

# SIR في ذروة الوباء في نموذج

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement

وحدة النمذجة الرياضية والحاسوبية للأنظمة المعقدة

باريس ، فرنسا ، Les Cordeliers

nicolas.bacaer@ird.fr

## الملخص

للوصول إلى SIR ندرس السلوك المقارب ، عندما يكون الحجم  $N$  عدد السكان كبير في ذلك الوقت  $T$  يأخذها الوباء على غرار نظام من نوع ذروته. نجد ذلك  $T \sim (\log N)/(a - b)$  ، أين  $a$  هو معدل الاتصال الفعال و  $b$  المعدل الذي يتوقف عنده الأشخاص المعدون عن العدوى.

## SIR نموذج

انظر كما في [4 ، ص. 75] النموذج الكلاسيكي للوباء

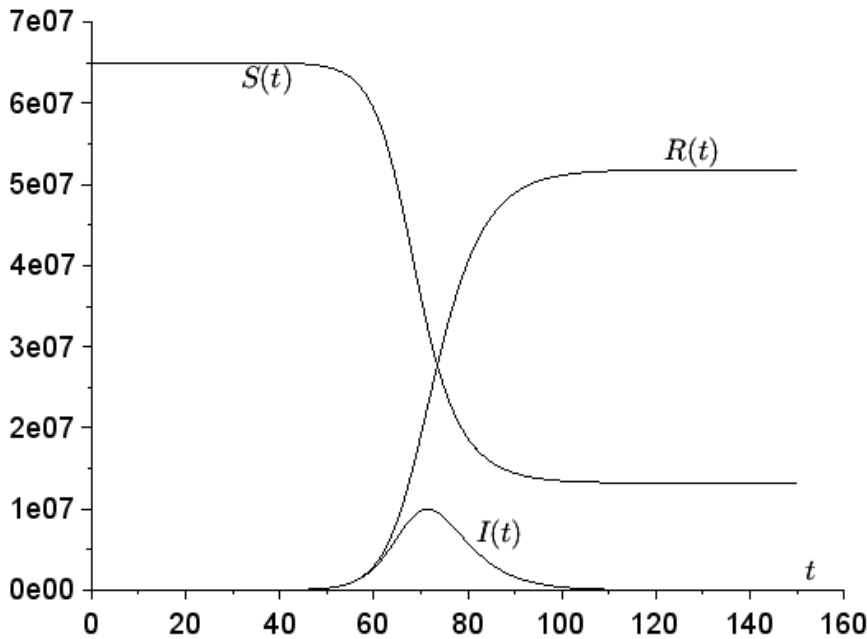
$$\frac{dS}{dt} = -a\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI,$$

أين  $S(t)$  هو عدد الأشخاص المحتمل أن يصابوا ،  $I(t)$  عدد المصابين ،  $R(t)$  عدد الأشخاص الذين تمت إزالتهم من العدوى (نتيجة للحبس أو الشفاء أو الوفاة) و  $N = S(t) + I(t) + R(t)$  يفترض أن مجموع السكان ثابت. فكر في الشروط الأولية

$$S(0) = N - 1, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0.$$

سنفترض  $a > b$ .

يمكن العثور على مثال في الشكل 1. لقد اخترنا  $N = 65 \times 10^6$  ،  $a = 1/2$  يوميا و  $b = 1/4$  يوميا. هذا يتوافق مع متوسط مدة الإصابة  $1/b$  4 أيام وقابلة للتكرار  $\mathcal{R}_0 = a/b = 2$  (يأتي المصطلح والرمز من [5 ، ص 102]). بدون الادعاء بالواقعية ، هذه قيم بنفس الترتيب من حيث الحجم الذي يمكن العثور عليه لفيروس تاجي في الحالة الافتراضية حيث لا يوجد تدخل للحد من الوباء [3].



الشكل 1. محاكاة لنموذج SIR.

من خلال الجمع بين المعادلتين الأولى والثالثة ، فإنه معروف جيداً [4 ، ص. 76] أن نجد أول تكامل للنظام التفاضلي

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -a \frac{I}{N} = -\frac{a}{bN} \frac{dR}{dt},$$

أين  $\log[S(t)/S(0)] = -\frac{a}{bN} R(t)$  نجد في المعادلة الأولى

$$\frac{dS}{dt} = -a \frac{S}{N} (N - S - R) = -a \frac{S}{N} \left( N - S + \frac{bN}{a} \log[S(t)/S(0)] \right).$$

يتوافق الذروة الوبائية في الشكل 1  $dI/dt = 0$  والذي يحدث من المعادلة الثانية عندما  $S(t) = Nb/a$ . نلاحظ أن  $S(t)$  يتناقص رتبة. نستنتج ذلك إذا  $T$  هو وقت الذروة الوبائية ، أي إذا

$$I(T) = \max_{t>0} I(t),$$

ثم

$$T = \int_0^T dt = \int_{S(0)}^{bN/a} \frac{dS}{-a \frac{S}{N} \left( N - S + \frac{bN}{a} \log[S/S(0)] \right)}.$$

دعونا نطرح  $s = S/N$ . ثم

$$T = \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1-1/N)] \right)}. \quad (1)$$

## السلوك المقارب للذروة الوبائية

دعونا نبحث عن زيادة  $T$ .  $b/a < s < 1 - 1/N$ . نلاحظ أن

$$\frac{1}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1-1/N)] \right)} \leq \frac{1}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log s \right)}.$$

الذهب على مقربة من  $s = 1$  لدينا

$$\frac{1}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log s \right)} \sim \frac{1}{(1-s)(1-b/a)}.$$

لا يتجزأ  $\int_{b/a}^1 \frac{ds}{1-s}$  متباينة. متى  $N \rightarrow +\infty$ ، لذلك لدينا

$$T \leq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s \left( 1 - s + \frac{b}{a} \log s \right)} \sim \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{(1-s)(1-b/a)} \sim \frac{\log N}{a-b}.$$

الآن دعونا نبحث عن تخفيض في  $T$ . للجميع  $s > 0$ ،  $\log s \leq s - 1$ . لدينا أيضاً  $\log(1 - 1/N) \geq -2/N$  للجميع  $N \geq 2$ .  
 $N \geq 2$ ، نستنتج ذلك لكل شيء  $s \in ]b/a, 1 - 1/N[$  وكل شيء

$$\begin{aligned} 1 - s + \frac{b}{a} \log[s/(1-1/N)] &= 1 - s + \frac{b}{a} \log s - \frac{b}{a} \log(1-1/N) \\ &\leq 1 - s + \frac{b}{a} (s - 1) + \frac{2b}{aN}. \end{aligned}$$

لذا

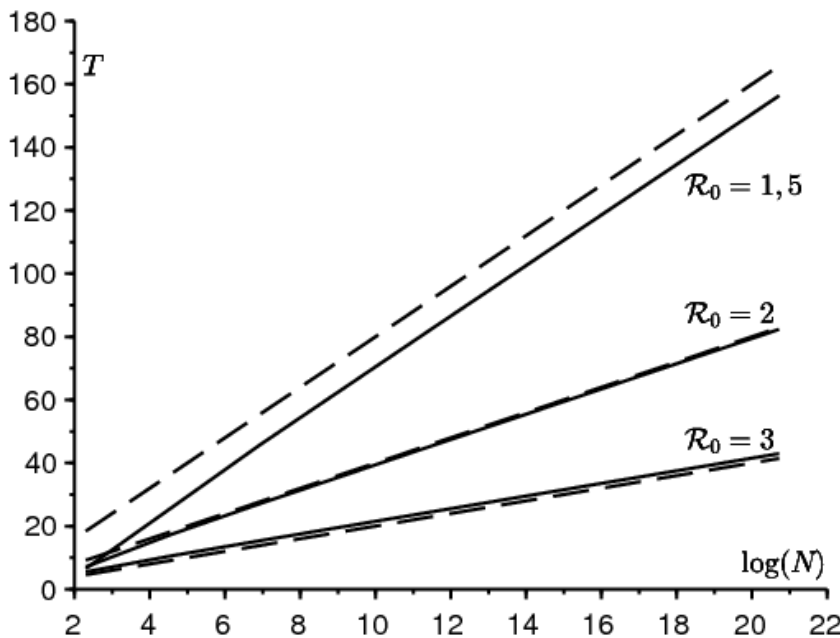
$$T \geq \frac{1}{a} \int_{b/a}^{1-1/N} \frac{ds}{s \left[ 1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)s \right]}.$$

نأتي عبر جزء عقلائي من النموذج  $\frac{1}{s(u-vs)}$  مع  $\frac{2b}{aN}$  و  $u = 1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN}$  و  $v = 1 - b/a$ . ينقسم إلى عناصر بسيطة مثل  $\frac{1}{u} [\log s - \log(u - vs)] = \frac{1}{u} \log \frac{s}{u-vs}$  لذلك فإن البدائي  $\frac{1}{u} (\frac{1}{s} + \frac{v}{u-vs})$  لذا

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{1}{a(1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN})} \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)b/a}{1 - \frac{b}{a} + \frac{2b}{aN} - (1 - b/a)(1 - 1/N)} \right\} \\ &= \frac{1}{a - b + 2b/N} \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{(1 - b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1 + b/a)/N} \right\} \\ &= \frac{1}{a - b + 2b/N} \left[ \log N + \log \left\{ \frac{1 - 1/N}{b/a} \frac{(1 - b/a)^2 + \frac{2b}{aN}}{(1 + b/a)} \right\} \right]. \end{aligned}$$

العضو على اليمين يعادل  $(\log N)/(a - b)$  متى  $N \rightarrow +\infty$ . بما أنه نفس المكافئ للحد الأعلى الذي تم الحصول عليه أعلاه ، نستنتج متى  $T \sim (\log N)/(a - b)$  ذلك  $N \rightarrow +\infty$ .

في المثال في الشكل 1 ، لدينا  $T \simeq 71,4$  أيام بينما  $(\log N)/(a - b) \simeq 72,0$  أيام. التقريب يبدو جيداً جداً. في الشكل 2 ، نختلف في  $T$  ، الحجم  $N$  من السكان وكذلك المعلمة  $a$  مع  $b$  ثابت. نلاحظ أن  $(\log N)/(a - b)$  في بعض الأحيان يبالغون في تقديرهم



الشكل 2. مقارنة التاريخ  $T$  ذروة الوباء (الخط الصلب) ، محسوبة مع تكامل الصيغة (1) ، مع ما يعادلها  $(\log N)/(a - b)$  (خط منقط) ، اعتماداً على  $\log N$  متى  $N$  يختلف من 10 إلى  $10^8$  لثلاث قيم معلمات  $a$  مثل  $R_0 = a/b \in \{1,5 ; 2 ; 3\}$ .

نلاحظ أن  $a - b$  هو معدل نمو الوباء في بدايته منذ ذلك الحين  $N$  كبير،  $S(t) \simeq N$  و  $dI/dt \simeq (a - b)I$ . يمكن تقدير هذا المعدل من البيانات الوبائية. معرفة مجموع السكان  $N$  يمكننا بالتالي توقع تاريخ ذروة الوباء. من الناحية العملية ، تظل الفرضية التي يقوم عليها نموذج مزيج متجانس من السكان مشكوكاً فيها على نطاق الدولة ، على نحو أقل بقليل على نطاق المدينة.

بافتراض أن التكاثر  $R_0$  كانت قريبة من 1 ، مما أدى إلى وباء صغير. مع SIR بتقريب نظام McKendrick و Kermack تاريخياً ، قام تطور محدود  $e^x \simeq 1 + x + x^2/2$  ، توصلوا إلى معادلة ريكاتي قابلة للحل بشكل صريح ، بحيث

$$I(t) \simeq \frac{X}{\text{ch}^2(Yt - Z)}, \quad (2)$$

أين  $X$  ،  $Y$  و  $Z$  يعبرون عن أنفسهم بطريقة معقدة بشكل خاص اعتماداً على المعلمات  $a$  ،  $b$  (انظر على سبيل المثال [1]). تحدث الذروة الوبائية في  $Y \simeq Z$ . دعنا نلاحظ أنه على حد علمنا لم يتم تقريباً تقريباً تقريباً (2) بدقة ، وهذا هو السبب في أننا نستخدم فوق وتحت العلامة غير الرسمية  $\simeq$ . الآن نفترض بالإضافة إلى ذلك  $1/N$  تكون صغيرة أمام  $(R_0 - 1)^2$ . في هذه الحالة

$$Y \simeq \frac{a-b}{2}, \quad Z \simeq \frac{1}{2} \log[2N(b/a-1)^2]$$

انظر على سبيل المثال [2]. مع  $N$  الذي يميل نحو اللانهاية ، لذلك لدينا  $Z \simeq \frac{\log N}{2}$  و أخيرا  $T \simeq \frac{\log N}{a-b}$ . نجد نفس السلوك المقارب). ومع ذلك ، فإن تحليلنا القائم على الصيغة (1) صالح للجميع  $\mathcal{R}_0 > 1$  وليس فقط  $\mathcal{R}_0$  قريب من 1

### شكر وتقدير

نشكر Hisashi Inaba لتعليقاته على النص

### المراجع

1. N. Bacaër (2012) Le modèle de Kermack et McKendrick pour la peste à Bombay et la reproductivité nette d'un type avec saisonnalité. *Journal of Mathematical Biology* 64 (2012) 403 – 422. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01340008>
2. N. Bacaër (2019) Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique. *Comptes Rendus Biologies* 342 (2019) 119 – 123. <https://doi.org/10.1016/j.crvi.2019.07.001>
3. N. Bacaër (2020) Un modèle mathématique de l'épidémie de coronavirus en France. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>
4. A. Hillion (1986) *Les Théories mathématiques des populations*. Presses Universitaires de France, Paris.
5. A. J. Lotka (1939) *Théorie analytique des associations biologiques*, 2e partie. Hermann, Paris.