

ذروة الوباء في نموذج SIR

Quadrature 117 (2020)

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02518993>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement

وحدة النمذجة الرياضية والحاسوبية للأنظمة المعقدة

Les Cordeliers، باريس، فرنسا

nicolas.bacaer@ird.fr

ملخص

نحن ندرس وباء على غرار نظام تفاضلي من نوع SIR. عندما يكون عدد السكان N كبيراً، تحدث ذروة الوباء في الوقت T ، مع $T \sim (\ln N)/(a - b)$. a هو معدل الاتصال الفعال. b هو المعدل الذي يتعافى به الأشخاص المعدون.

المقدمة

لنأخذ على سبيل المثال في [1، 2، 6، 7، 8] نموذج SIR لـ Kermack و McKendrick للوباء

$$\frac{dS}{dt} = -a \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a \frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$

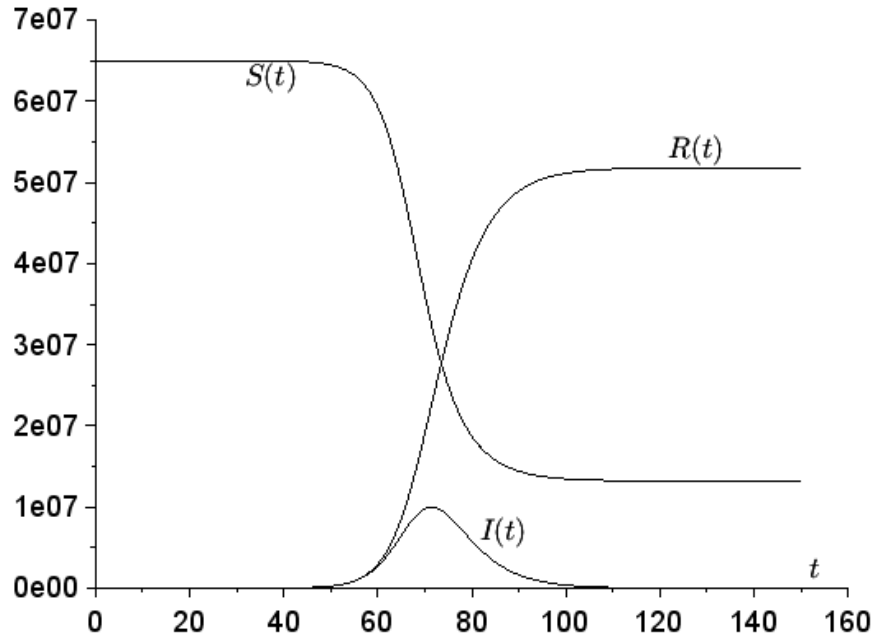
$S(t)$ هو عدد الأشخاص الأصحاء. $I(t)$ هو عدد المصابين. $R(t)$ هو عدد الأشخاص الذين تمت إزالتهم من العدوى نتيجة للعزل أو الشفاء أو الوفاة. $N = S(t) + I(t) + R(t)$ هو مجموع السكان. يُفترض أن يكون إجمالي عدد السكان ثابتاً وكبيراً بما يكفي لجعل من المعقول نمذجة الوباء باستخدام نظام تفاضلي بدلاً من عملية عشوائية. فكر في الشروط الأولية

$$S(0) = N - 1, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0,$$

التي تتوافق مع بداية الوباء من "صفر مريض" واحد.

المعلمة a (مع $a > 0$) هو في الواقع نتاج رقمين: عدد جهات الاتصال لكل وحدة زمنية واحتمالية الانتقال أثناء الاتصال بين شخص غير مصاب وشخص مصاب. يتم إجراء الاتصالات بشكل عشوائي. I/N هو احتمال وجود شخص يجري في حجرة I . هذا يفسر المصطلح التربيعي في SI/N في النظام التفاضلي. $b > 0$ هو المعدل الذي يترك الناس مقصورة I . وبالتالي فإن الافتراض الأساسي هو أن الوقت الذي يقضيه في القسم الأول يتم توزيعه وفقاً لقانون أسي للمعلمة b . سنفترض $b < a$ لوباء حقيقي.

تم شرح أحد الأمثلة بالتفصيل في الشكل 1. استخدمنا برنامج Scilab ووظيفة حل الأنظمة التفاضلية. تطبق هذه الوظيفة مخطط مصحح للنتيجة Adams للأنظمة غير شديدة الانحدار. تم اختيار $N = 65 \times 10^6$ (سكان فرنسا)، $a = 1/2$ يومياً و $b = 1/4$ يومياً. في بداية الوباء، يصاب الشخص المصاب بمتوسط شخص واحد كل يومين. متوسط مدة الإصابة $1/b$ 4 أيام. هذا يتوافق مع التكاثر $R_0 = a/b = 2$ (يأتي المصطلح والرمز من [9، ص 102]). وبالتالي هو متوسط عدد الحالات الثانوية التي يصيبها الشخص المصاب في بداية الوباء. بدون الادعاء بالواقعية، هذه قيم بنفس الترتيب من حيث الحجم الذي يمكن العثور عليه لوباء الفيروس التاجي 2020 في الحالة الافتراضية حيث لا يوجد تدخل للحد من الوباء [5].



الشكل 1. محاكاة لنموذج SIR مع الوقت على الخراج t في الايام.

الذروة الوبائية

من خلال الجمع بين المعادلتين الأولى والثالثة لنظام SIR ، فإنه معروف جيداً [8 ، ص. 76] أن نجد التكامل الأول:

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -a \frac{I}{N} = -\frac{a}{bN} \frac{dR}{dt}.$$

إذا لدينا

$$\ln[S(t)/S(0)] = -\frac{a}{bN} R(t).$$

بالعودة إلى المعادلة الأولى نجد

$$\frac{dS}{dt} = -a \frac{S}{N} (N - S - R) = -a \frac{S}{N} \left(N - S + \frac{bN}{a} \ln[S(t)/S(0)] \right).$$

يتوافق الذروة الوبائية في الشكل 1 $dI/dt = 0$ والذي يحدث حسب المعادلة الثانية عند $S(t) = Nb/a$. $S(t)$ دالة متناقصة بسبب $dS/dt \leq 0$ من المعادلة الأولى. نستنتج أنه إذا كانت T هي وقت ذروة الوباء ، أي إذا

$$I(T) = \max_{t>0} I(t),$$

لدينا بعد ذلك

$$T = \int_0^T dt = \int_{S(0)}^{bN/a} \frac{dS}{-a \frac{S}{N} \left(N - S + \frac{bN}{a} \ln[S/S(0)] \right)}.$$

نحدد $s = S/N$ لدينا بعد ذلك

$$T = \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s \left(1 - s + \frac{b}{a} \ln[s/(1-1/N)] \right)}. \quad (1)$$

نحن نسعى لالحد الأعلى من T . للجميع $b/a < s < 1 - 1/N$ ، نملك

$$\frac{1}{s(1-s + \frac{b}{a} \ln[s/(1-1/N)])} \leq \frac{1}{s(1-s + \frac{b}{a} \ln s)}.$$

في حي $s = 1$ ، نملك

$$\frac{1}{s(1-s + \frac{b}{a} \ln s)} \sim \frac{1}{(1-s)(1-b/a)}.$$

لا يتجزأ

$$\int_{b/a}^1 \frac{ds}{1-s}$$

متباينة. مع $N \rightarrow +\infty$ ، اذا لدينا

$$T \leq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s(1-s + \frac{b}{a} \ln s)} \sim \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{(1-s)(1-b/a)} \sim \frac{\ln N}{a-b}.$$

إننا نسعى إلى الأدنى لل T . نملك $\ln s \leq s - 1$ للجميع $s > 0$. نحن أيضا لدينا $\ln(1-1/N) \geq -2/N$ للجميع $N \geq 2$. لذلك لدينا $[b/a, 1-1/N]$ ولأي عدد صحيح $N \geq 2$ ،

$$\begin{aligned} 1-s + \frac{b}{a} \ln[s/(1-1/N)] &= 1-s + \frac{b}{a} \ln s - \frac{b}{a} \ln(1-1/N) \\ &\leq 1-s + \frac{b}{a}(s-1) + \frac{2b}{aN}. \end{aligned}$$

اذا لدينا

$$T \geq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s[1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1-b/a)s]}.$$

نأتي عبر جزء عقلائي من النموذج $\frac{1}{s(u-vs)}$ مع

$$u = 1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN}, \quad v = 1 - b/a.$$

ينقسم إلى عناصر بسيطة

$$\frac{1}{s(u-vs)} = \frac{1}{u} \left(\frac{1}{s} + \frac{v}{u-vs} \right).$$

بدائي

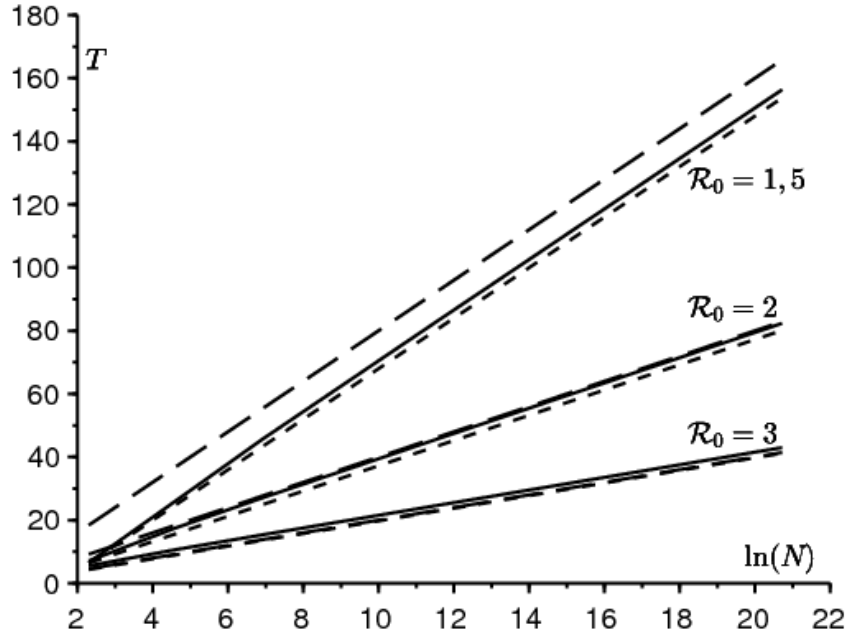
$$\frac{1}{u} [\ln s - \ln(u-vs)] = \frac{1}{u} \ln \frac{s}{u-vs}.$$

اذا لدينا

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{1}{a(1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN})} \ln \left\{ \frac{1-1/N}{b/a} \frac{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1-b/a)b/a}{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1-b/a)(1-1/N)} \right\} \\ &= \frac{1}{a-b+2b/N} \ln \left\{ \frac{1-1/N}{b/a} \frac{(1-b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1+b/a)/N} \right\} \\ &= \frac{1}{a-b+2b/N} \left[\ln N + \ln \left\{ \frac{1-1/N}{b/a} \frac{(1-b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1+b/a)} \right\} \right]. \end{aligned}$$

العضو على اليمين هو $(\ln N)/(a - b) \sim$ إذا $N \rightarrow +\infty$. بما أنه نفس المكافئ للحد الأعلى الذي تم الحصول عليه أعلاه ، نستنتج ذلك $T \sim (\ln N)/(a - b)$ إذا $N \rightarrow +\infty$.

في المثال في الشكل 1 ، لدينا $T \simeq 71,4$ أيام بينما $(\ln N)/(a - b) \simeq 72,0$ أيام. يبدو التقريب جيدًا إلى حد ما. في الشكل 2 ، نغير الحجم N من السكان وكذلك المعلمة a ، مع ب ثابت. نلاحظ $(\ln N)/(a - b)$ المبالغة في بعض الأحيان ، التقليل أحيانًا T .



الشكل 2. مقارنة بين التاريخ T لذروة الوباء (الخط المستمر) من جهة ، محسوباً مع تكامل الصيغة (1) ، من ناحية أخرى المكافئ $(\ln N)/(a - b)$ (خطوط منقطة كبيرة) وتقريب $[\ln(2N(b/a - 1)^2)]/(a - b)$ (خطوط منقطة صغيرة) ، حسب $\ln N$ ، إذا $10 \leq N \leq 10^8$ لثلاث قيم معلمات a مع استنساخ $\mathcal{R}_0 = a/b \in \{1,5 ; 2 ; 3\}$.

$a - b$ هو معدل النمو الأولي للوباء. ثم لدينا N كبير ، $S(t) \simeq N$ و $dI/dt \simeq (a - b)I$. يمكن تقدير هذا المعدل من البيانات الوبائية. السكان N معروف. لذلك يمكننا التنبؤ بتاريخ ذروة الوباء. في الممارسة العملية ، تظل الفرضية الكامنة وراء نموذج مزيج متجانس من السكان موضع شك بالنسبة لبلد بأكمله ، أقل قليلاً بالنسبة للمدينة.

تاريخياً ، حل Kermack و McKendrick نظام SIR تقريباً بافتراض أن قابلية النكاثر كانت قريبة من 1 ، مما أدى إلى وباء صغير. بالتقريب $e^x \simeq 1 + x + x^2/2$ ، توصلوا إلى معادلة ريكاتي قابلة للحل بشكل صريح ، بحيث

$$I(t) \simeq \frac{X}{\text{ch}^2(Yt - Z)}. \quad (2)$$

X و Y و Z هي وظائف معقدة للمعلمات N و a و b . انظر على سبيل المثال [3]. ذروة الوباء $T \simeq Z/Y$. دعنا نلاحظ أنه على حد علمنا لم يتم تقريباً تقريباً تقريباً (2) بدقة ، وهذا هو السبب في أننا نستخدم فوق وتحت العلامة غير الرسمية \simeq . نفترض الآن بالإضافة $1/N \ll (\mathcal{R}_0 - 1)^2$ في هذه الحالة ،

$$Y \simeq \frac{a - b}{2}, \quad Z \simeq \frac{1}{2} \ln[2N(b/a - 1)^2]$$

(انظر على سبيل المثال [4]) ، بحيث

$$T \simeq \frac{\ln[2N(b/a - 1)^2]}{a - b}.$$

يظهر هذا التقريب أيضاً في الشكل 2 ؛ يبدو قريباً بشكل خاص من القيمة الحقيقية لـ T إذا \mathcal{R}_0 يقترب من 1 ، كما تتوقع. مع N التي تتلاقى إلى ما لا نهاية ، ومع ذلك لدينا $T \simeq \frac{\ln N}{a - b}$. نجد نفس السلوك المقارب. ومع ذلك ، فإن تحليلنا القائم على الصيغة (1) صالح للجميع $\mathcal{R}_0 > 1$ وليس فقط \mathcal{R}_0 على مقربة من 1. بالإضافة إلى ذلك ، لدينا دليل صارم.

وجدنا أن ذروة الوباء حدثت في وقت واحد $(\ln N)/(a - b)$ إذا تلاقت N إلى ما لا نهاية. تبدو هذه النتيجة جديدة بالرغم من بساطتها. في الأدبيات العلمية ، وجدنا فقط معلومات عن ارتفاع القمة ، والتي يمكن تحديدها بسهولة من خلال التكامل الأول للنظام. في الواقع ، مع

$$S(T) = \frac{Nb}{a}, \quad \ln \frac{S(T)}{S(0)} = -\frac{a}{bN}R(T), \quad N = S(T) + I(T) + R(T),$$

نحصل

$$\frac{I(T)}{N} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \ln \left(\frac{N}{N-1} \frac{b}{a} \right) \simeq 1 - \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \ln \frac{b}{a}$$

(انظر على سبيل المثال [1] ، المعادلة [7.26]). في بعض المراجع مثل [7] ، ص. 238] ، هناك انعكاسات يكون فيها الوقت t دالة للمتغيرات الرتيبة R أو S ، مما يؤدي إلى تكاملات مثل (1) باستثناء تغيير المتغير. ولكن تم كتابة نظام التفاضلية SIR هناك في النموذج $dS/dt = -\alpha SI$. ربما لم تأت الفكرة من الأخذ $\alpha = a/N$ ، وهو أمر أكثر واقعية وضرورية إلى حد ما لحدود عدد كبير من السكان لتحقيق نتائج مثيرة للاهتمام.

بالنسبة لوباء مثل الفيروس التاجي ، يفتقر نموذج SIR إلى القليل من الواقعية. هذا يؤدي إلى النظر في النماذج ذات المقصورات الأكثر ، على سبيل المثال مع مقصورة إضافية للأشخاص في المرحلة الكامنة المصابة ولكن ليسوا معديين بعد. انظر في هذا الموضوع [5] ، الذي يحاول أيضاً تقدير المعلومات من منحنى الوباء. ولا شك في أن الدراسة التحليلية لذروة الوباء في هذا السياق أكثر صعوبة.

شكر

نشكر Hisashi Inaba لتعليقاته على النص.

المراجع البيولوجرافية

1. B. Anselme, Biomathématiques, Dunod, Paris, 2015.
2. N. Bacaër, Histoires de mathématiques et de populations, Cassini, Paris, 2009.
3. N. Bacaër (2012) Le modèle de Kermack et McKendrick pour la peste à Bombay et la reproductivité nette d'un type avec saisonnalité. *Journal of Mathematical Biology* 64 (2012) 403 – 422. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01340008>
4. N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique. *Comptes Rendus Biologies* 342 (2019) 119 – 123. <https://doi.org/10.1016/j.crvi.2019.07.001>
5. N. Bacaër (2020) Un modèle mathématique de l'épidémie de coronavirus en France. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>
6. M. Corlosquet – Habart, J. Janssen, R. Manca, *Modélisation stochastique du risque de pandémie : stratégies de couverture et d'assurance*, Lavoisier, Cachan, 2012.
7. J. Gani, *Processus stochastiques de population*, P. –L. Hennequin (éd.), École d'été de probabilités de Saint – Flour IV, Springer, Berlin, 1975, p. 188 – 293.
8. A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris.
9. A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris.