

На пике эпидемии в модели SIR

Nicolas Bacaer

Institut de recherche pour le développement
Отдел математического и компьютерного моделирования сложных систем
Les Cordeliers, Париж, Франция
nicolas.bacaer@ird.fr

резюме

Мы изучаем асимптотическое поведение, когда размер N населения велико, времени T что эпидемия, смоделированная системой типа SIR, достигает своего пика. Мы находим, что $T \sim (\log N)/(a - b)$ где a эффективная скорость контакта и b скорость, с которой инфекционные люди перестают заражаться.

Модель SIR

Рассмотрим как в [4, с. 75] классическая модель эпидемии

$$\frac{dS}{dt} = -a \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a \frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI,$$

где $S(t)$ число людей, которые могут быть заражены, $I(t)$ количество зараженных людей, $R(t)$ количество людей, изъятых из передачи (в результате заключения, исцеления или смерти) и $N = S(t) + I(t) + R(t)$ общая численность населения считается постоянной. Рассмотрим начальные условия

$$S(0) = N - 1, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0.$$

Мы будем предполагать $a > b$,

Пример можно найти на рисунке 1. Мы выбрали $N = 65 \times 10^6$, $a = 1/2$ в день и $b = 1/4$ в день Это соответствует средней продолжительности заражения $1/b = 4$ дня и воспроизводимо $\mathcal{R}_0 = a/b = 2$ (термин и обозначения взяты из [5, с. 102]). Не претендуя на реалистичность, это значения того же порядка, что и для коронавируса в гипотетическом случае, когда нет мер по снижению эпидемии [3].

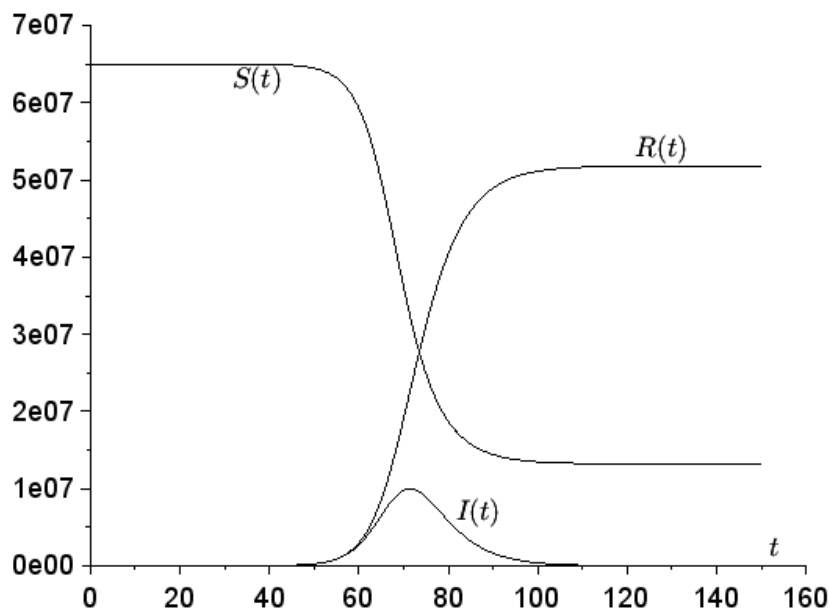


Рисунок 1. Имитация модели SIR.

Объединяя первое и третье уравнения, это хорошо известно [4, с. 76], что мы находим первый интеграл дифференциальной системы:

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -a \frac{I}{N} = -\frac{a}{bN} \frac{dR}{dt},$$

следовательно $\log[S(t)/S(0)] = -\frac{a}{bN} R(t)$, В первом уравнении находим

$$\frac{dS}{dt} = -a \frac{S}{N} (N - S - R) = -a \frac{S}{N} \left(N - S + \frac{bN}{a} \log[S(t)/S(0)] \right).$$

Пик эпидемии на рисунке 1 соответствует $dI/dt = 0$, что происходит из второго уравнения, когда $S(t) = Nb/a$, Обратите внимание, что $S(t)$ уменьшается монотонный. Мы выводим, что если T время пика эпидемии, т. е. если

$$I(T) = \max_{t>0} I(t),$$

то

$$T = \int_0^T dt = \int_{S(0)}^{bN/a} \frac{dS}{-a \frac{S}{N} \left(N - S + \frac{bN}{a} \log[S/S(0)] \right)}.$$

Давайте представим $s = S/N$, то

$$T = \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s \left(1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1-1/N)] \right)}. \quad (1)$$

Асимптотическое поведение эпидемического пика

Давайте посмотрим на увеличение T , для $b/a < s < 1 - 1/N$ мы заметили, что

$$\frac{1}{s \left(1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1-1/N)] \right)} \leq \frac{1}{s \left(1 - s + \frac{b}{a} \log s \right)}.$$

Золото в окрестностях $s = 1$ у нас есть

$$\frac{1}{s \left(1 - s + \frac{b}{a} \log s \right)} \sim \frac{1}{(1-s)(1-b/a)}.$$

Интеграл $\int_{b/a}^1 \frac{ds}{1-s}$ расходится. когда $N \rightarrow +\infty$ И так, мы имеем

$$T \leq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s \left(1 - s + \frac{b}{a} \log s \right)} \sim \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{(1-s)(1-b/a)} \sim \frac{\log N}{a-b}.$$

Теперь давайте посмотрим на сокращение T , Для всего $s > 0$, $\log s \leq s - 1$, У нас также есть $\log(1 - 1/N) \geq -2/N$ для всех $N \geq 2$, Мы выводим, что для всего $s \in]b/a, 1 - 1/N[$ и все $N \geq 2$,

$$\begin{aligned} 1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1-1/N)] &= 1 - s + \frac{b}{a} \log s - \frac{b}{a} \log(1-1/N) \\ &\leq 1 - s + \frac{b}{a} (s-1) + \frac{2b}{aN}. \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$T \geq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s \left[1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1-b/a)s \right]}.$$

Мы сталкиваемся с рациональной долей формы $\frac{1}{s(u-vs)}$ с $u = 1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN}$ и $v = 1 - b/a$. Он разбивается на простые элементы, такие как $\frac{1}{u}(\frac{1}{s} + \frac{v}{u-vs})$. Поэтому примитив $\frac{1}{u}[\log s - \log(u - vs)] = \frac{1}{u} \log \frac{s}{u-vs}$, таким образом

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{1}{a(1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN})} \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)b/a}{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)(1 - 1/N)} \right\} \\ &= \frac{1}{a - b + 2b/N} \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{(1 - b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1 + b/a)/N} \right\} \\ &= \frac{1}{a - b + 2b/N} \left[\log N + \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{(1 - b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1 + b/a)} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Член справа эквивалентен $(\log N)/(a - b)$ когда $N \rightarrow +\infty$. Поскольку он эквивалентен полученному выше верхнему пределу, мы заключаем, что $T \sim (\log N)/(a - b)$ когда $N \rightarrow +\infty$,

В примере на рисунке 1 мы имеем $T \simeq 71,4$ дни в то время как $(\log N)/(a - b) \simeq 72,0$ дней. Аппроксимация выглядит довольно хорошо. На рисунке 2 мы меняем размер N населения, а также параметр a с b набор. Мы замечаем, что $(\log N)/(a - b)$ иногда переоценивает, иногда недооценивает T ,

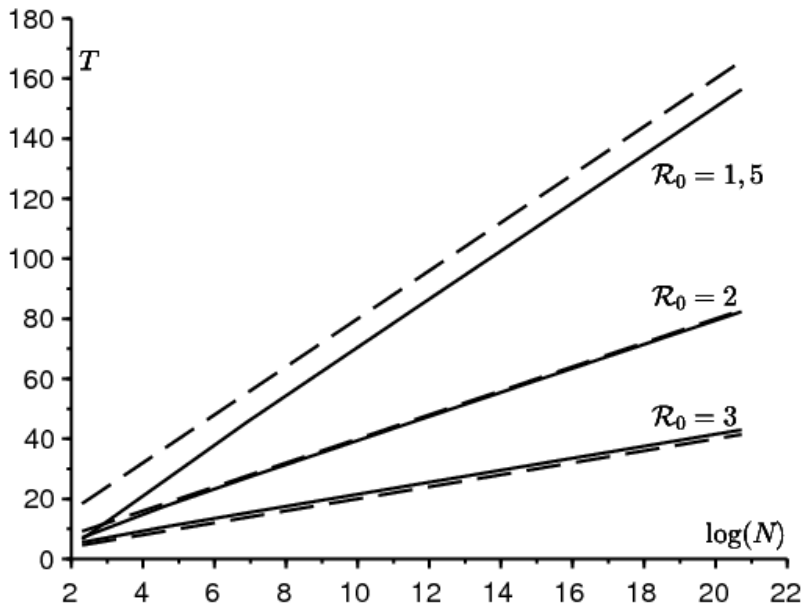


Рисунок 2. Сравнение дат T Пик эпидемии (сплошная линия), рассчитанный по интегралу формулы (1), с эквивалентом $(\log N)/(a - b)$ (пунктирная линия), в зависимости от $\log N$ когда N варьируется от 10 до 10^8 для трех значений параметров a такие как $\mathcal{R}_0 = a/b \in \{1,5 ; 2 ; 3\}$,

Обратите внимание, что $a - b$ темпы роста эпидемии в ее начале, так как N большой, $S(t) \simeq N$ и $dI/dt \simeq (a - b)I$. Этот показатель можно оценить по эпидемиологическим данным. Зная всего населения N Поэтому мы можем предсказать дату пика эпидемии. На практике гипотеза, лежащая в основе модели однородной смеси населения, остается сомнительной в масштабе страны, чуть меньше в масштабе города.

Исторически Кермак и МакКендрик аппроксимировали систему SIR, предполагая, что воспроизводимость \mathcal{R}_0 был близок к 1, что приводит к небольшой эпидемии. С ограниченным развитием $e^x \simeq 1 + x + x^2/2$, они пришли к явно решаемому уравнению Риккати, так что

$$I(t) \simeq \frac{X}{\text{ch}^2(Yt - Z)}, \quad (2)$$

где X , Y и Z Выразить себя особенно сложным способом в зависимости от параметров N , a и b (см. например [1]). Пик эпидемии происходит в $T \simeq Z/Y$. Попутно отметим, что, насколько нам известно,

приближение (2) никогда не было строго продемонстрировано, поэтому мы используем выше и ниже неформального знака \simeq , Теперь предположим, что $1/N$ быть маленьким впереди $(\mathcal{R}_0 - 1)^2$, В этом случае

$$Y \simeq \frac{a-b}{2}, \quad Z \simeq \frac{1}{2} \log[2N(b/a - 1)^2]$$

(см. например [2]). sN которая стремится к бесконечности, поэтому мы имеем $Z \simeq \frac{\log N}{2}$ и наконец $T \simeq \frac{\log N}{a-b}$, Мы находим такое же асимптотическое поведение. Наш анализ, основанный на формуле (1), действителен, однако, для всех $\mathcal{R}_0 > 1$ и не только для \mathcal{R}_0 близко к 1.

спасибо

Мы благодарим Hisashi Inaba за его комментарии к тексту.

ССЫЛКИ

1. N. Bacaër (2012) Le modèle de Kermack et McKendrick pour la peste à Bombay et la reproductivité nette d'un type avec saisonnalité. *Journal of Mathematical Biology* 64 (2012) 403 – 422. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01340008>
2. N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique. *Comptes Rendus Biologies* 342 (2019) 119 – 123. <https://doi.org/10.1016/j.crvi.2019.07.001>
3. N. Bacaër (2020) Un modèle mathématique de l'épidémie de coronavirus en France. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>
4. A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris.
5. A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris.