

# Op de epidemische piek in een SIR-model

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Wiskundige en computermodellering van complexe systemen  
Les Cordeliers, Parijs, Frankrijk  
nicolas.bacaer@ird.fr

## Overzicht

We bestuderen asymptotisch gedrag, wanneer de grootte  $N$  van de bevolking is in die tijd groot  $T$  die een epidemie gemodelleerd door een SIR-systeem nodig heeft om zijn hoogtepunt te bereiken. We vinden dat  $T \sim (\log N)/(a - b)$ , waar  $a$  is het effectieve contactpercentage en  $b$  de snelheid waarmee besmettelijke mensen niet meer worden besmet.

## Het SIR-model

Beschouw als in [4, p. 75] het klassieke model voor een epidemie

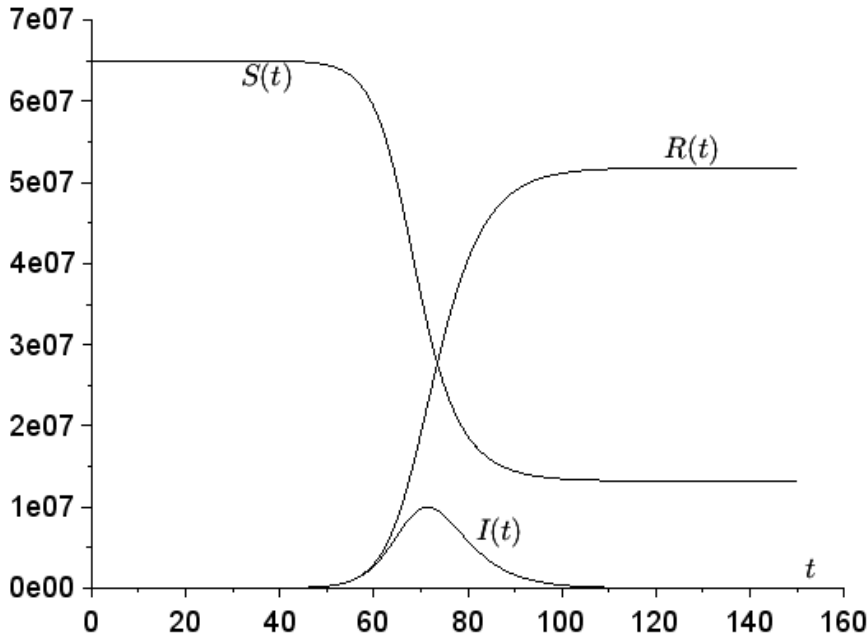
$$\frac{dS}{dt} = -a\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI,$$

waar  $S(t)$  is het aantal mensen dat besmet kan raken,  $I(t)$  het aantal geïnfecteerde mensen,  $R(t)$  het aantal mensen dat uit de overdracht is verwijderd (als gevolg van opsluiting, genezing of overlijden) en  $N = S(t) + I(t) + R(t)$  de totale populatie wordt verondersteld constant te zijn. Overweeg de beginvoorwaarden

$$S(0) = N - 1, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0.$$

We nemen aan  $a > b$ .

Een voorbeeld is te vinden in figuur 1. We hebben gekozen  $N = 65 \times 10^6$ ,  $a = 1/2$  per dag en  $b = 1/4$  per dag. Dit komt overeen met een gemiddelde infectieduur  $1/b = 4$  dagen en reproduceerbaar  $\mathcal{R}_0 = a/b = 2$  (de term en de notatie komen uit [5, p. 102]). Zonder te beweren realistisch te zijn, zijn dit waarden van dezelfde orde van grootte als wat kan worden gevonden voor het coronavirus in het hypothetische geval waarin er niet wordt ingegrepen om de epidemie te verminderen [3].



Figuur 1. Een simulatie van het SIR-model.

Door de eerste en derde vergelijking te combineren, is het bekend [4, p. 76] dat we een eerste integraal van het differentiaalsysteem vinden:

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -a \frac{I}{N} = -\frac{a}{bN} \frac{dR}{dt},$$

waar  $\log[S(t)/S(0)] = -\frac{a}{bN} R(t)$ . In de eerste vergelijking vinden we

$$\frac{dS}{dt} = -a \frac{S}{N} (N - S - R) = -a \frac{S}{N} \left( N - S + \frac{bN}{a} \log[S(t)/S(0)] \right).$$

De epidemische piek in figuur 1 komt overeen met  $dI/dt = 0$ , wat gebeurt vanaf de tweede vergelijking wanneer  $S(t) = Nb/a$ . Merk op dat  $S(t)$  neemt eentonig af. We leiden dat af als  $T$  is de tijd van de epidemische piek, d.w.z. als

$$I(T) = \max_{t>0} I(t),$$

dus

$$T = \int_0^T dt = \int_{S(0)}^{bN/a} \frac{dS}{-a \frac{S}{N} \left( N - S + \frac{bN}{a} \log[S/S(0)] \right)}.$$

Laten we poseren  $s = S/N$ . Dus

$$T = \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1-1/N)] \right)}. \quad (1)$$

## Het asymptotische gedrag van de epidemische piek

Laten we kijken naar een toename van  $T$ . Voor  $b/a < s < 1 - 1/N$ , merken we dat

$$\frac{1}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1-1/N)] \right)} \leq \frac{1}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log s \right)}.$$

Goud in de buurt van  $s = 1$ , men heeft

$$\frac{1}{s(1-s + \frac{b}{a}\log s)} \sim \frac{1}{(1-s)(1-b/a)}.$$

De integraal  $\int_{b/a}^1 \frac{ds}{1-s}$  is verschillend. Wanneer  $N \rightarrow +\infty$ , dus we hebben

$$T \leq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s(1-s + \frac{b}{a}\log s)} \sim \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{(1-s)(1-b/a)} \sim \frac{\log N}{a-b}.$$

Laten we nu kijken naar een vermindering van  $T$ . Voor alles  $s > 0$ ,  $\log s \leq s - 1$ . We hebben ook  $\log(1 - 1/N) \geq -2/N$  voor iedereen  $N \geq 2$ . Dat leiden we voor alles  $s \in ]b/a, 1 - 1/N[$  en zo  $N \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} 1 - s + \frac{b}{a}\log[s/(1 - 1/N)] &= 1 - s + \frac{b}{a}\log s - \frac{b}{a}\log(1 - 1/N) \\ &\leq 1 - s + \frac{b}{a}(s - 1) + \frac{2b}{aN}. \end{aligned}$$

Dus

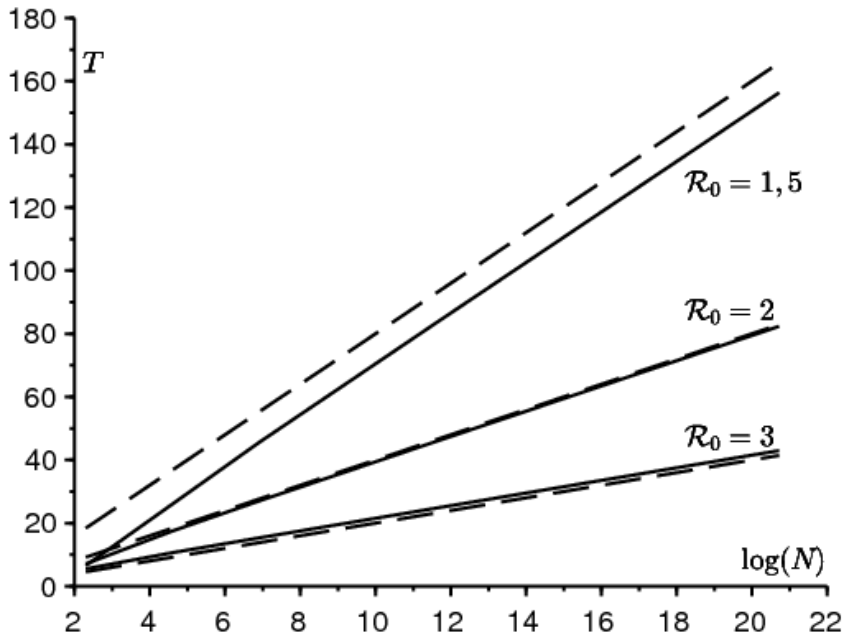
$$T \geq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s[1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)s]}.$$

We komen een rationeel deel van het formulier tegen  $\frac{1}{s(u-vs)}$  met  $u = 1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN}$  en  $v = 1 - b/a$ . Het valt uiteen in eenvoudige elementen zoals  $\frac{1}{u}(\frac{1}{s} + \frac{v}{u-vs})$ . Een primitief is dus  $\frac{1}{u}[\log s - \log(u - vs)] = \frac{1}{u}\log \frac{s}{u-vs}$ . Dus

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{1}{a(1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN})} \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)b/a}{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)(1 - 1/N)} \right\} \\ &= \frac{1}{a - b + 2b/N} \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{(1 - b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1 + b/a)/N} \right\} \\ &= \frac{1}{a - b + 2b/N} \left[ \log N + \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{(1 - b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1 + b/a)} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Het lid rechts is gelijk aan  $(\log N)/(a - b)$  wanneer  $N \rightarrow +\infty$ . Aangezien het hetzelfde equivalent is als dat van de hierboven verkregen bovengrens, concluderen we dat  $T \sim (\log N)/(a - b)$  wanneer  $N \rightarrow +\infty$ .

In het voorbeeld in figuur 1 hebben we  $T \simeq 71,4$  dagen terwijl  $(\log N)/(a - b) \simeq 72,0$  dagen. De benadering ziet er redelijk goed uit. In figuur 2 variëren we de grootte  $N$  van de bevolking evenals de parameter  $a$ , met  $b$  opgelost. Dat merken we  $(\log N)/(a - b)$  soms overschat, soms onderschat  $T$ .



Figuur 2. Datumvergelijking  $T$  de piek van de epidemie (ononderbroken lijn), berekend met de integraal van formule (1), met het equivalent  $(\log N)/(a - b)$  (stippellijn), afhankelijk van  $\log N$ , wanneer  $N$  varieert van  $10$  tot  $10^8$  voor drie parameterwaarden  $a$  zoals  $\mathcal{R}_0 = a/b \in \{1,5 ; 2 ; 3\}$ .

Merk op dat  $a - b$  is de groeisnelheid van de epidemie aan het begin sinds we dat hebben, voor  $N$  lang,  $S(t) \simeq N$  en  $dI/dt \simeq (a - b)I$ . Dit percentage kan worden geschat op basis van epidemiologische gegevens. De totale bevolking kennen  $N$  kunnen we dus de datum van de piek van de epidemie voorspellen. In de praktijk blijft de hypothese die ten grondslag ligt aan het model van een homogene mix van de bevolking twijfelachtig op de schaal van een land, iets minder op de schaal van een stad.

Historisch gezien hadden Kermack en McKendrick het SIR-systeem benaderd door uit te gaan van die reproduceerbaarheid  $\mathcal{R}_0$  was dicht bij 1, wat leidt tot een kleine epidemie. Met beperkte ontwikkeling  $e^x \simeq 1 + x + x^2/2$ , waren ze tot een expliciet oplosbare Riccati-vergelijking gekomen, dus dat

$$I(t) \simeq \frac{X}{\text{ch}^2(Yt - Z)}, \quad (2)$$

waar  $X$ ,  $Y$  en  $Z$  drukken zich op een bijzonder gecompliceerde manier uit, afhankelijk van de parameters  $N$ ,  $a$  en  $b$  (zie bijvoorbeeld [1]). De epidemische piek vindt plaats in  $T \simeq Z/Y$ . Laten we terloops opmerken dat voor zover wij weten de benadering (2) nooit rigoureus is aangetoond, daarom gebruiken we boven en onder het informele teken  $\simeq$ . Veronderstel nu dat  $1/N$  vooraan klein zijn ( $\mathcal{R}_0 - 1$ )<sup>2</sup>. In dit geval

$$Y \simeq \frac{a - b}{2}, \quad Z \simeq \frac{1}{2} \log[2N(b/a - 1)^2]$$

(zie bijvoorbeeld [2]). Met  $N$  die neigt naar oneindigheid, dus we hebben  $Z \simeq \frac{\log N}{2}$  en tot slot  $T \simeq \frac{\log N}{a - b}$ . We vinden hetzelfde asymptotische gedrag. Onze analyse op basis van formule (1) is echter geldig voor iedereen  $\mathcal{R}_0 > 1$  en niet alleen voor  $\mathcal{R}_0$  bijna 1.

## Dankwoord

Wij danken Hisashi Inaba voor zijn opmerkingen over de tekst.

## Referenties

1. N. Bacaër (2012) Le modèle de Kermack et McKendrick pour la peste à Bombay et la reproductivité nette d'un type avec saisonnalité. *Journal of Mathematical Biology* 64 (2012) 403 – 422. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01340008>
2. N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique. *Comptes Rendus Biologies* 342 (2019) 119 – 123. <https://doi.org/10.1016/j.crvi.2019.07.001>
3. N. Bacaër (2020) Un modèle mathématique de l'épidémie de coronavirus en France. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>
4. A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris.
5. A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris.