elle est toujours vérifiée dès lors que F est abélien.

Enfin, du point de vue de la théorie d'Iwasawa, le groupe $\tilde{\mathcal{C}}_F$ s'interprète comme le quotient des genres ${}^\Gamma \mathcal{T}_F$, relativement au groupe procyclique $\Gamma = \text{Gal}(F_\infty/F)$, du module de Kuz'min-Tate

$$\mathcal{T}_F = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}^{\ell}$$

limite projective des ℓ -groupes de ℓ -classes d'idéaux attachés aux étages finis K_n de la tour K_∞/K .

1.2 Éléments cyclotomiques logarithmiques

Notons $(\zeta_n)_{n>1}$ un système cohérent de racines primitives de l'unité et ℓ un nombre premier.

Théorème 1. *Soient F un corps abélien de conducteur $f > 1$ et $G_F = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$.*

- Pour $\ell \mid f$, l'élément $\eta_F = N_{\mathbb{Q}[\zeta_f]/F}(1 - \zeta_f)$ est une unité logarithmique : $\eta_F \in \tilde{\mathcal{E}}_F$.
- Pour $\ell \nmid f$, l'intersection du $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ module multiplicatif engendré par η_F avec le pro- ℓ -groupe \mathcal{E}_F des unités logarithmiques de F contient le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -module engendré par l'élément

$$\tilde{\eta}_F = \eta_F^{1 - (\frac{f}{\ell})^{-1}}.$$

En d'autres termes, on a : $\eta_F^{\mathbb{Z}_\ell[G_F]} \subset \tilde{\mathcal{E}}_F$ dans le premier cas ; $\tilde{\eta}_F^{\mathbb{Z}_\ell[G_F]} \subset \tilde{\mathcal{E}}_F$ dans le second.

Preuve. Il est bien connu (cf. e.g. [9], §4.2) que les η_F satisfont les identités normiques :

$$N_{F/K}(\eta_F) = \eta_K^{\prod_p (1 - (\frac{K}{p})^{-1})} \quad (1)$$

où, pour toute sous-extension K de F , le produit fait intervenir les symboles d'Artin attachés aux premiers p qui se ramifient dans F/\mathbb{Q} mais non dans K/\mathbb{Q} .

Rappelons en outre que les η_F sont des p -unités qui ne sont pas unités lorsque f est p -primaire pour un premier p ; des unités sinon. Cela étant, distinguons les cas :

- Pour $\ell \mid f$, le cas $f = p^r$ avec $p \neq \ell$ étant exclu, η_F est toujours une ℓ -unité et il vient donc :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\eta_F) = v_{\mathfrak{p}}(\eta_F) = 0, \text{ chaque } \mathfrak{p} \nmid \ell,$$

puisque aux places étrangères à ℓ les valuations logarithmique $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$ et ordinaire $v_{\mathfrak{p}}$ coïncident. Aux places au-dessus de ℓ , il vient, en revanche :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \text{Log}_\ell(N_{F_{\mathfrak{l}}/\mathbb{Q}_\ell}(\eta_F)).$$

Introduisons donc le sous-corps de décomposition F_\circ de ℓ dans F/\mathbb{Q} . Par hypothèse le premier ℓ se ramifie alors dans F mais non dans F_\circ et l'on a en outre $(\frac{F}{\ell}) = 1$, de sorte que la formule normique plus haut nous donne immédiatement :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \text{Log}_\ell(N_{F/F_\circ}(\eta_F)) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \text{Log}_\ell 1 = 0,$$

sauf dans le cas ℓ -primaire $f = \ell^r$, où l'on a directement :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \text{Log}_\ell(N_{F/\mathbb{Q}}(\eta_F)) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \text{Log}_\ell \ell = 0,$$

En fin de compte, il vient bien $\tilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F) = 0$ pour $\mathfrak{l} \mid \ell$; et η_F est une unité logarithmique.

- Pour $\ell \nmid f$, l'élément η_F est toujours une unité (et donc une unité logarithmique aux places en dehors de ℓ), sauf dans le cas primaire $f = p^r$, dans lequel c'est une p -unité qui n'est pas une unité. Dans cette dernière situation, si \mathfrak{p} est alors l'unique place de F au-dessus de p , l'égalité $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\eta_F^\alpha) = v_{\mathfrak{p}}(\eta_F^\alpha)$, pour tout α dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ donne l'équivalence :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\eta_F^\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z}_\ell^{\text{aug}}[G_F], \text{ idéal d'augmentation de l'algèbre } \mathbb{Z}_\ell[G_F].$$

Reste dans tous les cas à évaluer les valuations logarithmiques aux places \mathfrak{l} au-dessus de ℓ .

La formule $\tilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F^\alpha) = \frac{1}{\deg \mathfrak{l}} \text{Log}_\ell(N_{F_{\mathfrak{l}}/\mathbb{Q}_\ell}(\eta_F^\alpha))$ donne l'équivalence :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{l}}(\eta_F^\alpha) = 0 \Leftrightarrow N_{F/F_\circ}(\eta_F^\alpha) \in \mathbb{Z}_\ell \Leftrightarrow N_{F/F_\circ}(\eta_F^\alpha) = 1,$$

où F_\circ désigne, comme précédemment, le sous-corps de décomposition de ℓ . Et cette dernière condition est évidemment remplie lorsque α est contenu dans l'idéal d'augmentation du sous-groupe de décomposition D_ℓ de ℓ ; autrement dit lorsque c'est un multiple de $1 - (\frac{F}{\ell})^{-1}$.

Scolie 2. *Sous les mêmes hypothèses, les éléments η_F pour $\ell \mid f$ (et $\tilde{\eta}_F$ pour $\ell \nmid f$) sont en fait des normes universelles dans la \mathbb{Z}_ℓ -tour cyclotomique F_∞ de F , i.e. des éléments de l'intersection $\mathcal{N}_F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{F_n/F}(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n})$ des groupes de normes logarithmiques attachés aux étages finis de F_∞ .*

Preuve. C'est une conséquence immédiate des identités normiques citées plus haut. On a, en effet : $N_{F_n/F}(\eta_{F_n}) = \eta_F$, dans le premier cas ; $N_{F_n/F}(\eta_{F_n}) = \tilde{\eta}_F$, dans le second.

1.3 Unités logarithmiques circulaires

Soient toujours ℓ un nombre premier arbitraire, F un corps abélien réel, $f = f_F$ son conducteur, $G_F = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois et $F_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ sa \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique.

Rappelons que le groupe des normes universelles est l'intersection $\mathcal{N}_F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{F_n/F}(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n})$ des sous-groupes de normes d'unités logarithmiques attachés aux étages finis F_n de F_∞ .

Pour chaque sous-corps K de F , notons f_K son conducteur et $\eta_K = N_{\mathbb{Q}[\zeta_{f_K}]/K}(1 - \zeta_{f_K})$.

Le ℓ -adifié \mathcal{C}_F° du groupe des éléments circulaires (à la Sinnott) est le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -module engendré dans $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes F^\times$ par les images de -1 et des éléments η_K , pour $K \subset F$. Il est donc naturel de définir le pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques circulaires (à la Sinnott) du corps abélien réel F comme l'intersection $\tilde{\mathcal{E}}_F \cap \mathcal{R}_F^\circ$ de \mathcal{R}_F° avec le pro- ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques :

Définition 3. Par pro- ℓ -groupe des éléments circulaires de F nous entendons le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -module \mathcal{R}_F° engendré dans $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes F^\times$ par les images de -1 et des éléments η_K , pour $K \subset F$.

Par convention le pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques circulaires (à la Sinnott) est l'intersection de \mathcal{R}_F° avec le pro- ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques : $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ = \tilde{\mathcal{E}}_F \cap \mathcal{C}_F^\circ$.

Et nous disons que l'intersection $\mathcal{N}_F^\circ = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{F_n/F}(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n}^\circ)$ des groupes de normes d'unités logarithmiques circulaires est le sous-groupe des normes universelles circulaires.

Théorème 4. Soient F un corps abélien réel et F° le sous-corps de décomposition de ℓ ; puis \mathcal{E}'_{F/F° , $\mathcal{E}^\circ_{F/F^\circ}$ et $\tilde{\mathcal{E}}^\circ_{F/F^\circ}$ les pré-images respectives du ℓ -groupe des racines μ_{F° par la norme N_{F/F° dans les pro- ℓ -groupes des ℓ -unités \mathcal{E}'_F , des unités circulaires \mathcal{E}_F° et des unités logarithmiques circulaires $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$. Notons enfin G_F le groupe de Galois $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ et D_ℓ le sous-groupe $\text{Gal}(F/F^\circ)$.

(i) Lorsque F possède plus d'une place au-dessus de ℓ , i.e. pour $F^\circ \neq \mathbb{Q}$, il vient :

$$\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ = \tilde{\mathcal{E}}^\circ_{F/F^\circ} = \mathcal{E}^\circ_{F/F^\circ}.$$

En particulier, le caractère $\tilde{\chi}_F^\circ$ du $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -module des unités logarithmiques circulaires $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ est alors l'induit à G_F du caractère d'augmentation du sous-groupe de décomposition D_ℓ :

$$\tilde{\chi}_F^\circ = \text{Ind}_{D_\ell}^{G_F} \chi_{D_\ell}^{\text{aug}}.$$

(ii) Lorsque, en revanche, le corps F admet une unique place au-dessus de ℓ , on a : $\mathcal{E}_F^\circ \subset \tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$.

(ii,a) Si F est ramifié en ℓ (e.g. pour $F \subset \mathbb{Q}[\zeta_{\ell^k} + \bar{\zeta}_{\ell^k}]$), le groupe des unités logarithmiques circulaires est contenu avec un indice fini dans le pro- ℓ -groupe des ℓ -unités : $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ \approx \mathcal{E}'_F$. C'est donc alors, tout comme celui-ci, un $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -module de caractère régulier.

(ii,b) Sinon, $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ coïncide avec $\mathcal{E}_F^\circ \approx \mathcal{E}_F$ et on a directement : $\tilde{\chi}_F^\circ = \chi_F^\circ = \chi_{G_F}^{\text{aug}}$.

La preuve de ce résultat repose sur le Lemme suivant :

Lemme 5. Pour tout corps abélien réel $F \neq \mathbb{Q}$ dans lequel le nombre premier ℓ se décompose complètement, le pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques circulaires $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ se réduit au ℓ -groupe des racines de l'unité $\mu_F = \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}_\ell}$; i.e. $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ = 1$, pour ℓ impair; $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ = \{\pm 1\}$, pour $\ell = 2$.

Preuve. En l'absence de ramification en ℓ dans F/\mathbb{Q} , les éléments cyclotomiques η_K pour $K \subset F$ sont des unités aux places au-dessus de ℓ . On a donc : $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ = \mathcal{R}_F^\circ \cap \tilde{\mathcal{E}}_F \subset \mathcal{E}_F \cap \tilde{\mathcal{E}}_F$. Puis, sous l'hypothèse de complète décomposition : $\mathcal{E}_F \cap \tilde{\mathcal{E}}_F = \mu_F$ (cf. [10], p. 218, l. 11–13, ou [16], Prop.6).

Preuve du Théorème. Regardons d'abord (i). Le Lemme donne $N_{F/F^\circ}(\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ) \subset \tilde{\mathcal{E}}_{F^\circ}^\circ = \mu_{F^\circ}$, puis :

$$\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ = \tilde{\mathcal{E}}^\circ_{F/F^\circ} = \mathcal{E}'_{F/F^\circ} \cap \mathcal{E}_F^\circ = \mathcal{E}^\circ_{F/F^\circ},$$

puisque les places au-dessus de ℓ ne se décomposent pas dans F/F° . L'expression du caractère $\tilde{\chi}_F^\circ$ en résulte immédiatement, puisque $\mathcal{E}_F^\circ \approx \mathcal{E}_F$ est un $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -module de caractère $\chi_{G_F}^{\text{aug}}$.

Examinons maintenant (ii). La formule du produit pour les valuations ℓ -adiques montre que, dans ce dernier cas, les unités logarithmiques sont exactement les ℓ -unités, i.e. que l'on a : $\tilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{E}'_F$. En particulier, $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ = \tilde{\mathcal{E}}_F \cap \mathcal{C}_F^\circ$ contient alors $\mathcal{E}_F^\circ = \mathcal{E}_F \cap \mathcal{C}_F^\circ$, qui est d'indice fini dans \mathcal{E}_F . Si ℓ se ramifie dans F , le groupe circulaire \mathcal{C}_F° contient l'image de ℓ et $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ est ainsi d'indice fini dans \mathcal{E}'_F . Sinon, les éléments circulaires sont des unités en ℓ , le groupe $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ se réduit à \mathcal{E}_F° et tout est dit.

2 Annulateurs circulaires des groupes de classes logarithmiques

2.1 Application du Théorème de Čebotarev

Prenons désormais ℓ impair et considérons un corps abélien réel F de conducteur $f = f_F > 1$. Écrivons $G_F = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois. Notons $\tilde{\mathcal{C}}_\ell$ le ℓ -groupe des classes logarithmiques (de degré nul) attaché à F et $\tilde{\mathcal{C}}_\ell^*$ le groupe des classes logarithmiques sans condition de degré.

Prenons m assez grand pour avoir $\ell^m \tilde{\mathcal{C}}_\ell = 0$, de sorte que $\tilde{\mathcal{C}}_\ell$ puisse être regardé canoniquement comme un sous-groupe du quotient d'exposant ℓ^m du pro- ℓ -groupe des classes logarithmiques de degré arbitraire : $\tilde{\mathcal{C}}_\ell \subset \ell^m \tilde{\mathcal{C}}_\ell^* = \tilde{\mathcal{C}}_\ell^* / \ell^m \tilde{\mathcal{C}}_\ell^*$.

Désignons par \tilde{F} la plus grande extension abélienne de F qui est d'exposant ℓ^m et localement cyclotomique, de sorte que nous avons par la Théorie du corps de classes : $\text{Gal}(\tilde{F}/F) \simeq \ell^m \tilde{\mathcal{C}}_\ell^*$. Et notons $F_{m_0} = \tilde{F} \cap F_\infty$ le sous-corps de \tilde{F} fixé par $\tilde{\mathcal{C}}_\ell$.

Donnons-nous enfin un morphisme galoisien $\bar{\rho}$ du pro- ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques de F vers l'algèbre $\mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}[G_F]$; et considérons les extensions emboîtées :

$$F_\zeta = F[\zeta_{\ell^m}] \subset F_\rho = F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{\text{Ker } \bar{\rho}}] \subset F_\varepsilon = F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{\tilde{\mathcal{E}}_F}],$$

Observons pour cela que tout élément \mathfrak{x} du tensorisé $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$ peut être représenté par un élément x de F^\times modulo une puissance ℓ^m -ième de \mathcal{R}_F , disons $\mathfrak{x} = x\eta^{\ell^m}$, et que cet élément x est unique modulo $F^\times \ell^m$; ce qui permet de définir sans ambiguïté $F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{\mathfrak{x}}]$ comme étant $F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{x}]$.

Observons en outre que les trois extensions F_ζ , F_ρ et F_ε sont linéairement disjointes de \tilde{F} sur F_{m_0} , de sorte que leurs composés \tilde{F}_ζ , \tilde{F}_ρ et \tilde{F}_ε avec \tilde{F} donnent lieu au schéma galoisien, où l'on a posé $G_{F_\zeta} = \text{Gal}(F_\zeta/\mathbb{Q})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \tilde{F} & \text{---} & \tilde{F}_\zeta & \text{---} & \tilde{F}_\rho & \text{---} & \tilde{F}_\varepsilon \\
 & & \tilde{\mathcal{C}}_\ell & \left| \right. & & \left| \right. & & \left| \right. & \\
 & & F_{m_0} & \text{---} & F_\zeta & \text{---} & F_\rho & \text{---} & F_\varepsilon \\
 & & \left| \right. & & \left| \right. & & \left| \right. & & \\
 & & F & & & & & & \\
 & & G_F & \left| \right. & & & & & \\
 & & \mathbb{Q} & & & & & &
 \end{array}$$

Par construction, le radical kummérien de F_ε/F_ρ est : $\text{Rad}(F_\varepsilon/F_\rho) = \tilde{\mathcal{E}}_F / \text{Ker } \bar{\rho} \simeq \text{Im } \bar{\rho}$. C'est un sous-module de $\mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}[G_F]$; et le groupe de Galois $\text{Gal}(F_\varepsilon/F_\rho) \simeq \text{Hom}_{G_{F_\zeta}}(\text{Rad}(F_\varepsilon/F_\rho), \mu_{\ell^m})$, qui s'identifie donc à un quotient de $\mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}[G_F]$, est, de ce fait, $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_\zeta}]$ -monogène.

Soient alors $\sigma_{F_\varepsilon} \in \text{Gal}(F_\varepsilon/F_\rho)$ un $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_\zeta}]$ -générateur de $\text{Gal}(\tilde{F}_\varepsilon/\tilde{F}_\rho)$ et $\sigma_{\tilde{F}} \in \text{Gal}(\tilde{F}/F_{m_0})$ provenant d'une classe donnée arbitraire $[c]$ de $\tilde{\mathcal{C}}_\ell$ regardée dans $\ell^m \tilde{\mathcal{C}}_\ell^*$.

Définissons enfin σ dans $\text{Gal}(\tilde{F}_\varepsilon/F_\rho)$ en imposant $\sigma|_{F_\varepsilon} = \sigma_{F_\varepsilon}$ et $\sigma|_{\tilde{F}} = \sigma_{\tilde{F}}$. Cela étant :

Proposition 6. *Il existe une infinité de nombres premiers impairs $p \neq \ell$, complètement décomposés dans F_ρ/\mathbb{Q} , tels que l'image de l'une des places de \tilde{F}_ε au-dessus par l'opérateur de Frobenius coïncide avec σ . Sont alors vérifiées en particulier les propriétés suivantes :*

- (i) p est complètement décomposé dans $F[\zeta_{\ell^m}]$, donc vérifie la congruence : $p \equiv 1 \pmod{\ell^m}$.
- (ii) La classe $[p]$ de l'un des premiers \mathfrak{p} de F au-dessus de p dans $\ell^m \tilde{\mathcal{C}}_\ell^*$ coïncide avec $[c]$.
- (iii) Les Frobenius dans F_ε des places au-dessus de p engendrent $\text{Gal}(F_\varepsilon/F_\rho)$.

Preuve. L'existence est une conséquence immédiate du théorème de densité de Čebotarev. De plus,

- (i) la congruence résulte de la condition de complète décomposition dans F_ρ , donc dans $\mathbb{Q}[\zeta_{\ell^m}]$;
- (ii) provient du fait que $\sigma_{\tilde{F}}$ est induit par l'image canonique $[c] \mathcal{C}_F^{\ell^m}$ de $[c]$ dans $\ell^m \tilde{\mathcal{C}}_\ell^*$;
- (iii) enfin résulte du fait que les conjugués de $\sigma|_{F_\varepsilon}$ par G_{F_ζ} engendrent $\text{Gal}(F_\varepsilon/F_\rho)$.

2.2 Lemmes d'annulation logarithmiques

Conservons les mêmes notations, supposons fixé le premier \mathfrak{p} de F au-dessus de $p \equiv 1 \pmod{\ell^m}$ donné par la Proposition 6 et considérons la restriction à $\tilde{\mathcal{E}}_F$ du morphisme de semi-localisation s_p induit par le plongement de F dans le produit de ses complétés $F_{\mathfrak{p}^\sigma}$ aux places au-dessus de p .

Par construction, pour chacune des places \mathfrak{p}^σ de F au-dessus de p , le complété $F_{\mathfrak{p}^\sigma}$ s'identifie à \mathbb{Q}_p et le ℓ -sous-groupe de Sylow $\mu_{\mathfrak{p}^\sigma}$ du groupe $F_{\mathfrak{p}^\sigma}^\times$ est d'ordre ℓ^{m_p} avec $m_p = v_\ell(p-1) \geq m$.

En particulier le quotient ${}^\ell\mu_{F_p} = \mu_{F_p} / \mu_{F_p}^{\ell^m}$ est un $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$ -module libre de dimension 1.

Lemme 7. *Sous les hypothèses de la Proposition, le morphisme galoisien $\bar{\rho} : \tilde{\mathcal{E}}_F \rightarrow \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$ s'écrit $\bar{\rho} = \bar{\rho}_p \circ \bar{s}_p$, où $\bar{s}_p : \tilde{\mathcal{E}}_F \rightarrow {}^\ell\mu_{F_p}$ est induite par l'application de semi-localisation et $\bar{\rho}_p$ est un morphisme galoisien de ${}^\ell\mu_{F_p}$ vers $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$.*

Preuve. Le noyau de s_p dans $\tilde{\mathcal{E}}_F$ est formé des unités logarithmiques qui sont localement puissances ℓ^m -ièmes aux places au-dessus de p , i.e. des $\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}_F$ pour lesquelles les extensions $F[\sqrt[\ell^m]{\varepsilon}]/F$ sont complètement décomposées aux places \mathfrak{p}^σ (ou, ce qui revient au même, pour lesquelles l'extension $F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{\varepsilon}]/F_\zeta$ est complètement décomposée aux places au-dessus de p). Du fait du choix de α_{F_ε} , cela revient à exiger que les conjugués de α_{F_ε} agissent trivialement sur $F_\zeta[\sqrt[\ell^m]{\varepsilon}]$; autrement dit, que ε soit une puissance ℓ^m -ième dans F_ρ , i.e. le produit d'un élément de $\text{Ker } \bar{\rho}$ et d'une puissance ℓ^m -ième dans F_ζ et finalement dans F , puisque, ℓ étant impair, les éléments de F qui sont des puissances ℓ^m -ièmes dans F_ζ sont déjà des puissances ℓ^m -ièmes dans F (cf. e.g. [24], Lem. 5.7). En fin de compte, il suit : $\text{Ker } \bar{s}_p = \text{Ker } \bar{\rho}$, ce qui assure, par $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}[G_F]$ -injectivité de ${}^\ell\mu_{F_p}$, l'existence du morphisme factorisant $\bar{\rho}_q$.

Soit maintenant ζ_p une racine primitive p -ième de l'unité. L'extension $F[\zeta_p]/F$ possède une unique sous-extension F' de degré ℓ^m , laquelle est cyclique, totalement ramifiée au-dessus de p et non-ramifiée en dehors. En particulier, si $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_{F'}$ désigne l'unique place de F' au-dessus de $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F$ et $F'_{\mathfrak{p}'}$ son complété en la place \mathfrak{p}' , on a d'une part $\mathfrak{p}_F = \mathfrak{p}_{F'}^{\ell^m}$; et, d'autre part, l'égalité entre ℓ -groupes de racines locales de l'unité : $\mu_{F'} = \mu_{F_p}$.

Le lemme qui suit peut être regardé comme l'analogue logarithmique du Th.5.1 de [24].

Lemme 8. *Avec les notations ci-dessus, soient $\tilde{\mathcal{E}}_{F'/F} = \{\eta_{F'} \in \tilde{\mathcal{E}}_{F'} \mid N_{F'/F}(\eta_{F'}) = 1\}$ le groupe des unités logarithmiques relatives de l'extension F'/F et s_p l'homomorphisme de semi-localisation à valeurs dans la somme directe $\mu_{F'} = \mu_{F_p} = \bigoplus_{\mathfrak{p}|p} \mu_{F_p} \simeq \mu_{\mathbb{Q}_p} \otimes \mathbb{Z}_\ell[G_F] \simeq (\mathbb{Z}/\ell^{m_p}\mathbb{Z})[G_F]$.*

Tout $\alpha \in \mathbb{Z}_\ell[G_F]$ qui annule le quotient $\mu_{F_p}/s_p(\tilde{\mathcal{E}}_{F'/F})\mu_{F_p}^{\ell^m}$ annule la classe de \mathfrak{p} dans ${}^\ell\tilde{\mathcal{C}}_F^$.*

Preuve. Écrivons $F'_{\mathfrak{p}'} = F_{\mathfrak{p}'}[\sqrt[\ell^m]{\pi_{\mathfrak{p}'}}]$ pour une uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}'} \in F_{\mathfrak{p}'}$; et $x_{F'} \in \mathcal{R}_{F'}$ un relèvement de $(\sqrt[\ell^m]{\pi_{\mathfrak{p}'}} , 1, \dots, 1) \in \prod_{\mathfrak{p}'|p} \mathcal{R}_{F'_{\mathfrak{p}'}}$; notons enfin δ un générateur de $\Delta = \text{Gal}(F'/F) \simeq \text{Gal}(F'_{\mathfrak{p}'}/F_{\mathfrak{p}'})$.

Par construction, nous avons $s_p(x_{F'}^{\delta-1}) = s_p(x_{F'}^{\delta-1}) = (\zeta_p, 1, \dots, 1)$ pour une racine ℓ^m -ième de l'unité $\zeta_p \in F_p$; puis, par hypothèse, $s_p(x_{F'}^{\alpha})^{\delta-1} = s_p(x_{F'}^{\delta-1})^\alpha = s_p(\eta_{F'})$, pour un $\eta_{F'} \in \tilde{\mathcal{E}}_{F'/F}$. Le Théorème 90 de Hilbert nous permet alors d'écrire $\eta_{F'} = y_{F'}^{\delta-1}$ pour un $y_{F'} \in \mathcal{R}_{F'}$, qui engendre donc un diviseur logarithmique ambige. Il suit (en notations additives) :

$$\widetilde{\text{div}} y_{F'} = \sum_{\sigma \in G_F} \alpha'_\sigma \mathfrak{p}_{F'}^\sigma + \mathfrak{a}'_F; \quad \text{puis :} \quad \widetilde{\text{div}} N_{F'/F}(y_{F'}) = \sum_{\sigma \in G_F} \alpha'_\sigma \mathfrak{p}_F^\sigma + \ell^m \mathfrak{a}'_F$$

de sorte que l'élément $\alpha' = \sum \alpha'_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}_\ell[G_F]$ annule bien la classe de $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F$ dans ${}^\ell\tilde{\mathcal{C}}_F^*/\ell^m {}^\ell\tilde{\mathcal{C}}_F^*$.

Reste à vérifier que α' et α sont dans la même classe modulo $\ell^m \mathbb{Z}_\ell[G_F]$. Pour cela, observons que l'identité $s_p(x_{F'}^\alpha / y_{F'})^{(\delta-1)} = 1$ nous donne $s_p(x_{F'}^\alpha) = s_p(y_{F'} z_F)$, pour un z_F convenable de \mathcal{R}_F . Écrivant alors $\alpha = \sum \alpha_\sigma \sigma$ et prenant les diviseurs logarithmiques respectifs des deux membres de l'identité, nous restreignant enfin aux seules composantes au-dessus de p , nous obtenons ainsi :

$$\sum_{\sigma \in G_F} \alpha_\sigma \mathfrak{p}_{F'}^\sigma = \sum_{\sigma \in G_F} \alpha'_\sigma \mathfrak{p}_{F'}^\sigma + \mathfrak{a}_F$$

pour un diviseur logarithmique \mathfrak{a}_F de F , donc finalement, comme attendu :

$$\sum_{\sigma \in G_F} \alpha_\sigma \sigma \equiv \sum_{\sigma \in G_F} \alpha'_\sigma \sigma \pmod{\ell^m \mathbb{Z}_\ell[G_F]},$$

puisque les diviseurs logarithmiques au-dessus de p sont totalement ramifiés dans F'/F .

2.3 Annulation des classes logarithmiques réelles

Nous pouvons maintenant énoncer le Théorème principal sur les annulateurs circulaires.

Théorème 9. *Étant donné un corps abélien réel F de groupe de Galois G_F et ℓ un premier impair, pour tout morphisme galoisien ρ de $\tilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, l'image $\rho(\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$ du sous-groupe des unités logarithmiques circulaires annule le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}}_F$.*

Preuve. Choisissons m assez grand pour que ℓ^m annule le ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{C}}_F$ des classes logarithmiques ; prenons un élément α dans $\rho(\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$; et partons d'une classe $[c]$ de $\tilde{\mathcal{C}}_F$ regardée dans $\ell^m \tilde{\mathcal{C}}_F^*$.

Notons $\bar{\rho}$ la réduction de ρ modulo ℓ^m , à valeurs dans $\mathbb{Z}/\ell^m \mathbb{Z}[G_F]$, et faisons choix d'un premier impair $p \neq \ell$ satisfaisant les conditions de la Proposition 6. Par construction $p \equiv 1 \pmod{\ell^m}$ est complètement décomposé dans F et l'on a $[c] = [p]$ dans $\ell^m \tilde{\mathcal{C}}_F^*$ pour l'un des premiers p de F au-dessus de p .

Tout revient donc à montrer que l'on a : $\bar{\alpha}[p] = 0$ dans $\ell^m \tilde{\mathcal{C}}_F^*$, où $\bar{\alpha} \in \text{Im } \bar{\rho}$ est la réduction de α modulo ℓ^m . Or, par le Lemme 7, $\bar{\rho}$ se factorise via l'application de semi-localisation \bar{s}_p . Et :

Lemme 10. *Pour toute unité logarithmique circulaire $\eta \in \tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$, il existe une unité logarithmique circulaire relative $\eta' \in \tilde{\mathcal{E}}_{F'/F}$ telle qu'on ait : $s_p(\eta) = s_p(\eta')$.*

Ainsi $\bar{\alpha}$, qui est l'image par $\bar{\rho}$ d'une unité logarithmique circulaire η , provient d'une unité logarithmique circulaire relative $\eta' \in \tilde{\mathcal{E}}_{F'/F}$; et il résulte alors du Lemme 8 qu'il annule la classe de p dans $\ell^m \tilde{\mathcal{C}}_F^*$. D'où le résultat annoncé.

Preuve du Lemme. Il s'agit de vérifier que les unités logarithmiques circulaires sont *mutatis mutandis* ce que Rubin appelle des unités spéciales dans [24]. Reprenons pour cela dans le cadre logarithmique les calculs de All (cf. [1], §3) : partons d'une unité logarithmique circulaire $\varepsilon = \prod_{K \subset F} \eta_K^{\alpha_K}$ avec $\alpha_K \in \mathbb{Z}_\ell[G_F]$; notons \mathbb{Q}' l'unique sous-corps de degré ℓ^m de $\mathbb{Q}[\zeta_p]$ et $K' = K\mathbb{Q}'$, pour $K \subset F$; identifions $G_F = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ à $G'_F = \text{Gal}(F[\zeta_p]/\mathbb{Q}[\zeta_p])$; et raisonnons modulo $\mathfrak{m}' = \prod_{p'|p} \mathfrak{p}'$.

De $\zeta_p \equiv 1$, nous tirons : $\eta_{\mathbb{Q}[\zeta_f]} = 1 - \zeta_f \equiv 1 - \zeta_f \zeta_p = (1 - \zeta_{fp})^\rho = \eta_{\mathbb{Q}[\zeta_{fp}]}^\rho$ pour un ρ de G'_F ; et, plus généralement : $\eta_K \equiv \eta_{K'}^{\rho_K}$, pour un ρ_K de G'_F .

Posant alors $\varepsilon' = \prod_{K \subset F} \eta_{K'}^{\alpha_K \rho_K}$, nous obtenons bien $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, i.e. $s_p(\varepsilon) = s_p(\varepsilon')$, puisque ε est une unité aux places au-dessus de p , et $N_{F'/F}(\varepsilon') = 1$, puisque p est ramifié dans chaque K' mais complètement décomposé dans chacun des sous-corps K .

Le résultat obtenu ci-dessus pour les classes logarithmiques peut naturellement être mis en parallèle avec celui de Rubin [24] sur les classes d'idéaux tel que présenté par All (cf. [1], §3). Désignons pour cela par \mathcal{C}_F° le sous-groupe du ℓ -groupe des classes d'idéaux \mathcal{C}_F engendré par les idéaux de degré nul, de sorte que l'on a $\mathcal{C}_F^\circ \simeq \text{Gal}(F_\infty F^{\text{nr}}/F_\infty)$, où F^{nr} désigne le ℓ -corps de classes de Hilbert de F . Il vient alors :

Corollaire 11. *Soient ℓ un premier impair, F abélien réel de groupe G_F et ρ un morphisme galoisien du ℓ -adifié $\mathcal{E}'_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_F$ du groupe des ℓ -unités de F dans l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$. Alors :*

- (i) *L'image $\rho(\mathcal{E}'_F)$ du pro- ℓ -groupe construit sur les unités circulaires annule \mathcal{C}_F° .*
- (ii) *L'image $\rho(\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ)$ du pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques circulaires annule $\tilde{\mathcal{C}}_F$.*

L'assertion (i) n'est autre qu'une réécriture ℓ -adique du résultat initial de Rubin ; l'assertion (ii) provient directement du Théorème 9. Les classes logarithmiques sont conventionnellement de degré nul (sauf mention explicite du contraire), mais non les classes au sens ordinaire ; de ce fait l'introduction du sous-groupe \mathcal{C}_F° renforce le parallélisme des résultats.

Remarque. Lorsque le corps F possède plusieurs places au-dessus de ℓ , i.e. lorsque le sous-corps de décomposition F° de ℓ n'est pas le corps des rationnels \mathbb{Q} , le Théorème 4 affirme en particulier que $\tilde{\mathcal{E}}_F^\circ$ est contenu dans le noyau de la norme N_{F/F° . Le Théorème 9 ne donne donc aucune information directe sur le groupe $\tilde{\mathcal{C}}_{F^\circ}$.

Le but de la section qui suit est de pallier ce défaut en introduisant les normes universelles.

3 Normes universelles et conjecture de Greenberg

3.1 Énoncé du Théorème principal

Soient toujours F un corps abélien réel et ℓ un nombre premier impair.

Intéressons-nous maintenant au pro- ℓ -groupe des normes universelles au sens de Greither [10], i.e. à l'intersection $\mathcal{N}_F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{F_n/F}(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n})$ des groupes de normes logarithmiques attachés aux étages finis F_n de la \mathbb{Z}_ℓ -tour cyclotomique F_∞/F .

Il est bien connu que \mathcal{N}_F est un $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -module de caractère régulier et qu'il est d'indice fini dans le pro- ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques de F (cf. [10, 14]) : de fait l'indice $(\tilde{\mathcal{E}}_F : \mathcal{N}_F)$ mesure exactement l'ordre $|\widetilde{\mathcal{C}ap}_F|$ du sous-groupe de $\tilde{\mathcal{C}l}_F$ qui capitule dans F_∞ , i.e. du noyau $\widetilde{\mathcal{C}ap}_F$ du morphisme d'extension $\tilde{\mathcal{C}l}_F \rightarrow \tilde{\mathcal{C}l}_{F_\infty}$. Et la conjecture de Greenberg (pour le corps F et le premier ℓ) postule précisément cette capitulation, i.e. l'égalité $(\tilde{\mathcal{E}}_F : \mathcal{N}_F) = |\tilde{\mathcal{C}l}_F|$ (cf. [15, 16]).

L'objet de cette section est d'établir le résultat suivant :

Théorème 12. *Étant donné un corps abélien réel F de groupe de Galois G_F et ℓ un premier impair, pour tout morphisme galoisien ρ du pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$, l'image $\rho(\mathcal{N}_F)$ du groupe des normes universelles annule le ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{C}l}_F$ des classes logarithmiques.*

Preuve. Reprenons à l'identique la démonstration du Théorème 9 en partant cette fois d'un α dans $\rho(\mathcal{N}_F)$. L'entier m étant choisi assez grand pour que ℓ^m annule le ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{C}l}_F$ des classes logarithmiques, la Proposition 6 fournit une infinité de nombres premiers impairs $p \neq \ell$, complètement décomposés dans l'extension $F[\zeta_{\ell^m}]/\mathbb{Q}$, pour lesquels la classe $[\mathfrak{p}]$ de l'un des premiers \mathfrak{p} de F au-dessus de p dans ${}^{\ell^m}\tilde{\mathcal{C}l}_F^*$ coïncide avec une classe donnée $[\mathfrak{c}]$ provenant de $\tilde{\mathcal{C}l}_F$ et tels que la réduction $\bar{\rho}$ de ρ modulo ℓ^m se factorise via l'application de semi-localisation \bar{s}_p .

Ici encore tout revient donc à montrer que l'on a : $\bar{\alpha}[\mathfrak{p}] = 0$ dans ${}^{\ell^m}\tilde{\mathcal{C}l}_F^*$, où $\bar{\alpha} \in \text{Im } \bar{\rho}$ est la réduction de α modulo ℓ^m . Le Théorème résulte donc directement du Lemme de réduction suivant, qui vient se substituer ici au Lemme 10 précédent et sera démontré un peu plus loin à l'aide des identités du miroir :

Lemme 13. *Pour tout nombre premier $p \neq \ell$ complètement décomposé dans $F[\zeta_\ell]/\mathbb{Q}$, les normes universelles de F sont localement triviales aux places au-dessus de p , i.e. vérifient $s_p(\eta) = 1$.*

Corollaire 14. *La conjecture de Greenberg pour un corps abélien réel F et le premier impair ℓ est satisfaite dès lors que sont réunies les deux conditions suivantes :*

- (i) *Le pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_F$ est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -libre.*
- (ii) *Le ℓ -groupe des classes logarithmiques $\tilde{\mathcal{C}l}_F$ est $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -monogène.*

Et la première condition est automatiquement satisfaite si le degré $[F : \mathbb{Q}]$ de F est étranger à ℓ .

Remarque. Comme expliqué dans [15] la condition suffisante de la conjecture de Greenberg étudiée par Gras dans [8] revient à postuler la trivialité du ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{C}l}_F$. Sous la condition de semi-simplicité $\ell \nmid [F : \mathbb{Q}]$, le Corollaire étend ce résultat au cas où $\tilde{\mathcal{C}l}_F$ est un ℓ -groupe cyclique.

Exemple. Les corps quadratiques réels vérifient la conjecture de Greenberg en tout premier impair ℓ pour lequel leur ℓ -groupe des classes logarithmiques est au plus cyclique.

Preuve. Supposons $\tilde{\mathcal{E}}_F$ libre sur $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ et écrivons $\tilde{\mathcal{E}}_F = \varepsilon_F^{\mathbb{Z}_\ell[G_F]}$ pour une unité logarithmique (de Minkovski) ε_F . Puis considérons le $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -isomorphisme ρ de $\tilde{\mathcal{E}}_F$ sur $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ défini par $\varepsilon_F^\alpha \mapsto \alpha$.

D'après le Théorème 12, l'image $\rho(\mathcal{N}_F)$ est contenue dans l'annulateur $\mathcal{A} = \text{Ann}_{\mathbb{Z}_\ell[G_F]}(\tilde{\mathcal{C}l}_F)$ du ℓ -groupe des classes logarithmiques de F . Si donc $\tilde{\mathcal{C}l}_F$ est $\mathbb{Z}_\ell[G_F]$ -monogène, il vient :

$$|\tilde{\mathcal{C}l}_F| = (\mathbb{Z}_\ell[G_F] : \mathcal{A}) \leq (\mathbb{Z}_\ell[G_F] : \rho(\mathcal{N}_F)) = (\tilde{\mathcal{E}}_F : \mathcal{N}_F) = |\widetilde{\mathcal{C}ap}_F| \leq |\tilde{\mathcal{C}l}_F|;$$

d'où l'égalité $|\widetilde{\mathcal{C}ap}_F| = |\tilde{\mathcal{C}l}_F|$, qui est équivalente à conjecture de Greenberg (cf. [15, 16]).

Notons au passage qu'il est alors possible, sous les hypothèses du Corollaire, de déterminer explicitement le sous-groupe \mathcal{N}_F dès lors qu'on sait calculer dans F , puisque le calcul des classes et des unités logarithmiques a été implémenté dans PARI (cf. [2]).

3.2 Preuve du lemme de réduction

Reste à prouver le Lemme 13. Introduisons pour cela quelques notations : le corps abélien réel F étant fixé, ainsi que le premier $\ell > 2$, notons $F_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ sa \mathbb{Z}_ℓ -tour cyclotomique et $\bar{F}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{F}_n$ celle du corps $\bar{F} = F[\zeta_\ell]$ engendré sur F par les racines ℓ -ièmes de l'unité. Pour fixer les indices convenons de noter $\bar{F}_m = F[\zeta_{\ell^m}]$ et $F_m = F_\infty \cap \bar{F}_m$.

Pour chaque entier n , désignons par H_n (resp. \bar{H}_n) la pro- ℓ -extension abélienne de F_n (resp. de \bar{F}_n) qui est localement cyclotomique, i.e. la plus grande pro- ℓ -extension de F_∞ (resp. de \bar{F}_∞) qui est abélienne sur F_n (resp. sur \bar{F}_n) et complètement décomposée sur F_∞ (resp. sur \bar{F}_∞) en chacune de ses places. Aux places finies étrangères à ℓ , la montée dans la tour ayant épuisé toute possibilité d'inertie, la condition de complète décomposition équivaut à la non-ramification. Ainsi $H_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ est encore la pro- ℓ -extension abélienne non-ramifiée ℓ -décomposée maximale de F_∞ ; de même $\bar{H}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{H}_n$ pour \bar{F}_∞ .

Fixons maintenant un nombre premier $p \neq \ell$ complètement décomposé dans \bar{F}/\mathbb{Q} . Et notons H'_n (resp. \bar{H}'_n) la plus grande pro- ℓ -extension de F_∞ (resp. de \bar{F}_∞) qui est abélienne sur F_n (resp. sur \bar{F}_n) et complètement décomposée sur F_∞ (resp. sur \bar{F}_∞) en dehors des places au-dessus de p . La réunion $H'_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H'_n$ est encore la pro- ℓ -extension abélienne p -ramifiée ℓ -décomposée maximale de F_∞ ; et le même résultat vaut pour $\bar{H}'_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bar{H}'_n$ sur \bar{F}_∞ .

Quitte à monter dans la tour en remplaçant F par F_{n_0} (et \bar{F} par \bar{F}_{n_0}) nous pouvons supposer les places au-dessus de p complètement décomposées dans \bar{F}_{n_0}/\mathbb{Q} et totalement inertes dans $\bar{F}_\infty/\bar{F}_{n_0}$. Cela étant, le théorème de déploiement de la ramification modérée établi dans [18] (Th. 16) et précisé dans [13] (Th. 2.11) à l'aide des identités du miroir de Gras exposées dans [9] donne alors ¹ :

Théorème 15. *Le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{H}'_\infty/\bar{H}_\infty)$ s'identifie à la somme directe des sous-groupes d'inertie attachés aux places au-dessus de p . Sous les hypothèses précédentes, c'est donc un module libre de rang 1 sur l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G_{\bar{F}_{n_0}}]$ du groupe de Galois $G_{\bar{F}_{n_0}} = \text{Gal}(\bar{F}_{n_0}/\mathbb{Q})$.*

Et $\text{Gal}(H'_\infty/H_\infty)$ est donc libre de rang 1 sur l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_{n_0}}]$ du groupe $G_{F_{n_0}} = \text{Gal}(F_{n_0}/\mathbb{Q})$.

Regardons maintenant l'extension H'_n/H_n . Les sous-groupes de normes dans \mathcal{J}_{F_n} associés à H_n et H'_n par la Théorie ℓ -adique du corps de classes (cf. [12]) sont respectivement :

$$\prod_{\mathfrak{q}_n \nmid \ell} \mu_{\mathfrak{q}_n} \prod_{\mathfrak{t}_n | \ell} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{t}_n} \mathcal{R}_{F_n} \quad \text{et} \quad \prod_{\mathfrak{q}_n \nmid \ell p} \mu_{\mathfrak{q}_n} \prod_{\mathfrak{t}_n | \ell} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{t}_n} \mathcal{R}_{F_n}$$

où $\mathcal{R}_{F_n} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} F_n^\times$ est le sous-groupe des idèles principaux ; $\mu_{\mathfrak{q}_n}$ désigne le ℓ -groupe des racines de l'unité du complété de F_n en \mathfrak{q}_n ; et $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{t}_n}$ le sous-groupe des unités logarithmiques du compactifié ℓ -adique $\mathcal{R}_{\mathfrak{t}_n}$ de son groupe multiplicatif. Il vient donc directement :

$$\text{Gal}(H'_n/H_n) \simeq \prod_{\mathfrak{p}_n | p} \mu_{\mathfrak{p}_n} / \prod_{\mathfrak{p}_n | p} \mu_{\mathfrak{p}_n} \cap \left(\prod_{\mathfrak{q}_n \nmid \ell} \mu_{\mathfrak{q}_n} \prod_{\mathfrak{t}_n | \ell} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{t}_n} \mathcal{R}_{F_n} \right) = \prod_{\mathfrak{p}_n | p} \mu_{\mathfrak{p}_n} / s_p(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n}),$$

où $s_p(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n})$ est l'image aux places au-dessus de p du groupe des unités logarithmiques de F_n .

Dans l'isomorphisme obtenu, le numérateur à droite $\prod \mu_{\mathfrak{p}_n}$ est un $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}[G_{F_{n_0}}]$ -module libre. Passant à la limite projective (pour les applications normes) à partir de la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow s_p(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n}) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}_n | p} \mu_{\mathfrak{p}_n} \longrightarrow \text{Gal}(H'_n/H_n) \longrightarrow 1,$$

nous obtenons alors la suite exacte courte de groupes compacts :

$$1 \rightarrow \varprojlim s_p(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n}) \rightarrow \varprojlim \prod_{\mathfrak{p}_n | p} \mu_{\mathfrak{p}_n} \rightarrow \text{Gal}(H'_\infty/H_\infty) \rightarrow 1,$$

où les deux modules de droite sont libres de rang 1 sur $\mathbb{Z}_\ell[G_{F_{n_0}}]$. Il suit : $\varprojlim s_p(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n}) = 1$; donc, en particulier, $s_p(\mathcal{N}_{F_n}) = 1$ pour tout $n \geq n_0$, puisque les normes universelles sont normes d'unités logarithmiques à tous les étages. Comme $s_p(\mathcal{N}_F)$ s'injecte naturellement dans $s_p(\mathcal{N}_{F_{n_0}})$, cela achève la démonstration.

1. Dans [18, 13] le paramètre lambda est assimilé à l'invariant structurel du module d'Iwasawa correspondant, ce qui peut être en défaut lorsque celui-ci n'est pas de torsion. Cette erreur, corrigée dans [19], est sans incidence ici, les modules impliqués étant bien de torsion.

3.3 Application à la conjecture de Solomon

Supposons toujours F abélien réel et ℓ impair, mais fixons maintenant l'une \mathfrak{l} des places au-dessus de ℓ . Solomon a conjecturé dans [26] que si ℓ ne se ramifie pas dans F l'élément

$$\vartheta_F^{\text{sol}} = \frac{1}{\ell} \sum_{\sigma \in G_F} \text{Log}_{\mathfrak{l}}(\eta_F^\sigma) \sigma^{-1}$$

annule le tensorisé $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathcal{C}_F$ du ℓ -groupe des classes d'idéaux de F .

Conséquence du Théorème principal de Mazur-Wiles [21] dans le cas semi-simple $\ell \nmid [F : \mathbb{Q}]$, ce résultat a été prouvé par Belliard et Nguyen Quang Do dans [5] pour ℓ décomposé, et sans restriction par All (cf. [1], Th. 1.1) sous une forme plus générale qu'on peut réécrire comme suit :

Théorème (All). *Soient F un corps abélien réel, G_F son groupe de Galois, ℓ un nombre premier impair, \mathfrak{l} une place de F au-dessus de ℓ et $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ l'anneau des entiers du complété \mathfrak{l} -adique $F_{\mathfrak{l}}$; puis ϑ le $\mathbb{Z}_{\ell}[G_F]$ -morphisme du ℓ -adifié $\tilde{\mathcal{E}}_F = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} E_F$ du groupe des unités dans $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ défini par :*

$$\vartheta(\varepsilon) = \sum_{\sigma \in G_F} \text{Log}_{\mathfrak{l}}(\varepsilon^\sigma) \sigma^{-1}.$$

Alors, pour tout \mathfrak{a} de $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ tel qu'on ait $\mathfrak{a}\vartheta(\mathcal{E}_F) \subset \mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}[G_F]$, l'image $\mathfrak{a}\vartheta(\mathcal{E}_F^{\circ})$ du pro- ℓ -groupe des unités circulaires annule le tensorisé $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathcal{C}_F^{\circ}$ du ℓ -groupe des classes d'idéaux de degré nul.

Nota. Dans l'isomorphisme du corps de classes $\mathcal{C}_F \simeq \text{Gal}(F^{\text{nr}}/F)$, où F^{nr} désigne la ℓ -extension abélienne non ramifiée de F (i.e. son ℓ -corps de classes de Hilbert), le sous-groupe \mathcal{C}_F° des classes de degré nul correspond à $\text{Gal}(F^{\text{nr}}/(F^{\text{nr}} \cap F_{\infty}))$, où F_{∞} est la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique de F .

En parfaite analogie avec ce résultat, nous pouvons énoncer en termes logarithmiques :

Théorème 16. *Soient F un corps abélien réel, G_F son groupe de Galois, ℓ un nombre premier impair, \mathfrak{l} une place de F au-dessus de ℓ et $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ l'anneau des entiers du complété \mathfrak{l} -adique $F_{\mathfrak{l}}$; puis ϑ le $\mathbb{Z}_{\ell}[G_F]$ -morphisme du pro- ℓ -groupe $\tilde{\mathcal{E}}_F$ des unités logarithmiques de F dans $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ défini par :*

$$\vartheta(\varepsilon) = \sum_{\sigma \in G_F} \text{Log}_{\mathfrak{l}}(\varepsilon^\sigma) \sigma^{-1}.$$

Alors, pour tout élément \mathfrak{a} de l'algèbre $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ tel qu'on ait $\mathfrak{a}\vartheta(\tilde{\mathcal{E}}_F) \subset \mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}[G_F]$, il vient :

- (i) *L'image $\mathfrak{a}\vartheta(\tilde{\mathcal{E}}_F^{\circ})$ du pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques circulaires annule $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \tilde{\mathcal{C}}_F$.*
- (ii) *L'image $\mathfrak{a}\vartheta(\mathcal{N}_F)$ du pro- ℓ -groupe des normes universelles annule $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \tilde{\mathcal{C}}_F$.*

Preuve. Elle est strictement identique à celle donnée dans [1], §3. Rappelons-en brièvement l'argumentation : donnons-nous une \mathbb{Z}_{ℓ} -base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d)$ de $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ et notons $(\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_d^*)$ la base duale de la codifférente. Partons d'un élément $\mathfrak{a} = \sum a_{\sigma} \sigma^{-1}$ de $F_{\mathfrak{l}}[G_F]$ et posons $L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon) = \sum_{\sigma \in G_F} a_{\sigma^{-1}} \text{Log}_{\mathfrak{l}}(\varepsilon^{\sigma})$. Nous obtenons $\mathfrak{a}\vartheta(\varepsilon) = \sum L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^{\sigma}) \sigma^{-1}$, avec $L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^{\sigma}) \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ par hypothèse.

Écrivons maintenant $L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^{\sigma}) = \sum_{i=1}^d \text{Tr}(\mathbf{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^{\sigma})) \mathbf{v}_i$ la décomposition de $L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^{\sigma})$ dans $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$. Nous obtenons : $\mathfrak{a}\vartheta(\varepsilon) = \sum_{\sigma \in G_F} \left(\sum_{i=1}^d \text{Tr}(\mathbf{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^{\sigma})) \mathbf{v}_i \right) \sigma^{-1} = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{\sigma \in G_F} \text{Tr}(\mathbf{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^{\sigma})) \sigma^{-1} \right) \mathbf{v}_i$, i.e.

$$\mathfrak{a}\vartheta(\varepsilon) = \sum_{i=1}^d \vartheta_{\mathbf{v}_i^*}(\varepsilon) \mathbf{v}_i \quad \text{avec} \quad \vartheta_{\mathbf{v}_i^*}(\varepsilon) = \sum_{\sigma \in G_F} \text{Tr}(\mathbf{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^{\sigma})) \sigma^{-1};$$

et l'application $\vartheta_{\mathbf{v}_i^*} : \varepsilon \mapsto \sum_{\sigma \in G_F} \text{Tr}(\mathbf{v}_i^* L_{\mathfrak{a}}(\varepsilon^{\sigma})) \sigma^{-1}$ est un $\mathbb{Z}_{\ell}[G_F]$ -morphisme de $\tilde{\mathcal{E}}_F$ dans $\mathbb{Z}_{\ell}[G_F]$.

En fin de compte, si \mathfrak{r} est un élément de $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}}$ et $[\mathfrak{c}]$ une classe de $\tilde{\mathcal{C}}_F$, il vient :

$$\mathfrak{a}\vartheta(\varepsilon) \cdot (\mathfrak{r} \otimes [\mathfrak{c}]) = \sum_{i=1}^d \mathfrak{r} \mathbf{v}_i \otimes \vartheta_{\mathbf{v}_i^*}(\varepsilon) [\mathfrak{c}].$$

Et on a $\vartheta_{\mathbf{v}_i^*}(\varepsilon) [\mathfrak{c}] = 0$ si ε est une unité logarithmique circulaire, en vertu du Théorème 9 ; d'où (i). De même si ε est une norme universelle, en vertu du Théorème 12 ; d'où (ii).

Remarque. Prenant $\varepsilon = \eta_F$ et $\mathfrak{a} = \frac{1}{\ell}$, on obtient l'élément de Solomon $\frac{1}{\ell} \sum_{\sigma \in G_F} \text{Log}_{\mathfrak{l}}(\eta_F^\sigma) \sigma^{-1}$, lequel annule donc $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathcal{C}_F^{\circ}$, comme établi dans [1], puisque η_F est bien une unité circulaire.

Si la place ℓ se ramifie dans F , on a $N_{F/F^{\circ}}(\eta_F) = 1$ en vertu de l'identité 1 et $N_{F_n/F}(\eta_{F_n}) = \eta_F$, de sorte que η_F est à la fois une unité logarithmique circulaire et une norme universelle. L'élément de Solomon annule alors aussi le groupe logarithmique $\mathbb{Z}_{\mathfrak{l}} \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \tilde{\mathcal{C}}_F$. C'est en particulier le cas, dès que F contient le sous-corps réel $\mathbb{Q}[\zeta_{\ell} + \bar{\zeta}_{\ell}]$ du corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta_{\ell}]$.

Appendice : régulateur classique et régulateur logarithmique

Classiquement le ℓ -régulateur d'un corps de nombres totalement réel F est défini comme suit : désignons par $\mathcal{U}_{F_\ell} = \prod_{|\ell} \mathcal{U}_{F_\ell}$ le pro- ℓ -groupe des unités semi-locales de F , i.e. le produit des groupes d'unités (principales) attachés aux complétés de F aux places au-dessus de ℓ ; notons $\mu_{F_\ell} = \prod_{|\ell} \mu_{F_\ell}$ son sous-groupe de torsion; et $\mathcal{U}_{F_\ell}^* = {}^{-1}N_{F/\mathbb{Q}}(\mu_{\mathbb{Q}_\ell})$ la pré-image de $\mu_{\mathbb{Q}_\ell}$ dans \mathcal{U}_{F_ℓ} . Par convention, le ℓ -régulateur de F est le quotient

$$\mathcal{R}eg_F = \mathcal{U}_{F_\ell}^*/s_\ell(\mathcal{E}_F)\mu_{F_\ell}$$

de $\mathcal{U}_{F_\ell}^*/\mu_{F_\ell}$ par l'image du pro- ℓ -groupe $\mathcal{E}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_F$ des unités globales de F (cf. e.g. [8]).

Il est donc naturel de définir de façon analogue le ℓ -régulateur logarithmique comme suit : désignons par $\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} = \prod_{|\ell} \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$ le pro- ℓ -groupe des unités logarithmiques semi-locales de F , i.e. le produit des groupes d'unités logarithmiques attachés aux complétés de F au-dessus de ℓ . Alors :

Définition 17. *Le ℓ -régulateur logarithmique d'un corps totalement réel F est le quotient*

$$\widetilde{\mathcal{R}eg}_F = \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}/s_\ell(\tilde{\mathcal{E}}_F)\mu_{F_\ell}$$

du groupe des unités logarithmiques semi-locales modulo torsion $\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}/\mu_{F_\ell}$ par l'image du groupe des unités logarithmiques globales $\tilde{\mathcal{E}}_F$.

La conjecture de Leopoldt (pour le corps totalement réel F et le premier ℓ) revient à affirmer la finitude du ℓ -régulateur $\mathcal{R}eg_F$; la conjecture de Gross-Kuz'min, celle du ℓ -régulateur logarithmique $\widetilde{\mathcal{R}eg}_F$ (cf. e.g. [14]). Toutes deux sont vérifiées dès que le corps F est abélien.

De plus, lorsque le nombre premier ℓ est complètement décomposé dans le corps abélien F , les quotients $\widetilde{\mathcal{R}eg}_F = \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}/s_\ell(\tilde{\mathcal{E}}_F)\mu_{F_\ell}$ et $\mathcal{R}eg_F = \mathcal{U}_{F_\ell}^*/s_\ell(\mathcal{E}_F)\mu_{F_\ell}$ s'identifient aux sous-groupes sauvages respectifs des ℓ -groupes de classes ordinaire et logarithmique, i.e. aux sous-groupes engendrés par les classes des diviseurs construits sur les premiers au-dessus de ℓ :

Proposition 18. *Étant donné un corps abélien F complètement décomposé en la place ℓ , le ℓ -régulateur logarithmique s'identifie au sous-groupe sauvage du ℓ -groupe des classes d'idéaux. Et le ℓ -régulateur ordinaire s'identifie au sous-groupe sauvage du ℓ -groupe des classes logarithmiques :*

$$\widetilde{\mathcal{R}eg}_F = \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}/s_\ell(\tilde{\mathcal{E}}_F)\mu_{F_\ell} \simeq \mathcal{C}_F^{[\ell]} \quad \& \quad \mathcal{R}eg_F = \mathcal{U}_{F_\ell}^*/s_\ell(\mathcal{E}_F)\mu_{F_\ell} \simeq \tilde{\mathcal{C}}_F^{[\ell]}.$$

La preuve très simple de ce résultat repose sur le théorème de structure suivant (cf. [16], Th.7) :

Théorème. *Soit F un corps de nombres arbitraire dans lequel le nombre premier ℓ se décompose complètement; puis, pour chaque place \mathfrak{l} de F au-dessus de ℓ , soit $\ell_{\mathfrak{l}}$ l'image canonique de ℓ dans le ℓ -adifié $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{l}}} = \varprojlim F_{\mathfrak{l}}^\times / F_{\mathfrak{l}}^{\times \ell^n}$ du groupe multiplicatif du complété $F_{\mathfrak{l}}$.*

Le groupe $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{l}}}$ s'écrit comme produit du sous-groupe des unités $\mathcal{U}_{F_{\mathfrak{l}}} = \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}_\ell} (1 + \ell_{\mathfrak{l}})^{\mathbb{Z}_\ell}$ et du sous-groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{l}}} = \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}_\ell} \ell_{\mathfrak{l}}^{\mathbb{Z}_\ell}$:

$$\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{l}}} = \mathcal{U}_{F_{\mathfrak{l}}} \tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{l}}} = \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}_\ell} (1 + \ell_{\mathfrak{l}})^{\mathbb{Z}_\ell} \ell_{\mathfrak{l}}^{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Preuve. Partons de la décomposition directe $\mathcal{R}_{F_\ell} = \mathcal{U}_{F_\ell} \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$ des groupes semi-locaux $\mathcal{R}_{F_\ell} = \prod \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{l}}}$ donnée par le Théorème 3.3 et restreignons-nous au sous-module $\mathcal{R}_{F_\ell}^* = \mathcal{U}_{F_\ell}^* \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$. Les isomorphismes

$$\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \simeq \mathcal{R}_{F_\ell} / \mathcal{U}_{F_\ell} \simeq \mathcal{D}_F^{[\ell]} \quad \& \quad \mathcal{U}_{F_\ell}^* \simeq \mathcal{R}_{F_\ell}^* / \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \simeq \widetilde{\mathcal{D}}_F^{[\ell]},$$

où $\mathcal{D}_F^{[\ell]}$ est le \mathbb{Z}_ℓ -module des diviseurs construits sur les places au-dessus de ℓ et $\widetilde{\mathcal{D}}_F^{[\ell]}$ le \mathbb{Z}_ℓ -module des diviseurs logarithmiques de degré nul construit sur les mêmes places, donnent successivement :

$$\widetilde{\mathcal{R}eg}_F = \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} / s_\ell(\tilde{\mathcal{E}}_F)\mu_{F_\ell} \simeq \mathcal{R}_{F_\ell} / \mathcal{U}_{F_\ell} s_\ell(\mathcal{E}'_F) \simeq \mathcal{D}_F^{[\ell]} / \mathcal{P}_F^{[\ell]} \simeq \mathcal{C}_F^{[\ell]}$$

et

$$\mathcal{R}eg_F = \mathcal{U}_{F_\ell} / s_\ell(\mathcal{E}_F)\mu_{F_\ell} \simeq \mathcal{R}_{F_\ell} / \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} s_\ell(\mathcal{E}'_F) \simeq \widetilde{\mathcal{D}}_F^{[\ell]} / \mathcal{P}_F^{[\ell]} \simeq \tilde{\mathcal{C}}_F^{[\ell]}$$

où \mathcal{E}'_F est le \mathbb{Z}_ℓ -module des ℓ -unités, et $\mathcal{P}_F^{[\ell]}$ (resp. \mathcal{P}_F^{ℓ}) le \mathbb{Z}_ℓ -module des diviseurs principaux (resp. des diviseurs logarithmiques principaux) construits sur les places au-dessus de ℓ .

RÉFÉRENCES

- [1] T. ALL, *On p -adic annihilators of real ideal classes*, J. Number Theory **133** (2013), 2324–2338.
- [2] K. BELABAS, J.-F. JAULENT, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).
- [3] J.-R. BELLIARD, *Sur la structure galoisienne des unités circulaires dans les \mathbb{Z}_p -extensions*, J. Number Th. **69** (1998), 16–49.
- [4] J.-R. BELLIARD, A. MARTIN, *Annihilation of real classes*, Prépublication (2014).
- [5] J.-R. BELLIARD, T. NGUYEN QUANG DO, *Formules de classes pour les corps abéliens réels*, Ann. Inst. Fourier **51** (2001), 903–937.
- [6] J.-R. BELLIARD, T. NGUYEN QUANG DO, *On modified circular units and annihilation of real classes*, Nagoya Math. J. **177** (2005), 77–115.
- [7] G. GRAS, *Théorèmes de réflexion*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 399–499.
- [8] G. GRAS, *Approche p -adique de la conjecture de Greenberg pour les corps totalement réels*, Annales Mathématiques Blaise Pascal (2017).
- [9] G. GRAS, *Annihilation of $\text{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G}_{K,S}^{\text{ab}})$ for real abelian extensions K/\mathbb{Q}* , Com. Adv. Math. Sci. **1** (2018), 5–34.
- [10] C. GREITHER, *Sur les normes universelles dans les \mathbb{Z}_p -extensions*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 205–220.
- [11] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.
- [12] J.-F. JAULENT, *Théorie ℓ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [13] J.-F. JAULENT, *Généralisation d’un théorème d’Iwasawa*, J. Théor. Nombres Bordeaux **17** (2005), 527–553.
- [14] J.-F. JAULENT, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz’min*, Annales Math. Québec **41** (2017), 119–140.
- [15] J.-F. JAULENT, *Note sur la conjecture de Greenberg*, J. Ramanujan Math. Soc. **34** (2019) 59–80.
- [16] J.-F. JAULENT, *Normes universelles et conjecture de Greenberg*, Acta Arith. (à paraître).
- [17] J.-F. JAULENT, *Annulateurs de Stickelberger des groupes de classes logarithmiques*, Pré-publication.
- [18] J.-F. JAULENT, CH. MAIRE, *Sur les invariants d’Iwasawa des tours cyclotomiques*, Canadian Math. Bull. **46** (2003), 178–190.
- [19] J.-F. JAULENT, CH. MAIRE, G. PERBET, *Sur les formules asymptotiques le long des \mathbb{Z}_ℓ -extensions*, Annales Math. Québec **37** (2013), 63–78.
- [20] F. V. KUZ’MIN, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR **36** (1972), 267–327.
- [21] B. MAZUR, A. WILES, *Class fields of abelian extensions of \mathbb{Q}* , Invent. Math. **76** (1984), 179–330.
- [22] T. NGUYEN QUANG DO, V. NICOLAS, *Nombres de Weil, sommes de Gauss et annulateurs galoisiens*, Amer. J. Math. **133** (2011), 1533–1571.
- [23] B. ORIAT, *Annulation de groupes de classes réelles*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 45–56.
- [24] K. RUBIN, *Global units and ideal class groups* Invent. Math. **89** (1987), 511–526.
- [25] W. SINNOTT, *On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field*, Invent. Math. **62** (1980), 181–234.
- [26] D. SOLOMON, *On a construction of p -units in abelian fields*, Invent. Math. **109** (1992), 329–350.
- [27] F. THAINE, *On the ideal class groups of real abelian number fields*, Ann. of Math. **128** (1988), 1–18.
- [28] L.C. WASHINGTON, *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Math. **83** (1997).

Institut de Mathématiques de Bordeaux
 Université de BORDEAUX & CNRS
 351 cours de la libération
 F-33405 TALENCE Cedex
 courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux.fr
<https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/>