

# Sul picco dell'epidemia in un modello SIR

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Unità di modellazione matematica e computerizzata di sistemi complessi  
Les Cordeliers, Parigi, Francia  
nicolas.bacaer@ird.fr

## riassunto

Studiamo il comportamento asintotico, quando le dimensioni  $N$  della popolazione è grande, del tempo  $T$  che un'epidemia modellata da un sistema di tipo SIR impiega per raggiungere il suo apice. Lo troviamo  $T \sim (\log N)/(a - b)$ , dove  $a$  è la velocità di contatto effettiva e  $b$  la velocità con cui le persone infette smettono di essere infettate.

## Il modello SIR

Considerare come in [4, p. 75] il modello classico per un'epidemia

$$\frac{dS}{dt} = -a\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI,$$

dove  $S(t)$  è il numero di persone che potrebbero essere infettate,  $I(t)$  il numero di persone infette,  $R(t)$  il numero di persone rimosse dalla trasmissione (a seguito di parto, guarigione o morte) e  $N = S(t) + I(t) + R(t)$  la popolazione totale ritenuta costante. Considera le condizioni iniziali

$$S(0) = N - 1, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0.$$

Assumeremo  $a > b$ .

Un esempio è riportato nella figura 1. Abbiamo scelto  $N = 65 \times 10^6$ ,  $a = 1/2$  al giorno e  $b = 1/4$  al giorno. Ciò corrisponde a una durata media dell'infezione  $1/b = 4$  giorni e riproducibile  $\mathcal{R}_0 = a/b = 2$  (il termine e la notazione provengono da [5, p. 102]). Senza pretendere di essere realistici, questi sono valori dello stesso ordine di grandezza di ciò che può essere trovato per il coronavirus nel caso ipotetico in cui non vi è alcun intervento per ridurre l'epidemia [3].

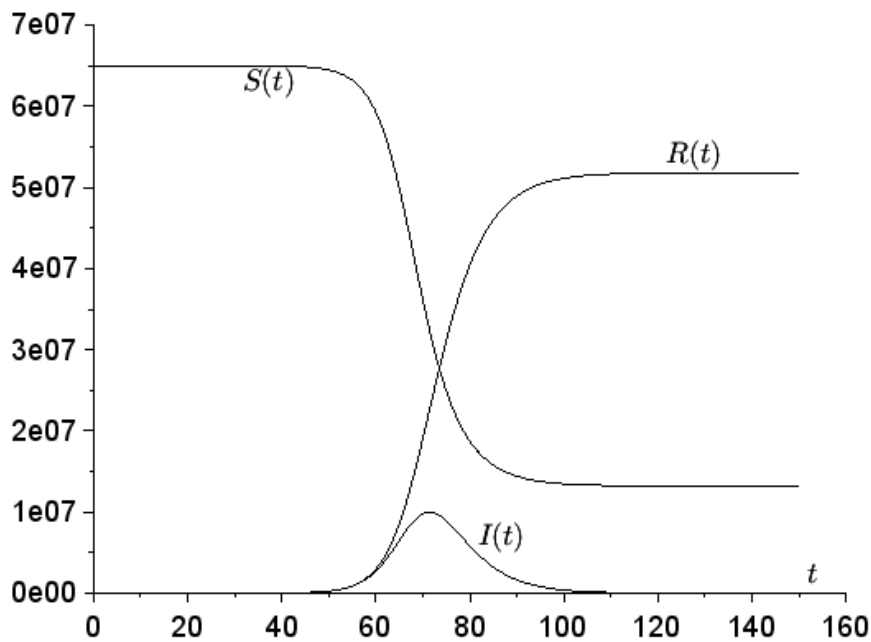


Figura 1. Una simulazione del modello SIR.

Combinando la prima e la terza equazione, è ben noto [4, p. 76] che troviamo un primo integrale del sistema differenziale:

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -a \frac{I}{N} = -\frac{a}{bN} \frac{dR}{dt},$$

quindi  $\log[S(t)/S(0)] = -\frac{a}{bN} R(t)$ . Nella prima equazione, troviamo

$$\frac{dS}{dt} = -a \frac{S}{N} (N - S - R) = -a \frac{S}{N} \left( N - S + \frac{bN}{a} \log[S(t)/S(0)] \right).$$

Il picco epidemico nella Figura 1 corrisponde a  $dI/dt = 0$ , che si verifica dalla seconda equazione quando  $S(t) = Nb/a$ . Si noti che  $S(t)$  sta diminuendo monotono. Ne deduciamo se  $T$  è il tempo del picco dell'epidemia, cioè se

$$I(T) = \max_{t>0} I(t),$$

allora

$$T = \int_0^T dt = \int_{S(0)}^{bN/a} \frac{dS}{-a \frac{S}{N} \left( N - S + \frac{bN}{a} \log[S/S(0)] \right)}.$$

Posiamo  $s = S/N$ . Allora

$$T = \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1 - 1/N)] \right)}. \quad (1)$$

## Il comportamento asintotico del picco epidemico

Cerchiamo un aumento di  $T$ . per  $b/a < s < 1 - 1/N$ , lo notiamo

$$\frac{1}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1 - 1/N)] \right)} \leq \frac{1}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log s \right)}.$$

Oro nelle vicinanze di  $s = 1$ , abbiamo

$$\frac{1}{s(1-s + \frac{b}{a}\log s)} \sim \frac{1}{(1-s)(1-b/a)}.$$

L'integrale  $\int_{b/a}^1 \frac{ds}{1-s}$  è divergente. quando  $N \rightarrow +\infty$ , quindi abbiamo

$$T \leq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s(1-s + \frac{b}{a}\log s)} \sim \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{(1-s)(1-b/a)} \sim \frac{\log N}{a-b}.$$

Ora cerchiamo una riduzione in  $T$ . Per tutto  $s > 0$ ,  $\log s \leq s - 1$ . Abbiamo anche  $\log(1 - 1/N) \geq -2/N$  per tutti  $N \geq 2$ . Lo deduciamo per tutto  $s \in ]b/a, 1 - 1/N[$  e tutto  $N \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} 1 - s + \frac{b}{a}\log[s/(1 - 1/N)] &= 1 - s + \frac{b}{a}\log s - \frac{b}{a}\log(1 - 1/N) \\ &\leq 1 - s + \frac{b}{a}(s - 1) + \frac{2b}{aN}. \end{aligned}$$

pertanto

$$T \geq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s[1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)s]}.$$

Incontriamo una frazione razionale della forma  $\frac{1}{s(u-vs)}$  con  $u = 1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN}$  e  $v = 1 - b/a$ . Si scompone in semplici elementi come  $\frac{1}{u}(\frac{1}{s} + \frac{v}{u-vs})$ . Una primitiva è quindi  $\frac{1}{u}[\log s - \log(u - vs)] = \frac{1}{u}\log \frac{s}{u-vs}$ . In tal modo

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{1}{a(1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN})} \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)b/a}{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)(1 - 1/N)} \right\} \\ &= \frac{1}{a - b + 2b/N} \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{(1 - b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1 + b/a)/N} \right\} \\ &= \frac{1}{a - b + 2b/N} \left[ \log N + \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{(1 - b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1 + b/a)} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Il membro a destra equivale a  $(\log N)/(a - b)$  quando  $N \rightarrow +\infty$ . Dato che è lo stesso equivalente di quello del limite superiore ottenuto sopra, lo concludiamo  $T \sim (\log N)/(a - b)$  quando  $N \rightarrow +\infty$ .

Nell'esempio in Figura 1, abbiamo  $T \simeq 71,4$  giorni mentre  $(\log N)/(a - b) \simeq 72,0$  giorni. L'approssimazione sembra piuttosto buona. Nella Figura 2, variamo le dimensioni  $N$  della popolazione così come il parametro  $a$ , con  $b$  set. Lo notiamo  $(\log N)/(a - b)$  a volte sopravvaluta, a volte sottovaluta  $T$ .

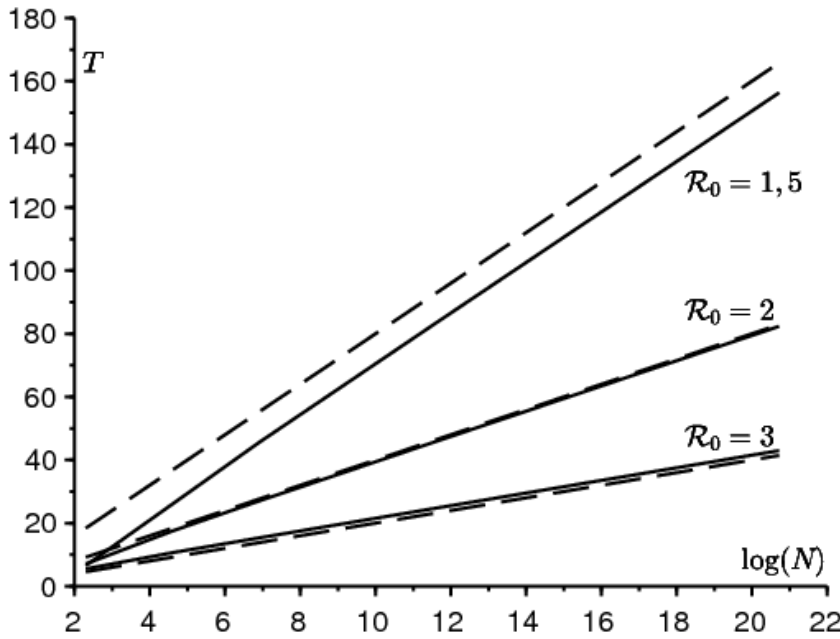


Figura 2. Confronto delle date  $T$  il picco dell'epidemia (linea continua), calcolato con l'integrale di formula (1), con l'equivalente  $(\log N)/(a - b)$  (linea tratteggiata), a seconda di  $\log N$ , quando  $N$  varia da  $10$  a  $10^8$  per tre valori di parametro  $a$  come  $\mathcal{R}_0 = a/b \in \{1,5 ; 2 ; 3\}$ .

Si noti che  $a - b$  è il tasso di crescita dell'epidemia al suo inizio da quando poi abbiamo, per  $N$  grande,  $S(t) \simeq N$  e  $dI/dt \simeq (a - b)I$ . Questo tasso può essere stimato sulla base di dati epidemiologici. Conoscere la popolazione totale  $N$ , possiamo quindi prevedere la data del picco dell'epidemia. In pratica, l'ipotesi alla base del modello di una miscela omogenea della popolazione rimane incerta sulla scala di un paese, un po' meno sulla scala di una città.

Storicamente, Kermack e McKendrick avevano approssimato il sistema SIR assumendo quella riproducibilità  $\mathcal{R}_0$  era vicino a 1, il che porta a una piccola epidemia. Con sviluppo limitato  $e^x \simeq 1 + x + x^2/2$ , erano arrivati a un'equazione di Riccati esplicitamente risolvibile, quindi

$$I(t) \simeq \frac{X}{\text{ch}^2(Yt - Z)}, \quad (2)$$

dove  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  esprimersi in modo particolarmente complicato a seconda dei parametri  $N$ ,  $a$  e  $b$  (vedi ad esempio [1]). Il picco dell'epidemia si svolge in  $T \simeq Z/Y$ . Notiamo per inciso che per nostra conoscenza l'approssimazione (2) non è mai stata dimostrata rigorosamente, motivo per cui usiamo sopra e sotto il segno informale  $\simeq$ . Supponiamo ora che  $1/N$  essere piccolo di fronte  $(\mathcal{R}_0 - 1)^2$ . In questo caso,

$$Y \simeq \frac{a - b}{2}, \quad Z \simeq \frac{1}{2} \log[2N(b/a - 1)^2]$$

(vedi ad esempio [2]). con  $N$  che tende all'infinito, così abbiamo  $Z \simeq \frac{\log N}{2}$  e infine  $T \simeq \frac{\log N}{a - b}$ . Troviamo lo stesso comportamento asintotico. La nostra analisi basata sulla formula (1) è valida, tuttavia, per tutti  $\mathcal{R}_0 > 1$  e non solo per  $\mathcal{R}_0$  vicino a 1.

**grazie**

Noi ringraziamo Hisashi Inaba per i suoi commenti sul testo.

**riferimenti**

1. N. Bacaër (2012) Le modèle de Kermack et McKendrick pour la peste à Bombay et la reproductivité nette d'un type avec saisonnalité. *Journal of Mathematical Biology* 64 (2012) 403 – 422. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01340008>
2. N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique. *Comptes Rendus Biologies* 342 (2019) 119 – 123. <https://doi.org/10.1016/j.crvi.2019.07.001>
3. N. Bacaër (2020) Un modèle mathématique de l'épidémie de coronavirus en France. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>
4. A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris.
5. A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris.