



HAL
open science

Rapport de recherche : Un problème de transport optimal avec contrainte de dissipation de masse. Étude dans le cas d'un modèle lagrangien

Romain Hug

► To cite this version:

Romain Hug. Rapport de recherche : Un problème de transport optimal avec contrainte de dissipation de masse. Étude dans le cas d'un modèle lagrangien. Aix Marseille Université (AMU). 2025. ⟨hal-02516695v4⟩

HAL Id: hal-02516695

<https://hal.science/hal-02516695v4>

Submitted on 18 Oct 2025 (v4), last revised 14 Dec 2025 (v6)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Rapport de recherche

Un problème de transport optimal avec contrainte de dissipation de masse Étude dans le cas d'un modèle lagrangien

Romain HUG (*I2M^a, Aix-Marseille Université*)

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction générale | 2 |
| 2 | Formulation lagrangienne et premiers résultats d'existence | 5 |
| 2.1 | Quelques rappels à propos des mesures de Radon (positives et signées) | 5 |
| 2.2 | Problème originel | 6 |
| 2.3 | Premiers éléments | 8 |
| 2.4 | Existence d'une solution si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ est non vide | 10 |
| 3 | Aspect "bang-bang" de la mesure de sélection de départ μ_ω^0 | 15 |
| 3.1 | Non-optimalité pour une mesure μ_ω^0 non "bang-bang" par rapport à μ_0 entre deux ensembles de même volume | 15 |
| 3.2 | Preuve de la proposition 3-1 | 22 |
| 4 | Consistance du problème dualisé | 32 |
| 4.1 | Formulation générale (propriétés (I)) | 32 |
| 4.2 | Caractérisations des points selles de L_c et des solutions du problème primal en fonction des solutions du problème dual | 37 |
| 4.2.1 | Formulation exponentielle du terme dual | 37 |
| 4.2.2 | Caractérisation des solutions du problème primal en fonction des solutions du problème dual lorsque ζ est strictement convexe et assez régulière | 41 |
| 4.3 | Existence d'un point selle au lagrangien L_c | 47 |
| 4.3.1 | Approximation d'indicatrices par des fonctions continues positives à support compact (Théorème de Lusin) | 47 |
| 4.3.2 | Résolution de l'égalité inf-sup dans le cas d'une allocation non lagrangienne (équivalence des déplacements en ligne droite) | 48 |
| 4.3.3 | Résolution de l'égalité inf-sup dans le cas lagrangien | 56 |
| 4.3.4 | Existence d'un maximum de J_{μ_0, μ_1} sur \mathcal{D}_M et finalisation de la preuve d'existence d'un point selle du lagrangien L_c | 60 |
| 5 | Conclusion et perspectives | 65 |
| 5.1 | Récapitulatif des principaux résultats | 65 |
| 5.2 | Perspectives à court terme | 66 |
| 5.2.1 | Formulation dynamique d'un point de vue eulérien | 66 |
| 5.2.2 | Exploitation numérique du modèle eulérien par relaxation convexe | 67 |
| 5.2.3 | Critère de consistance, exploitation numérique du modèle lagrangien et cas particuliers explicites | 68 |
| 5.3 | Perspectives à plus long terme | 68 |
| 5.3.1 | Variante anisotrope ou inhomogène du modèle | 68 |
| 5.3.2 | Variante du modèle pour un temps de transport maximal fixé localement et non globalement | 69 |
| 5.3.3 | Autres possibilités de variantes et complexifications du modèle | 70 |
| A | Transformées c-concaves : généralités et cas particuliers dans le cadre de cette étude | 72 |
| A.1 | Quelques généralités préalables | 72 |
| A.2 | Quelques généralités sur les transformées c -concaves | 74 |
| A.3 | Propriétés sous des hypothèses plus spécifiques à notre étude | 76 |
| A.4 | Caractérisation des plans de transports | 79 |

a. Institut de Mathématiques de Marseille.

| | | |
|----------|--|------------|
| B | Annexe de la section 3 | 88 |
| B.1 | Définitions et résultats pour la preuve de la proposition 3-2 | 88 |
| B.1.1 | Poussée de mesure, classes d'équivalences presque partout, intégrabilité et changement de variable | 88 |
| B.1.2 | Espace métrique $(L^{d,M}, d_\infty)$ | 94 |
| B.2 | Définitions et résultats pour la preuve de la proposition 3-1 | 95 |
| B.2.1 | Résultats de concentrations | 96 |
| B.2.2 | Changement de variable polaire | 97 |
| B.2.3 | Résultats de concentration sur les cônes | 98 |
| B.2.4 | Autres | 101 |
| C | Formulation eulérienne du problème : preuve formelle | 102 |

1 Introduction générale

Le problème du transport optimal est resté longtemps très académique, du moins dans l'énoncé qu'en a fait G. Monge, et a pris un aspect plus concret avec l'idée de L. Kantorovitch de le formuler en termes d'allocation optimale de ressources. Plus récemment, des travaux tels que ceux de R. J. McCann [22], Y. Brenier et J.-D. Benamou [3] ont permis une approche dynamique de ce type de problème (principalement lorsque l'on applique un coût euclidien quadratique au transport). Cette formulation ouvre la voie à des traitements numériques plus aisés puisqu'elle permet d'appliquer des méthodes numériques classiques dans le domaine de l'optimisation variationnelle et convexe sous contraintes.

Un outil important de la théorie du transport optimal est la distance de Wasserstein : une métrique permettant d'estimer la différence entre deux mesures de probabilité (ou, plus généralement, entre deux mesures de même masse). Cette distance représente un coût de transport global entre deux mesures, en supposant que le coût de déplacement local de masse dépend de la distance et linéairement de la masse locale.

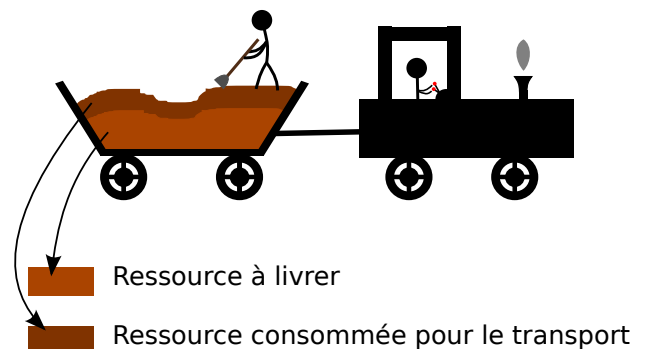
Une des principales limitations du transport optimal est qu'il ne peut être appliqué qu'entre des mesures de même masse globale. C'est pourquoi de nombreux travaux de recherche ont proposé diverses extensions de ces distances de Wasserstein pour mesurer des espaces de masses potentiellement différentes [4, 30, 29].

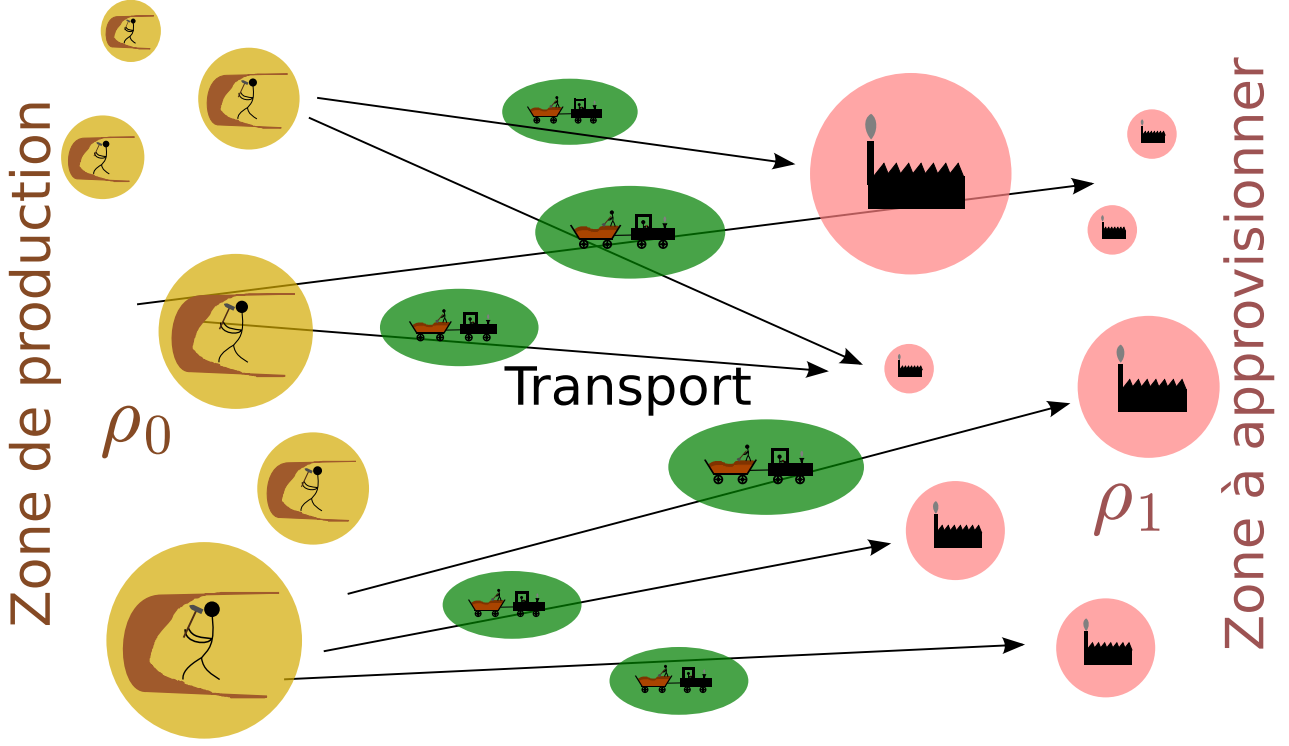
L'utilisation du transport optimal pour les problèmes d'interpolation a également encouragé la recherche de nouveaux modèles optimaux de transport de masses "déséquilibrées", en particulier de modèles dynamiques. En effet, en plus d'offrir un cadre variationnel plus adapté au traitement numérique, ces modèles fournissent une évolution temporelle continue (une "interpolation géodésique" pour la métrique de Wasserstein dans le cas classique) entre les mesures source et cible. La formulation dynamique proposée dans [3] représente la contrainte de conservation de la masse pendant le transport continu dans le temps avec une équation de continuité conservative. Leur modèle utilise des mesures absolument continues avec des densités L^2 (en espace-temps) : si $\rho(t, x)$ représente l'évolution temporelle de la densité interpolée, et $v(t, x)$ représente le champ de vitesse dérivé du plan de transport, nous avons donc $\partial_t \rho + \text{div}(\rho v) = 0$.

De nombreux modèles, visant à généraliser ces interpolations pour des mesures ou des densités de masses différentes, utilisent un terme source dans l'équation de continuité (qui devient $\partial_t \rho + \text{div}(\rho v) = f$) qui doit être pris en compte dans la fonctionnelle d'énergie (voir [18, 19], ou [10, 9, 28, 20, 21] avec également des applications au traitement d'images, ou [12] pour une utilisation en assimilation de données).

Le modèle que nous allons étudier dans ce travail part de cette même idée d'introduire un terme source dans l'équation de continuité, et d'adapter le terme d'énergie. Cependant, il ne vise pas actuellement à créer une interpolation entre deux mesures ou densités différentes, mais plutôt à revenir directement à un problème d'allocation optimale sous la contrainte d'un coût de déplacement. Une caractéristique non standard de notre modèle est que ce coût représente directement une perte de la masse transportée : l'objectif du problème est donc de minimiser cette perte. Dans ce modèle, la densité initiale n'a pas besoin d'être entièrement transportée et la question est de déterminer l'allocation correcte d'une partie de cette masse initiale en tenant compte de sa dissipation le long de son trajet. Plus explicitement :

Considérons une zone de production (par exemple, le charbon) et une zone d'approvisionnement. La zone de production produit plus de charbon que les besoins de la zone d'approvisionnement. Par ailleurs, le transport nécessite également une consommation de charbon. L'objectif est de déterminer un plan d'allocation optimale qui assure l'approvisionnement tout en minimisant la consommation de charbon nécessaire au transport.





Nous choisissons de partir d'un modèle dynamique (inspiré de [3]) : nous désignons par $\rho : [0, 1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ la densité de masse (positive) à transporter dans un intervalle de temps $[0, 1]$ et dans un espace \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}$), et par $v : [0, 1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ de vitesse transportant ρ . Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction dite de "dissipation de la masse", laquelle va déterminer le taux de déperdition/consommation de masse au fur et à mesure du transport. Plus précisément, en considérant une répartition de masse (i.e. une densité de masse) initiale **disponible** (au temps $t = 0$) $\rho_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ et une masse cible $\rho_1 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ (objectif de livraison au temps $t = 1$), on se fixe les conditions suivantes :

- En tout instant $t \in [0, 1]$ et en tout point x , ζ est fonction de l'amplitude du champ de vitesse $|v(t, x)|$, et la déperdition de masse est proportionnelle à la masse $\rho(t, x)$ présente en (t, x) par le taux de dissipation $\zeta(|v(t, x)|)$ (le taux de dissipation est directement lié à la vitesse de déplacement).
- Nous choisissons de négliger la consommation de l'impulsion initiale, c'est à dire de la mise en mouvement (même si elle peut être intéressante à observer dans certains cas).
- En tout point $x \in \mathbb{R}^d$, la sélection en $t = 0$ de densité de masse transportée $\rho(0, x)$ doit être inférieure ou égale à la densité de masse initialement disponible $\rho_0(x)$, et la densité de masse cible doit être livrée au temps $t = 1$ (i.e. $\rho(1, x) = \rho_1(x)$).
- Nous cherchons à minimiser la déperdition globale de masse le long du trajet.

Autrement dit, notre problème revient (formellement) à déterminer un couple densité-vitesse (ρ, v) minimisant l'énergie de déperdition

$$\mathbf{K}(\rho, v) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(|v(t, x)|) \rho(t, x) dx dt, \quad (1-1)$$

sous les contraintes de dissipation et de conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = -\zeta(|v|)\rho, \\ \rho(0, \cdot) \leq \rho_0 \text{ et } \rho(1, \cdot) = \rho_1 \end{cases} \quad (1-2)$$

(si les traces de ρ en $t = 0$ et $t = 1$ sont bien définies). Remarquons que formellement, via la contrainte (1-2), on pourrait reformuler \mathbf{K} ainsi

$$\mathbf{K}(\rho, v) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(|v(t, x)|) \rho(t, x) dx dt = - \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}_{t,x}(\rho v) dx dt = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(0, x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \rho(1, x) dx.$$

c'est à dire comme la différence entre la masse totale initialement sélectionnée pour le déplacement $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(0, x) dx$ et la masse totale livrée $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(1, x) dx$, sachant que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(0, x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x) dx$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(1, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_1(x) dx$.

Bien que nous envisagions d'aborder une future résolution numérique par la formulation dynamique eulérienne (recherche d'un couple densité-vitesse optimale (ρ, v) en espace-temps) telle que posée ci-dessus, nous avons choisi dans un

premier temps de nous attacher à obtenir une formulation "propre" de ce problème, via une approche plus "classique" de ce celui-ci, c'est à dire à montrer l'existence d'un plan de transport/plan d'allocation optimale.

Cependant, la formulation physique même de ce problème ne nous permet pas de pouvoir l'aborder comme un simple problème d'allocation : celui-ci pose en effet une contrainte de dissipation de masse sur des déplacements continus en temps. C'est pourquoi nous avons reformulé ici ce problème d'un point de vue lagrangien, en s'inspirant des modèles de transport branché^a [34, 14, 7, 23, 24, 26, 27, 6, 7]. Autrement dit, nous allons chercher à répartir une sélection de la (densité de) masse ρ_0 initialement disponible sur l'ensemble des chemins définis sur $[0, 1]$ à image dans \mathbb{R}^d d'une régularité fixée (ici les chemins M -lipschitziens, pour une constante de Lipschitz M suffisamment grande fixée arbitrairement^b) de façon à ce que la masse cible ρ_1 soit livrée tout en minimisant la déperdition globale de masse (laquelle se dissipe le long de chaque chemin).

Plus précisément, en désignant par $L^{d,M}$ l'ensemble des chemins M -lipschitziens, on cherche à minimiser le coût \mathcal{K} (représentant la dissipation globale de masse)

$$\mathcal{K}(\omega) = \int_{L^{d,M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 c(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\omega(\gamma)$$

sur l'ensemble des mesures de Radon positives ω sur l'espace métrique $(L^{d,M}, d_\infty)$ ^c vérifiant les contraintes $\pi_0 \# \omega \leq \rho_0 \mathcal{L}^d$ et $\pi_1 \# \omega \rho_1 \mathcal{L}^d$, où $\pi_0, \pi_1 : L^{d,M} \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec $\pi_0(\gamma) = \gamma(0)$ et $\pi_1(\gamma) = \gamma(1)$ pour tout chemin $\gamma \in L^{d,M}$.

Comme nous le verrons dans la section 4^d, dans un cas d'environnement isotrope et homogène (i.e. sans incidences extérieures spatiales ou temporelles sur cette dissipation), la résolution de ce problème lagrangien sera en fait ramené à la résolution d'un problème d'allocation optimale de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d (les trajectoires optimales de la solution lagrangienne se ramenant, comme l'on peut s'en douter, à des déplacements en ligne droite à vitesse constante).

Remarquons qu'un tel problème **n'a pas toujours de solution**. Prenons par exemple le cas où la densité initiale disponible ρ_0 a la même masse globale que la densité cible ("à livrer") ρ_1 , i.e. $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_1(x) dx$, avec $\rho_0 \neq \rho_1$ (i.e. que les deux densités ne soient pas égales \mathcal{L}^d -presque partout) : il faudrait alors une masse strictement supérieure à celle disponible dans ρ_0 pour être transportée sur ρ_1 malgré la dissipation de masse.

Ce document se découpera en trois sections principales, dont nous pouvons annoncer ainsi l'essentiel de leur contenu :

- Dans la section 2, nous exposerons notre modèle de façon plus détaillée et montrerons (proposition 2-1) l'existence d'une solution optimale **dans le cas où l'ensemble des contraintes est non vide** (c'est à dire dans le cas où le problème (1-2) admet au moins une solution).
- Dans la section 3, nous montrerons que dans le cas de supports disjoints entre les densités ρ_0 et ρ_1 , une mesure ω_{opt} d'allocation optimale de la masse disponible via ρ_0 sur l'ensemble des chemins $L^{d,M}$ correspond à une sélection de type "bang-bang" de $\mu_0 = \rho_0 \mathcal{L}^d$ (proposition 3-1), i.e. il existe un borélien $V_{\omega_{opt}}$ de \mathbb{R}^d tel que

$$\pi_0 \# \omega_{opt} = \mathbb{1}_{V_{\omega_{opt}}} \rho_0 \mathcal{L}^d.$$

Autrement dit, dans le cas d'une mesure optimale ω_{opt} d'allocation optimale sur $L^{d,M}$, en tout point $x \in \mathbb{R}^d$, la masse (infinitésimale) disponible portée par ρ_0 est soit intégralement transportée, soit pas du tout. Ou encore, en reprenant le modèle formel (1-2), on a $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ ou $\rho(0, x) = 0$ en tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

- Dans la section 4 nous formulerons le problème dual associé au problème (primal) initial (définition 4-1 et propriétés (I)) et montrerons l'existence^e d'une solution à celui-ci (lemme 4-27).

Nous pourrions ainsi également montrer l'existence d'un point selle pour le lagrangien L_c associé au problème couplé primal-dual (proposition 4-7 et lemmes 4-4 et 4-5).

Ceci nous permettra de montrer l'unicité de la solution ω_{opt} (lemme 4-11) du problème primal et de caractériser celle-ci en fonction de la solution du problème dual (dont dépendra donc également la "zone de sélection" $V_{\omega_{opt}}$ évoquée au point précédent (proposition 4-5)).

Nous verrons que celle-ci, comme on pouvait s'y attendre dans un environnement homogène et isotrope, se restreint à allouer de la masse uniquement à des chemins de type "interpolation linéaire"^f (proposition 4-7) et donc, comme déjà mentionné plus haut, que ce problème peut se ramener à un problème d'allocation optimale plus "classique" de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d (similaire à celui de Monge-Kantoritch), plutôt que de \mathbb{R}^d dans $L^{d,M}$ (comme dans notre formulation lagrangienne).

- Ces trois sections sont suivies de plusieurs annexes détaillant quelques résultats nécessaires pour les différentes preuves développées dans le document. La plupart sont en fait des résultats courants, souvent connus (voir

a. Remerciements à Benoît Merlet (Laboratoire Paul Painlevé, Univ. de Lille) pour m'avoir suggéré cette approche pour un premier "déblayage théorique".

b. Et donc arbitrairement grande.

c. d_∞ représentant la distance uniforme entre les chemins éléments de $L^{d,M}$.

d. Voir le lemme 4-21 et le corollaire 4-2.

e. Toujours dans le cas où les mesures $\mu_0 = \rho_0 \mathcal{L}^d$ et $\rho_1 = \rho_1 \mathcal{L}^d$ ont un support disjoint.

f. Donc trajectoire en ligne droite à vitesse constante.

académiques), issus de la littérature sur le transport optimal, l'analyse fonctionnelle, la théorie de la mesure ou l'optimisation. Notre objectif étant aussi de rendre ce document le plus auto-suffisant possible (bien que nous ferons bien sûr tout de même souvent appel à divers résultats de la littérature sans les redémontrer).

2 Formulation lagrangienne et premiers résultats d'existence

Commençons par introduire quelques notations préalables sur les espaces de fonctions continues à valeur dans \mathbb{R} (\mathbb{R} est muni de sa métrique canonique issue de la norme de la valeur absolue) : pour un espace topologique $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$, on définit :

- L'ensemble $C(X)$ des fonctions continues sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ à valeur dans \mathbb{R} .
- L'ensemble $C^+(X)$ des fonctions continues sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ à valeur dans \mathbb{R}_+ (positives).
- L'ensemble $C_c(X)$ des fonctions continues sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ à valeur dans \mathbb{R} à support compact.
- L'ensemble $C_c^+(X)$ des fonctions continues et à support compact sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ à valeur dans \mathbb{R}_+ (positives).
- L'ensemble $C_b(X)$ des fonctions continues et bornées sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ à valeur dans \mathbb{R} .
- L'ensemble $C_b^+(X)$ des fonctions continues et bornées sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ à valeur dans \mathbb{R}_+ (positives).
- L'ensemble $C_0(X)$ la fermeture de l'ensemble $C_c(X)$ dans $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$, où la norme $\|\cdot\|_\infty$ est définie pour toute fonction $f \in C_b(X)$ par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

2.1 Quelques rappels à propos des mesures de Radon (positives et signées)

Commençons par un rappel de définitions sur les mesures de Radon positives et signées (ces définitions pouvant varier dans la littérature, il s'agit donc de fixer les nôtres, qui se réfèrent plus précisément à celles de [32]).

Définition 2-1 (Mesure de Radon positive^a). *Soit $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ un espace topologique séparé et localement compact. On dit que μ est une mesure de Radon positive sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ si et seulement si :*

- μ est une mesure borélienne sur X .
- μ est finie sur tout sous-ensemble compact de X (sur un espace topologique tel que X , on dira également que μ est **localement finie**^b).
- μ est extérieurement régulière, c'est à dire que pour tout borélien A de X , on a

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V), A \subset V, V \text{ ouvert}\}.$$

- μ est intérieurement régulière, c'est à dire que pour tout borélien A non vide de X tel que $\mu(A) < +\infty$, on a

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K), K \subset A, K \text{ compact}\}.$$

Définition 2-2 (Mesure de Radon signée). *Soit $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ un espace topologique séparé et localement compact. On dit que μ est une mesure de Radon signée sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ si et seulement si ses variations positives et négatives sont toutes deux des mesures de Radon positives, autrement dit si le couple (μ_+, μ_-) correspondant à sa décomposition de Jordan^c est un couple de mesures de Radon positives (bien sûr dans ce cas la variation totale $|\mu|$ est par définition également une mesure de Radon positive).*

Définissons maintenant notre notation pour les espaces de mesures de Radon, positives ou signées.

Définition 2-3. *Soit $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ un espace topologique séparé et localement compact. Nous désignerons par :*

- $\mathcal{M}_+(X)$ l'ensemble des mesures de Radon positives et finies sur X .
- $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de Radon signées finies sur X , c'est à dire dont la variation totale $|\mu|$ est finie : i.e. $\mu \in \mathcal{M}(X) \Leftrightarrow |\mu| \in \mathcal{M}_+(X) \Leftrightarrow \mu_+, \mu_- \in \mathcal{M}_+(X)$.

L'ensemble $\mathcal{M}(X)$ est un sous espace vectoriel de l'espace des mesures signées, et l'ensemble $\mathcal{M}_+(X)$ est un sous-cône convexe de $\mathcal{M}(X)$, c'est à dire stable par addition et multiplication par un réel positif (nous ne le prouverons pas ici, mais on peut trouver une construction dans [32]).

Définition 2-4. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. On désigne alors par E' son **dual topologique**, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires (à valeur réelle) continues sur $(E, \|\cdot\|_E)$. On munit E' de la norme subordonnée (ou norme duale) $\|\cdot\|_{E'}$ définie pour tout $f \in E'$ par*

$$\|\varpi\|_{E'} = \sup_{x \in \overline{B_E(0,1)}} |\varpi(x)| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|\varpi(x)|}{\|x\|_E}$$

(où $\overline{B_E(0,1)}$ désigne la boule unité dans $(E, \|\cdot\|_E)$).

- a. La définition d'une mesure de Radon est quelque peu variable dans la littérature, et celle-ci n'est donc qu'une version.
- b. On pourra également dire que μ est une mesure de Borel.
- c. C'est à dire tel que $\mu = \mu_+ - \mu_-$ et $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$.

Théorème 2-1. Soit (X, d) un espace métrique localement compact et σ -compact. Alors l'ensemble $\mathcal{M}(X)$ (ensemble des mesures de Radon finies et signées sur (X, d)) muni de la norme issue de la variation totale^a est le dual topologique de l'espace $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$.

Plus précisément, une application $L : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$, si et seulement si il existe une mesure de Radon signée $\mu \in \mathcal{M}(X)$ extérieurement régulière^b telle que pour tout $f \in C_0(X)$, on ait

$$L(f) = \int_X f d\mu.$$

Dans ce cas, on a de plus $\|L\|_{C_0(X)'} = |\mu|(X)$ et la mesure μ associée à L est unique dans $\mathcal{M}(X)$.

Le théorème 2-1, est un résultat classique de la littérature (il s'agit d'une extension du théorème de représentation de Riesz des formes linéaires positives sur $C_0(X)$ tel qu'énoncé dans [32]). Pour une preuve détaillée du théorème 2-1, c'est à dire avec l'exact énoncé que nous en avons donné, nous pouvons renvoyer à une de nos propres synthèses de cours que l'on pourra trouver sous le lien suivant : <https://amubox.univ-amu.fr/s/w9pc6xJdXafYPic>

La preuve qu'on y trouve est en fait très inspirée d'un cours d'analyse de Master 1 de Jean-François Babadjian [1] qui l'établit pour le cas où $X = \mathbb{R}^d$ (voir le lien vers celui-ci dans la référence). Il nous est cependant nécessaire de nous placer ici dans un cas plus large pour pouvoir également l'appliquer dans le cas où $(X, d) = (L^{d,M}, d_\infty)$ (qui est un espace métrique propre, donc localement compact et σ -compact).

Lemme 2-1. Soit (X, d) un espace topologique non-vide, localement compact et séparé. Alors l'ensemble $\mathcal{M}_+(X)$ des mesures de Radon finies et positives est fermé dans l'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des mesures de Radon finies et signées pour la topologie faible-* (si on munit $\mathcal{M}(X)$ de la norme issue de la variation totale^c).

Preuve : D'après le théorème 2-1, $\mathcal{M}(X)$ muni de la norme variation totale est le dual topologique de l'espace $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$. Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de $\mathcal{M}_+(X)$ convergeant faiblement-* dans $\mathcal{M}(X)$ vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$, i.e. pour toute fonction $f \in C_0(X)$, on a

$$\int_X f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu.$$

En particulier, pour tout $f \in C_c^+(X)$, on a $\int_X f d\mu_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, par passage à la limite, on a $\int_X f d\mu \geq 0$. On a donc $\mu \geq 0$, i.e. $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ ^d.

□

Remarque 2-1. Pour la conclusion de la preuve du lemme 2-1, on a en fait implicitement utilisé le résultat suivant :

"Soit X un espace topologique non-vide, séparé, localement compact et σ -compact. Alors toute mesure de Radon signée μ est positive si et seulement si on a $\int_X f d\mu \geq 0$ pour toute fonction $f \in C_c^+(X)$."

Celui-ci est également démontré dans la synthèse de cours déjà évoquée plus haut pour la preuve du théorème 2-1.

Remarque 2-2. L'ensemble $\mathcal{M}(X)$ muni de la norme issue de variation totale $\mu \mapsto |\mu|(X)$ est un espace vectoriel normé : le théorème 2-1 induit que cette structure forme en fait un espace de Banach en tant dual topologique de l'espace de Banach $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$.

L'ensemble $\mathcal{M}_+(X)$ peut alors être vu comme un sous-cône convexe fermé de $\mathcal{M}(X)$ (voir le lemme 2-1).

2.2 Problème originel

Dans toute la suite de ce document (annexes comprises), d désignera un entier naturel non nul (il s'agira de la dimension de l'espace vectoriel finie dans lequel nous travaillerons).

On munit \mathbb{R}^d de la norme euclidienne $|\cdot|$. Soient deux mesures de Radon μ_0 et μ_1 à support compact (donc finies) sur \mathbb{R}^d . Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu borélienne sur \mathbb{R}^d .

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble $L^{d,M} := L^{d,M}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ des fonctions M -Lipschitz sur $[0, 1]$ à valeur dans \mathbb{R}^d . On munit $L^{d,M}$ de la distance d_∞ , définie par $d_\infty(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in [0, 1]} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$ pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in L^{d,M}$.

Soit $t \in [0, 1]$, on définit $\pi_t : L^{d,M} \rightarrow \mathbb{R}^d$ par $\pi_t(\gamma) = \gamma(t)$. Remarquons que pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction π_t est continue (et même 1-lipschitzienne) de $(L^{d,M}, d_\infty)$ vers \mathbb{R}^d muni de la norme euclidienne.

a. C'est à dire la norme $\mu \mapsto |\mu|(X)$, voir la définition 2-3.

b. Au sens où le couple de mesures (μ_+, μ_-) correspondant à la décomposition de Jordan de μ est un couple de mesures de Radon (positives), et finies.

c. C'est à dire la norme $\mu \mapsto |\mu|(X)$.

d. Voir la remarque 2-1

Soit $\mathcal{M}_+(L^{d,M})$ l'ensemble des mesures de Radon finies et positives sur $L^{d,M}$ (voir la définition 2-3). Soit $\mathcal{B}(L^{d,M})$ est la tribu borélienne sur $L^{d,M}$.

Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Nous supposons dans toute la suite que M est choisie telle que $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, M/2)$.

Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne, qui sera dans beaucoup d'énoncés supposée de classe C^1 , convexe et strictement croissante, telle que $\zeta(0) = 0$.

Pour toute mesure $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$, pour tout $t \in [0, 1]$, on définit la mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ainsi : pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mu_\omega^t(A) = \int_{\pi_t^{-1}(A)} e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) = \int_{L^{d,M}} \mathbb{1}_A(\gamma(t)) e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma).$$

Autrement dit, en définissant pour tout $t \in [0, 1]$ la fonction $\ell_t : L^{d,M} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\ell_t(\gamma) = \int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds$ ($\forall \gamma \in L^{d,M}$), on a $\mu_\omega^t = \pi_t \# (e^{-\ell_t} \omega)$ (remarquons que $\ell_0 \equiv 0$).

On peut reformuler cette caractérisation de la façon suivante (voir la proposition B-1) : pour toute mesure $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$, pour tout $t \in [0, 1]$, et pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^t(x) = \int_{L^{d,M}} f(\gamma(t)) e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma).$$

Définition 2-5 (Problème primal).

— On définit l'ensemble de contraintes

$$\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) = \{\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M}), \mu_\omega^0 \leq \mu_0, \mu_\omega^1 = \mu_1\}. \quad (2-1)$$

— On définit également l'énergie \mathcal{K} , pour tout $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$, par

$$\mathcal{K}(\omega) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) - \mu_\omega^1(\mathbb{R}^d) = \int_{L^{d,M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\omega(\gamma). \quad (2-2)$$

Sous réserve que l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ soit non vide, on cherche à montrer que $\text{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \neq \emptyset$.

On peut alors faire le développement suivant (non rigoureux) :

$$\begin{aligned} \inf_{\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\omega) &= \inf_{\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})} [\mathcal{K}(\omega) + \iota_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}(\omega)] \\ &= \inf_{\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})} \left[\mathcal{K}(\omega) + \sup_{f \in C^+(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) \right) + \sup_{g \in C(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_\omega^1(y) \right) \right] \end{aligned}$$

↑ (On suppose à cette étape que l'on peut effectuer l'inversion inf-sup)

$$\begin{aligned} &= \sup_{f \in C^+(\mathbb{R}^d), g \in C(\mathbb{R}^d)} \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) \right. \\ &\quad \left. + \inf_{\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})} \int_{L^{d,M}} \left(1 + f(\gamma(0)) - [1 + g(\gamma(1))]\right) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) \right] \end{aligned}$$

$$= \sup_{f \in C^+(\mathbb{R}^d), g \in C(\mathbb{R}^d)} \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) - \iota_{\mathcal{D}_M}(f, g) \right]$$

$$= \sup_{(f, g) \in \mathcal{D}_M} \left[\int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) \right].$$

avec

$$\mathcal{D}_M = \{(f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d), 1 + f(\gamma(0)) - (1 + g(\gamma(1))) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} \geq 0, \forall \gamma \in L^{d,M}\}. \quad (2-3)$$

Définition 2-6. On définit $J_{\mu_0, \mu_1} : (f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ le terme dual de l'énergie \mathcal{K} par

$$J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x).$$

On définit ainsi le problème dual de celui de la définition 2-5 :

Définition 2-7 (Problème dual). On définit la fonctionnelle $J_{\mu_0, \mu_1} : C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x). \quad (2-4)$$

pour tout couple $(f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)$.

On cherche à montrer que $\operatorname{argmax}_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \neq \emptyset$.

2.3 Premiers éléments

Dans toute cette sous-section, nous supposons que $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$.

Lemme 2-2. L'ensemble \mathcal{D}_M peut se redéfinir ainsi :

$$\mathcal{D}_M = \left\{ (f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d), 1 + f(x) \geq (1 + \max\{0, g(y)\}) e^{-\zeta(|x-y|)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^d \mid |x-y| \leq M \right\}.$$

Preuve : On définit provisoirement l'ensemble \mathcal{D}'_M par :

$$\mathcal{D}'_M = \left\{ (f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d), 1 + f(x) \geq (1 + \max\{0, g(y)\}) e^{-\zeta(|x-y|)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^d \mid |x-y| \leq M \right\}.$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, et pour tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ lipschitzien (ou du moins \mathcal{L}^d -presque partout dérivable, de dérivée intégrable), on a par inégalité de Jensen, du fait que ζ est convexe et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ ,

$$\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) = \zeta\left(\left|\int_0^1 \gamma'(s) ds\right|\right) \leq \zeta\left(\int_0^1 |\gamma'(s)| ds\right) \leq \int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds. \quad (2-5)$$

Soit $(f, g) \in \mathcal{D}'_M$, et soit $\gamma \in L^{d, M}$. La fonction ζ étant strictement croissante (et par la relation (2-5)), on a

$$\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) \leq \zeta\left(\int_0^1 |\gamma'(s)| ds\right) \leq \zeta(M).$$

On a donc $e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} \leq e^{-\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|)}$, et ainsi

$$\begin{aligned} 1 + f(\gamma(0)) &\geq (1 + \max\{0, g(\gamma(1))\}) e^{-\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|)} \geq (1 + \max\{0, g(\gamma(1))\}) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} \\ &\geq (1 + g(\gamma(1))) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}, \end{aligned}$$

et ceci pour tout $\gamma \in L^{d, M}$, d'où $(f, g) \in \mathcal{D}_M$, et donc $\mathcal{D}'_M \subset \mathcal{D}_M$. Inversement, soit $(f, g) \in \mathcal{D}_M$, et soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que $|x - y| \leq M$:

— Si $g(y) \leq 0$, alors $1 + f(x) \geq 1 \geq (1 + \underbrace{\max\{0, g(y)\}}_{=0}) \underbrace{e^{-\zeta(|x-y|)}}_{\leq 1}$.

— Si $g(y) \geq 0$, alors, en considérant le chemin d'interpolation linéaire γ_{xy} défini pour tout $t \in [0, 1]$ par $\gamma_{xy}(t) = x + t(y - x)$ (on a bien $\gamma_{xy} \in L^{d, M}$), on a $\int_0^1 \zeta(|\gamma'_{xy}(s)|) ds = \zeta(|x - y|)$ et donc

$$1 + f(x) = 1 + f(\gamma(0)) \geq (1 + g(\gamma(1))) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'_{xy}(s)|) ds} = (1 + \underbrace{\max\{0, g(y)\}}_{=g(y)=g(\gamma(1))}) e^{-\zeta(|x-y|)} = (1 + \max\{0, g(y)\}) e^{-\zeta(|x-y|)}.$$

On a donc bien $(f, g) \in \mathcal{D}'_M$, et donc plus généralement $\mathcal{D}_M \subset \mathcal{D}'_M$, d'où $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}'_M$. □

Définition 2-8. On définit l'ensemble

$$\mathcal{D}_\infty = \left\{ (f, g) \in C_b^+(\mathbb{R}^d) \times C_b(\mathbb{R}^d), 1 + f(x) \geq (1 + \max\{0, g(y)\}) e^{-\zeta(|x-y|)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Remarque 2-3. Bien sûr, on aurait pu définir tout simplement \mathcal{D}_∞ par

$$\mathcal{D}_\infty = \left\{ (f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d), 1 + f(x) \geq (1 + g(y)) e^{-\zeta(|x-y|)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Définition 2-9. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, et soit $M > 0$. On définit l'ensemble

$$\mathcal{D}_{a, M}^{res} = \left\{ (f, g) \in C^+(\overline{B(a, M/2)}) \times C(\overline{B(a, M/2)}), 1 + f(x) \geq (1 + \max\{0, g(y)\}) e^{-\zeta(|x-y|)}, \forall x, y \in \overline{B(a, M/2)} \right\}.$$

Lemme 2-3. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soient $m, m', M \in \mathbb{R}$ tels que $0 < 2m < 2m' < M$, et soit un couple $(f^0, g^0) \in \mathcal{D}_{a, M}^{res}$. Alors il existe un couple $(f, g) \in \mathcal{D}_\infty$ tel que :

- $f|_{B(a, m)} = f^0|_{B(a, m)}$ et $g|_{B(a, m)} = g^0|_{B(a, m)}$.
- f et g sont toutes deux constantes sur $\mathbb{R}^d \setminus B(a, m')$: plus précisément, g est nulle sur cet ensemble et f y est égale à $S(f^0) = e^{\zeta(M)} \sup_{B(a, m')} |f^0|$.
- Pour tout $x \in B(a, m')$, on a $f(x) \leq S(f^0)$.
- Si $g^0 \geq 0$, alors $g \geq 0$.

Pour montrer le lemme 2-3, nous aurons besoin du lemme d'Urysohn, dont nous pouvons trouver la preuve par exemple dans [32] (lemme 2.12).

Lemme 2-4 (Lemme d'Urysohn [32]). Soit X un espace topologique non-vide, séparé et localement compact. Soit V un ouvert de X , et K un sous-ensemble compact de X inclus dans V . Alors il existe $f \in C_c^+(X)$ telle que

$$\mathbb{1}_K \leq f \leq \mathbb{1}_V.$$

Preuve du lemme 2-3 : D'après le lemme 2-4 d'Urysohn, il existe une fonction $\chi \in C_c(\overline{B(a, M/2)})$ telle que $\mathbb{1}_{\overline{B(a, m)}} \leq \chi \leq \mathbb{1}_{B(a, m')}$. On définit comme dans l'énoncé la constante $S(f^0) = e^{\zeta(M)} \sup_{B(a, m')} |f^0| < +\infty$.

On définit alors le couple de fonction $(f^1, g^1) \in C^+(\overline{B(a, M/2)}) \times C(\overline{B(a, M/2)})$ par $f^1 = \chi f^0 + (1 - \chi)S(f^0) \geq 0$ et $g^1 = \chi g^0$ (on a bien en outre $g^1 \geq 0$ si $g^0 \geq 0$). Comme la fonction χ est uniformément nulle sur la couronne $C(a, m', M/2) = \overline{B(a, M/2)} \setminus B(a, m)$, c'est également le cas de la fonction g^1 , et la fonction f^1 est uniformément constante égale à $S(f^0)$ sur $C(a, m', M/2)$.

On définit alors le couple de fonctions $(f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)$ comme les prolongements constants sur \mathbb{R}^d du couple (f^1, g^1) , autrement dit $f(x) = f^1(x)$ et $g(x) = g^1(x)$ pour tout $x \in \overline{B(a, M/2)}$, et $f(x) = S(f^0)$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(a, M/2)$: les fonctions f et g sont donc bien continues et bornées, avec de plus $f(x) \leq S(f^0)$ pour tout $x \in B(a, m')$ (du fait que $e^{\zeta(M)} \geq 1$).

- Soit $y \in B(a, m') \subset B(a, M/2)$.
- Pour tout $x \in B(a, m') \subset B(a, M/2)$, on a

$$f^0(x) \leq \sup_{B(a, m')} |f^0| \leq \underbrace{e^{\zeta(M)}}_{\geq 1} \sup_{B(a, m')} |f^0| = S(f^0),$$

et ainsi

$$\begin{aligned} 1 + g(y) &= 1 + g^0(y)\chi(y) = (1 - \chi(y)) + (1 + g^0(y))\chi(y) \leq (1 - \chi(y)) + \overbrace{(1 + \max\{0, g^0(y)\})}_{\leq (1+f^0(x))e^{\zeta(|x-y|)}}\chi(y) \\ &\leq (1 - \chi(y)) + \chi(y)(1 + f^0(x))e^{\zeta(|x-y|)} \\ &= 1 + \underbrace{\chi(y)f^0(x)}_{\leq 1}e^{\zeta(|x-y|)} \\ &\leq 1 + f^0(x)e^{\zeta(|x-y|)} \\ &\leq \underbrace{e^{\zeta(|x-y|)}}_{\geq 1} + f^0(x)e^{\zeta(|x-y|)} \\ &= (1 + f^0(x))e^{\zeta(|x-y|)} \\ &= (1 + (1 - \chi(x))\underbrace{f^0(x)}_{\leq S(f^0)}) + \chi(x)f^0(x)e^{\zeta(|x-y|)} \\ &\leq (1 + \underbrace{(1 - \chi(x))S(f^0)}_{=f(x)} + \chi(x)f^0(x))e^{\zeta(|x-y|)} \\ &= (1 + f(x))e^{\zeta(|x-y|)}. \end{aligned}$$

du fait que $(f^0, g^0) \in \mathcal{D}_{a, M}^{res}$, et d'après le lemme 2-2.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(a, m')$, on a

$$\begin{aligned}
1 + g(y) &= 1 + g^0(y)\chi(y) = (1 - \chi(y)) + (1 + g^0(y))\chi(y) \leq (1 - \chi(y)) + \chi(y) (1 + \max\{0, g^0(y)\}) \\
&\leq (1 - \chi(y)) + \chi(y)(1 + f^0(a))e^{\zeta(|a-y|)} \\
&= 1 + \chi(y)f^0(a)e^{\zeta(|a-y|)} \\
&\leq 1 + f^0(a)e^{\zeta(|a-y|)} \stackrel{\leq M}{=} \\
&\leq 1 + \underbrace{S(f^0)}_{=f(x)} \\
&\leq (1 + f(x)) \underbrace{e^{\zeta(|x-y|)}}_{\geq 1}.
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a $1 + g(y) \leq (1 + f(x))e^{\zeta(|x-y|)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et ceci pour tout $y \in B(a, m')$.

De plus, comme pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $(1 + \underbrace{f(x)}_{\geq 0}) \underbrace{e^{\zeta(|x-y|)}}_{\geq 1} \geq 1$, on a donc bien

$$1 + \max\{0, g(y)\} \leq (1 + f(x))e^{\zeta(|x-y|)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

— Par ailleurs, pour tout $y \in \mathbb{R}^d \setminus B(a, m')$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$1 + \underbrace{g(y)}_{=0} = 1 \leq (1 + \underbrace{f(x)}_{\geq 0}) \underbrace{e^{\zeta(|x-y|)}}_{\geq 1}.$$

Au final, on a donc bien $1 + \max\{0, g(y)\} \leq (1 + f(x))e^{\zeta(|x-y|)}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, i.e. $(f, g) \in \mathcal{D}_\infty$.

Bien sûr, pour tout $x \in B(a, m)$, on a $f(x) = f^1(x) = \underbrace{\chi(x)}_{=1} f^0(x) + \underbrace{(1 - \chi(x))S(f^0)}_{=0} = f^0(x)$ et $g(x) = g^1(x) = \underbrace{\chi(x)}_{=1} g^0(x)$.

□

Corollaire 2-1. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soient $m, m', M \in \mathbb{R}$ tels que $0 < 2m < 2m' < M$, et soit un couple $(f^0, g^0) \in \mathcal{D}_M$. Alors il existe un couple $(f, g) \in \mathcal{D}_\infty$ tel que :

- $f|_{B(a, m)} = f^0|_{B(a, m)}$ et $g|_{B(a, m)} = g^0|_{B(a, m)}$.
- f et g sont toutes deux constantes sur $\mathbb{R}^d \setminus B(a, m')$: plus précisément, g est nulle sur cet ensemble et f y est égale à $S(f^0) = e^{\zeta(M)} \sup_{\overline{B(a, m')}} |f^0|$.
- Pour tout $x \in B(a, m')$, on a $f(x) \leq S(f^0)$.
- Si $g^0 \geq 0$, alors $g \geq 0$.

Preuve : Il suffit de remarquer que $(f^0|_{\overline{B(a, M/2)}}, g^0|_{\overline{B(a, M/2)}}) \in \mathcal{D}_{a, M}^{res}$, puis d'appliquer le lemme 2-3 à ce même couple.

□

2.4 Existence d'une solution si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ est non vide

On rappelle l'énoncé du théorème de Rademacher auquel nous ferons régulièrement appel dans ce document :

Théorème 2-2 (Théorème de Rademacher [11] p.81). Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}$) une fonction localement lipschitzienne. Alors f est \mathcal{L}^d -presque partout Fréchet-différentiable (et sa différentielle au sens de Fréchet coïncide avec sa différentielle au sens des distributions).

On rappelle que la mesure μ_0 est par hypothèse à support compact. L'espace $L^{d, M}$ est muni de la distance d_∞ , défini par $d_\infty(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in [0, 1]} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$ pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in L^{d, M}$.

Lemme 2-5. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, i.e. une fonction réelle continue sur \mathbb{R}^d à support compact. Soient $a \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$ tels que $\text{Supp}(f) \subset B(a, r)$. Soit γ_a le chemin de $L^{d, M}$ constant et égal à a , i.e. $\gamma_a \equiv a$.

Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\text{Supp}(f \circ \pi_t) \subset \overline{B_{d_\infty}(\gamma_a, r + M)}$.

Preuve : Soit $\gamma \in L^{d,M} \setminus \overline{B_{d_\infty}(\gamma_a, r + M)}$. Par continuité de la fonction $t \mapsto |\gamma(t) - a|$ sur $[0, 1]$ (donc avec image compact), il existe $t_a \in [0, 1]$ tel que $d_\infty(\gamma, \gamma_a) = |\gamma(t_a) - a|$. De plus, la fonction γ étant M -lipschitzienne, on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$|\gamma(t) - a| \geq \underbrace{|\gamma(t_a) - a|}_{=d_\infty(\gamma, \gamma_a)} - \underbrace{|\gamma(t) - \gamma(t_a)|}_{\leq M|t-t_a|} \geq \underbrace{d_\infty(\gamma, \gamma_a)}_{> r+M} - \underbrace{M|t-t_a|}_{\geq -M} > r + M - M = r, \quad (2-6)$$

i.e. $\gamma(t) \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B(a, r)}$. On a donc $0 = g(\gamma(t)) = (g \circ \pi_t)(\gamma)$, et ceci pour tout $\gamma \in L^{d,M} \setminus \overline{B_{d_\infty}(\gamma_a, r + M)}$: d'où $\text{Supp}(f \circ \pi_t) \subset \overline{B_{d_\infty}(\gamma_a, r + M)}$. □

Lemme 2-6. Soient $a \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$ tels que $\text{Supp}(\mu_0) \subset B(a, r)$. Soit γ_a le chemin de $L^{d,M}$ constant et égal à a , i.e. $\gamma_a \equiv a$.

Alors $\text{Supp}(\omega) \subset \overline{B_{d_\infty}(\gamma_a, r + M)}$ pour tout $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$.

Preuve : Soit $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$. Soit $\gamma \in L^{d,M} \setminus B_{d_\infty}(\gamma_a, r + M)$. En procédant au même calcul que dans la preuve du lemme 2-5, à savoir la relation (2-6), on a alors $|\gamma(t) - a| > r$, i.e. $\gamma(t) \notin \overline{B(a, r)}$.

Le chemin γ vit donc entièrement en dehors de la boule $B(a, r)$ dans \mathbb{R}^d . En particulier, $\gamma(0) \notin B(a, r)$, i.e. $\pi_0(\gamma) \notin B(a, r)$. Ainsi $L^{d,M} \setminus B_{d_\infty}(\gamma_a, r + M) \subset \pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus B(a, r))$. Ainsi :

$$\omega(L^{d,M} \setminus B_{d_\infty}(\gamma_a, r + M)) \leq \omega(\pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus B(a, r))) = (\pi_0 \# \omega)(\mathbb{R}^d \setminus B(a, r)) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d \setminus B(a, r)) \leq \mu_0(\mathbb{R}^d \setminus B(a, r)) = 0,$$

D'où $\text{Supp}(\omega) \subset B_{d_\infty}(\gamma_a, r + M)$. □

Lemme 2-7. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et croissante. Soit la fonction $L : (L^{d,M}, d_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $\gamma \in L^{d,M}$ par $L(\gamma) = \int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \frac{1}{n}$ et on définit la fonction $L_n : (L^{d,M}, d_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $\gamma \in L^{d,M}$ par

$$L_n(\gamma) = \int_0^{1-\tau_n} \zeta\left(\left|\frac{\gamma(s+\tau_n) - \gamma(s)}{\tau_n}\right|\right) ds = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0, 1-\tau_n]}(s) \zeta\left(\left|\frac{\gamma(s+\tau_n) - \gamma(s)}{\tau_n}\right|\right) ds.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction L_n est continue (donc borélienne). De plus, la suite de fonctions boréliennes $(L_n)_n$ converge simplement vers la fonction L .

La fonction L est donc en particulier borélienne (l'image réciproque par L de tout borélien de \mathbb{R} est ainsi un borélien de $(L^{d,M}, d_\infty)$).

Preuve : Soit $(\gamma_k)_k$ une suite de chemins de $L^{d,M}$ convergeant vers un chemin $\gamma \in L^{d,M}$ pour la distance d_∞ (convergence uniforme sur $[0, 1]$). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $s \in [0, 1 - \tau_n]$, on a $|\gamma_k(s + \tau_n) - \gamma_k(s)| \leq M\tau_n$, d'où

$$\zeta\left(\left|\frac{\gamma_k(s+\tau_n) - \gamma_k(s)}{\tau_n}\right|\right) \leq \zeta(M).$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, comme $\gamma_k(s + \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma(s + \tau_n)$ et $\gamma_k(s) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma(s)$ on a

$$\zeta\left(\left|\frac{\gamma_k(s+\tau_n) - \gamma_k(s)}{\tau_n}\right|\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta\left(\left|\frac{\gamma(s+\tau_n) - \gamma(s)}{\tau_n}\right|\right)$$

pour tout $s \in [0, 1 - \tau_n]$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a

$$L_n(\gamma_k) = \int_0^{1-\tau_n} \zeta\left(\left|\frac{\gamma_k(s+\tau_n) - \gamma_k(s)}{\tau_n}\right|\right) ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1-\tau_n} \zeta\left(\left|\frac{\gamma(s+\tau_n) - \gamma(s)}{\tau_n}\right|\right) ds = L_n(\gamma).$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction L_n est continue et donc borélienne. Par ailleurs, pour tout chemin $\gamma \in L^{d,M}$:

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $s \in [0, 1 - \tau_n]$, on a $|\gamma(s + \tau_n) - \gamma(s)| \leq M\tau_n$. Ainsi, pour tout $s \in [0, 1]$, et comme la fonction ζ est croissante, on a

$$\mathbb{1}_{[0, 1-\tau_n]}(s) \zeta\left(\left|\frac{\gamma(s+\tau_n) - \gamma(s)}{\tau_n}\right|\right) \leq \zeta(M).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et bien sûr pour \mathcal{L} -presque tout $s \in [0, 1]$ (en lesquels γ est dérivable, ce qui est le cas presque partout d'après le théorème de Rademacher 2-2), on a (du fait de la continuité de ζ) :

$$\mathbb{1}_{[0,1-\tau_n]}(s)\zeta\left(\left|\frac{\gamma(s+\tau_n)-\gamma(s)}{\tau_n}\right|\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(s)\zeta(|\gamma'(s)|).$$

Par le théorème de convergence dominée sous le signe intégral, on a donc $L_n(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L(\gamma)$ pour tout $\gamma \in L^{d,M}$, autrement dit la suite de fonctions boréliennes $(L_n)_n$ converge simplement vers la fonction L : celle-ci est donc également borélienne. □

Définition 2-10. On définit IntLin l'ensemble des interpolations linéaires dans \mathbb{R}^d , c'est à dire tels que $\gamma(t) = (1-t)\gamma(0) + t\gamma(1)$ pour tout $t \in [0, 1]$

On définit également le sous-ensemble $\mathcal{M}_+(\text{IntLin}) \subset \mathcal{M}_+(L^{d,M})$ des mesures $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$ à support dans IntLin , c'est à dire pour lesquelles $\gamma \in \text{IntLin}$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$.

Lemme 2-8. l'ensemble IntLin est fermé dans $(L^{d,M}, d_\infty)$.

Preuve : Soit $(\gamma_n)_n$ une suite de chemins de IntLin convergeant vers un chemin $\gamma \in L^{d,M}$ pour la distance d_∞ , i.e. convergeant uniformément, et donc simplement, vers γ . Autrement dit, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\gamma_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma(t)$. Par ailleurs, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\gamma_n(t) = (1-t)\gamma_n(0) + t\gamma_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (1-t)\gamma(0) + t\gamma(1)$, d'où $\gamma(t) = (1-t)\gamma(0) + t\gamma(1)$ par unicité de la limite. On a donc bien $\gamma \in \text{IntLin}$. □

Définition 2-11.

- On définit l'opérateur $\Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow (L^{d,M}, d_\infty)$ par $\Gamma(x, y) = \gamma_{x,y}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, où $\gamma_{x,y}$ représente le chemin d'interpolation linéaire entre x et y , i.e. $\gamma_{x,y}(t) = (1-t)x + ty$ pour tout $t \in [0, 1]$. On a bien sûr $\Gamma(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \subset \text{IntLin}$.
- Pour toute mesure $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$, on définit la mesure $\omega_\Gamma = [\Gamma \circ (\pi_0, \pi_1)] \# (e^{\zeta \circ (|\pi_1 - \pi_0| - L\omega)})$, où la fonction L est définie dans l'énoncé du lemme 2-7, et est borélienne sur $(L^{d,M}, d_\infty)$ d'après ce même lemme.

Lemme 2-9. L'opérateur Γ est continu (pour la topologie induite par la norme dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et par la distance d_∞ sur $L^{d,M}$).

Preuve : En effet, pour tous couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a

$$|\Gamma(x_2, y_2)(t) - \Gamma(x_1, y_1)(t)| = |\gamma_{x_2, y_2}(t) - \gamma_{x_1, y_1}(t)| \leq (1-t)|x_2 - x_1| + t|y_2 - y_1| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

pour tout $t \in [0, 1]$, d'où $d_\infty(\Gamma(x_1, y_1), \Gamma(x_2, y_2)) = \sup_{t \in [0, 1]} |\Gamma(x_2, y_2)(t) - \Gamma(x_1, y_1)(t)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. □

Lemme 2-10. Soit $\zeta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, convexe, croissante et vérifiant $\zeta(0) = 0$. Alors pour tout $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ (si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ est non vide), on a $\omega_\Gamma \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ et $\mathcal{K}(\omega_\Gamma) \leq \mathcal{K}(\omega)$ (plus précisément $\mu_{\omega_\Gamma}^0 \leq \mu_\omega^0$).

Preuve : Remarquons que pour tout $\gamma \in L^{d,M}$, et tout $t \in [0, 1]$, on a $\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma))(t) = (1-t)\gamma(0) + t\gamma(1)$ (le chemin $\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma))$ est donc en particulier dérivable sur $[0, 1]$). On a notamment :

- $\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma))' = \gamma(1) - \gamma(0)$, d'où

$$L(\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma))) = \zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|).$$

- $\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma))(0) = \gamma(0)$.
- $\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma))(1) = \gamma(1)$.

$\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$. Montrons que $\omega_\Gamma \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$:

- Pour toute fonction $g \in C(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu_{\omega_\Gamma}^1(x) \int_{L^{d,M}} g(\gamma(1)) e^{-L(\gamma)} d\omega_\Gamma(\gamma) \\
&= \int_{L^{d,M}} \underbrace{g(\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma)) (1))}_{=g(\gamma(1))} \underbrace{e^{-L(\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma)))} e^{\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|) - L(\gamma)}}_{=e^{-\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|)}} d\omega(\gamma) \\
&= \int_{L^{d,M}} g(\gamma(1)) e^{-\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)} e^{\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) - L(\gamma)} d\omega(\gamma) \\
&= \int_{L^{d,M}} g(\gamma(1)) e^{-L(\gamma)} d\omega(\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu_\omega^1(x),
\end{aligned}$$

et ceci pour tout $g \in C(\mathbb{R}^d)$, d'où $\mu_{\omega_\Gamma}^1 = \mu_\omega^1 = \mu_1$ (car $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$).

— La fonction ζ étant convexe et croissante sur \mathbb{R}_+ , on a (par inégalité de Jensen) :

$$\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) = \zeta\left(\left|\int_0^1 \gamma'(s) ds\right|\right) \leq \zeta\left(\int_0^1 |\gamma'(s)| ds\right) \leq \int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds = L(\gamma).$$

d'où $e^{\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|) - L(\gamma)} \leq 1$. Ainsi, pour toute fonction $f \in C^+(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\omega_\Gamma}^0(x) \int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) d\omega_\Gamma(\gamma) \\
&= \int_{L^{d,M}} \underbrace{f(\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma)) (0))}_{=f(\gamma(0))} \underbrace{e^{\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|) - L(\gamma)}}_{\leq 1} d\omega(\gamma) \\
&\leq \int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) d\omega(\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^0(x),
\end{aligned}$$

et ceci pour tout $f \in C^+(\mathbb{R}^d)$, d'où $\mu_{\omega_\Gamma}^0 \leq \mu_\omega^0 \leq \mu_0$.

On a donc bien $\omega_\Gamma \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ avec $\mu_{\omega_\Gamma}^0 \leq \mu_\omega^0$, d'où $\mathcal{K}(\omega_\Gamma) \leq \mathcal{K}(\omega)$.

Pour finir, soit une fonction $F : L^{d,M} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $(L^{d,M}, d_\infty)$ telle que $\text{Supp}(f) \subset L^{d,M} \setminus \text{IntLin}$ (inclusion stricte car $L^{d,M} \setminus \text{IntLin}$ est ouvert dans $(L^{d,M}, d_\infty)$ d'après le lemme 2-8), d'où $F(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \text{IntLin}$. On a alors

$$\int_{L^{d,M}} F(\gamma) d\omega_\Gamma(\gamma) = \int_{L^{d,M}} \underbrace{F(\Gamma(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma)))}_{=0} e^{\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|) - L(\gamma)} d\omega(\gamma) = 0,$$

et ceci quelle que soit F telle que définie ci-dessus. Autrement dit $\text{Supp}(\omega_\Gamma) \subset \text{IntLin}$, i.e. $\omega_\Gamma \in \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$. □

Lemme 2-11. Soit $\zeta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, convexe, croissante et vérifiant $\zeta(0) = 0$.

Alors, en munissant $\mathcal{M}(L^{d,M})$ de la norme issue de la variation totale^a, l'ensemble $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ est fermé dans $\mathcal{M}(L^{d,M})$ ^b pour la topologie faible-*

Preuve : Supposons donc que $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ soit non vide (dans le cas contraire le résultat est trivial) : dans ce cas l'ensemble $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ est également non vide par le lemme 2-10.

Soit $(\omega^n)_n$ une suite de mesures appartenant à $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ convergeant faiblement-* dans $\mathcal{M}(L^{d,M})$ vers une mesure ω .

— Comme $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin}) \subset \mathcal{M}_+(L^{d,M})$, et que l'ensemble $\mathcal{M}_+(L^{d,M})$ est fermé dans $\mathcal{M}(L^{d,M})$ pour la topologie faible-* d'après le lemme 2-1, d'où $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$.

a. I.e. la norme $\omega \mapsto |\omega|(L^{d,M})$.

b. L'ensemble $\mathcal{M}(L^{d,M})$ muni de la variation totale étant le dual topologique de l'espace $(C_0(L^{d,M}), \|\cdot\|_\infty)$ d'après le théorème 2-1 (en prenant $(X, d) = (L^{d,M}, d_\infty)$, qui est un espace métrique propre d'après le lemme B-6 (en annexe), et donc notamment localement compact et σ -compact).

- Soit une fonction $F : L^{d,M} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive sur $(L^{d,M}, d_\infty)$ telle que $\text{Supp}(f) \subset L^{d,M} \setminus \text{IntLin}$ (inclusion stricte car $L^{d,M} \setminus \text{IntLin}$ est ouvert dans $(L^{d,M}, d_\infty)$ d'après le lemme 2-8), d'où $F(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \text{IntLin}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(\gamma) = 0$ pour ω^n -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, d'où

$$0 = \int_{L^{d,M}} \underbrace{F(\gamma)}_{=0} d\omega^n(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{L^{d,M}} F(\gamma) d\omega(\gamma),$$

et donc $\int_{L^{d,M}} F(\gamma) d\omega(\gamma) = 0$ et ceci quelle que soit F telle que définit ci-dessus. Autrement dit $\text{Supp}(\omega) \subset \text{IntLin}$, i.e. $\omega \in \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$.

- Soit $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ (fonction continue à support compact sur \mathbb{R}^d pour la topologie canonique, donc bornée) : la fonction $g \circ \pi_1$ est donc également continue et bornée sur l'espace $L^{d,M}$ muni de la distance d_∞ ^a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds = \zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) = \zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)$ pour ω^n -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$ (du fait que $\omega^n \in \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$), et ainsi

$$\int_{L^{d,M}} (g \circ \pi_1)(\gamma) e^{-\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)} d\omega^n(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu_{\omega^n}^1(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu_1(x).$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction π_t est continue (et même 1-lipschitzienne) de $(L^{d,M}, d_\infty)$ dans \mathbb{R}^d (muni de la norme euclidienne). Ainsi, la fonction $\gamma \mapsto (g \circ \pi_1)(\gamma) e^{-\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)}$ est également continue sur $(L^{d,M}, d_\infty)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu_1(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu_{\omega^n}^1(x) \\ &= \int_{L^{d,M}} (g \circ \pi_1)(\gamma) e^{-\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)} d\omega^n(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{L^{d,M}} (g \circ \pi_1)(\gamma) e^{-\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)} d\omega(\gamma), \end{aligned}$$

et donc $\int_{L^{d,M}} (g \circ \pi_1)(\gamma) e^{-\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)} d\omega(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu_1(x)$.

Or, du fait que $\omega \in \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, on a de même que plus haut $\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds = \zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) = \zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu_1(x) = \int_{L^{d,M}} (g \circ \pi_1)(\gamma) e^{-\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)} d\omega(\gamma) = \int_{L^{d,M}} (g \circ \pi_1)(\gamma) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\mu_\omega^1(x),$$

et ceci pour toute fonction $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$. On a donc bien $\mu_\omega^1 = \mu_1$.

- Soit $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$ (fonction continue positive à support compact sur \mathbb{R}^d , donc finie) : la fonction $f \circ \pi_0$ est donc également continue, positive et bornée sur $(L^{d,M}, d_\infty)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{L^{d,M}} (f \circ \pi_0)(\gamma) d\omega^n(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\omega^n}^0(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x),$$

et ainsi,

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\omega^n}^0(x)}_{\leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x)} = \int_{L^{d,M}} (f \circ \pi_0)(\gamma) d\omega^n(\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{L^{d,M}} (f \circ \pi_0)(\gamma) d\omega(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^0(x),$$

d'où $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^0(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x)$, et ceci pour tout $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$. On a donc bien $\mu_\omega^0 \leq \mu_0$.

Ainsi, $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$. L'ensemble $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ est donc fermé pour la topologie faible-* dans $\mathcal{M}_+(L^{d,M})$. □

Lemme 2-12. Soit $\zeta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ est non vide, alors $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ est borné pour la norme de variation totale : plus précisément, $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \subset \overline{B(0, \mu_0(\mathbb{R}^d))}$.

Preuve : En effet, pour tout $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, on a

$$|\omega|(L^{d,M}) = \omega(L^{d,M}) = \omega(\pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d)) = (\pi_0 \# \omega)(\mathbb{R}^d) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) \leq \mu_0(\mathbb{R}^d). \quad \square$$

a. Car les fonctions π_t sont 1-lipschitzienne sur $L^{d,M}$ muni de la distance d_∞ .

Proposition 2-1. Soit $\zeta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, convexe, croissante et vérifiant $\zeta(0) = 0$. Si l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ est non vide, alors il existe une mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ minimisant l'énergie \mathcal{K} sur $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$.

Preuve : Soit $(\omega^n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, minimisante pour l'énergie \mathcal{K} , i.e. $\mathcal{K}(\omega^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \geq 0$.

D'après le lemme 2-10, la suite $(\omega_\Gamma^n)_n$ est également une suite d'éléments de $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ minimisante pour l'énergie \mathcal{K} , dont tous les termes appartiennent de plus à l'ensemble $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$.

D'après le lemme 2-12, la suite $(\omega_\Gamma^n)_n$ est bornée pour la variation totale. Par ailleurs, d'après le théorème 2-1, l'ensemble $\mathcal{M}(L^{d,M})$ des mesures de Radon finies (signées) sur $(L^{d,M}, d_\infty)$, muni de la norme de variation totale est le dual topologique de l'espace de Banach $(C_0(L^{d,M}), \|\cdot\|_\infty)$ ^a.

Ainsi, d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, il existe une mesure de Radon finie (signée) ω sur $(L^{d,M}, d_\infty)$ et une sous-suite $(\omega_\Gamma^{\varphi(n)})_n$ extraite de $(\omega_\Gamma^n)_n$ convergeant faiblement-* vers une ω .

D'après le lemme 2-11, l'espace $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ dans $\mathcal{M}_+(L^{d,M})$ pour la topologie faible-* : on a donc $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$.

Pour finir, on a

$$\mathcal{K}(\omega_\Gamma^{\varphi(n)}) = \int_{L^{d,M}} d\omega_\Gamma^{\varphi(n)}(\gamma) - \mu_1(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{L^{d,M}} d\omega(\gamma) - \mu_1(\mathbb{R}^d) = \mu_\omega^0 - \mu_1(\mathbb{R}^d) = \mathcal{K}(\omega),$$

d'où, par unicité de la limite, $\mathcal{K}(\omega) = \inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}$.

□

3 Aspect "bang-bang" de la mesure de sélection de départ μ_ω^0

Le but de cette section est de démontrer que dans le cas où

- $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et strictement croissante (donc coercive) telle que $\zeta(0) = 0$ (donc continue^b).
- Les mesures μ_0 et μ_1 sont à supports disjoints et que μ_0 est absolument continue^c par rapport à la mesure de Lebesgue,

si ω est une mesure sur $L^{d,M}$ minimisant l'énergie \mathcal{K} , alors la mesure de sélection de la masse de départ μ_ω^0 est "bang-bang" par rapport à la mesure μ_0 , autrement dit "on prend tout, ou on ne prend rien".

Plus précisément, nous souhaitons montrer la proposition suivante :

Proposition 3-1. On suppose que $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et strictement croissante (donc coercive) telle que $\zeta(0) = 0$ (donc continue). On suppose que μ_0 est une mesure positive finie et est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et que $\text{Supp}(\mu_0) \cap \text{Supp}(\mu_1) = \emptyset$. Supposons de plus que $\text{argmin}_{\varpi \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\varpi) \neq \emptyset$.

Alors, pour toute mesure $\omega \in \text{argmin}_{\varpi \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\varpi)$, il existe un borélien $V_\omega \subset \mathbb{R}^d$ tel que μ_ω^0 ait une densité de $\mathbb{1}_{V_\omega}$ par rapport à la mesure μ_0 . Autrement dit :

$$\mu_\omega^0 = \mathbb{1}_{V_\omega} \mu_0.$$

Avant de prouver la proposition 3-1, nous allons montrer le résultat intermédiaire de la sous-section qui suit.

3.1 Non-optimalité pour une mesure μ_ω^0 non "bang-bang" par rapport à μ_0 entre deux ensembles de même volume

Proposition 3-2. On suppose que $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et strictement croissante (donc coercive) telle que $\zeta(0) = 0$ (donc continue). On suppose que μ_0 est une mesure positive finie et est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (notons ρ_0 sa densité par rapport à Lebesgue^d : comme μ_0 est finie, on a donc $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$), et que $\text{Supp}(\mu_0) \cap \text{Supp}(\mu_1) = \emptyset$. Soit $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$: μ_ω^0 est donc également absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (notons ρ_ω^0 sa densité par rapport à Lebesgue).

On suppose qu'il existe deux compacts de \mathbb{R}^d , Ω_1 et Ω_2 , disjoints et de même volume non nul (i.e. $\mathcal{L}^d(\Omega_1) = \mathcal{L}^d(\Omega_2) > 0$), tels que

a. Le théorème 2-1 s'applique bien à notre cas : en effet, d'après le lemme B-6 (en annexe), l'espace métrique $(L^{d,M}, d_\infty)$ est propre, et par conséquent localement compact et σ -compact.

b. En effet, ζ étant convexe, elle est continue sur \mathbb{R}_{++} avec de plus $0 = \zeta(0) \geq \lim_{0+} \zeta \geq 0$, i.e. $0 = \zeta(0) = \lim_{0+} \zeta$.

c. Voir la définition B-4 en dans l'annexe B.

d. Dont l'existence est donnée par le théorème B-3 de Radon-Nikodym.

- $\Omega_1 = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d)$ et $\Omega_2 = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d)$.
- $\inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| - \sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| > 0$, où μ'_1 est la mesure image en $t = 1$ de Ω_1 par ω , c'est à dire que $\mu'_1 = \pi_1 \# \omega_{trans}$, où $\omega_{trans} = \mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} \omega$ (i.e. pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$, $\mu'_1(A) = \omega(\pi_0^{-1}(\Omega_1) \cap \pi_1^{-1}(A))$).
- $\rho_\omega^0(x) > 0$ pour \mathcal{L}^d -presque tout $x \in \Omega_1$.
- $\mu_\omega^0(\Omega_2) < \mu_0(\Omega_2)$.

Alors il existe $\omega' \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ ω telle que $\mathcal{K}(\omega') < \mathcal{K}(\omega)$ (ω n'est donc pas optimale pour l'énergie \mathcal{K}).

Divers définitions et résultats utilisés dans la preuve qui suit se trouvent dans l'annexe B.

Preuve de la proposition 3-2 : Pour montrer que sous ces hypothèses, la mesure ω n'est pas optimale pour l'énergie \mathcal{K} , nous allons construire une mesure $\omega_T \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ telle que $\mathcal{K}(\omega_T) < \mathcal{K}(\omega)$.

En remarque préliminaire, constatons que ω est une mesure finie sur $L^{d,M}$. En effet, $L^{d,M} = \pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d)$, et ainsi

$$\omega(L^{d,M}) = \omega(\pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d)) = (\pi_0 \# \omega)(\mathbb{R}^d) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) \leq \mu_0(\mathbb{R}^d) < +\infty.$$

Soit ϕ un potentiel convexe de transport optimal de la mesure $\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d$ sur la mesure $\mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d$ tel que défini par le théorème de Brenier [33], i.e. tel que $\nabla \phi$ soit un plan de transport optimal entre ces deux mesures (optimal pour le coût $|\cdot|^2$). En particulier, on a

$$\nabla \phi \# (\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d) = \mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d. \quad (3-1)$$

(Notons que c'est d'ailleurs le seul point qui nous intéresse : le fait que ce plan de transport soit optimal pour un coût quadratique n'a aucun intérêt pour notre problème.)

D'après ce même théorème, on a $\overline{\nabla \phi(\text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d))} = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d)$, d'où $\overline{\nabla \phi(\Omega_1)} = \Omega_2$ (rappelons que sous les hypothèses de l'énoncé, on a $\Omega_1 = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d)$ et $\Omega_2 = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d)$).

De plus, d'après [17] (proposition 3.2-3), on peut considérer que ϕ est fini sur \mathbb{R}^d , et donc localement lipschitzienne sur \mathbb{R}^d , et admet un minimum global sur \mathbb{R}^d . D'après le théorème 2-2 (théorème de Rademacher) ϕ est donc différentiable sur \mathcal{L}^d -presque tout \mathbb{R}^d .

Il faut comprendre l'équation (3-1) au sens suivant : pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$, on a $\mathcal{L}^d(\Omega_1 \cap \nabla \phi^{-1}(A)) = \mathcal{L}^d(\Omega_2 \cap A)$, avec $\nabla \phi^{-1}(A) = \{x \in \text{Di}, \nabla \phi(x) \in A\} = \text{Di} \cap \partial \phi^*(x)$ où Di représente l'ensemble des points de \mathbb{R}^d en lesquels ϕ est différentiable^a.

On définit l'opérateur borélien $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ par $T(x) = \nabla \phi(x)$ pour tout $x \in \text{Di}$, et $T(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \text{Di}$. Pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$, on a donc

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d)(T^{-1}(A)) &= \mathcal{L}^d(\Omega_1 \cap T^{-1}(A)) = \mathcal{L}^d(\Omega_1 \cap \text{Di} \cap T^{-1}(A)) + \mathcal{L}^d(\Omega_1 \setminus \text{Di} \cap T^{-1}(A)) \\ &= \mathcal{L}^d(\Omega_1 \cap \nabla \phi^{-1}(A)) + \underbrace{\mathcal{L}^d(\Omega_1 \setminus \text{Di} \cap T^{-1}(A \cap \{0\}))}_{\leq \mathcal{L}^d(\Omega_1 \setminus \text{Di}) = 0} \\ &= \mathcal{L}^d(\Omega_1 \cap \nabla \phi^{-1}(A)) = \mathcal{L}^d(\Omega_2 \cap A) \\ &= (\mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d)(A). \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $T \# (\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d) = \mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d$.

Pour ce qui suit, nous aurons de nouveau besoin de faire appel à l'opérateur Γ (voir la définition 2-11). Nous rappelons ici sa définition et ses propriétés :

- L'opérateur $\Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow (L^{d,M}, d_\infty)$ défini par $\Gamma(x, y) = \gamma_{x,y}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, où $\gamma_{x,y}$ représente le chemin d'interpolation linéaire entre x et y , i.e. $\gamma_{x,y}(t) = (1-t)x + ty$ pour tout $t \in [0, 1]$.

L'opérateur Γ est continu (voir le lemme 2-9) : en effet, pour tous couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a

$$|\Gamma(x_2, y_2)(t) - \Gamma(x_1, y_1)(t)| = |\gamma_{x_2, y_2}(t) - \gamma_{x_1, y_1}(t)| \leq (1-t)|x_2 - x_1| + t|y_2 - y_1| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

pour tout $t \in [0, 1]$, d'où $d_\infty(\Gamma(x_1, y_1), \Gamma(x_2, y_2)) = \sup_{t \in [0, 1]} |\Gamma(x_2, y_2)(t) - \Gamma(x_1, y_1)(t)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

Nous aurons besoin par ailleurs de définir les fonctions, densités et mesures suivantes :

- La fonction $\theta_T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\theta_T = \frac{\min\{\rho_\omega^0, \rho_0 \circ T - \rho_\omega^0 \circ T\}}{\rho_\omega^0} \mathbb{1}_{\Omega_1}.$$

a. Di est un borélien et, la fonction ϕ étant différentiable presque partout, on a donc $\mathcal{L}^d(\mathbb{R}^d \setminus \text{Di}) = 0$.

- Notons qu'étant donné que $\rho_\omega^0(x) > 0$ pour \mathcal{L}^d -presque tout $x \in \Omega_1$, on a $\theta_T(x) \leq 1$ pour \mathcal{L}^d -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ (d'où $\theta_T \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$). De plus, d'après le lemme B-4, on a $\rho_0 \circ T, \rho_\omega^0 \circ T \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^d)$.
- La fonction/densité borélienne $\sigma_T : L^{d,M} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\sigma_T = \theta_T \circ \pi_0$, avec $\pi_0 : L^{d,M} \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par $\pi_0(\gamma) = \gamma(0)$ (de même, pour la suite, $\pi_1(\gamma) = \gamma(1)$).
 - La fonction borélienne $h_T : L^{d,M} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h_T(\gamma) = \exp \left(- \int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds + \zeta(|T(\gamma(0)) - \gamma(1)|) \right) = e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} e^{\zeta(|T(\gamma(0)) - \gamma(1)|)}.$$

En effet, la fonction $\gamma \mapsto e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}$ est bien borélienne par le lemme 2-7. Par ailleurs, la fonction $(x, y) \mapsto \zeta(|T(x) - y|)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ étant également borélienne (T l'étant par définition), et par continuité de la fonction exponentielle, la fonction $(x, y) \mapsto e^{\zeta(|T(x) - y|)}$ l'est également. Pour finir, par le lemme B-7, la fonction $\gamma \mapsto (\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma)) = (\gamma(0), \gamma(1))$ est continue de $(L^{d,M}, d_\infty)$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, donc borélienne : h_T est donc bien borélienne.

La fonction h_T représente la consommation initiale en $t = 1$ en partant de $\gamma(0)$ (i.e. $e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}$) rehaussée du taux de consommation nécessaire au nouveau point de départ $T(\gamma(0))$ (i.e. $e^{\zeta(|T(\gamma(0)) - \gamma(1)|)}$).

Définissons l'ensemble $V_{\mu'_1} = \{\gamma \in \pi_0^{-1}(\Omega_1), \overbrace{\gamma(1)}{=\pi_1(\gamma)} \notin \text{Supp}(\mu'_1)\}$. On a donc $\pi_1(V_{\mu'_1}) \subset \mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu'_1)$ et $\omega_{trans}(V_{\mu'_1}) = \omega(V_{\mu'_1})$ (car $V_{\mu'_1} \subset \pi_0^{-1}(\Omega_1)$). Ainsi :

$$\omega(V_{\mu'_1}) = \omega_{trans}(V_{\mu'_1}) \leq \omega_{trans}[\pi_1^{-1}(\pi_1(V_{\mu'_1}))] = (\pi_1 \# \omega_{trans})(\pi_1(V_{\mu'_1})) = \mu'_1(\pi_1(V_{\mu'_1})) = 0.$$

Ainsi, $\omega(V_{\mu'_1}) = 0$, i.e. pour ω -presque tout $\gamma \in \pi_0^{-1}(\Omega_1)$, on a $\gamma(1) \in \text{Supp}(\mu'_1)$.

Par ailleurs, remarquons que comme la fonction ζ est par hypothèse croissante, on a

$$\zeta(|x - y|) \geq \zeta \left(\inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| \right)$$

pour tout $(x, y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)$, d'où

$$\inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} \zeta(|x - y|) \geq \zeta \left(\inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| \right).$$

De même, on a $\zeta(|x - y|) \leq \zeta \left(\sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| \right)$ pour tout $(x, y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)$, d'où

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} \zeta(|x - y|) \leq \zeta \left(\sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| \right).$$

On a donc

$$\inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} \zeta(|x - y|) - \sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} \zeta(|x - y|) \geq \zeta \left(\inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| \right) - \zeta \left(\sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| \right).$$

Par ailleurs, comme par hypothèse on a $\inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| > \sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y|$, et comme la fonction ζ est strictement croissante, on a

$$\zeta \left(\inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| \right) > \zeta \left(\sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} |x - y| \right),$$

et ainsi

$$\inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} \zeta(|x - y|) - \sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} \zeta(|x - y|) > 0.$$

Définissons la constante $0 < K = \inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\mu'_1)} \zeta(|x - y|) - \sup_{(x,y) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\mu'_1)} \zeta(|x - y|)$. Pour tout $\gamma \in \pi_0^{-1}(\Omega_1 \cap \text{Di})$ on a $T(\gamma(0)) = \nabla \phi(\gamma(0)) \in T(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Remarquons que, comme $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$, et que

$$\omega(\pi_0^{-1}(\Omega_1 \setminus \text{Di})) = (\pi_0 \# \omega)(\Omega_1 \setminus \text{Di}) = \mu_\omega^0(\Omega_1 \setminus \text{Di}) \leq \mu_0(\Omega_1 \setminus \text{Di}).$$

Comme $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$, et comme $\mathcal{L}^d(\Omega_1 \setminus \text{Di}) = 0$, on a donc $\mu_0(\Omega_1 \setminus \text{Di}) = 0$, d'où $\omega(\pi_0^{-1}(\Omega_1 \setminus \text{Di})) = 0$: ainsi, $T(\gamma(0)) \in \Omega_2$ pour ω -presque tout $\gamma \in \pi_0^{-1}(\Omega_1)$.

On a donc $\zeta(|T(\gamma(0)) - \gamma(1)|) \leq -K + \zeta(|\gamma(0) - \gamma(1)|)$ ω -presque tout $\gamma \in \pi_0^{-1}(\Omega_1)$. De plus, comme la fonction ζ est croissante et convexe, par inégalité de Jensen, on a

$$\zeta(|\gamma(0) - \gamma(1)|) = \zeta\left(\left|\int_0^1 \gamma'(s) ds\right|\right) \leq \zeta\left(\int_0^1 |\gamma'(s)| ds\right) \leq \int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds.$$

Ainsi

$$\zeta(|T(\gamma(0)) - \gamma(1)|) - \underbrace{\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}_{\leq 0} \leq -K + \zeta(|\gamma(0) - \gamma(1)|) - \int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds \leq -K, \quad (3-2)$$

i.e. $0 < h_T(\gamma) \leq e^{-K} < 1$ pour ω -presque tout $\gamma \in \pi_0^{-1}(\Omega_1)$.

— Les mesures boréliennes définies sur $(L^{d,M}, d_\infty)$:

— $\nu_T = \sigma_T \omega$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} \nu_T(L^{d,M}) &= \int_{L^{d,M}} \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) = \int_{L^{d,M}} \theta_T(\gamma(0)) d\omega(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta_T(x) d(\pi_0 \# \omega)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\theta_T(x)}_{\leq 1_{\Omega_1}(x)} d(\pi_0 \# \omega)(x) \\ &\leq \mu_\omega^0(\Omega_1) \leq \mu_0(\Omega_1) < +\infty. \end{aligned}$$

ν_T est donc une mesure borélienne finie sur $(L^{d,M}, d_\infty)$, et $\sigma_T \in L^1(L^{d,M}, \omega)$.

— $\nu_T^{dec} = [\Gamma \circ (T \circ \pi_0, \pi_1)] \# (h_T \nu_T) = (\Gamma \circ (T \circ \pi_0, \pi_1)) \# (h_T \sigma_T \omega)$. Comme $0 < h_T \leq e^{-K} < 1$, on a $h_T \sigma_T \in L^1(L^{d,M}, \omega)$, d'où le fait que $h_T \sigma_T \omega$ soit également une mesure borélienne finie sur $(L^{d,M}, d_\infty)$. Les fonctions Γ , π_0 et π_1 étant continues, et la fonction T étant borélienne, la fonction $\Gamma \circ (T \circ \pi_0, \pi_1)$ est également borélienne de $(L^{d,M}, d_\infty)$ dans $(L^{d,M}, d_\infty)$ est également borélienne et la mesure ν_T^{dec} est donc bien définie (et finie).

Autrement dit :

$$\int_{L^{d,M}} F(\gamma) d\nu_T(\gamma) = \int_{L^{d,M}} F(\gamma) \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma), \quad (3-3)$$

et

$$\int_{L^{d,M}} F(\gamma) d\nu_T^{dec}(\gamma) = \int_{L^{d,M}} F(\Gamma(T(\gamma(0)), \gamma(1))) \sigma_T(\gamma) \exp\left(-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds + \zeta(|T(\gamma(0)) - \gamma(1)|)\right) d\omega(\gamma) \quad (3-4)$$

pour tout $F \in C_c(L^{d,M})$.

Passons maintenant à la preuve du résultat en question, en procédant en trois points : Nous allons montrer dans les deux premiers points que $\mu_{\omega_T}^1 = \mu_1$ et que $\mu_{\omega_T}^0 \leq \mu_0$, et donc que l'on a bien $\omega_T \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, puis dans le troisième point que $\mathcal{K}(\omega_T) < \mathcal{K}(\omega)$.

— Premier point : Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda > 0$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\omega_T}^1(x) &= \int_{L^{d,M}} f(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega_T(\gamma) \\ &= \int_{L^{d,M}} f(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) - \int_{L^{d,M}} f(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\nu_T(\gamma) \\ &\quad + \int_{L^{d,M}} \underbrace{f(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}}_{=f \circ \pi_1(\gamma)} d\nu_T^{dec}(\gamma) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^1(x) - \int_{L^{d,M}} f(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) \\ &\quad + \int_{L^{d,M}} \underbrace{f(\Gamma(T(\gamma(0)), \gamma(1)))(1)}_{=(f \circ \pi_1)(\Gamma(T(\gamma(0)), \gamma(1)))} e^{-\int_0^1 |\Gamma(T(\gamma(0)), \gamma(1))'(s)| ds} h_T(\gamma) \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) \end{aligned}$$

Remarquons que :

- $\Gamma(\gamma(0), \gamma(1))(0) = \gamma(0)$,
- $\Gamma(\gamma(0), \gamma(1))(1) = \gamma(1)$
- $\Gamma(\gamma(0), \gamma(1))' = \gamma(1) - \gamma(0)$.

De même, on a également :

- $\Gamma(T(\gamma(0)), \gamma(1))(0) = T(\gamma(0))$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} f(T(x)) [\rho_0(T(x)) - \rho_\omega^0(T(x))] dx &= \int_{\mathbb{R}^d} f(T(x)) [\rho_0(T(x)) - \rho_\omega^0(T(x))] d[\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d](x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) [\rho_0(y) - \rho_\omega^0(y)] d[T\#(\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d)](y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) [\rho_0(y) - \rho_\omega^0(y)] d[\mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d](y) \\
&= \int_{\Omega_2} f(y) [\rho_0(y) - \rho_\omega^0(y)] dy.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} f(T(\gamma(0))) h_T(\gamma) \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) &\leq e^{-K} \int_{\Omega_1} f(T(x)) [\rho_0(T(x)) - \rho_\omega^0(T(x))] dx \\
&= e^{-K} \int_{\Omega_2} f(y) [\rho_0(y) - \rho_\omega^0(y)] dy \\
&= e^{-K} \left(\int_{\Omega_2} f(y) \rho_0(y) dy - \int_{\Omega_2} f(y) \rho_\omega^0(y) dy \right) \\
&= e^{-K} \left(\int_{\Omega_2} f(y) d\mu_0(y) - \int_{\Omega_2} f(y) d\mu_\omega^0(y) \right).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\omega_T}^0(x) &= \int_{L^{d,M} \setminus \pi_0^{-1}(\Omega_1)} f(\gamma(0)) d\omega(\gamma) + \int_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} f(\gamma(0)) \underbrace{(1 - \sigma_T(\gamma))}_{\leq 1} d\omega(\gamma) + \int_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} f(T(\gamma(0))) h_T(\gamma) \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) \\
&\leq \int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) d\omega(\gamma) + \int_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} f(T(\gamma(0))) h_T(\gamma) \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^0(x) + \int_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} f(T(\gamma(0))) h_T(\gamma) \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^0(x) + e^{-K} \left(\int_{\Omega_2} f(y) d\mu_0(y) - \int_{\Omega_2} f(y) d\mu_\omega^0(y) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega_2} f(x) d\mu_\omega^0(x) + \int_{\Omega_2} f(x) d\mu_\omega^0(x) + \underbrace{e^{-K} \left(\int_{\Omega_2} f(y) d\mu_0(y) - \int_{\Omega_2} f(y) d\mu_\omega^0(y) \right)}_{\substack{\leq 1 \\ \geq 0 \text{ (car } \omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1))}} \\
&\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega_2} f(x) d\mu_\omega^0(x)}_{\leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega_2} f(x) d\mu_0(x)} + \int_{\Omega_2} \cancel{f(x) d\mu_\omega^0(x)} + \int_{\Omega_2} f(y) d\mu_0(y) - \int_{\Omega_2} \cancel{f(y) d\mu_\omega^0(y)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega_2} f(x) d\mu_0(x) + \int_{\Omega_2} f(y) d\mu_0(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x).
\end{aligned}$$

(3-6)

En résumé, on a bien $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\omega_T}^0(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x)$ pour tout $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$, i.e. $\mu_{\omega_T}^0 \leq \mu_0$.

Avec le résultat du premier point (à savoir $\mu_{\omega_T}^1 = \mu_1$), on a donc bien $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$.

— Troisième point : Pour finir, montrons que le coût $\mathcal{K}(\omega_T)$ de ω_T est strictement inférieur au coût $\mathcal{K}(\omega)$ de ω .

En reprenant la décomposition $\omega_T = \omega + \nu_T - \nu_T^{dec}$ et l'équation (3-5) : on a pour tout $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$ et tout $\lambda > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\omega_T}^0(x) = \int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) d\omega(\gamma) - \int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) + \int_{L^{d,M}} \underbrace{f(\Gamma(T(\gamma(0)), \gamma(1))(0))}_{=T(\gamma(0))} \overbrace{h_T(\gamma)}^{\leq e^{-K}} \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma)$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\omega_T}^0(x) \leq \underbrace{\int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) d\omega(\gamma)}_{=\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\omega}^0(x)} - \int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) + e^{-K} \int_{L^{d,M}} f(T(\gamma(0))) \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma).$$

En prenant le cas particulier $f = 1$, on obtient l'inégalité :

$$\mu_{\omega_T}^0(\mathbb{R}^d) \leq \mu_{\omega}^0(\mathbb{R}^d) + \underbrace{(e^{-K} - 1)}_{<0} \int_{L^{d,M}} \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma).$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{L^{d,M}} \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) &= \int_{L^{d,M}} \theta_T(\gamma(0)) d\omega(\gamma) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \theta_T(x) d\mu_{\omega}^0(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \theta_T(x) \rho_{\omega}^0(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} \min\{\rho_{\omega}^0(x), \rho_0(T(x)) - \rho_{\omega}^0(T(x))\} dx. \end{aligned}$$

Distinguons les deux cas possibles :

— Si $\rho_{\omega}^0(x) \geq \rho_0(T(x)) - \rho_{\omega}^0(T(x))$ pour \mathcal{L}^d -presque tout $x \in \Omega_1$, on a $\rho_{\omega}^0(x) \geq \rho_0(T(x)) - \rho_{\omega}^0(T(x))$, d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \min\{\rho_{\omega}^0(x), \rho_0(T(x)) - \rho_{\omega}^0(T(x))\} dx &\geq \int_{\Omega_1} [\rho_0(T(x)) - \rho_{\omega}^0(T(x))] dx \\ &= \int_{\Omega_2} [\rho_0(y) - \rho_{\omega}^0(y)] dy \\ &= \int_{\Omega_2} \rho_0(y) dy - \int_{\Omega_2} \rho_{\omega}^0(y) dy \\ &= \underbrace{\mu_0(\Omega_2) - \mu_{\omega}^0(\Omega_2)}_{>0 \text{ (par hypothèse)}} > 0. \end{aligned}$$

— Sinon, s'il existe $\mathcal{O} \subset \Omega_1$ tel que $\mathcal{L}^d(\mathcal{O}) > 0$ et tel que $\rho_0(T(x)) - \rho_{\omega}^0(T(x)) \geq \rho_{\omega}^0(x)$ pour \mathcal{L}^d -presque tout $x \in \mathcal{O}$.

Comme $\rho_{\omega}^0(x) > 0$ pour \mathcal{L}^d -presque tout $x \in \mathcal{O} \subset \Omega_1$, on a $\int_{\mathcal{O}} \rho_{\omega}^0(x) dx > 0$, d'où

$$\int_{\Omega_1} \min\{\rho_{\omega}^0(x), \rho_0(T(x)) - \rho_{\omega}^0(T(x))\} dx \geq \int_{\mathcal{O}} \rho_{\omega}^0(x) dx > 0.$$

Au final, pour les deux cas, on a

$$\int_{L^{d,M}} \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma) = \int_{\Omega_1} \min\{\rho_{\omega}^0(x), \rho_0(T(x)) - \rho_{\omega}^0(T(x))\} dx > 0.$$

Ainsi,

$$\mu_{\omega_T}^0(\mathbb{R}^d) \leq \underbrace{\mu_{\omega}^0(\mathbb{R}^d) + (e^{-K} - 1) \int_{L^{d,M}} \sigma_T(\gamma) d\omega(\gamma)}_{<0} < \mu_{\omega}^0(\mathbb{R}^d).$$

ce qui nous permet de conclure : $\underbrace{\mu_{\omega_T}^0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d)}_{=\mathcal{K}(\omega_T)} < \underbrace{\mu_{\omega}^0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d)}_{=\mathcal{K}(\omega)}$, i.e. $\mathcal{K}(\omega_T) < \mathcal{K}(\omega)$.

On conclut la preuve en posant $\omega' = \omega_T$.

□

3.2 Preuve de la proposition 3-1

Avant de prouver la proposition 3-1, nous allons montrer quelques résultats intermédiaires.

Lemme 3-1. Soient $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r'_0 > 0$, et soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B(y_0, r'_0)}$. Alors on a

$$\forall y \in \overline{B(y_0, r'_0)}, |x_1 - y| > |x_2 - y| \Leftrightarrow |x_2 - x_1|^2 + 2r'_0|x_2 - x_1| - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0.$$

Autrement dit, la boule $\overline{B(y_0, r'_0)}$ se trouve entièrement (et strictement) d'un côté de l'hyperplan médian entre x_1 et x_2 , si et seulement si

$$|x_2 - x_1|^2 + 2r'_0|x_2 - x_1| - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0.$$

Preuve : En effet, pour tout $y \in \overline{B(y_0, r'_0)}$, on a

$$\begin{aligned} |x_2 - y|^2 - |x_1 - y|^2 &= \langle x_2 - x_1, x_2 + x_1 - 2y \rangle \\ &= \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 + 2(x_1 - y) \rangle \\ &= |x_2 - x_1|^2 + 2\langle x_2 - x_1, x_1 - y \rangle \\ &= |x_2 - x_1|^2 + 2\langle x_2 - x_1, y_0 - y \rangle - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, sachant que $\max_{y \in \overline{B(y_0, r'_0)}} \langle x_2 - x_1, y_0 - y \rangle = r'_0|x_2 - x_1|$, on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in \overline{B(y_0, r'_0)}, |x_1 - y| > |x_2 - y| &\Leftrightarrow \forall y \in \overline{B(y_0, r'_0)}, |x_2 - y|^2 - |x_1 - y|^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \overline{B(y_0, r'_0)}, |x_2 - x_1|^2 + 2\langle x_2 - x_1, y_0 - y \rangle - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0 \\ &\Leftrightarrow |x_2 - x_1|^2 + 2r'_0|x_2 - x_1| - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 3-2. Soit une mesure positive borélienne μ non nulle sur \mathbb{R}^d telle que $\mu \ll \mathcal{L}^d$. Soient $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r'_0 > 0$, et soit $x_1 \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B(y_0, r'_0)}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|x_1 - y| > |x - y|$ pour tout $y \in \overline{B(y_0, r'_0)}$, c'est à dire, d'après le lemme 3-1, tel que

$$|x - x_1|^2 + 2r'_0|x - x_1| - 2\langle x - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0,$$

il existe $r > 0$ tel que $\mu(B(x, r)) = 0$.

Autrement dit, pour toute image x de x_1 par symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan séparant strictement les ensembles $\{x_1\}$ et $\overline{B(y_0, r'_0)}$, il existe $r > 0$ tel que $\mu(B(x, r)) = 0$.

Alors $\mu(U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)) = 0$, où $U_{sep}(y_0, r'_0, x_1) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x_1 - y| > |x - y| \forall y \in \overline{B(y_0, r'_0)}\}$.

Preuve : D'après le lemme 3-1, on a

$$U_{sep}(y_0, r'_0, x_1) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x - x_1|^2 + 2r'_0|x - x_1| - 2\langle x - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0\}.$$

L'opérateur $x \mapsto |x - x_1|^2 + 2r'_0|x - x_1| - 2\langle x - x_1, y_0 - x_1 \rangle$ étant continu, l'ensemble $U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)$ est un ouvert de \mathbb{R}^d . Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on peut donc choisir $r > 0$ assez petit pour que $B(x, r) \subset U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)$. On a donc bien $\mu(U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)) = 0$ d'après le lemme B-8. Remarquons que si $|x - y_0| \leq r'_0$, alors $U_{sep}(y_0, r'_0, x_1) = \emptyset$.

□

Lemme 3-3. Soient $y_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r'_0 > 0$, et soient $x_1 \in \mathbb{R}^d \setminus B(y_0, r'_0)$ et $x_2 \in U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)$, où

$$U_{sep}(y_0, r'_0, x_1) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x - x_1|^2 + 2r'_0|x - x_1| - 2\langle x - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0\}.$$

On pose

$$k_{x_1, x_2} = |x_2 - x_1|^2 + 2r'_0|x_2 - x_1| - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0,$$

Pour tous $0 < r_1, r_2 < \max \left\{ -\frac{1}{6(3 + 2r'_0 + 2|y_0 - x_1| + 2|y_0 - x_2|)} k_{x_1, x_2}, 1 \right\}$ et pour tout $y_1 \in B(y_0, r'_0)$ et tout

$0 < r'_1 < \max \left\{ -\frac{1}{24(2 + r'_0 + |y_0 - x_2| + |x_2 - x_1|)} k_{x_1, x_2}, 1 \right\}$, on a :

$$\inf_{(a_1, z_1) \in \overline{B(x_1, r_1)} \times \overline{B(y_1, r'_1)}} |a_1 - z_1|^2 - \sup_{(a_2, z_2) \in \overline{B(x_2, r_2)} \times \overline{B(y_1, r'_1)}} |a_2 - z_2|^2 > 0.$$

Preuve : Pour tout $z \in \overline{B(y_1, r'_1)}$, on a :

$$\begin{aligned} |x_2 - z|^2 - |x_1 - z|^2 &= \langle x_2 - x_1, x_2 + x_1 - 2z \rangle \\ &= \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 + 2(x_1 - z) \rangle \\ &= |x_2 - x_1|^2 + 2\langle x_2 - x_1, x_1 - z \rangle \\ &= |x_2 - x_1|^2 + 2\langle x_2 - x_1, y_0 - z \rangle - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle \\ &= |x_2 - x_1|^2 + 2\langle x_2 - x_1, y_0 - y_1 \rangle - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle + 2\langle x_2 - x_1, y_1 - z \rangle \\ &\leq \underbrace{|x_2 - x_1|^2 + 2r'_0|x_2 - x_1| - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle}_{=k_{x_1, x_2}} + 2r'_1|x_2 - x_1| \\ &= k_{x_1, x_2} + 2r'_1|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Soit $a_1 \in \overline{B(x_1, r_1)}$, et soit $z_1 \in \overline{B(y_1, r'_1)}$, on a :

$$\begin{aligned} |a_1 - z_1|^2 &= |a_1 - x_1|^2 - 2\langle a_1 - x_1, z_1 - x_1 \rangle + |x_1 - z_1|^2 \\ &= |a_1 - x_1|^2 - 2\langle a_1 - x_1, z_1 - x_1 \rangle + |x_2 - z_1|^2 - (|x_2 - z_1|^2 - |x_1 - z_1|^2) \\ &\geq -2r_1|z_1 - x_1| - k_{x_1, x_2} - 2r'_1|x_2 - x_1| + |x_2 - z_1|^2. \end{aligned}$$

Soit $a_2 \in \overline{B(x_2, r_2)}$, et soit $z_2 \in \overline{B(y_1, r'_1)}$, on a :

$$\begin{aligned} |a_2 - z_2|^2 &= |a_2 - x_2|^2 - 2\langle a_2 - x_2, z_2 - x_2 \rangle + |x_2 - z_2|^2 \\ &\leq r_2^2 + 2r_2|z_2 - x_2| + |x_2 - z_2|^2 \\ &= r_2^2 + 2r_2|z_2 - x_2| - 2\langle x_2 - z_1, z_2 - z_1 \rangle + |z_1 - z_2|^2 + |x_2 - z_1|^2 \\ &\leq r_2^2 + 2r_2|z_2 - x_2| + 4r'_1|x_2 - z_1| + 4r_1'^2 + |x_2 - z_1|^2. \end{aligned}$$

Pour tous $z_1, z_2 \in \overline{B(y_1, r'_1)}$, on a ainsi :

$$\begin{aligned} |a_1 - z_1|^2 - |a_2 - z_2|^2 &\geq -2r_1|z_1 - x_1| - 2r'_1|x_2 - x_1| - r_2^2 - 2r_2|z_2 - x_2| - 4r'_1|x_2 - z_1| - 4r_1'^2 - k_{x_1, x_2} \\ &\geq -2r_1(r'_1 + r'_0 + |y_0 - x_1|) - 4r'_1|x_2 - x_1| - r_2^2 - 2r_2(r'_1 + r'_0 + |y_0 - x_2|) \\ &\quad - 4r'_1(r'_1 + r'_0 + |y_0 - x_2|) - 4r_1'^2 - k_{x_1, x_2} \end{aligned}$$

On a $-r_2^2 \geq -r_2$, et $r'_1 \leq 1$ (donc $-4r_1'^2 \geq -4r'_1$), d'où

$$-r_2^2 - 2r_2(r'_1 + r'_0 + |y_0 - x_2|) \geq -r_2(3 + 2r'_0 + 2|y_0 - x_2|) \geq -r_2(3 + 2r'_0 + 2|y_0 - x_1| + 2|y_0 - x_2|) \geq \frac{1}{6}k_{x_1, x_2},$$

ainsi que

$$-2r_1(r'_1 + r'_0 + |y_0 - x_1|) \geq -2r_1(1 + r'_0 + |y_0 - x_1|) \geq -r_1(3 + 2r'_0 + 2|y_0 - x_1| + 2|y_0 - x_2|) \geq \frac{1}{6}k_{x_1, x_2},$$

et également

$$-4r_1'^2 - 4r_1'|x_2 - x_1| - 4r_1'(r'_1 + r'_0 + |y_0 - x_2|) \geq -4r_1'(2 + r'_0 + |y_0 - x_2| + |x_2 - x_1|) \geq \frac{1}{6}k_{x_1, x_2}.$$

On a ainsi $|a_1 - z_1|^2 - |a_2 - z_2|^2 \geq -\frac{1}{2}k_{x_1, x_2} > 0$. D'où

$$\inf_{(a_1, z_1) \in \overline{B(x_1, r_1)} \times \overline{B(y_1, r'_1)}} |a_1 - z_1|^2 - \sup_{(a_2, z_2) \in \overline{B(x_2, r_2)} \times \overline{B(y_1, r'_1)}} |a_2 - z_2|^2 \geq -\frac{1}{2}k_{x_1, x_2} > 0.$$

□

Définition 3-1. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $r > 0$ et $0 < \lambda < 1$: on définit l'ensemble ouvert $CC(x, v, r, \lambda)$ de la façon suivante :

$$CC(x, v, r, \lambda) = B(x, r) \cap \{y \in \mathbb{R}^d, \langle v, y - x \rangle > |y - x|^2 + \lambda|y - x|\}.$$

Lemme 3-4. Soit une mesure positive borélienne finie μ non nulle sur \mathbb{R}^d telle que $\mu \ll \mathcal{L}^d$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, tout $a > 0$ et tout $0 < \lambda < a$, il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que, pour tout $r > 0$, on ait $\mu(CC(x, a(x_0 - x), r, \lambda)) > 0$.

Preuve : Soit $0 < \lambda < 1$ et soit $\lambda' \in]\lambda, a[$. Référons-nous à la définition B-8 pour définir l'ensemble $CT(x_0 - x, \lambda'/a, x, r)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$ par :

$$CT(x_0 - x, \lambda'/a, x, r) = B(x, r) \cap \{y \in \mathbb{R}^d, \langle x_0 - x, y - x \rangle > (\lambda'/a)|x_0 - x| \cdot |y - x|\}.$$

D'après le lemme B-14, il existe $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$ tel que, pour tout $r > 0$, on ait $\mu(CT(x_0 - x, \lambda'/a, x, r)) > 0$. Pour un tel x , et pour tout $r > 0$, on a $r \geq R_{x, r} = \min\{(\lambda' - \lambda)|x_0 - x|, r\} > 0$.

On remarque que $CT(x_0 - x, \lambda'/a, x, R_{x, r}) \subset CC(x, a(x_0 - x), R_{x, r}, \lambda)$. En effet, pour tout $y \in CT(x_0 - x, \lambda', x, R_{x, r})$, on a $(\lambda' - \lambda)|x_0 - x| \geq R_{x, r} > |y - x|$, et donc

$$a\langle x_0 - x, y - x \rangle > \lambda'|x_0 - x| \cdot |y - x| = (\lambda' - \lambda)|x_0 - x| \cdot |y - x| + \lambda|x_0 - x| \cdot |y - x| \geq |y - x|^2 + \lambda|y - x|.$$

On a donc $\mu(CC(x, a(x_0 - x), r, \lambda)) \geq \mu(CC(x, a(x_0 - x), R_{x, r}, \lambda)) \geq \mu(CT(x_0 - x, \lambda'/a, x, R_{x, r})) > 0$.

□

Preuve de la proposition 3-1 : Pour tout $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, on a en particulier $\mu_\omega^0 \leq \mu_0$. La mesure μ_ω^0 est donc absolument continue par rapport à la mesure μ_0 : il existe donc une densité positive $f \in L^1_+(\mathbb{R}^d, \mu_0)$ (voir le théorème B-3 de Radon-Nikodym) tel que $\mu_\omega^0 = f \mu_0$. Quitte à prendre $f \leftarrow \mathbb{1}_{\text{Supp}(\mu_0)} f$, on peut supposer que $\text{Supp}_{\text{ess}}(f) \subset \text{Supp}(\mu_0)$, et comme $\mu_\omega^0 \leq \mu_0$, on a donc $0 \leq f \leq 1$ μ_0 -presque partout. Soit \bar{f} un μ_0 -représentant de f , et définissons l'ensemble $S_{0-, 1+}(\bar{f}) = \{x \in \mathbb{R}^d, \bar{f}(x) \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]\}$: on a donc $\mu_0(S_{0-, 1+}) = 0$.

Posons $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S_{0-, 1+}} f$: on a alors $g \mu_0 = f \mu_0 = \mu_\omega^0$. En effet, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} (g \mu_0)(A) &= \int_A f(x) d\mu_0(x) = \int_A g(x) d\mu_0(x) + \int_A f(x) \mathbb{1}_{S_{0-, 1+}}(x) d\mu_0(x) \\ &= \int_A g(x) d\mu_0(x) + \underbrace{\int_{A \cap S_{0-, 1+}} f(x) d\mu_0(x)}_{=0} = \int_A g(x) d\mu_0(x) = (f \mu_0)(A). \end{aligned}$$

Ainsi, quitte à prendre $f \leftarrow g$, nous pouvons considérer que $0 \leq f \leq 1$ μ_0 -presque partout.

Soit $U_{01}^{\mu_0}$ l'ensemble des points x de \mathbb{R}^d ayant un voisinage ouvert U_x tel que $f(y) \in \{0, 1\}$ pour μ_0 -presque tout $y \in U_x$. Il est clair que $U_x \subset U_{01}^{\mu_0}$ pour tout $x \in U_{01}^{\mu_0}$: $U_{01}^{\mu_0}$ est donc un ouvert. Montrons que $f \in \{0, 1\}$ μ_0 -presque partout sur $U_{01}^{\mu_0}$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense de \mathbb{R}^d (par exemple une indexation de \mathbb{Q}^d) : la famille d'ouverts $(B(x_n, 2^{-k}))_{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est alors une base de voisinages dénombrable de \mathbb{R}^d . Pour tout $x \in U_{01}^{\mu_0}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_x$, $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-k} < r/2$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B(x_n, 2^{-k})$ par densité de la suite $(x_n)_n$ dans \mathbb{R}^d : d'où $B(x_n, 2^{-k}) \subset B(x, r) \subset U_x$. Ainsi $U_{01}^{\mu_0} \subset \bigcup_{(n, k) \in J_{01}^{\mu_0}} B(x_n, 2^{-k})$, où

$$J_{01}^{\mu_0} = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \exists x \in U_{01}^{\mu_0} \cap A_{\bar{f}} \text{ et } \exists U_x \in \text{Vois}_{01}^{\mu_0}(x) \text{ tels que } x \in B(x_n, 2^{-k}) \subset U_{01}^{\mu_0} \cap U_x\},$$

avec $\text{Vois}_{01}^{\mu_0}(x) = \{U_x \text{ voisinage de } x \text{ tel que } \mu_0(U_x \cap A_{\bar{f}}) = 0\}$.

Pour tout μ_0 -représentant \bar{f} de f , on définit l'ensemble $A_{\bar{f}} = \{x \in \mathbb{R}^d, \bar{f}(x) \notin \{0, 1\}\}$. Pour un tel représentant \bar{f} et pour tout $x \in U_{01}^{\mu_0}$, on a $\mu_0(A_{\bar{f}} \cap U_x) = 0$ ^a. D'où $\mu_0(A_{\bar{f}} \cap B(x_n, 2^{-k})) = 0$ pour tout $(n, k) \in J_{01}^{\mu_0}$.

Ainsi, du fait que $U_{01}^{\mu_0} \cap A_{\bar{f}} \subset \bigcup_{(n,k) \in J_{01}^{\mu_0}} [B(x_n, 2^{-k}) \cap A_{\bar{f}}]$, on a $\mu_0(A_{\bar{f}} \cap U_{01}^{\mu_0}) = 0$ par σ -additivité de la mesure de Lebesgue. Autrement dit, pour μ_0 -presque tout $x \in U_{01}^{\mu_0}$, on a $\bar{f}(x) \in \{0, 1\}$. En repassant à la classe d'équivalence presque partout, on a donc $f \in \{0, 1\}$ μ_0 -presque partout sur $U_{01}^{\mu_0}$.

Il est donc clair que $\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_0) \subset \mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}_{\text{ess}}(f) \subset U_{01}^{\mu_0}$.

On pose alors $F_{\text{ess}}^{\mu_0} = \mathbb{R}^d \setminus U_{01}^{\mu_0}$ ($F_{\text{ess}}^{\mu_0}$ est donc fermé). On a donc $F_{\text{ess}}^{\mu_0} \subset \text{Supp}_{\text{ess}}(f) \subset \text{Supp}(\mu_0)$ et $A_{\bar{f}} \stackrel{\mu_0}{\prec} F_{\text{ess}}^{\mu_0}$ (voir la définition B-10). Ainsi :

— Si $F_{\text{ess}}^{\mu_0} \neq \emptyset$, alors pour tout $x \in F_{\text{ess}}^{\mu_0}$, tout μ_0 -représentant \bar{f} de f , et tout $r > 0$, on a $\mu_0(B(x, r) \cap A_{\bar{f}}) > 0$.

En effet, soient $x \in F_{\text{ess}}^{\mu_0}$ et \bar{f} un μ_0 -représentant de f : s'il existait $r > 0$ tel que $\mu_0(B(x, r) \cap A_{\bar{f}}) = 0$, alors cela signifierait que \bar{f} (et donc plus généralement sa classe f) est presque partout égale à 0 ou 1 sur $B(x, r)$, et donc que $x \in U_{01}^{\mu_0} = \mathbb{R}^d \setminus F_{\text{ess}}^{\mu_0}$.

D'après le lemme B-18, pour tout $x \in F_{\text{ess}}^{\mu_0}$ et tout $r > 0$, on a donc également $\mu_0(B(x, r) \cap F_{\text{ess}}^{\mu_0}) > 0$.

— $F_{\text{ess}}^{\mu_0} = \emptyset \iff \mu_0(F_{\text{ess}}^{\mu_0}) = 0$. En effet, supposons que $F_{\text{ess}}^{\mu_0} \neq \emptyset$, alors d'après le point précédent, pour tout $x \in F_{\text{ess}}^{\mu_0}$ et tout $r > 0$, on a $\mu_0(B(x, r) \cap F_{\text{ess}}^{\mu_0}) > 0$ et donc $\mu_0(F_{\text{ess}}^{\mu_0}) \geq \mu_0(B(x, r) \cap F_{\text{ess}}^{\mu_0}) > 0$. La réciproque est évidente.

Nous allons prouver la proposition par contraposée. Comme la densité f (au sens de la classe d'équivalence d'égalité μ_0 -presque partout) de la mesure μ_ω^0 par rapport à la mesure μ_0 est μ_0 -presque partout à image dans $\{0, 1\}$ sur $U_{01}^{\mu_0}$, il suffit donc de montrer que $F_{\text{ess}}^{\mu_0} = \emptyset$. Nous allons donc montrer que si $F_{\text{ess}}^{\mu_0} \neq \emptyset$, alors ω n'est pas optimale pour notre problème, i.e. qu'il existe une mesure $\omega' \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ telle que $\mathcal{K}(\omega') < \mathcal{K}(\omega)$ et donc $\omega \notin \text{argmin}_{\varpi \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\varpi)$.

Nous supposons donc dans la suite du problème que $F_{\text{ess}}^{\mu_0} \neq \emptyset$. Nous allons chercher à appliquer la proposition 3-2 à une sous-partie τ de la mesure ω .

Soit $\bar{\rho}_0$ un \mathcal{L}^d -représentant de ρ_0 , \bar{f} un \mathcal{L}^d -représentant de f , et soit $\bar{\rho}_\omega^0 = \bar{f}\bar{\rho}_0$ (qui est donc un \mathcal{L}^d -représentant de ρ_ω^0).

On a $A_{\bar{f}} \stackrel{\mathcal{L}^d}{\approx} \bar{f}^{-1}(\]0, 1[)$. En effet, $\bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \subset A_{\bar{f}} = \bar{f}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$ (d'où $\bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \setminus A_{\bar{f}} = \emptyset$ et $A_{\bar{f}} \setminus \bar{f}^{-1}(\]0, 1[) = \bar{f}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \]0, 1[)$), et, sachant que $0 \leq f \leq 1$ \mathcal{L}^d -presque partout, on a $\mathcal{L}^d(\bar{f}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \]0, 1[)) = 0$. D'où $A_{\bar{f}} \stackrel{\mu_0}{\approx} \bar{f}^{-1}(\]0, 1[)$ (voir la définition B-9 et le lemme B-16).

Pour tout $x \in \{0 < \bar{\rho}_\omega^0 < \bar{\rho}_0\} = \{0 < \bar{f}\bar{\rho}_0 < \bar{\rho}_0\}$, on a $\bar{\rho}_0(x) > 0$, et donc $0 < \bar{f}(x) < 1$, i.e. $\{0 < \bar{\rho}_\omega^0 < \bar{\rho}_0\} \subset \bar{f}^{-1}(\]0, 1[)$. Si $x \in \bar{f}^{-1}(\]0, 1[)$, et si $\bar{\rho}_0(x) > 0$, alors $x \in \{0 < \bar{\rho}_\omega^0 < \bar{\rho}_0\}$. Ainsi

$$\bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \setminus \{0 < \bar{\rho}_\omega^0 < \bar{\rho}_0\} = \bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \cap \bar{\rho}_0^{-1}(\mathbb{R}_-) \stackrel{\mathcal{L}^d}{\approx} \bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \cap \bar{\rho}_0^{-1}(\{0\}).$$

Or $\mu_0[\bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \cap \bar{\rho}_0^{-1}(\{0\})] = \int_{\bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \cap \bar{\rho}_0^{-1}(\{0\})} \rho_0(x) dx = 0$, i.e. $\mu_0[\bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \setminus \{0 < \bar{\rho}_\omega^0 < \bar{\rho}_0\}] = 0$ (lemme B-17).

Ainsi, du fait que l'on ait également $\{0 < \bar{\rho}_\omega^0 < \bar{\rho}_0\} \subset \bar{f}^{-1}(\]0, 1[)$, on a donc $\{0 < \bar{\rho}_\omega^0 < \bar{\rho}_0\} \stackrel{\mu_0}{\approx} \bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \stackrel{\mu_0}{\approx} A_{\bar{f}}$, d'où, d'après le lemme B-16, on a

$$\{0 < \bar{\rho}_\omega^0 < \bar{\rho}_0\} \stackrel{\mu_\omega^0}{\approx} \bar{f}^{-1}(\]0, 1[) \stackrel{\mu_\omega^0}{\approx} A_{\bar{f}}. \quad (3-7)$$

Pour tout $x \in F_{\text{ess}}^{\mu_0}$, et pour tout $r > 0$, on a $\mu_\omega^0(B(x, r) \cap A_{\bar{f}}) > 0$. En effet, supposons qu'il existe $x \in F_{\text{ess}}^{\mu_0}$ et $r > 0$ tel que $\mu_\omega^0(B(x, r) \cap A_{\bar{f}}) = 0$, c'est à dire $\int_{B(x, r)} \mathbb{1}_{A_{\bar{f}}}(y) \bar{f}(y) d\mu_0(y) = 0$, autrement dit $\mathbb{1}_{A_{\bar{f}}}(y) \bar{f}(y) = 0$ pour μ_0 -presque tout $y \in B(x, r)$. Or si $\mathbb{1}_{A_{\bar{f}}}(y) \bar{f}(y) = 0$, alors $\mathbb{1}_{A_{\bar{f}}}(y) = 0$: en effet, si l'on avait $\mathbb{1}_{A_{\bar{f}}}(y) = 1$, alors on aurait $y \in A_{\bar{f}}$, d'où $\bar{f}(y) \neq 0$ et donc $\mathbb{1}_{A_{\bar{f}}}(y) \bar{f}(y) = \bar{f}(y) \neq 0$. On aurait donc $\mu_0(B(x, r) \cap A_{\bar{f}}) = \int_{B(x, r)} \mathbb{1}_{A_{\bar{f}}}(y) d\mu_0(y) = 0$, ce qui impliquerait que $x \in U_{01}^{\mu_0} = \mathbb{R}^d \setminus F_{\text{ess}}^{\mu_0}$. D'après (3-7), on a donc

a. Par définition de $U_{01}^{\mu_0}$.

$$\begin{aligned} \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x, r) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \right] &= \mu_\omega^0 \left(B(x, r) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) = \mu_\omega^0 \left(B(x, r) \cap \overline{f}^{-1}([0, 1]) \right) \\ &= \mu_\omega^0 \left(B(x, r) \cap A_{\overline{f}} \right) > 0, \end{aligned} \quad (3-8)$$

pour tout $x \in F_{ess}^{\mu_0}$, et pour tout $r > 0$.

Montrons que pour tout $x_0 \in F_{ess}^{\mu_0}$, il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout $0 < r_0 \leq R_0$ il existe $y_0 \in \mathbb{R}^d \setminus B(x_0, R_0)$ tel que pour tout $r'_0 > 0$ on ait

$$\omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \cap \pi_1^{-1}(B(y_0, r'_0)) \right] > 0. \quad (3-9)$$

Remarquons tout d'abord que $\text{Supp}(\mu_1) = \text{Supp}(\pi_1 \# \omega)$. En effet, on a $\mu_1 = \mu_\omega^1 \leq \pi_1 \# \omega$, d'où $\text{Supp}(\mu_1) \subset \text{Supp}(\pi_1 \# \omega)$. Inversement, on a par définition du support d'une mesure :

$$0 = \mu_1(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1)) = \mu_\omega^1(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1)) = \int_{L^{d,M}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1)}(\pi_1(\gamma)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\omega),$$

d'où $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1)}(\pi_1(\gamma)) \underbrace{e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}}_{>0} d\omega(\omega) = 0$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, et donc $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1)}(\pi_1(\gamma)) = 0$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$: par conséquent, on a

$$0 = \int_{L^{d,M}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1)}(\pi_1(\gamma)) d\omega(\omega) = \omega \left[\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1)) \right] = (\pi_1 \# \omega)(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1)).$$

D'où $\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1) \subset \mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\pi_1 \# \omega)$, i.e. $\text{Supp}(\pi_1 \# \omega) \subset \text{Supp}(\mu_1)$ et donc $\text{Supp}(\mu_1) = \text{Supp}(\pi_1 \# \omega)$.

Montrons maintenant la relation (3-9). Soit $x_0 \in F_{ess}^{\mu_0}$: comme $F_{ess}^{\mu_0} \subset \text{Supp}(\mu_0)$ et comme $\text{Supp}(\mu_0) \cap \text{Supp}(\mu_1) = \emptyset$, on a donc $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1) = \mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\pi_1 \# \omega)$, et ainsi, $\text{Supp}(\mu_1)$ étant fermé dans \mathbb{R}^d , il existe $R_0 > 0$ tel que $B(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\pi_1 \# \omega)$, i.e. $\omega(\pi_1^{-1}(B(x_0, R_0))) = 0$.

Ainsi, d'après (3-8), pour tout $0 < r_0 \leq R_0$, on a

$$\begin{aligned} 0 < \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \right] &= \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \setminus \pi_1^{-1}(B(x_0, R_0)) \right] \\ &= \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \cap \pi_1^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus B(x_0, R_0)) \right]. \end{aligned}$$

Fixons $0 < r_0 < R_0$, et définissons la mesure positive borélienne λ_{x_0, r_0} sur \mathbb{R}^d par

$$\lambda_{x_0, r_0}(A) = \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \cap \pi_1^{-1}(A \setminus B(x_0, R_0)) \right].$$

pour tout borélien A de \mathbb{R}^d . On a donc

$$\lambda_{x_0, r_0}(\mathbb{R}^d) = \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \cap \pi_1^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus B(x_0, R_0)) \right] > 0.$$

La mesure λ_{x_0, r_0} est donc non nulle, et ainsi, d'après le lemme B-9, il existe $y_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $r'_0 > 0$, on ait

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_{x_0, r_0}(B(y_0, r'_0)) &= \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \cap \pi_1^{-1}(B(y_0, r'_0) \setminus B(x_0, R_0)) \right] \\ &\leq \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \cap \pi_1^{-1}(B(y_0, r'_0)) \right]. \end{aligned}$$

De plus, il est clair que $y_0 \in \mathbb{R}^d \setminus B(x_0, R_0)$: en effet, si l'on avait $y_0 \in B(x_0, R_0)$, il existerait $r'_0 > 0$ tel que $B(y_0, r'_0) \subset B(x_0, R_0)$ et donc tel que :

$$\lambda_{x_0, r_0}(B(y_0, r'_0)) = \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \cap \pi_1^{-1}(\emptyset) \right] = 0.$$

Fixons $0 < r'_0 < 1$ suffisamment petit pour que $\overline{B(x_0, r_0)} \cap \overline{B(y_0, r'_0)} = \emptyset$ (rappelons que $r_0 < R_0$ et que $y_0 \notin B(x_0, R_0)$), et définissons la mesure positive borélienne $\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}$ sur \mathbb{R}^d par

$$\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(A) = \omega \left[\pi_0^{-1} \left(A \cap B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \cap \pi_1^{-1}(B(y_0, r'_0)) \right].$$

pour tout borélien A de \mathbb{R}^d . On a donc

$$\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(\mathbb{R}^d) = \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\} \right) \cap \pi_1^{-1}(B(y_0, r'_0)) \right] \geq \lambda_{x_0, r_0}(B(y_0, r'_0)) > 0.$$

La mesure $\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}$ est donc non nulle et finie^a, et ainsi, d'après le lemme 3-4, il existe $x_1 \in \text{Supp}(\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}) \subset \overline{B(x_0, r_0)}$ tel que pour tout $r > 0$ on ait $\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(CC(x_1, 2(y_0 - x_1), r, 2r'_0)) > 0$, où l'ensemble $\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(CC(x_1, 2(y_0 - x_1), r, 2r'_0))$ est défini à la définition 3-1.

On définit l'ensemble $U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)$ par :

$$U_{sep}(y_0, r'_0, x_1) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x - x_1|^2 + 2r'_0|x - x_1| - 2\langle x - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0\}.$$

D'après le lemme 3-1 (rappelons que $2r'_0 < 2$), on a $U_{sep}(y_0, r'_0, x_1) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x_1 - y| > |x - y| \forall y \in \overline{B(y_0, r'_0)}\}$. On a donc $CC(x_1, 2(y_0 - x_1), r, 2r'_0) = B(x_1, r) \cap U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)$ pour tout $r > 0$.

On a $\text{Supp}(\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}) \cap \overline{B(y_0, r'_0)} \subset \overline{B(x_0, r_0)} \cap \overline{B(y_0, r'_0)} = \emptyset$, d'où $x_1 \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B(y_0, r'_0)}$.

De plus, pour tout $r > 0$, on a

$$\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)) \geq \lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(B(x_1, r) \cap U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)) = \lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(CC(x_1, 2(y_0 - x_1), r, 2r'_0)) > 0.$$

Ainsi, en prenant la contraposée du lemme 3-2, il existe $x_2 \in U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)$ tel que pour tout $r > 0$, on ait $\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(B(x_2, r)) > 0$ (remarquons que $x_1 \notin U_{sep}(y_0, r'_0, x_1)$, donc $x_1 \neq x_2$). On a donc $x_2 \in \text{Supp}(\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}) \subset \overline{B(x_0, r_0)}$, d'où $x_2 \notin \overline{B(y_0, r'_0)}$.

Ainsi, pour tout $r_2 > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mu_\omega^0(B(x_2, r_2) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}) &= \omega[\pi_0^{-1}(B(x_2, r_2) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\})] \\ &\geq \omega[\pi_0^{-1}(B(x_2, r_2) \cap B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\})] \\ &\geq \omega[\pi_0^{-1}(B(x_2, r_2) \cap B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}) \cap \pi_1^{-1}(A \cap B(y_0, r'_0))] \\ &\geq \lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(B(x_2, r_2)) > 0. \end{aligned} \tag{3-10}$$

On montre de même que

$$\begin{aligned} \mu_\omega^0(\overline{B(x_1, r_1)} \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}) &\geq \lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(B(x_1, r_1)) \geq \mu_\omega^0(B(x_1, r_1) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}) \geq \lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(B(x_1, r_1)) \\ &\geq \lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(CC(x_1, 2(y_0 - x_1), r_1, 2r'_0)) > 0, \end{aligned} \tag{3-11}$$

pour tout $r_1 > 0$.

On pose $k_{x_1, x_2} = |x_2 - x_1|^2 + 2r'_0|x_2 - x_1| - 2\langle x_2 - x_1, y_0 - x_1 \rangle < 0$, et on fixe les rayons r_1 et r_2^0 tels que ceux-ci vérifient

$$0 < r_1, r_2^0 < M := \max\left\{-\frac{1}{6(3 + 2r'_0 + 2|y_0 - x_1| + 2|y_0 - x_2|)}k_{x_1, x_2}, 1\right\}, \tag{3-12}$$

et suffisamment petits pour que $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{B(y_0, r'_0)} = \emptyset$, $\overline{B(x_2, r_2^0)} \cap \overline{B(y_0, r'_0)} = \emptyset$ et $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{B(x_2, r_2^0)} = \emptyset$. On fixe de plus r_1 de telle façon à ce que

$$\mathcal{L}^d(\overline{B(x_1, r_1)} \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}) < \mathcal{L}^d(\overline{B(x_2, r_2^0)}).$$

En effet, remarquons que comme $\mu_\omega^0 \ll \mathcal{L}^d$, si $\mu_\omega^0(A) > 0$ alors $\mathcal{L}^d(A) > 0$ (pour tout borélien A). Donc comme $\mu_\omega^0(B(x_1, r_1) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}) > 0$ et $\mu_\omega^0(B(x_2, r_2) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}) > 0$ pour tous $r_1, r_2 > 0$, on a donc

$$\mathcal{L}^d(B(x_1, r_1) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}) > 0$$

et

$$\mathcal{L}^d(B(x_2, r_2) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}) > 0$$

pour tout $r_1, r_2 > 0$. Par le théorème de convergence dominée, on peut de plus montrer que les fonctions

$$h_1 : r \mapsto \mathcal{L}^d(\overline{B(x_1, r)} \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\})$$

a. Car $\lambda_{x_0, r_0, y_0, r'_0}(\mathbb{R}^d) \leq \omega(\pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d)) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) \leq \mu_0(\mathbb{R}^d) < +\infty$.

et

$$h_2 : r \mapsto \mathcal{L}^d \left(\overline{B(x_2, r_2^0)} \right)$$

sont continues sur \mathbb{R}_+ et que $h_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ et $h_2(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$.

Ainsi, une fois fixé r_2^0 vérifiant $0 < r_2^0 < M$ (voir la condition (3-12)), on peut fixer r_1 suffisamment petit pour que $0 < r_2^0 < M$ et $0 < h_1(r_1) < h_2(r_2^0)$.

On définit la mesure positive borélienne $\lambda_{x_1, r_1, y_0, r_0'}$ sur \mathbb{R}^d par

$$\lambda_{x_1, r_1, y_0, r_0'}(A) = \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_1, r_1) \cap B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\} \right) \cap \pi_1^{-1} (A \cap B(y_0, r_0')) \right].$$

pour tout borélien A de \mathbb{R}^d . On a donc

$$\begin{aligned} \lambda_{x_1, r_1, y_0, r_0'}(\mathbb{R}^d) &= \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_1, r_1) \cap B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\} \right) \cap \pi_1^{-1} (B(y_0, r_0')) \right] \\ &\geq \lambda_{x_0, r_0, y_0, r_0'}(B(x_1, r_1)) \\ &\geq \lambda_{x_0, r_0, y_0, r_0'}(CC(x_1, 2(y_0 - x_1), r, 2r_0')) \\ &> 0. \end{aligned}$$

La mesure $\lambda_{x_1, r_1, y_0, r_0'}$ est donc non nulle, et ainsi, d'après le lemme B-9, il existe $y_1 \in \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $r_1' > 0$, on ait

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_{x_1, r_1, y_0, r_0'}(B(y_1, r_1')) &= \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_1, r_1) \cap B(x_0, r_0) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\} \right) \cap \pi_1^{-1} (B(y_1, r_1') \cap B(y_0, r_0')) \right] \\ &\leq \omega \left[\pi_0^{-1} \left(B(x_1, r_1) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\} \right) \cap \pi_1^{-1} (B(y_1, r_1') \cap B(y_0, r_0')) \right]. \end{aligned} \quad (3-13)$$

On fixe le rayon r_1' de telle façon à ce que

$$0 < r_1' < M' := \max \left\{ -\frac{1}{24(2 + r_0' + |y_0 - x_2| + |x_2 - x_1|)} k_{x_1, x_2}, 1 \right\}. \quad (3-14)$$

Pour finir on définit la mesure positive borélienne $\lambda_{x_1, r_1, y_1, r_1'}$ sur \mathbb{R}^d par

$$\lambda_{x_1, r_1, y_1, r_1'}(A) = \omega \left[\pi_0^{-1} \left(A \cap B(x_1, r_1) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\} \right) \cap \pi_1^{-1} (B(y_1, r_1')) \right].$$

pour tout borélien A de \mathbb{R}^d . Bien sûr, en reprenant la relation (3-13), $\lambda_{x_1, r_1, y_1, r_1'}(\mathbb{R}^d) \geq \lambda_{x_1, r_1, y_0, r_0'}(B(y_1, r_1')) > 0$: la mesure $\lambda_{x_1, r_1, y_1, r_1'}$ est donc non nulle.

On définit l'ensemble $\Omega_1^{ini} = \text{Supp}(\lambda_{x_1, r_1, y_1, r_1'})$ (Ω_1^{ini} est non vide étant donné que la mesure $\lambda_{x_1, r_1, y_1, r_1'}$ est non nulle).

Il est clair que $\Omega_1^{ini} \subset \overline{B(x_1, r_1) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\}} \subset \overline{B(x_1, r_1)}$. De plus

$$\begin{aligned} \mu_\omega^0(\Omega_1^{ini}) &= \omega \left[\pi_0^{-1}(\Omega_1^{ini}) \right] \\ &\geq \omega \left[\pi_0^{-1} \left(\Omega_1^{ini} \cap B(x_1, r_1) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\} \right) \right] \\ &\geq \omega \left[\pi_0^{-1} \left(\Omega_1^{ini} \cap B(x_1, r_1) \cap \{0 < \overline{\rho_\omega^0} < \overline{\rho_0}\} \right) \cap \pi_1^{-1} (B(y_1, r_1')) \right] \\ &= \lambda_{x_1, r_1, y_1, r_1'}(\Omega_1^{ini}) > 0. \end{aligned} \quad (3-15)$$

Ainsi, comme $\mu_\omega^0 \ll \mathcal{L}^d$, on a $\mathcal{L}^d(\Omega_1^{ini}) > 0$.

On définit la mesure positive τ^{ini} sur $L^{d, M}$ par $\tau^{ini} = \mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1^{ini}) \cap \pi_1^{-1}(B(y_1, r_1'))} \omega$. La mesure τ^{ini} est non nulle : en effet

$$\tau^{ini}(L^{d, M}) \geq \lambda_{x_1, r_1, y_1, r_1'}(\Omega_1^{ini}) = \lambda_{x_1, r_1, y_1, r_1'}(\mathbb{R}^d) > 0.$$

La mesure marginale associée à τ^{ini} en $t = 0$ est donc également non nulle (car $\mu_{\tau^{ini}}^0(\mathbb{R}^d) = \tau^{ini}(L^{d, M})$). Montrons maintenant que $\mu_{\tau^{ini}}^0$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour tout borélien A de \mathbb{R}^d , on a

$$\begin{aligned} \mu_{\tau^{ini}}^0(A) &= \omega \left(\pi_0^{-1} (A \cap \Omega_1^{ini}) \cap \pi_1^{-1} (B(y_1, r_1')) \right) \\ &\leq \omega \left(\pi_0^{-1} (A \cap \Omega_1^{ini}) \right) \\ &= \mu_\omega^0(A \cap \Omega_1^{ini}) = \left(\mathbb{1}_{\Omega_1^{ini}} \mu_\omega^0 \right)(A). \end{aligned} \quad (3-16)$$

On a donc $\mu_{\tau ini}^0 \leq \mathbb{1}_{\Omega_1^{ini}} \mu_{\omega}^0 \leq \mu_0$. Comme par ailleurs $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$, on a donc bien $\mu_{\tau ini}^0 \ll \mathcal{L}^d$. Notons $\xi_{\tau ini}^0$ la densité de $\mu_{\tau ini}^0$ par rapport \mathcal{L}^d . Soit $\xi_{\tau ini}^0$ un représentant de $\xi_{\tau ini}^0$ pour la mesure de Lebesgue. La mesure $\mu_{\tau ini}^0$ étant borélienne sur \mathbb{R}^d (qui est entre autre un espace métrique complet), elle est intérieurement régulière, i.e. pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mu_{\tau ini}^0(A) = \sup \{ \mu_{\tau ini}^0(K), K \subset A, K \text{ compact} \}.$$

En prenant $A = \Omega_1^{ini} \cap \overline{\xi_{\tau ini}^0}^{-1}(\mathbb{R}_{++})$, il existe un compact $K_1^+ \subset \Omega_1^{ini} \cap \overline{\xi_{\tau ini}^0}^{-1}(\mathbb{R}_{++})$ tel que

$$\begin{aligned} \mu_{\tau ini}^0 \left(\Omega_1^{ini} \cap \overline{\xi_{\tau ini}^0}^{-1}(\mathbb{R}_{++}) \right) &\geq \mu_{\tau ini}^0(K_1^+) \geq \frac{1}{2} \mu_{\tau ini}^0 \left(\Omega_1^{ini} \cap \overline{\xi_{\tau ini}^0}^{-1}(\mathbb{R}_{++}) \right) = \frac{1}{2} \mu_{\tau ini}^0(\Omega_1^{ini}) = \left(\mathbb{1}_{\Omega_1^{ini}} \mu_{\omega}^0 \right) (\Omega_1^{ini}) \\ &= \mu_{\omega}^0(\Omega_1^{ini}) > 0, \end{aligned}$$

d'après (3-16) et (3-15). Comme $\mu_{\tau ini}^0$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on a également $\mathcal{L}^d(K_1^+) > 0$. On définit alors le compact $\Omega_1 = \text{Supp}(\mathbb{1}_{K_1^+} \mathcal{L}^d)$. D'après le lemme B-15, on a

$$\Omega_1 \subset K_1^+ \subset \Omega_1^{ini} \subset \overline{B(x_1, r_1)},$$

$\mathcal{L}^d(\Omega_1) = \mathcal{L}^d(K_1^+)$, et $\Omega_1 = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d)$.

On définit la mesure positive τ sur $L^{d,M}$ par $\tau = \mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1) \cap \pi_1^{-1}(B(y_1, r'_1))} \omega = \mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} \tau^{ini}$. Bien sûr,

$$\begin{aligned} \mu_{\tau}^0(\mathbb{R}^d) &= \mu_{\tau ini}^0(\Omega_1) \\ &= \mu_{\tau ini}^0(K_1^+) - \underbrace{\mu_{\tau ini}^0(K_1^+ \setminus \Omega_1)}_{=0} \\ &= \mu_{\tau ini}^0(K_1^+) > 0. \end{aligned}$$

En effet, comme $\mathcal{L}^d(K_1^+ \setminus \Omega_1) = \mathcal{L}^d(K_1^+) - \mathcal{L}^d(\Omega_1) = 0$, et comme $\mu_{\tau ini}^0 \ll \mathcal{L}^d$, on a bien $\mu_{\tau ini}^0(K_1^+ \setminus \Omega_1) = 0$.

Ainsi, μ_{τ}^0 , et donc τ , sont deux mesures non nulles, et, $\mu_{\tau ini}^0$ étant absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (c'est donc également le cas de μ_{τ}^0 , car $\mu_{\tau}^0 \leq \mu_{\tau ini}^0$), on a $\mathcal{L}^d(\Omega_1) > 0$ (du fait que $\mu_{\tau ini}^0(\Omega_1) > 0$).

Ainsi, pour tout $x \in \Omega_1 \subset K_1^+$, on a $\mathbb{1}_{\Omega_1}(x) \overline{\xi_{\tau ini}^0}(x) = \overline{\xi_{\tau ini}^0}(x) > 0$. Par ailleurs, pour tout borélien A de \mathbb{R}^d , on a

$$\begin{aligned} \mu_{\tau}^0(A) &= \left(\mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} \tau^{ini} \right) (\pi_0^{-1}(A)) \\ &= \tau^{ini}(\pi_0^{-1}(A \cap \Omega_1)) \\ &= \mu_{\tau ini}^0(A \cap \Omega_1) \\ &= \left(\mathbb{1}_{\Omega_1} \mu_{\tau ini}^0 \right) (A) \end{aligned}$$

i.e. $\mu_{\tau}^0 = \mathbb{1}_{\Omega_1} \mu_{\tau ini}^0 = \mathbb{1}_{\Omega_1} \xi_{\tau ini}^0 \mathcal{L}^d$. Ainsi, en nommant ξ_{τ} la densité de μ_{τ}^0 par rapport à la mesure de Lebesgue^a, on a $\xi_{\tau} = \mathbb{1}_{\Omega_1} \xi_{\tau ini}^0 \mathcal{L}$ au sens de l'égalité \mathcal{L}^d -presque partout, et donc $\xi_{\tau}(x) > 0$ pour \mathcal{L}^d -presque tout $x \in \Omega_1$.

Pour finir sur les propriétés de la mesure τ , remarquons que l'on a

$$\mu_{\tau}^0(\mathbb{R}^d \setminus \Omega_1) = \tau(\pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus \Omega_1)) = \omega(\pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus \Omega_1) \cap \pi_0^{-1}(\Omega_1) \cap \pi_1^{-1}(B(y_1, r'_1))) = \omega(\emptyset) = 0,$$

d'où $\text{Supp}(\mu_{\tau}^0) \subset \Omega_1$.

Rappelons que notre preuve se base sur l'application de la proposition 3-2 à la mesure τ . Sous les mêmes notations que l'énoncé de cette proposition, nous disposons donc déjà d'un compact Ω_1 (compact sur lequel nous disposons de masse disponible) remplissant les conditions de l'énoncé. Il nous reste donc à construire le compact Ω_2 remplissant avec Ω_1 les conditions nécessaires à l'application de cette proposition (notamment que le compact Ω_2 doit être "plus proche" de la zone de transfert de la masse disponible Ω_1 , et doit disposer encore d'un "stock de masse disponible" sur sa propre zone). Pour cela reprenons les fonctions h_1 et h_2 définies plus haut.

Rappelons que l'on a $\Omega_1 \subset K_1^+ \subset \Omega_1^{ini} \subset \overline{B(x_1, r_1)} \cap \{0 < \overline{\rho_{\omega}^0} < \overline{\rho_0}\} \subset \overline{B(x_1, r_1)}$:

a. Théorème B-3 de Radon-Nikodym.

$$\begin{aligned}
0 < \mathcal{L}^d(\Omega_1) &\leq \mathcal{L}^d\left(\overline{B(x_1, r_1) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\}}\right) \\
&= h_1(r_1) \\
&< h_2(r_2^0) \\
&= \mathcal{L}^d\left(\overline{B(x_2, r_2^0) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\}}\right).
\end{aligned}$$

La fonction h_2 est continue sur \mathbb{R}_+ et $h_2(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. Ainsi, en invoquant le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $r_2 \in]0, r_2^0[$ tel que $\mathcal{L}^d(\Omega_1) = h_2(r_2) = \mathcal{L}^d(\Omega_2)$, où $\Omega_2 = \overline{B(x_2, r_2)}$. On fixe un tel r_2 (par exemple la borne supérieure de tous les rayons inférieurs à r_2^0 pour lesquels h_2 vérifie l'égalité).

Par ailleurs, il est clair que $\Omega_2 = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d)$. Et on a bien sûr, d'après la relation (3-10) :

$$\mu_\omega^0\left(\Omega_2 \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\}\right) \geq \mu_\omega^0\left(B(x_2, r_2) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\}\right) > 0.$$

Si l'on avait $\mu_\omega^0(\Omega_2) = \mu_0(\Omega_2)$, i.e. $\int_{\Omega_2} \underbrace{(\rho_0(x) - \rho_\omega^0(x))}_{\geq 0} d\mathcal{L}^d(x) = 0$, alors on aurait $\rho_\omega^0(x) = \rho_0(x)$ pour \mathcal{L}^d -presque

tout $x \in \Omega_2 = \overline{B(x_2, r_2)}$, i.e. $\mathcal{L}^d\left(\Omega_2 \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\}\right) = 0$, d'où $\mu_\omega^0\left(B(x_2, r_2) \cap \{0 < \overline{\rho}_\omega^0 < \overline{\rho}_0\}\right) = 0$. On a donc $\mu_\omega^0(\Omega_2) < \mu_0(\Omega_2)$ (i.e. "il existe un stock de masse disponible" sur Ω_2).

On définit $\nu_{t=1}^\tau$ la mesure cible de transport (sans dissipation) en $t = 1$ par $\nu_{t=1}^\tau = \pi_1 \# \tau = \pi_1 \# (\mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} \tau)$. On a donc

$$\nu_{t=1}^\tau = \pi_1 \# \left(\mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} \cdot \mathbb{1}_{[\pi_0^{-1}(\Omega_1) \cap \pi_1^{-1}(B(y_1, r_1'))]} \omega \right).$$

Or on a

$$\mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1)} \cdot \mathbb{1}_{[\pi_0^{-1}(\Omega_1) \cap \pi_1^{-1}(B(y_1, r_1'))]} = \mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1) \cap \pi_1^{-1}(B(y_1, r_1'))},$$

et ainsi $\nu_{t=1}^\tau = \pi_1 \# (\mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1) \cap \pi_1^{-1}(B(y_1, r_1'))} \omega)$. Ainsi, pour tout borélien A de \mathbb{R}^d , on a

$$\begin{aligned}
\nu_{t=1}^\tau(A) &= \omega\left([\pi_0^{-1}(\Omega_1) \cap \pi_1^{-1}(B(y_1, r_1'))] \cap \pi_1^{-1}(A)\right) \\
&\leq \omega\left(\pi_1^{-1}(B(y_1, r_1')) \cap \pi_1^{-1}(A)\right) \\
&= \omega\left(\pi_1^{-1}(B(y_1, r_1') \cap A)\right).
\end{aligned}$$

Il est donc clair que pour tout borélien A de \mathbb{R}^d vérifiant $A \subset \mathbb{R}^d \setminus \overline{B(y_1, r_1')}$, on a $\nu_{t=1}^\tau(A) = 0$, d'où $\text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau) \subset \overline{B(y_1, r_1')}$.

Ainsi, on a

$$\inf_{(a,b) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a - b| \geq \inf_{(a,b) \in \overline{B(x_1, r_1)} \times \overline{B(y_1, r_1')}} |a - b|$$

et

$$\sup_{(a,b) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a - b| \leq \sup_{(a,b) \in \overline{B(x_2, r_2)} \times \overline{B(y_1, r_1')}} |a - b|.$$

Or, d'après le lemme 3-3, on a $\inf_{(a,b) \in \overline{B(x_1, r_1)} \times \overline{B(y_1, r_1')}} |a - b|^2 - \sup_{(a,b) \in \overline{B(x_2, r_2)} \times \overline{B(y_1, r_1')}} |a - b|^2 > 0$, d'où

$$\begin{aligned}
\left(\inf_{(a,b) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a - b| \right)^2 - \left(\sup_{(a,b) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a - b| \right)^2 &\geq \inf_{(a,b) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a - b|^2 - \sup_{(a,b) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a - b|^2 \\
&\geq \inf_{(a,b) \in \overline{B(x_1, r_1)} \times \overline{B(y_1, r_1')}} |a - b|^2 - \sup_{(a,b) \in \overline{B(x_2, r_2)} \times \overline{B(y_1, r_1')}} |a - b|^2 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\inf_{(a,b) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a-b| - \sup_{(a,b) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a-b| > 0. \quad (3-17)$$

Par ailleurs, comme $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{B(x_2, r_2^0)} = \emptyset$, et donc $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, on a $\mu_\tau^0(\Omega_2) = 0$, du fait, rappelons-le, que $\text{Supp}(\mu_\tau^0) \subset \Omega_1$. Ainsi

$$\mu_\tau^0(\Omega_2) = 0 < \underbrace{\mu_\tau^0(\Omega_2)}_{=0} + \mu_0(\Omega_2) - \mu_\omega^0(\Omega_2) = (\mu_\tau^0 + \mu_0 - \mu_\omega^0)(\Omega_2),$$

sachant que de manière générale on a $\mu_\tau^0 \leq \mu_\tau^0 + \mu_0 - \mu_\omega^0$ (et comme par hypothèse, on a $\mu_0 - \mu_\omega^0 \geq 0$, la mesure $\mu_\tau^0 + \mu_0 - \mu_\omega^0$ est également positive).

On a donc une mesure τ , absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité ξ par rapport à celle-ci, ainsi que deux compacts Ω_1 et Ω_2 de \mathbb{R}^d , vérifiant les hypothèses suivantes :

- On a $\mu_\tau^0 \leq \mu_\tau^0 + \mu_0 - \mu_\omega^0$, i.e. $\tau \in \mathcal{C}_M(\mu_\tau^0 + \mu_0 - \mu_\omega^0, \tau)$.
- $\Omega_1 = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_1} \mathcal{L}^d)$, $\Omega_2 = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega_2} \mathcal{L}^d)$ et $\mathcal{L}^d(\Omega_1) = \mathcal{L}^d(\Omega_2) > 0$.
- Avec $\nu_{t=1}^\tau = \pi_1 \# \tau$, on a

$$\inf_{(a,b) \in \Omega_1 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a-b| - \sup_{(a,b) \in \Omega_2 \times \text{Supp}(\nu_{t=1}^\tau)} |a-b| > 0.$$

(voir (3-17)).

- $\xi_\tau^0(x) > 0$ pour \mathcal{L}^d -presque tout $x \in \Omega_1$.
- $\mu_\tau^0(\Omega_2) < (\mu_\tau^0 + \mu_0 - \mu_\omega^0)(\Omega_2)$.

Ainsi, d'après la proposition 3-2, il existe une mesure $\tau' \in \mathcal{C}_M(\mu_\tau^0 + \mu_0 - \mu_\omega^0, \tau)$, c'est à dire une mesure borélienne positive sur $L^{d,M}$ vérifiant $\mu_{\tau'}^0 \leq \mu_\tau^0 + \mu_0 - \mu_\omega^0$ et $\mu_{\tau'}^1 = \mu_\tau^1$, et tel que $\mathcal{K}(\tau') < \mathcal{K}(\tau)$.

On définit alors la mesure $\omega' = \tau' - \tau + \omega$. Remarquons que $\omega - \tau = \underbrace{(1 - \mathbb{1}_{\pi_0^{-1}(\Omega_1) \cap \pi_1^{-1}(B(y_1, r_1^0))})}_{\geq 0} \omega \geq 0$. La mesure ω' est donc positive.

Par ailleurs, remarquons que pour toutes mesures boréliennes α et β (non signées) sur $L^{d,M}$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\alpha+\lambda\beta}^0(x) &= \int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) d[\alpha + \lambda\beta](\gamma) \\ &= \int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) d\alpha(\gamma) + \lambda \int_{L^{d,M}} f(\gamma(0)) d\beta(\gamma) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\alpha^0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\beta^0(x). \end{aligned}$$

Autrement dit, $\mu_{\alpha+\lambda\beta}^0 = \mu_\alpha^0 + \lambda\mu_\beta^0$, i.e. l'application $\alpha \mapsto \mu_\alpha^0$ (qui transforme une mesure non signée sur $L^{d,M}$ en une mesure sur \mathbb{R}^d) est linéaire et positive (au sens où si $\alpha \geq 0$, alors $\mu_\alpha^0 \geq 0$). On montre qu'il en est de même pour l'application $\alpha \mapsto \mu_\alpha^1$. On a donc

- $\mu_{\omega'}^0 = \mu_{\tau'}^0 - \mu_\tau^0 + \mu_\omega^0 = \mu_\tau^0 - \mu_\tau^0 + \mu_\omega^0 = \mu_\omega^0 \leq (\mu_\tau^0 + \mu_0 - \mu_\omega^0) - \mu_\tau^0 + \mu_\omega^0 = \mu_0$.
- $\mu_{\omega'}^1 = \mu_{\tau'}^1 - \mu_\tau^1 + \mu_\omega^1 = \mu_\tau^1 - \mu_\tau^1 + \mu_\omega^1 = \mu_\omega^1 = \mu_1$.

Avec le point précédent, on a donc $\omega' \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$.

- $\mu_{\omega'}^0(\mathbb{R}^d) = \mu_{\tau'}^0(\mathbb{R}^d) - \mu_\tau^0(\mathbb{R}^d) + \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) < \mu_\tau^0(\mathbb{R}^d) - \mu_\tau^0(\mathbb{R}^d) + \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d)$. Ainsi

$$\mathcal{K}(\omega') = \mu_{\omega'}^0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d) < \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d) = \mathcal{K}(\omega).$$

Pour conclure : si $F_{ess}^{\mu_0} \neq \emptyset$, alors il existe une mesure $\omega' \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ telle que $\mathcal{K}(\omega') < \mathcal{K}(\omega)$, i.e. la mesure ω n'est pas optimale pour notre problème. Ainsi, par contraposée, si tel est au contraire le cas, c'est à dire si $\omega \in \text{argmin}_{\varpi \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\varpi)$, alors $F_{ess}^{\mu_0} = \emptyset$, i.e. $\mathbb{R}^d = U_{01}^{\mu_0}$. Autrement dit, si \bar{f} est une représentante borélienne de la densité de la mesure μ_ω^0 par rapport à la mesure μ_0 , $\bar{f}(x) \in \{0, 1\}$ pour μ_0 -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. On définit alors le borélien $V_\omega = \bar{f}^{-1}(\{1\})$.

On a alors pour tout borélien A de \mathbb{R}^d :

$$\begin{aligned}
\mu_\omega^0(A) &= \int_A \bar{f}(x) d\mu_0(x) = \int_{A \cap \bar{f}^{-1}(\{1\})} \bar{f}(x) d\mu_0(x) + \underbrace{\int_{A \cap \bar{f}^{-1}(\{0\})} \bar{f}(x) d\mu_0(x)}_{=0} + \underbrace{\int_{A \cap \bar{f}^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus \{0,1\})} \bar{f}(x) d\mu_0(x)}_{=0} \\
&= \int_{A \cap V_\omega} \underbrace{\bar{f}(x)}_{=1} d\mu_0(x) = \mu_0(A \cap V_\omega),
\end{aligned}$$

i.e. $\mu_\omega^0 = \mathbb{1}_{V_\omega} \mu_0$.

□

4 Consistance du problème dualisé

Dans cette section nous ferons parfois des hypothèses plus larges sur la fonction de dissipation ζ que dans les autres sections (selon les énoncés, ζ ne sera pas toujours supposée convexe et croissante sur \mathbb{R}_+). La fonction ζ sera a minima supposée continue et positive sur \mathbb{R}_+ .

4.1 Formulation générale (propriétés (I))

Dans cette sous-section 4.1 la fonction de dissipation ζ sera, comme annoncé ci-dessus, supposée continue et positive sur \mathbb{R}_+ (a minima, c'est à dire sous-réserve d'hypothèses supplémentaires dans les énoncés). Nous supposerons également que $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$.

Définition 4-1. On définit le lagrangien L_c sur $(\omega, (f, g)) \in \mathcal{M}_+(L^{d,M}) \times [C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)]$ par :

$$\begin{aligned}
L_c(\omega, (f, g)) &= \overbrace{\mu_\omega^0(x) - \mu_\omega^1(x)}{=\mathcal{K}(\omega)} + \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_\omega^1(y) \\
&= \int_{L^{d,M}} (1 + f(\gamma(0)) - [1 + g(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}) d\omega(\gamma) + \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x).
\end{aligned}$$

Supposons que $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ soit un point selle du lagrangien L_c . Autrement dit, pour tout $(\omega, (f, g)) \in \mathcal{M}_+(L^{d,M}) \times [C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)]$, on a :

$$L_c(\omega, (\bar{f}, \bar{g})) \geq L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) \geq L_c(\bar{\omega}, (f, g)).$$

En particulier, on a $L_c(2\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) \geq L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ et $L_c((1/2)\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) \geq L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$, d'où

$$\int_{L^{d,M}} (1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}) d\bar{\omega}(\gamma) = 0.$$

Par conséquent, pour tout $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$, on a

$$\int_{L^{d,M}} (1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}) d\omega(\gamma) \geq \int_{L^{d,M}} (1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}) d\bar{\omega}(\gamma) = 0.$$

La dernière relation étant notamment vrai en prenant comme mesure ω n'importe quelles mesures de Dirac sur $(L^{d,M}, \mathcal{T}(L^{d,M}))$ (ces mesures de Dirac sont bien éléments de $\mathcal{M}_+(L^{d,M})$) on obtient que

$$1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} \geq 0$$

pour tout $\gamma \in L^{d,M}$, i.e. $1 + \bar{f}(x) - [1 + \bar{g}(y)]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} \geq 0$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et tout $\gamma \in L^{d,M}$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, i.e. $1 + \bar{f}(x) \geq (1 + \max\{0, \bar{g}(y)\})e^{-\zeta(|x-y|)}$, autrement dit $(\bar{f}, \bar{g}) \in \mathcal{D}_M$ où, rappelons le (voir le lemme 2-2) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_M &= \left\{ (f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d), 1 + f(\gamma(0)) - (1 + g(\gamma(1)))e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} \geq 0, \forall \gamma \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d) \right\} \\
&= \left\{ (f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d), 1 + f(x) \geq (1 + \max\{0, g(y)\})e^{-\zeta(|x-y|)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^d \mid |x-y| \leq M \right\}.
\end{aligned}$$

Pour finir, pour tout $(f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)$, on a $L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) \geq L_c(\bar{\omega}, (\bar{f} + f, \bar{g} + g))$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_{\bar{\omega}}^1(y) \leq 0$$

ce qui implique $\int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_{\bar{\omega}}^1(y) = 0$ pour tout $g \in C(\mathbb{R}^d)$ (en prenant $f = 0$), i.e. $\mu_0 \geq \mu_{\bar{\omega}}^0$, et $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) \leq 0$ pour tout $f \in C^+(\mathbb{R}^d)$ (en prenant $g = 0$), i.e. $\mu_1 = \mu_{\bar{\omega}}^1$. On a donc :

$$\bar{\omega} \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) = \{\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M}), \mu_0 \geq \mu_{\omega}^0, \mu_1 = \mu_{\omega}^1\}.$$

De plus, du fait que $L_c(\bar{\omega}, ((1/2)\bar{f}, \bar{g})) \leq L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$, on a également $\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x) \geq 0$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x) = 0.$$

Ainsi, tout point selle $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) \in \mathcal{M}_+(L^{d,M}) \times [C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)]$ de L_c vérifie les propriétés (I) :

Propriétés (I) :

1. $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \times \mathcal{D}_M$.

2. $\int_{L^{d,M}} (1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|)ds}) d\bar{\omega}(\gamma) = 0$, autrement dit :

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\bar{f}(x) + 1) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{g}(y) + 1) d\mu_{\bar{\omega}}^1(y).$$

3. $\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)$.

Remarque 4-1. Du fait que $(\bar{f}, \bar{g}) \in \mathcal{D}_M$, la seconde propriété peut aussi se reformuler ainsi : pour $\bar{\omega}$ -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, on a $1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|)ds} = 0$.

Inversement, supposons un point $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ de l'espace $\mathcal{M}_+(L^{d,M}) \times [C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)]$ vérifiant les propriétés (I) ci-dessus. Montrons que $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ est alors un point selle de L_c .

— Comme $(\bar{f}, \bar{g}) \in \mathcal{D}_M$, pour tout $\gamma \in L^{d,M}$, on a

$$1 + \bar{f}(\gamma(0)) \geq (1 + \max\{0, \bar{g}(\gamma(1))\})e^{-\zeta(|\gamma(0) - \gamma(1)|)} \geq [1 + \bar{g}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|)ds},$$

d'où $1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|)ds} \geq 0$. Ainsi, pour tout $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$, on a :

$$\int_{L^{d,M}} (1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{f}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|)ds}) d\omega(\gamma) = \int_{L^{d,M}} (1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|)ds}) d\bar{\omega}(\gamma),$$

d'où $L_c(\omega, (\bar{f}, \bar{g})) \geq L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$.

— Pour tout $(f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)$, on a

$$L_c(\bar{\omega}, (f, g)) = \mathcal{K}(\bar{\omega}) + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x)}_{\leq 0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_{\bar{\omega}}^1(y)}_{=0}$$

$$\leq \mathcal{K}(\bar{\omega})$$

(4-1)

$$= \mathcal{K}(\bar{\omega}) + \overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_{\bar{\omega}}^1(y)}^{=0}$$

$$= L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})).$$

L'ensemble des raisonnements ci-dessus peuvent donc se synthétiser dans la proposition suivante :

Proposition 4-1. Un couple/triplet $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ de l'espace $\mathcal{M}_+(L^{d,M}) \times [C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)]$ est un point selle de L_c si et seulement si il vérifie les propriétés (I).

Remarque 4-2. Les triplets $(\omega, (f, g))$ vérifiant les propriétés (I) forment un ensemble convexe : autrement dit, l'ensemble des points selles de L_c est convexe.

On rappelle (voir (2-4)) que la fonctionnelle $J_{\mu_0, \mu_1} : C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x),$$

pour tout couple $(f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 4-1. De façon générale, si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, on a $\inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \geq \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$.

Preuve : Supposons que $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$ et soient $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ et $(f, g) \in \mathcal{D}_M$. On a donc en particulier

$$\int_{L^{d, M}} f(\gamma(0)) d\omega(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^0(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x)$$

et

$$\int_{L^{d, M}} g(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_\omega^1(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y).$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\omega) &= \int_{L^{d, M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\omega(\gamma) \\ &\geq \int_{L^{d, M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\omega(\gamma) + \underbrace{\int_{L^{d, M}} f(\gamma(0)) d\omega(\gamma) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x)}_{\leq 0} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{L^{d, M}} g(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma)}_{=0} \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x)}_{=J_{\mu_0, \mu_1}(f, g)} + \int_{L^{d, M}} \underbrace{\left(1 + f(\gamma(0)) - [1 + g(\gamma(1))] e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right)}_{\geq 0} d\omega(\gamma) \\ &\geq J_{\mu_0, \mu_1}(f, g), \end{aligned}$$

et ceci pour toute mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ et tout couple $(f, g) \in \mathcal{D}_M$. □

Lemme 4-2. Si le lagrangien L_c admet au moins un point selle $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ (vérifiant donc les propriétés (I)), alors :

- $(\bar{f}, \bar{g}) \in \operatorname{argmax}_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$.
- $\mathcal{K}(\bar{\omega}) = L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) = J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g})$.

Preuve : En effet, pour tout $(f, g) \in \mathcal{D}_M$, on a

$$\begin{aligned} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) \\ &\leq \overbrace{\int_{L^{d, M}} \left(1 + f(\gamma(0)) - [1 + g(\gamma(1))] e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\bar{\omega}(\gamma) + \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x)}^{=L_c(\bar{\omega}, (f, g))} \\ &\leq \overbrace{\int_{L^{d, M}} \left(1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))] e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\bar{\omega}(\gamma) + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)}^{=L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))} \\ &= J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g}). \end{aligned}$$

La relation ci-dessus nous a également montré que $L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) = J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g})$. Par ailleurs, on a également $\mathcal{K}(\bar{\omega}) = L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ par la relation (4-1).

□

Lemme 4-3. *Supposons que le lagrangien L_c admette un point selle $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ (vérifiant donc les propriétés (I)), et soit $(\hat{f}, \hat{g}) \in \mathcal{D}_M$ tel que $(\hat{f}, \hat{g}) \in \underset{\mathcal{D}_M}{\operatorname{argmax}} J_{\mu_0, \mu_1}$.*

Alors $(\bar{\omega}, (\hat{f}, \hat{g}))$ est également un point selle de L_c .

Preuve : En effet, on a alors $J_{\mu_0, \mu_1}(\hat{f}, \hat{g}) = J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g}) = \max_{(f, g) \in \mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g)$.

$$\begin{aligned}
J_{\mu_0, \mu_1}(\hat{f}, \hat{g}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) d\mu_0(x) \\
&\leq \overbrace{\int_{L^{d, M}} \underbrace{(1 + \hat{f}(\gamma(0)) - [1 + \hat{g}(\gamma(1))]) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}}_{\geq 0} d\bar{\omega}(\gamma)}^{=L_c(\bar{\omega}, (\hat{f}, \hat{g}))} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) d\mu_0(x)}_{=J_{\mu_0, \mu_1}(\hat{f}, \hat{g})} \\
&\leq \overbrace{\int_{L^{d, M}} \underbrace{(1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}}_{=0} d\bar{\omega}(\gamma)}^{=L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)}_{=J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g})} \\
&= J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g}) = J_{\mu_0, \mu_1}(\hat{f}, \hat{g}).
\end{aligned}$$

D'où $\int_{L^{d, M}} (1 + \hat{f}(\gamma(0)) - [1 + \hat{g}(\gamma(1))]) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\bar{\omega}(\gamma) = 0$, autrement dit

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\hat{f}(x) + 1) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{g}(y) + 1) d\mu_{\bar{\omega}}^1(y) \left(= \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{g}(y) + 1) d\mu_1(y) \right).$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(\hat{f}(x) + 1) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x)}_{= \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{g}(x) + 1) d\mu_{\bar{\omega}}^1(x)} - \mu_{\bar{\omega}}^0(\mathbb{R}^d) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{g}(x) + 1) d\mu_1(x) - \mu_{\bar{\omega}}^0(\mathbb{R}^d) \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)}_{= \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)} + \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) d\mu_0(x) + \mu_1(\mathbb{R}^d) - \mu_{\bar{\omega}}^0(\mathbb{R}^d) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)}_{= \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x)} + \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) d\mu_0(x) + \mu_1(\mathbb{R}^d) - \mu_{\bar{\omega}}^0(\mathbb{R}^d) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(\bar{g}(y) + 1) d\mu_{\bar{\omega}}^1(y)}_{= \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{g}(y) + 1) d\mu_1(y)} - \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(\bar{f}(x) + 1) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x)}_{=0} + \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) d\mu_0(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) d\mu_0(x).
\end{aligned}$$

Les propriétés (I) sont donc vérifiées par $(\bar{\omega}, (\hat{f}, \hat{g}))$.

□

Proposition 4-2. Soit un couple/triplet $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \times \mathcal{D}_M$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

— On a simultanément les propriétés suivantes :

- $\bar{\omega} \in \underset{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{K}$,
- $(\bar{f}, \bar{g}) \in \underset{\mathcal{D}_M}{\operatorname{argmax}} J_{\mu_0, \mu_1}$,
- $\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$.

— Le couple/triplet $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ est un point selle de L_c .

Preuve :

— Supposons d'abord que $\bar{\omega} \in \underset{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{K}$, $(\bar{f}, \bar{g}) \in \underset{\mathcal{D}_M}{\operatorname{argmax}} J_{\mu_0, \mu_1}$ et $\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$. : pour montrer que $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ est un point selle de L_c , il suffit de montrer que $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ vérifie les propriétés (I). On a

$$\mathcal{K}(\bar{\omega}) = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\int_{L^{d,M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\bar{\omega}(\gamma)}_{=\mathcal{K}(\bar{\omega})} - \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)\right)}_{=J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g})} \\ &= \left(\int_{L^{d,M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\bar{\omega}(\gamma) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x)\right) + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x)\right) \\ &= \int_{L^{d,M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\bar{\omega}(\gamma) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\bar{\omega}(\gamma)}_{=\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(\gamma(0)) d\bar{\omega}(\gamma)}_{=\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x)} + \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\bar{f}(x)}_{\geq 0} d \underbrace{[\mu_0 - \mu_{\bar{\omega}}^0]}_{\geq 0}(x) \\ &= \underbrace{\int_{L^{d,M}} \left(1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))] e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\bar{\omega}(\gamma)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d[\mu_0 - \mu_{\bar{\omega}}^0]}_{\geq 0}(x), \end{aligned}$$

d'où :

- $\int_{L^{d,M}} \left(1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))] e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\bar{\omega}(\gamma) = 0$,
- $\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d[\mu_0 - \mu_{\bar{\omega}}^0](x)$ i.e. $\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)$.

Le couple/triplet $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ vérifie donc bien les propriétés (I).

— Supposons maintenant que $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ soit un point selle de L_c : celui-ci vérifie donc les propriétés (I) et, de plus, on sait que $(\bar{f}, \bar{g}) \in \underset{\mathcal{D}_M}{\operatorname{argmax}} J_{\mu_0, \mu_1}$ d'après le lemme 4-2.

Montrons que $\bar{\omega} \in \underset{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{K}$. Pour tout $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\omega) &= \int_{L^{d,M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\omega(\gamma) \\
&= \int_{L^{d,M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\omega(\gamma) - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y)}_{=\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_\omega^1(y)} + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_\omega^0(x) \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)\right) + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_\omega^0(x)\right) \\
&= \overbrace{\int_{L^{d,M}} \left(1 + \bar{f}(\gamma(0)) - [1 + \bar{g}(\gamma(1))]\right) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma)}^{=L_c(\omega, (\bar{f}, \bar{g}))} + \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x)\right)}_{=J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g})} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d[\mu_0 - \mu_\omega^0](x)}_{\geq 0} \\
&\geq L_c(\omega, (\bar{f}, \bar{g})).
\end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$,

$$\mathcal{K}(\omega) \geq L_c(\omega, (\bar{f}, \bar{g})) \geq L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) = \mathcal{K}(\bar{\omega}) \left(= L_c(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g})) = J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g}) = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \right),$$

i.e. $\bar{\omega} \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}$.

□

Corollaire 4-1. *Supposons que le lagrangien L_c admette un point selle $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$. Alors, pour toute mesure optimale $\omega \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}$ et tout couple $(f, g) \in \operatorname{argmax}_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$, le couple/triplet $(\omega, (f, g))$ est également un point selle de L_c .*

Preuve : On applique directement la proposition 4-2 : l'existence d'au moins un point selle assure la condition

$$\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}.$$

□

4.2 Caractérisations des points selles de L_c et des solutions du problème primal en fonction des solutions du problème dual

4.2.1 Formulation exponentielle du terme dual

Dans toute cette sous-sous-section 4.2.1, nous supposons que $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, convexe et strictement croissante (donc coercive) telle que $\zeta(0) = 0$ (donc continue^a).

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, on notera $\zeta f = \zeta \square(-f)$ (inf-convolution de ζ et $-f$), i.e. ${}^c f$ est désigne la transformée c -concave de f pour un coût défini par $c(x, y) = \zeta(|y - x|)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue élément de \mathcal{F}_ζ (c'est à dire telle que $\zeta f > -\infty$, voir les définitions A-1 et A-2). On définit alors :

— L'ensemble $\partial_\zeta f(x)$ par $\partial_\zeta f(x) = \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [\zeta(|z - x|) - f(z)]$.

— Le domaine $\operatorname{Dom}(\partial_\zeta f)$ de $\partial_\zeta f$ comme l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $\partial_\zeta f(x) \neq \emptyset$.

Pour plus de précisions, nous renvoyons à la définition A-2 et en général à l'annexe A pour toutes les propriétés de l'application $f \mapsto \zeta f$ auxquelles nous ferons appel dans ce document.

Lemme 4-4. *Supposons que le lagrangien L_c admette au moins un point selle $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$.*

Alors il existe une fonction localement lipschitzienne et positive et bornée $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

— $\alpha, \zeta \alpha \in \mathcal{F}_\zeta$, et même $\operatorname{Dom}(\partial_\zeta \alpha) = \operatorname{Dom}(\partial_\zeta \zeta \alpha) = \mathbb{R}^d$.

a. En effet, ζ étant convexe, elle est continue sur \mathbb{R}_{++} avec de plus $0 = \zeta(0) \geq \lim_{0+} \zeta \geq 0$, i.e. $0 = \zeta(0) = \lim_{0+} \zeta$.

- La fonction ζ_α est également localement lipschitzienne, positive et bornée.
- La fonction α est un point fixe de l'opérateur $h \mapsto \zeta_\alpha h$.
- On a $0 \leq \ln(1 + \max\{0, \bar{g}\}) \leq \alpha \leq -\zeta_\alpha \leq \ln(\bar{f} + 1)$ sur $\text{supp}(\mu_0) \cup \text{supp}(\mu_1)$.
- Le triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ est également un point selle de L_c .
- $\bar{f} = e^{-\zeta_\alpha} - 1$ μ_0 -presque partout, et $\bar{g} = e^\alpha - 1$ μ_1 -presque partout.

Preuve : Le couple/triplet $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$ étant un point selle de L_c , celui-ci vérifie donc les propriétés (I). Par hypothèse originelle, les mesures μ_0 et μ_1 sont à support compact, et plus précisément $\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1) \subset B(a, M/2)$. Il existe donc $0 < m < M/2$ tel que $\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1) \subset B(a, m)$.

- Comme $(\bar{f}, \bar{g}) \in \mathcal{D}_M$, il existe d'après le point lemme 2-1 un couple de fonctions $(\bar{f}^1, \bar{g}^1) \in \mathcal{D}_\infty$, tel que les fonctions \bar{f}^1 et \bar{g}^1 soient bornées et tels que $\bar{f}|_{B(a,m)} = \bar{f}^1|_{B(a,m)}$ et $\bar{g}|_{B(a,m)} = \bar{g}^1|_{B(a,m)}$. On a donc

$$\begin{aligned}
J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) d\mu_0(x) = \int_{B(a,m)} \bar{g}(y) d\mu_1(y) - \int_{B(a,m)} \bar{f}(x) d\mu_0(x) \\
&= \int_{B(a,m)} \bar{g}^1(y) d\mu_1(y) - \int_{B(a,m)} \bar{f}^1(x) d\mu_0(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}^1(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}^1(x) d\mu_0(x) \\
&= J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}^1, \bar{g}^1) = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}
\end{aligned} \tag{4-2}$$

(d'après le lemme 4-2), et ainsi, d'après le lemme 4-3, le couple/triplet $(\bar{\omega}, (\bar{f}^1, \bar{g}^1))$ est également un point selle de L_c .

On a donc $\bar{f}^1 + 1 \geq 1$ et $1 + \max\{0, \bar{g}^1\} \geq 1$. Les fonctions $h_f = \ln(\bar{f}^1 + 1)$ et $h_g = \ln(1 + \max\{0, \bar{g}^1\})$ sont donc toutes deux continues, bornées et positives sur \mathbb{R}^d . De plus, celles-ci vérifient donc la relation suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, h_g(y) \leq h_f(x) + \zeta(|x - y|).$$

Du fait de cette relation, on a également $h_f \in \mathcal{F}_\zeta$. D'après la proposition A-1 (en prenant en hypothèse de ce lemme $f \leftarrow h_f$, $g \leftarrow h_g$ et en résultat $\alpha \leftarrow h$), il existe une fonction $\alpha \in C_b(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}_\zeta$ localement lipschitzienne, telle que :

- $\zeta_\alpha \in C_b(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}_\zeta$ soit également localement lipschitzienne,
- α soit le point fixe de l'opérateur $h \mapsto \zeta_\alpha h$,
- $0 \leq h_g \leq \alpha \leq -\zeta_\alpha \leq h_f$.

Bien sûr, par définition de l'opérateur $h \mapsto \zeta_\alpha h$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $\zeta_\alpha(y) \leq \zeta(|y - x|) - \alpha(x)$ d'où $e^{\alpha(x)} \leq e^{-\zeta_\alpha(y)} e^{\zeta(|y-x|)}$. De plus, comme $-\zeta_\alpha \geq \alpha \geq 0$, on a $e^{-\zeta_\alpha} - 1 \geq 0$ et donc $e^{\zeta_\alpha} = 1 + \max\{0, e^{\zeta_\alpha} - 1\}$.

On a donc bien $(e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \in \mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_M$.

- On a $\bar{f}^1 \geq e^{-\zeta_\alpha} - 1 \geq e^\alpha - 1 \geq \max\{0, \bar{g}^1\} \geq \bar{g}^1$, et donc

$$\begin{aligned}
\max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} &= J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}^1, \bar{g}^1) = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}^1(y) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}^1(x) d\mu_0(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(e^{\alpha(y)} - 1)}_{\geq \bar{g}^1} d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(e^{-\zeta_\alpha(x)} - 1)}_{\leq \bar{f}^1} d\mu_0(x) \\
&= J_{\mu_0, \mu_1}(e^\alpha - 1, e^{\zeta_\alpha} - 1) \leq \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1},
\end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\alpha(y)} - 1) d\mu_1(y) - \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta_\alpha(x)} - 1) d\mu_0(x) = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}.$$

Ainsi, d'après le lemme 4-3, le triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ est également un point selle de L_c .

Pour finir, on a

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{[e^{\alpha(y)} - 1 - \bar{g}^1]}_{\geq 0} d\mu_1(y) + \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{[\bar{f}^1 - (e^{-\zeta_\alpha(x)} - 1)]}_{\geq 0} d\mu_0(x) = 0,$$

d'où $\bar{f} = \bar{f}^1 = e^{-\zeta_\alpha} - 1$ μ_0 -presque partout, et $\bar{g} = \bar{g}^1 = e^\alpha - 1$ μ_1 -presque partout, avec de plus

$$\begin{aligned} 0 \leq \ln(1 + \max\{0, \bar{g}(x)\}) &= \ln(1 + \max\{0, \bar{g}^1(x)\}) = h_g(x) \leq \zeta_\alpha(x) \leq \alpha(x) \leq h_f(x) = \ln(\bar{f}^1 + 1) \\ &= \ln(\bar{f}(x) + 1) \end{aligned}$$

pour tout $x \in \text{supp}(\mu_0) \cup \text{supp}(\mu_1) \subset B(a, m)$.

— Pour conclure, comme α et ζ_α sont continues et bornées, et que la fonction ζ est continue et coercive (par hypothèses générales sur cette partie) on a bien $\text{Dom}(\partial_\zeta \alpha) = \text{Dom}(\partial_\zeta \zeta_\alpha) = \mathbb{R}^d$ d'après le lemme A-17.

□

Pour la simplicité des notations, nous allons reformuler le lemme 4-4. Définissons tout d'abord les propriétés (II) comme il suit : une fonction $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés (II) si elle vérifie les propriétés suivantes :

Propriétés (II) :

- α est localement lipschitzienne, positive et bornée (d'où $\text{Dom}(\partial_\zeta \alpha) = \mathbb{R}^d$, et donc bien sûr $\alpha \in \mathcal{F}_\zeta$).
- $\zeta_\alpha = \alpha$.
- $0 \leq \alpha \leq -\zeta_\alpha$.

Définition 4-2. Nous définissons $\text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $\alpha : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés (II).

Nous pouvons reformuler le lemme 4-4 ainsi :

Lemme 4-5. Supposons que le lagrangien L_c admette au moins un point selle $(\bar{\omega}, (\bar{f}, \bar{g}))$.

Alors il existe une fonction $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ telle que :

- Le couple/triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ est également un point selle de L_c .
- $0 \leq \ln(1 + \max\{0, \bar{g}\}) \leq \alpha \leq -\zeta_\alpha \leq \ln(\bar{f} + 1)$ sur $\text{supp}(\mu_0) \cup \text{supp}(\mu_1)$.
- $\bar{f} = e^{-\zeta_\alpha} - 1$ μ_0 -presque partout, et $\bar{g} = e^\alpha - 1$ μ_1 -presque partout.

Remarque 4-3. Si $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ est un point selle de L_c , avec α vérifiant de plus les propriétés (II), il vérifie donc les propriétés (I), que l'on peut par conséquent reformuler ainsi : un couple/triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ est un point selle de L_c s'il vérifie les propriétés (I') suivantes :

Propriétés (I') :

1. $\bar{\omega} \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ et $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$.
2. $\int_{L^{d,M}} (e^{-\zeta_\alpha(\gamma(0))} - e^{\alpha(\gamma(1))}) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\bar{\omega}(\gamma) = 0$, autrement dit :
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\zeta_\alpha(x)} d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha(y)} d\mu_{\bar{\omega}}^1(y).$$
3. $\int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta_\alpha(x)} - 1) d\mu_{\bar{\omega}}^0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta_\alpha(x)} - 1) d\mu_0(x)$.

Définition 4-3. Définissons l'ensemble $\mathcal{D}_{\text{Fix}_{\zeta+}}$ par :

$$\mathcal{D}_{\text{Fix}_{\zeta+}} = \left\{ (e^{-\zeta_\beta} - 1, e^\beta - 1), \beta \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Remarque 4-4. On a $\mathcal{D}_{\text{Fix}_{\zeta+}} \subset \mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_M$, d'où $\sup_{\mathcal{D}_{\text{Fix}_{\zeta+}}} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$.

Remarque 4-5. S'il est immédiat qu'un couple/triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ vérifiant les propriétés (I') vérifie également les propriétés (I) et est donc un point selle de L_c , la réciproque est plus subtile.

En effet, si le couple/triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ est un point selle de L_c , alors d'après la proposition 4-1, il vérifie les propriétés (I) : les points 2. et 3. des propriétés (I') sont alors immédiats. Cependant pour le point 1., si l'on a bien $\bar{\omega} \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, on ne peut pas affirmer que $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$. On peut seulement dire d'après le lemme 4-5, qu'il existe une fonction $\beta \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ telle que $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\beta} - 1, e^\beta - 1))$ soit un point selle de L_c , et qui dans ce cas vérifie donc bien les propriétés (I'), telle que $\zeta_\alpha = \zeta_\beta$ μ_0 -presque partout sur \mathbb{R}^d et $\alpha = \beta$ μ_0 -presque partout sur \mathbb{R}^d .

Lemme 4-6. Soit un couple/triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1)) \in \mathcal{M}_+(L^{d,M}) \times [C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)]$ tel que $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

— On a simultanément les propriétés suivantes :

- $\bar{\omega} \in \underset{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{K}$,
- $(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \in \underset{\mathcal{D}_{Fix+-}}{\operatorname{argmax}} J_{\mu_0, \mu_1}$,
- $\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_{Fix+-}} J_{\mu_0, \mu_1}$.

— Le couple/triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ est un point selle de L_c .

Preuve : On a $(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \in \mathcal{D}_{Fix+-} \subset \mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_M$ (voir la remarque 4-4).

— Supposons que le couple/triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ soit un point selle de L_c . Alors, d'après la proposition 4-2, on a $\bar{\omega} \in \underset{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{K}$, $\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$ et

$$\max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = J_{\mu_0, \mu_1}(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \leq \sup_{\mathcal{D}_{Fix+-}} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1},$$

$$\text{i.e. } J_{\mu_0, \mu_1}(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) = \max_{\mathcal{D}_{Fix+-}} J_{\mu_0, \mu_1} = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}.$$

— Inversement supposons que $\bar{\omega} \in \underset{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{K}$, $(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \in \underset{\mathcal{D}_{Fix+-}}{\operatorname{argmax}} J_{\mu_0, \mu_1}$, et $\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_{Fix+-}} J_{\mu_0, \mu_1}$.

D'après le lemme 4-1, on a $\inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \geq \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$, d'où

$$\inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \geq \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \geq \max_{\mathcal{D}_{Fix+-}} J_{\mu_0, \mu_1} = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K},$$

$$\text{i.e. } \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_{Fix+-}} J_{\mu_0, \mu_1} = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}, \text{ et } (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \in \underset{\mathcal{D}_{Fix+-}}{\operatorname{argmax}} J_{\mu_0, \mu_1} = \underset{\mathcal{D}_M}{\operatorname{argmax}} J_{\mu_0, \mu_1}.$$

Ainsi, d'après la proposition 4-2, le couple/triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ est un point selle de L_c .

□

Remarque 4-6. Pour prolonger la remarque 4-4 : dans le cas général (c'est à dire même quand il n'existe pas de point selle au lagrangien L_c), on a davantage que l'inégalité $\sup_{\mathcal{D}_{Fix+-}} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$. On a en fait toujours

l'égalité :

$$\sup_{\mathcal{D}_{Fix+-}} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}. \quad (4-3)$$

En effet, en reprenant le raisonnement de la preuve du lemme 4-4, il existe $0 < m < M/2$ tel que $\overline{\operatorname{Supp}(\mu_0) \cup \operatorname{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, m)$ et, pour tout $(f, g) \in \mathcal{D}_M$, il existe donc d'après le lemme 2-1 un couple de fonctions $(f^1, g^1) \in \mathcal{D}_\infty$ (les fonctions f^1 et g^1 sont donc notamment bornées), telles que $f|_{B(a, m)} = f^1|_{B(a, m)}$ et $g|_{B(a, m)} = g^1|_{B(a, m)}$, et ainsi $J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = J_{\mu_0, \mu_1}(f^1, g^1)$. De plus, les fonctions $h_f = \ln(\bar{f}^1 + 1)$ et $h_g = \ln(1 + \max\{0, \bar{g}^1\})$ sont continues bornées et positives sur \mathbb{R}^d et vérifient la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, h_g(y) \leq h_f(x) + \zeta(|x - y|).$$

Par la proposition A-1, on peut alors construire une fonction $\alpha \in \operatorname{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ (d'où $(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \in \mathcal{D}_{Fix+-}$), telle que $0 \leq h_g \leq \alpha \leq -\zeta\alpha \leq h_f$ et donc telle que $f^1 \geq e^{-\zeta\alpha} - 1 \geq e^\alpha - 1 \geq \max\{0, g^1\} \geq g^1$, d'où

$$J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = J_{\mu_0, \mu_1}(f^1, g^1) \leq J_{\mu_0, \mu_1}(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \leq \sup_{\mathcal{D}_{Fix+-}} J_{\mu_0, \mu_1},$$

i.e.

$$\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \sup_{\mathcal{D}_{Fix+-}} \leq \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1},$$

d'où l'égalité (4-3).

Lemme 4-7. Supposons que $\operatorname{supp}(\mu_0) \cap \operatorname{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$. Soient une mesure $\omega \in \operatorname{argmin}_{\varpi \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\varpi)$ et une fonction $\alpha \in \operatorname{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ (c'est à dire, rappelons-le, vérifiant les propriétés (II)) telles que le triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ soit un point selle de L_c (si une telle fonction α existe).

En reprenant la remarque 4-1, le deuxième point des propriétés (I) peut se reformuler ainsi : pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d, M}$, on a

- $\zeta\alpha(\gamma(0)) = \zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) - \alpha(\gamma(1))$,
- $\gamma(t) = (1 - t)\gamma(0) + t\gamma(1)$, pour tout $t \in [0, 1]$, i.e. $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})$ (voir la définition 2-10).

Preuve : En effet, d'après le deuxième point des propriétés (I) et la remarque 4-3), on a

$$\int_{L^{d,M}} \underbrace{\left(e^{-\zeta\alpha(\gamma(0))} - e^{\alpha(\gamma(1))} e^{-\zeta(|\gamma(1)-\gamma(0)|)} \right)}_{\geq 0} + e^{\alpha(\gamma(1))} \underbrace{\left(e^{-\zeta(|\gamma(1)-\gamma(0)|)} - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} \right)}_{\geq 0} d\omega(\gamma) = 0.$$

En reprenant la remarque 4-1, on a donc $e^{-\zeta\alpha(\gamma(0))} - e^{\alpha(\gamma(1))} e^{-\zeta(|\gamma(1)-\gamma(0)|)} = 0$, i.e. $-\zeta\alpha(\gamma(0)) = \alpha(\gamma(1)) - \zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|)$, pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$.

De même, pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, on a donc $e^{-\zeta(|\gamma(1)-\gamma(0)|)} - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} = 0$.

D'où $\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) - \int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds = 0$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$.

Or, du fait que ζ est convexe et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on a (par inégalité de Jensen) :

$$\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) = \zeta\left(\left|\int_0^1 \gamma'(s) ds\right|\right) \leq \zeta\left(\int_0^1 |\gamma'(s)| ds\right) \leq \int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds = \zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|).$$

D'où $\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) = \zeta\left(\int_0^1 |\gamma'(s)| ds\right)$: comme ζ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , donc bijective, on a $|\gamma(1) - \gamma(0)| = \int_0^1 |\gamma'(s)| ds$.

Ainsi, pour ω -presque tout γ (c'est à dire aux chemins γ auxquels la mesure ω "alloue de la masse"), γ est une interpolation linéaire (i.e. $\gamma(t) = (1-t)\gamma(0) + t\gamma(1)$), i.e. $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$.

□

Remarque 4-7. En gardant les mêmes hypothèses sur ζ , si α une fonction continue et positive (d'où $\alpha \in \mathcal{F}_\zeta$), la fonction $y \mapsto \zeta(|x-y|) - \zeta\alpha(y)$ est continue et coercive pour tout $x \in \mathbb{R}^d$: elle admet donc au moins un minimum global sur \mathbb{R}^d , i.e. $\underset{y \in \mathbb{R}^d}{\text{argmin}} [\zeta(|x-y|) - \zeta\alpha(y)] = \partial_\zeta \zeta\alpha(x) \neq \emptyset$ (voir la définition A-3). Autrement dit, dans ces conditions, on a $\text{Dom}(\partial_\zeta \alpha) = \mathbb{R}^d$.

Si $(\omega, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ un point selle de L_c , alors, d'après le lemme 4-7, pour ω -presque tout chemin $\gamma \in L^{d,M}$ (qui sont donc ω -presque tous des interpolations linéaires), on a

- $\gamma(0) \in \underset{y \in \mathbb{R}^d}{\text{argmin}} [\zeta(|\gamma(1) - y|) - \zeta\alpha(y)] = \partial_\zeta \zeta\alpha(\gamma(1))$,
- et inversement $\gamma(1) \in \underset{y \in \mathbb{R}^d}{\text{argmin}} [\zeta(|\gamma(0) - y|) - \alpha(y)] = \partial_\zeta \alpha(\gamma(0))$ (du fait que $\zeta\alpha(\gamma(0)) = \zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) - \alpha(\gamma(1))$).

4.2.2 Caractérisation des solutions du problème primal en fonction des solutions du problème dual lorsque ζ est strictement convexe et assez régulière

Dans toute cette sous-sous-section 4.2.2, nous supposons que $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , strictement convexe telle que $\zeta(0) = 0$ (et donc strictement croissante et coercive).

On définit l'ensemble $\text{Dom}(\nabla_\zeta f)$ des points $x \in \mathbb{R}^d$ en lesquels $\partial_\zeta f(x)$ admet un unique élément, que l'on notera $\nabla_\zeta f(x)$, i.e. $\partial_\zeta f(x) = \{\nabla_\zeta f(x)\}$ (voir la définition A-3).

Lemme 4-8. Supposons que $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$. Soient une mesure $\omega \in \underset{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}{\text{argmin}} \mathcal{K}$ et une fonction $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ telles que le triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ soit un point selle de L_c (si un tel couple (ω, α) existe).

Alors $\text{Dom}(\partial_\zeta \alpha) = \mathbb{R}^d$ et, pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$,

- la fonction $\zeta\alpha$ est Fréchet-différentiable en $\gamma(0)$,
- on a $\gamma(0) \in \text{Dom}(\nabla_\zeta \alpha)$,
- on a $\gamma(1) = \nabla_\zeta \alpha(\gamma(0))$, i.e.
 - si $\gamma(0) \in \partial_\zeta \alpha(\gamma(0))$ (i.e. $\zeta\alpha(\gamma(0)) = -\alpha(\gamma(0))$), alors $\gamma(1) = \gamma(0)$,
 - si $\gamma(0) \notin \partial_\zeta \alpha(\gamma(0))$ (i.e. $\zeta\alpha(\gamma(0)) \neq -\alpha(\gamma(0))$), alors $\nabla_x \zeta\alpha(\gamma(0)) \neq 0$ et

$$\gamma(1) = \gamma(0) - \frac{(\zeta')^{-1}(|\nabla_x \zeta\alpha(\gamma(0))|)}{|\nabla_x \zeta\alpha(\gamma(0))|} \nabla_x \zeta\alpha(\gamma(0)).$$

Preuve : D'après la proposition A-2, on a $\text{Dom}(\partial_\zeta \alpha) = \mathbb{R}^d$ et la fonction $\zeta\alpha$ est Fréchet-différentiable en \mathcal{L}^d -presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$. En chacun des points x où $\zeta\alpha$ est Fréchet-différentiable, on a $x \in \text{Dom}(\nabla_\zeta \alpha)$, avec :

- $\nabla_\zeta \alpha(x) = x$, si $x \in \partial_\zeta \alpha(x)$ (i.e. $\zeta\alpha(x) = -\alpha(x)$),

$$\begin{aligned}
-\nabla_{\zeta}\alpha(x) &= x + \frac{(\zeta')^{-1}(|-\nabla_x\zeta\alpha(x)|)}{|-\nabla_x\zeta\alpha(x)|}(-\nabla_x\zeta\alpha(x)) \\
&= x - \frac{(\zeta')^{-1}(|\nabla_x\zeta\alpha(x)|)}{|\nabla_x\zeta\alpha(x)|} \underbrace{\nabla_x\zeta\alpha(x)}_{\neq 0},
\end{aligned}$$

si $x \notin \partial_{\zeta}\alpha(x)$ (i.e. $\zeta\alpha(x) \neq -\alpha(x)$).

Soit A le sous-ensemble de \mathbb{R}^d des points x pour lesquels $\zeta\alpha$ n'est pas différentiable en x , et soit A_{ω} le sous-ensemble de $L^{d,M}$ des chemins γ pour lesquels $\zeta\alpha$ n'est pas différentiable en $\gamma(0)$: on a donc $A_{\omega} = \pi_0^{-1}(A)$. Comme la fonction α vérifie les propriétés (II), la fonction $\zeta\alpha$ est notamment localement lipschitzienne, et donc Fréchet-différentiable \mathcal{L}^d -presque partout sur \mathbb{R}^d (d'après le théorème de 2-2), i.e. $\mathcal{L}^d(A) = 0$. Comme de plus $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$, on a donc également $\mu_0(A) = 0$, d'où $\mu_{\omega}^0(A) = 0$ (car $\mu_{\omega}^0 \leq \mu_0$). Ainsi,

$$\omega(A_{\omega}) = \omega(\pi_0^{-1}(A)) = (\pi_0\#\omega)(A) = \mu_{\omega}^0(A) = 0.$$

Ainsi, en reprenant le lemme 4-7 et la remarque 4-7, pour ω -presque tout chemin $\gamma \in L^{d,M}$, on a $\gamma(1) = \partial_{\zeta}\alpha(\gamma(0)) = \{\nabla_{\zeta}\alpha(\gamma(0))\}$, ce qui permet de conclure la preuve. \square

On rappelle que l'opérateur $\Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow (L^{d,M}, d_{\infty})$ est défini par $\Gamma(x, y) = \gamma_{x,y}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, où $\gamma_{x,y}$ représente le chemin d'interpolation linéaire entre x et y , i.e. $\gamma_{x,y}(t) = (1-t)x + ty$ pour tout $t \in [0, 1]$ (voir la définition 2-11).

Lemme 4-9. *Supposons que $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$. Soient une mesure $\omega \in \text{argmin}_{\varpi \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\varpi)$ et une fonction $\alpha \in \text{Fix}_{\zeta}(\mathbb{R}^d)$ telles que le triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^{\alpha} - 1))$ soit un point selle de L_c (si un tel couple (ω, α) existe).*

Alors $\omega = \Gamma \circ (\text{I}, \nabla_{\zeta}\alpha) \#\mu_{\omega}^0$.

Preuve : D'après le lemme 4-7, on a $\omega \in \mathcal{M}_+(\text{IntLin}) \subset \mathcal{M}_+(L^{d,M})$, où $\mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ désigne, rappelons-le (voir la définition 2-10), le sous-ensemble des mesures de $\mathcal{M}_+(L^{d,M})$ à support dans IntLin (ensemble des interpolations linéaires).

Or, pour tout chemin $\gamma \in \text{IntLin}$, on a $\gamma = \Gamma(\gamma(0), \gamma(1))$. Ainsi, pour toute fonction continue F sur $(L^{d,M}, d_{\infty})$ à valeur dans \mathbb{R} , on a

$$\int_{L^{d,M}} F(\gamma) d\omega(\gamma) = \int_{\text{IntLin}} F(\gamma) d\omega(\gamma).$$

D'après le lemme 4-8, pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, la fonction $\zeta\alpha$ est Fréchet-différentiable en $\gamma(0)$, $\gamma(0) \in \text{Dom}(\nabla_{\zeta}\alpha)$ et $\gamma(1) = \nabla_{\zeta}\alpha(\gamma(0))$. Ainsi, pour toute fonction continue F sur $(L^{d,M}, d_{\infty})$ à valeur dans \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned}
\int_{L^{d,M}} F(\gamma) d\omega(\gamma) &= \int_{\text{IntLin}} F(\Gamma(\gamma(0), \gamma(1))) d\omega(\gamma) \\
&= \int_{\text{IntLin}} F(\Gamma(\gamma(0), \nabla_{\zeta}\alpha(\gamma(0)))) d\omega(\gamma) \\
&= \int_{L^{d,M}} F(\Gamma(\gamma(0), \nabla_{\zeta}\alpha(\gamma(0)))) d\omega(\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} F(\Gamma(x, \nabla_{\zeta}\alpha(x))) d[\pi_0\#\omega](x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} F(\Gamma(x, \nabla_{\zeta}\alpha(x))) d\mu_{\omega}^0(x).
\end{aligned}$$

\square

Lemme 4-10. *Soit une fonction $\alpha \in \text{Fix}_{\zeta}(\mathbb{R}^d)$ et une mesure borélienne finie ν sur \mathbb{R}^d à support compact. On définit la mesure*

$$\omega = \Gamma \circ (\text{I}, \nabla_{\zeta}\alpha) \#\nu.$$

Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\mu_{\omega}^t = ((1-t)\text{I} + t\nabla_{\zeta}\alpha) \# (e^{-t\zeta(\text{I} - \nabla_{\zeta}\alpha)}\nu)$.

Preuve : Tout d'abord, remarquons que d'après le lemme 2-9, l'opérateur Γ est continu, et que l'opérateur $\nabla_\zeta \alpha$ est borélien d'après le lemme 4-8 : ainsi la mesure ω est borélienne sur $L^{d,M}$.

Ensuite, remarquons que l'on a : $\Gamma \circ (x, \nabla_\zeta \alpha(x)) (t) = (1-t)x + t\nabla_\zeta \alpha(x)$, i.e.

$$\pi_t \circ \Gamma \circ (\mathbf{I}, \nabla_\zeta \alpha) = (1-t)\mathbf{I} + t\nabla_\zeta \alpha,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \in [0, 1]$.

Par ailleurs, par définition de Γ , on a $[\Gamma \circ (\mathbf{I}, \nabla_\zeta \alpha)]^{-1} (L^{d,M} \setminus \text{IntLin}) = \emptyset$: d'où, pour tout borélien A :

$$\omega(A) = \nu([\Gamma \circ (\mathbf{I}, \nabla_\zeta \alpha)]^{-1}(A)) = \nu([\Gamma \circ (\mathbf{I}, \nabla_\zeta \alpha)]^{-1}(A \cap \text{IntLin})) = \omega(A \cap \text{IntLin}),$$

Ainsi, pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, on a $\gamma : t \mapsto (1-t)\gamma(0) + t\gamma(1)$, d'où $\gamma' \equiv \gamma(1) - \gamma(0) = (\pi_1 - \pi_0)(\gamma)$ (rappelons que la fonction $\pi_1 - \pi_0$ est continue de $(L^{d,M}, d_\infty)$ dans \mathbb{R}^d).

Soit $t \in [0, 1]$, et soit $f \in C(\mathbb{R}^d)$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^t(x) &= \int_{L^{d,M}} f(\gamma(t)) e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) \\ &= \int_{\text{IntLin}} f(\gamma(t)) e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) \\ &= \int_{\text{IntLin}} f(\gamma(t)) e^{-t\zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|)} d\omega(\gamma) \\ &= \int_{\text{IntLin}} f(\pi_t(\gamma)) e^{-t\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)} d\omega(\gamma) \\ &= \int_{L^{d,M}} f(\pi_t(\gamma)) e^{-t\zeta(|\pi_1(\gamma) - \pi_0(\gamma)|)} d\omega(\gamma) \\ &= \int_{L^{d,M}} f(\pi_t(\Gamma(y, \nabla_\zeta \alpha(y)))) e^{-t\zeta(|\pi_1(\Gamma(y, \nabla_\zeta \alpha(y))) - \pi_0(\Gamma(y, \nabla_\zeta \alpha(y)))|)} d\nu(y) \\ &= \int_{L^{d,M}} f((1-t)y + t\nabla_\zeta \alpha(y)) e^{-t\zeta(|\nabla_\zeta \alpha(y) - y|)} d\nu(y), \end{aligned}$$

et ceci pour tout $f \in C(\mathbb{R}^d)$ et tout $t \in [0, 1]$. □

Proposition 4-3. *Supposons que $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$. Soient une mesure $\omega \in \text{argmin}_{\varpi \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\varpi)$ et une fonction $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ tels que le triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ soit un point selle de L_c (si un tel couple (ω, α) existe).*

Alors $\mu_\omega^0 = \mathbb{1}_{\zeta\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{-})} \mu_0$.

Preuve : Nous allons montrer que $-\zeta\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{++}) \stackrel{\mu_0}{\approx} V_\omega$ (où l'ensemble V_ω est défini par la proposition 3-1).

— Montrons tout d'abord que $-\zeta\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{++}) \stackrel{\mu_0}{\prec} V_\omega$. Le triplet $(\omega, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ étant un point selle de L_c , celui-ci vérifie les propriétés (I), notamment :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(e^{-\zeta\alpha(x)} - 1)}_{\geq 0} d[\mu_0 - \mu_\omega^0](x) = 0,$$

d'où $e^{-\zeta\alpha(x)} - 1 = 0$, i.e. $-\zeta\alpha(x) = 0$, pour $[\mu_0 - \mu_\omega^0]$ -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. Or, les hypothèses de la proposition 4-3 vérifient celles de la proposition 3-1 d'après laquelle il existe un borélien V_ω de \mathbb{R}^d tel que $\mu_\omega^0 = \mathbb{1}_{V_\omega} \mu_0$, d'où $\mu_0 - \mu_\omega^0 = (1 - \mathbb{1}_{V_\omega}) \mu_0$. Ou formulé autrement :

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta\alpha(x)} - 1) d[\mu_0 - \mu_\omega^0](x) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta\alpha(x)} - 1) (1 - \mathbb{1}_{V_\omega}(x)) d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus V_\omega} \underbrace{(e^{-\zeta\alpha(x)} - 1)}_{\geq 0} d\mu_0(x),$$

d'où $e^{-\zeta\alpha(x)} - 1 = 0$, i.e. $-\zeta\alpha(x) = 0$, pour μ_0 -presque tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus V_\omega$, i.e. $\mu_0(-\zeta\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{++}) \setminus V_\omega) = 0$, c'est à dire que

$$-\zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{++}) \stackrel{\mu_0}{\prec} V_\omega \quad (4-4)$$

(voir la définition B-10).

— Nous allons ensuite montrer dans les points suivants que $V_\omega \stackrel{\mu_0}{\prec} -\zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{++})$. Soit $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, et soit A un borélien de \mathbb{R}^d vérifiant $\mu_1(A) = 0$. On a ainsi

$$0 = \mu_1(A) = \mu_\omega^1(A) = \int_{\pi_1^{-1}(A)} e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) = \int_{L^{d,M}} \underbrace{\mathbb{1}_A(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}}_{\geq 0} d\omega(\gamma),$$

i.e. $\mathbb{1}_A(\gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} = 0$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, autrement dit $\mathbb{1}_A(\gamma(1)) = 0$, c'est à dire $\gamma(1) \in \mathbb{R}^d \setminus A$, pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$.

Ainsi, comme bien sûr $\mu_1(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_1)) = 0$, on a $\gamma(1) \in \text{Supp}(\mu_1)$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$.

De même, on a

$$\omega[\pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_0))] = (\pi_0 \# \omega)(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_0)) = \mu_0(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu_0)) = 0,$$

i.e. $\gamma(0) \in \text{Supp}(\mu_0)$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$.

Ainsi, si de plus $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$, on a alors $\gamma(0) \neq \gamma(1)$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, i.e. $\omega((\pi_1 - \pi_0)^{-1}(\{0\})) = 0$.

— Comme la fonction α vérifie les propriétés (II), on a notamment $0 \leq \alpha \leq -\zeta_\alpha$. Ainsi, si $\zeta_\alpha(x) = 0$, on a également $\alpha(x) = 0$.

Soit $\text{Diff}_\omega^0(\zeta_\alpha)$ l'ensemble des chemins de $\gamma \in L^{d,M}$ pour lesquels ζ_α est Fréchet-différentiable en $\gamma(0)$. D'après le lemme 4-8, on a $\text{Diff}_\omega^0(\zeta_\alpha) \stackrel{\omega}{\approx} L^{d,M}$, et ainsi $\omega(A) = \omega(A \cap \text{Diff}_\omega^0(\zeta_\alpha))$ pour tout borélien A de $L^{d,M}$.

Supposons que $\pi_0^{-1}(\zeta_\alpha^{-1}(\{0\})) \cap \text{Diff}_\omega^0(\zeta_\alpha) \neq \emptyset$ et soit $\gamma \in \pi_0^{-1}(\zeta_\alpha^{-1}(\{0\})) \cap \text{Diff}_\omega^0(\zeta_\alpha)$: on a donc $\alpha(\gamma(0)) = \zeta_\alpha(\gamma(0)) = 0$, i.e. $\gamma(0) \in \partial_{\zeta_\alpha}(\gamma(0))$. Ainsi, toujours d'après le lemme 4-8, on a $\gamma(1) = \gamma(0)$. Autrement dit, on a dans tous les cas (dont celui où $\pi_0^{-1}(\zeta_\alpha^{-1}(\{0\})) \cap \text{Diff}_\omega^0(\zeta_\alpha) = \emptyset$) :

$$\pi_0^{-1}(\zeta_\alpha^{-1}(\{0\})) \cap \text{Diff}_\omega^0(\zeta_\alpha) \subset (\pi_1 - \pi_0)^{-1}(\{0\})$$

Ainsi, si $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$, on a $\omega((\pi_1 - \pi_0)^{-1}(\{0\})) = 0$ (point précédent), et donc

$$\begin{aligned} 0 = \omega((\pi_1 - \pi_0)^{-1}(\{0\})) &\geq \omega(\pi_0^{-1}(\zeta_\alpha^{-1}(\{0\})) \cap \text{Diff}_\omega^0(\zeta_\alpha)) = \omega(\pi_0^{-1}(\zeta_\alpha^{-1}(\{0\}))) = \mu_\omega^0(\zeta_\alpha^{-1}(\{0\})) \\ &= \mu_0(V_\omega \cap \zeta_\alpha^{-1}(\{0\})) \\ &= \mu_0(V_\omega \setminus \zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{--})) \geq 0, \end{aligned}$$

i.e. $\mu_0(V_\omega \setminus \zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{--})) = 0$. On a donc

$$V_\omega \stackrel{\mu_0}{\prec} \zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{--}). \quad (4-5)$$

La relation $\stackrel{\mu_0}{\prec}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des boréliens. Ainsi, par propriété d'anti-symétrie du fait des relations (4-4) et (4-5), on a

$$V_\omega \stackrel{\mu_0}{\approx} \zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{--}).$$

(voir la définition B-9). Ainsi, d'après le lemme B-17, pour tout borélien A de \mathbb{R}^d , on a

$$\mu_\omega^0(A) = \mu_0(A \cap V_\omega) = \mu_0(A \cap \zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{--})),$$

i.e. $\mu_\omega^0 = \mathbb{1}_{V_\omega} \mu_0 = \mathbb{1}_{\zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0$.

□

Proposition 4-4. *Supposons que $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$. Soient une mesure $\omega \in \text{argmin}_{\varpi \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\varpi)$ et une fonction $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ (i.e. vérifiant les propriétés (II)), telles que le couple/triplet $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta_\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ soit un point selle de L_c (si un tel couple (ω, α) existe).*

Alors on a

- $\omega = \Gamma \circ (\text{I}, \nabla_\zeta \alpha) \# (\mathbb{1}_{\zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0)$.
- $\mu_\omega^t = ((1-t)\text{I} + t\nabla_\zeta \alpha) \# (e^{-t\zeta(|\nabla_\zeta \alpha - \text{I}|)} \mathbb{1}_{\zeta_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Preuve : D'après le lemme 4-10, on a $\omega = \Gamma \circ (\mathbf{I}, \nabla_\zeta \alpha) \# \mu_\omega^0$, et, d'après le lemme 4-10, on a

$$\mu_\omega^t = ((1-t)\mathbf{I} + t\nabla_\zeta \alpha) \# \left(e^{-t\zeta(|\nabla_\zeta \alpha - \mathbf{I}|)} \mu_\omega^0 \right).$$

Par ailleurs, d'après la proposition 4-3, on a $\mu_\omega^0 = \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0$, ce qui permet de conclure immédiatement les deux points de la proposition. \square

Proposition 4-5. *Supposons que $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$. Soient une mesure $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$ et une fonction $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$.*

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le couple/triplet $(\omega, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ est un point selle de L_c .
2. $\omega \in \underset{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}{\text{argmin}} \mathcal{K}$, $\underset{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)}{\min} \mathcal{K} = \underset{\mathcal{D}_{\text{Fix}x+-}}{\max} J_{\mu_0, \mu_1}^a$ et $(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \in \underset{\mathcal{D}_{\text{Fix}x+-}}{\text{argmax}} J_{\mu_0, \mu_1}$.
3. $\omega = \Gamma \circ (\mathbf{I}, \nabla_\zeta \alpha) \# (\mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0)$ et $\mu_\omega^1 = \mu_1$.
4. $\mu_\omega^t = ((1-t)\mathbf{I} + t\nabla_\zeta \alpha) \# \left(e^{-t\zeta(|\nabla_\zeta \alpha - \mathbf{I}|)} \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0 \right)$ pour tout $t \in [0, 1]$, et $\mu_\omega^1 = \mu_1$.

Preuve : Bien sûr l'équivalence entre le point 1. et le point 2. est déjà établi par le lemme 4-6. Traitons les autres équivalences :

- **1. \implies 3.** Supposons que $(\bar{\omega}, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ soit un point selle de L_c . Alors, d'après le lemme 4-10, on a $\omega = \Gamma \circ (\mathbf{I}, \nabla_\zeta \alpha) \# \mu_\omega^0$. Par ailleurs, d'après la proposition 4-3, on a $\mu_\omega^0 = \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0$. Pour finir, l'équivalence entre le point 1. et le point 2. implique en particulier que $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, et donc $\mu_\omega^1 = \mu_1$, ce qui permet de conclure le point 3.
- **3. \implies 4.** Supposons que $\omega = \Gamma \circ (\mathbf{I}, \nabla_\zeta \alpha) \# (\mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0)$. D'après le lemme 4-10, on a immédiatement

$$\mu_\omega^t = ((1-t)\mathbf{I} + t\nabla_\zeta \alpha) \# \left(e^{-t\zeta(|\nabla_\zeta \alpha - \mathbf{I}|)} \mu_\omega^0 \right).$$

- **4. \implies 2.** Supposons que $\mu_\omega^t = ((1-t)\mathbf{I} + t\nabla_\zeta \alpha) \# \left(e^{-t\zeta(|\nabla_\zeta \alpha - \mathbf{I}|)} \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0 \right)$ pour tout $t \in [0, 1]$, et que l'on ait $\mu_\omega^1 = \mu_1$. On a en particulier

$$\mu_\omega^0 = ((1-0)\mathbf{I} + 0\nabla_\zeta \alpha) \# \left(e^{-0\zeta(|\nabla_\zeta \alpha - \mathbf{I}|)} \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0 \right) = \mathbf{I} \# (\mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0) = \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0 \leq \mu_0,$$

et ainsi $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$. Par ailleurs, on a $\mu_\omega^1 = (\nabla_\zeta \alpha) \# \left(e^{-\zeta(|\nabla_\zeta \alpha - \mathbf{I}|)} \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0 \right)$, et ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha(x)} d\mu_1(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha(x)} d\mu_\omega^1(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha(\nabla_\zeta \alpha(x))} e^{-\zeta(|\nabla_\zeta \alpha(x) - \mathbf{I}|)} \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})}(x) d\mu_0(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overbrace{e^{\alpha(\nabla_\zeta \alpha(x)) - \zeta(|\nabla_\zeta \alpha(x) - \mathbf{I}|)}}^{= -\zeta\alpha(x)} \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})}(x) d\mu_0(x) \quad (4-6) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\zeta\alpha(x)} \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})}(x) d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\zeta\alpha(x)} d\mu_\omega^0(x). \end{aligned}$$

Remarquons également que l'on a $e^{-\zeta\alpha} - 1 = (e^{-\zeta\alpha} - 1) \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})}$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta\alpha(x)} - 1) d\mu_\omega^0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta\alpha(x)} - 1) \mathbb{1}_{\zeta_{\alpha^{-1}}(\mathbb{R}_{--})}(x) d\mu_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta\alpha(x)} - 1) d\mu_0(x), \quad (4-7)$$

et ainsi :

a. Voir la définition 4-3.

$$\begin{aligned}
J_{\mu_0, \mu_1} (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) &= \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\alpha(x)} - 1) d\mu_1(x) - \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta\alpha(x)} - 1) d\mu_0(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\alpha(x)} - 1) d\mu_\omega^1(x) - \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-\zeta\alpha(x)} - 1) d\mu_\omega^0(x) \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha(x)} d\mu_\omega^1(x)}_{= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\zeta\alpha(x)} d\mu_\omega^0(x)} - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\zeta\alpha(x)} d\mu_\omega^0(x) + \underbrace{\mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) - \mu_\omega^1(\mathbb{R}^d)}_{=\mathcal{K}(\omega)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\zeta\alpha(x)} d\mu_\omega^0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\zeta\alpha(x)} d\mu_\omega^0(x) + \mathcal{K}(\omega) \\
&= \mathcal{K}(\omega).
\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 4-1, on a $\inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \geq \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$, et d'après la remarque 4-5, on a $\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \geq \sup_{\mathcal{D}_{Fix+}} J_{\mu_0, \mu_1}$. On peut donc conclure :

$$\mathcal{K}(\omega) \geq \inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \geq \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \geq \sup_{\mathcal{D}_{Fix+}} J_{\mu_0, \mu_1} \geq J_{\mu_0, \mu_1} (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) = \mathcal{K}(\omega),$$

d'où

$$\mathcal{K}(\omega) = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = \max_{\mathcal{D}_{Fix+}} J_{\mu_0, \mu_1} = J_{\mu_0, \mu_1} (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1).$$

□

Remarque 4-8. Sous les mêmes hypothèses que la proposition 4-5, si les assertions équivalentes de celle-ci sont vérifiées, alors

$$\emptyset \neq \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K}.$$

Ceci découle en effet immédiatement de la troisième assertion de la proposition 4-5, ou encore du lemme 4-7.

Lemme 4-11. Supposons que $\operatorname{supp}(\mu_0) \cap \operatorname{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$. Supposons qu'il existe deux mesures $\omega_1, \omega_2 \in \operatorname{argmin}_{\varpi \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}(\varpi)$ et deux fonctions $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ telles que les deux couples/triplets $(\overline{\omega}_1, (e^{-\zeta\alpha_1} - 1, e^{\alpha_1} - 1))$ et $(\overline{\omega}_2, (e^{-\zeta\alpha_2} - 1, e^{\alpha_2} - 1))$ soient deux points selles de L_c .

Alors on a

$$\omega_1 = \omega_2 = \Gamma \circ (\operatorname{I}, \nabla_\zeta \alpha_1) \# (\mathbb{1}_{[\zeta\alpha_1]^{-1}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0) = \Gamma \circ (\operatorname{I}, \nabla_\zeta \alpha_2) \# (\mathbb{1}_{[\zeta\alpha_2]^{-1}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0) \quad (4-8)$$

(donc notamment unicité de la solution du problème primal^a sur $L^{d, M}$).

Preuve : D'après la proposition 4-5, si $(\overline{\omega}_1, (e^{-\zeta\alpha_1} - 1, e^{\alpha_1} - 1))$ et $(\overline{\omega}_2, (e^{-\zeta\alpha_2} - 1, e^{\alpha_2} - 1))$ sont deux points selles de L_c , alors on a $\omega_1, \omega_2 \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}$, $(e^{-\zeta\alpha_1} - 1, e^{\alpha_1} - 1), (e^{-\zeta\alpha_2} - 1, e^{\alpha_2} - 1) \in \operatorname{argmax}_{\mathcal{D}_{Fix+}} J_{\mu_0, \mu_1}$ et $\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_{Fix+}} J_{\mu_0, \mu_1}$. Ainsi, d'après la même proposition 4-5, on a bien

$$\omega_1 = \Gamma \circ (\operatorname{I}, \nabla_\zeta \alpha_2) \# (\mathbb{1}_{[\zeta\alpha_2]^{-1}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \Gamma \circ (\operatorname{I}, \nabla_\zeta \alpha_1) \# (\mathbb{1}_{[\zeta\alpha_1]^{-1}(\mathbb{R}_{--})} \mu_0).$$

□

Remarque 4-9. Le lemme 4-11 illustre en fait le phénomène de "croisement des points selles", que l'on peut formuler ainsi :

Soient deux ensembles E et F , et soit une fonction $L : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ disposant de deux points selles $(u_1, p_1), (u_2, p_2) \in E \times F$, i.e tels que pour tout $u \in E$ et tout $p \in F$, on ait

$$L(u_i, p) \leq L(u_i, p_i) \leq L(u, p_i)$$

pour $i \in \{1, 2\}$. Alors (u_1, p_2) et (u_2, p_1) sont également des points selles de L .

En effet, on a $L(u_1, p_1) \leq L(u_2, p_1) \leq L(u_2, p_2) \leq L(u_1, p_2) \leq L(u_1, p_1)$, i.e.

^a. Définition 2-5.

$$L(u_1, p_1) = L(u_2, p_1) = L(u_2, p_2) = L(u_1, p_2).$$

Ainsi, pour tous $u \in E$ et $p \in F$, on a

$$L(u_1, p) \leq L(u_1, p_1) = L(u_1, p_2) = L(u_2, p_2) \leq L(u, p_2) \quad \text{et} \quad L(u_2, p) \leq L(u_2, p_2) = L(u_2, p_1) = L(u_1, p_1) \leq L(u, p_1).$$

4.3 Existence d'un point selle au lagrangien L_c

Dans cette sous-section, on se place sous les hypothèses d'origine : on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, M/2).$$

4.3.1 Approximation d'indicatrices par des fonctions continues positives à support compact (Théorème de Lusin)

Nous rappelons l'énoncé du théorème de Lusin dont :

Théorème 4-1 (Théorème de Lusin [32]). *Soit X un espace topologique non-vide, séparé et localement compact, et soit μ une mesure de Radon sur X . Soit A un borélien de X tel que $\mu(A) < +\infty$, et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne positive sur X , nulle en dehors de A .*

Alors il existe une fonction $g \in C_c(X)$ telle que $|g| \leq \sup_X |f|$ et telle que

$$\mu(\{x \in X, g(x) \neq f(x)\}) < \epsilon.$$

On peut trouver la preuve du théorème de Lusin dans [32] (nous ne la reproduisons pas ici). Cependant, nous souhaiterions expliciter, par le lemme qui suit, le cas où nous voudrions approcher, via le théorème de Lusin, des fonctions indicatrices de boréliens par des fonctions continues **positives** à support compact.

Lemme 4-12. *Soit X un espace topologique non-vide, séparé et localement compact. Soit μ une mesure de Radon positive sur X . Soit A un borélien de X tel que $\mu(A) < +\infty$, et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne positive sur X , nulle en dehors de A .*

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $g \in C_c^+(X)$ telle que $\mu(\{x \in X, g(x) \neq f(x)\}) < \epsilon$ et telle que $0 \leq g \leq \sup_X |f|$.

En corollaire, si de plus $\sup_X |f| < +\infty$, il existe une suite $(g_n)_n$ de fonctions de $C_c^+(X)$ convergeant simplement μ -presque partout vers f et vérifiant $0 \leq g_n \leq \sup_X |f|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour prouver le lemme 4-12, nous allons d'abord montrer le petit résultat suivant (tiré également de [31]) :

Lemme 4-13 (Voir [31]). *Soit (X, \mathcal{T}) un ensemble mesurable non vide, et soit μ une mesure positive sur (X, \mathcal{X}) . Soit (E_n) une suite d'ensembles mesurables de (X, \mathcal{T}) . Pour tout $x \in X$, on définit l'ensemble $I(x) = \{n \in \mathbb{N}, x \in E_n\}$.*

Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) < +\infty$, alors $I(x)$ est fini pour μ -presque tout $x \in X$ (autrement dit, pour μ -presque tout $x \in X$, x appartient à un nombre fini de E_n).

Preuve : Définissons $A = \{x \in X, \text{Card}(I(x)) = +\infty\}$ (où $\text{Card}(Z)$ désigne le cardinal d'un sous-ensemble Z de \mathbb{N}). On définit la fonction borélienne positive $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ par $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{E_n}$. On remarque que pour tout $x \in X$, $f(x) = \text{Card}(I(x))$, d'où $x \in A \Leftrightarrow f(x) = +\infty$.

La suite de fonctions mesurables $\left(\sum_{0 \leq k \leq n} \mathbb{1}_{E_n} \right)_n$ étant croissante et convergeant simplement vers g , on a donc, d'après le théorème de Beppo Levi :

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \mu(E_n) = \sum_{0 \leq k \leq n} \int_X \mathbb{1}_{E_n} d\mu = \int_X \left(\sum_{0 \leq k \leq n} \mathbb{1}_{E_n} \right) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f d\mu$$

d'où $\int_X f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) < +\infty$ par passage à la limite, et par conséquent on a nécessairement $\mu(A) = 0$.

□

Preuve du lemme 4-12 : Soit A un borélien de X tel que $\mu(A) < +\infty$, et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne positive sur X , nulle en dehors de A . D'après le théorème 4-1 (théorème de Lusin), il existe une fonction $g_0 \in C_c(X)$ telle que $\mu(\{x \in X, g_0(x) \neq f(x)\}) < \epsilon$ et telle que $|g_0| \leq \sup_X |f|$.

On définit la fonction $g = \max\{g_0, 0\} \in C_c^+(X)$. Bien sûr, pour tout $x \in X$, si $g_0(x) = f(x)$, alors $g_0(x) \geq 0$ et donc $g(x) = g_0(x) = f(x)$: autrement dit, en contraposée $g(x) \neq f(x) \Rightarrow g_0(x) \neq f(x)$, i.e.

$$\{x \in X, g(x) \neq f(x)\} \subset \{x \in X, g_0(x) \neq f(x)\},$$

d'où $\mu(\{x \in X, g(x) \neq f(x)\}) \leq \mu(\{x \in X, g_0(x) \neq f(x)\}) < \epsilon$, avec bien sûr $g \leq |g_0| \leq \sup_X |f|$.

Supposons que l'on ait de plus $\sup_X |f| < +\infty$. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $g_n \in C_c^+(X)$ telle que $\mu(\{x \in X, g_n(x) \neq f(x)\}) < 2^{-n}$ et telle que $0 \leq g_n \leq \sup_X |f|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \{x \in X, g_n(x) \neq f(x)\}$. On a donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} < +\infty$. Ainsi, d'après le lemme 4-13, pour μ -presque tout $x \in X$, il existe un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels on a $x \in B_n$, i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq k$, on ait $x \in X \setminus B_n$, i.e. $g_n(x) = f(x)$. La suite $(g_n)_n$ converge donc bien simplement μ -presque partout vers f . □

Lemme 4-14. Soit $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ un espace topologique séparé et localement compact, et soit ν est une mesure de Radon signée et finie sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ (i.e. $\nu \in \mathcal{M}(X)$).

Supposons qu'il existe un borélien A de X tel que $\nu(A) > 0$. Alors il existe une fonction $f \in C_c^+(X)$ telle que $\int_X f d\nu > 0$.

Preuve : Comme $\nu \in \mathcal{M}(X)$, on a $|\nu| \in \mathcal{M}_+(X)$. Soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 4-12, il existe une fonction $f \in C_c^+(X)$ vérifiant $0 \leq f \leq 1$ telle que, en posant $E = \{x \in X, h(x) \neq \mathbb{1}_A(x)\}$, on ait $|\nu|(E) < \epsilon$. On a alors

$$\int_X f d\nu = \underbrace{\int_X \mathbb{1}_A(x) d\nu(x)}_{=\nu(A)} + \underbrace{\int_X (f(x) - \mathbb{1}_A(x)) d\nu(x)}_{\geq -2|\nu|(E) \geq -2\epsilon} \geq \nu(A) - 2\epsilon.$$

En choisissant $\epsilon > 0$ tel que $0 < 2\epsilon < \nu(A)$, on a donc bien $\int_X f d\nu > 0$. □

4.3.2 Résolution de l'égalité inf-sup dans le cas d'une allocation non lagrangienne (équivalence des déplacements en ligne droite)

Dans cette sous-section, nous allons chercher à appliquer le théorème de Fenchel-Rockafellar. Nous rappelons ici son énoncé (tiré du livre de F. Brezis [8], vers lequel nous renvoyons pour une preuve fondée sur le théorème de Hahn-Banach), ainsi que la définition de la transformée de Legendre généralisée/conjuguée d'une fonction convexe sur un espace de Banach E :

Définition 4-4. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, et soit E' son dual topologique^a. Soit une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $f \not\equiv +\infty$ (f n'est pas uniformément égale à $+\infty$).

On définit $f^* : E' \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la transformée de Legendre (ou conjuguée) de f , par

$$f^*(\varphi) = \sup_{x \in E} (\varphi(x) - f(x))$$

pour tout $\varphi \in E'$.

Théorème 4-2 (Théorème de Fenchel-Rockafellar [8]). Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, et soit E' son dual topologique. Soient $f, g : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes telles qu'il existe un même point $x_0 \in E$ pour lequel $f(x_0) < +\infty$ et $g(x_0) < +\infty$. On suppose de plus que la fonction f est continue au voisinage de x_0 .

Alors les transformées de Legendre f^* et g^* de respectivement f et g sont bien définies sur E' , et :

$$\inf_{x \in E} [f(x) + g(x)] = \sup_{\varphi \in E'} [-f^*(-\varphi) - g^*(\varphi)] = \max_{\varphi \in E'} [-f^*(-\varphi) - g^*(\varphi)]^b.$$

a. Définition 2-4.

b. Ce théorème montre donc en outre que, sous ces conditions, il existe maximum (i.e. atteint) pour le problème dual adjoint, mais pas forcément de minimum (i.e. atteint) pour le problème primal.

Soient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ les tribus boréliennes sur respectivement \mathbb{R}^d et $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (topologie canonique). Soient par ailleurs $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ les ensembles des mesures de Radon finies signées sur respectivement $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ et $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$.

Dans toute cette sous-sous-section 4.3.2, la fonction $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sera de nouveau supposée continue et positive sur \mathbb{R}_+ (sauf hypothèses supplémentaires dans l'énoncé).

Définition 4-5. On définit la fonction $K : C_b^+(\mathbb{R}^d) \times C_b(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ comme il suit : pour tout couple $(f, g) \in C_b^+(\mathbb{R}^d) \times C_b(\mathbb{R}^d)$:

$$K[(f, g)] : (x, y) \mapsto (g(y) + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (f(x) + 1).$$

Remarquons que comme ζ est continue et positive (d'où $0 < e^{-\zeta(|x-y|)} \leq 1$), la fonction $K[(f, g)]$ est bien continue et bornée.

Lemme 4-15. Si la fonction ζ est de plus continue, positive et coercive, alors la fonction K est injective.

Preuve : Soient deux couples de fonctions $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in C_b^+(\mathbb{R}^d) \times C_b(\mathbb{R}^d)$ tels que $K[(f_1, g_1)] = K[(f_2, g_2)]$, i.e. pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(g_1(y) + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (f_1(x) + 1) = (g_2(y) + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (f_2(x) + 1).$$

d'où $(g_1(y) - g_2(y))e^{-\zeta(|x-y|)} = f_1(x) - f_2(x)$. Si on fixe $x \in \mathbb{R}^d$, et si on considère une suite $(y_n)_n$ divergente telle que $|y_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors comme ζ est coercive, on a $\zeta(|x - y_n|) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, d'où $e^{-\zeta(|x - y_n|)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Comme les fonctions g_1 et g_2 sont bornées, on a alors également $(g_1(y_n) - g_2(y_n))e^{-\zeta(|x - y_n|)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, d'où $f_1(x) - f_2(x) = 0$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, d'où $f_1 = f_2$.

On a donc par suite $(g_1(y) - g_2(y))e^{-\zeta(|x-y|)} = 0$ i.e. $g_1(y) - g_2(y) = 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, d'où $g_1 = g_2$. □

Définition 4-6. Dans le cas où la fonction de dissipation ζ est continue, positive et coercive, on définit la fonction $\Lambda : C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ comme il suit : pour tout $u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$,

$$\Lambda(u) = \begin{cases} -J_{\mu_0, \mu_1}(f, g), \text{ où } \{(f, g)\} = K^{-1}(\{u\}) & \text{si } u \in K(C_b^+(\mathbb{R}^d) \times C_b(\mathbb{R}^d)) \\ +\infty & \text{sinon (i.e. si } K^{-1}(\{u\}) = \emptyset), \end{cases}$$

Nous supposons dans toute la suite de cette section que la fonction de dissipation ζ est continue, positive et coercive.

Lemme 4-16. La fonction Λ est convexe sur $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Preuve : Soient $u_1, u_2 \in K(C_b^+(\mathbb{R}^d) \times C_b(\mathbb{R}^d))$, i.e. pour lesquels il existe deux (uniques) couples $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in C_b^+(\mathbb{R}^d) \times C_b(\mathbb{R}^d)$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on ait

$$u_1(x, y) = (g_1(y) + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (f_1(x) + 1) \text{ et } u_2(x, y) = (g_2(y) + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (f_2(x) + 1).$$

Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a ainsi

$$(1 - \lambda)u_1(x, y) + \lambda u_2(x, y) = [1 + (1 - \lambda)g_1(y) + \lambda g_2(y)]e^{-\zeta(|x-y|)} - (1 + (1 - \lambda)f_1(x) + \lambda f_2(x))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, d'où $K((1 - \lambda)f_1 + \lambda f_2, (1 - \lambda)g_1 + \lambda g_2) = (1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2$, et ainsi

$$\begin{aligned} \Lambda((1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2) &= -J_{\mu_0, \mu_1}((1 - \lambda)f_1 + \lambda f_2, (1 - \lambda)g_1 + \lambda g_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} ((1 - \lambda)f_1(x) + \lambda f_2(x)) d\mu_0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} ((1 - \lambda)g_1(y) + \lambda g_2(y)) d\mu_1(y) \\ &= (1 - \lambda) \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x) d\mu_0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} g_1(y) d\mu_1(y) \right]}_{=-J_{\mu_0, \mu_1}(f_1, g_1)} + \lambda \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^d} f_2(x) d\mu_0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} g_2(y) d\mu_2(y) \right]}_{=-J_{\mu_0, \mu_1}(f_2, g_2)} \\ &= (1 - \lambda) \underbrace{[-J_{\mu_0, \mu_1}(f_1, g_1)]}_{=\Lambda(u_1)} + \lambda \underbrace{[-J_{\mu_0, \mu_1}(f_2, g_2)]}_{=\Lambda(u_2)} \\ &= (1 - \lambda)\Lambda(u_1) + \lambda\Lambda(u_2). \end{aligned}$$

□

Définition 4-7.

— Pour toutes mesures $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, on définit l'ensemble $\Theta(\nu_0, \nu_1)$ comme il suit :

$$\Theta(\nu_0, \nu_1) = \left\{ \tau \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \tau(A \times \mathbb{R}^d) \geq \nu_0(A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d \times B} e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) = \nu_1(B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

— Pour toutes mesures $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$, on définit l'ensemble $\Psi(\nu_0, \nu_1)$ (correspondant à l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}_M(\nu_0, \nu_1)$ dans notre cadre) comme il suit :

$$\Psi(\nu_0, \nu_1) = \left\{ \tau \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \tau(A \times \mathbb{R}^d) \leq \nu_0(A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d \times B} e^{-\zeta(|x-y|)} \tau(x, y) = \nu_1(B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

— On définit la fonctionnelle d'énergie $\Phi : \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ (correspondant à l'énergie \mathcal{K} dans notre cadre), comme il suit : pour toute mesure $\tau \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$,

$$\Phi(\tau) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} [1 - e^{-\zeta(|x-y|)}] d\tau(x, y).$$

On écrira $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$ le dual topologique de l'espace de Banach $(C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$.

Remarquons que toute mesure $\tau \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, la forme linéaire $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) d\tau(x)$ est bien définie sur $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ (du fait que la mesure τ soit finie) et, pour toute fonction $f \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) d\tau(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(x)| d|\tau|(x) \leq \underbrace{|\tau|(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)}_{<+\infty} \|f\|_\infty. \quad (4-9)$$

La forme linéaire $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) d\tau(x)$ est donc continue sur $(C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ et est donc un élément de $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$.

On définit alors l'application linéaire $L : \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$ qui à toute mesure $\tau \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ associe la forme linéaire sur $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ $L(\tau) : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) d\tau(x)$. Remarquons que L est injective et que pour toute mesure $\tau \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et toute fonction $f \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on a d'après (4-9),

$$|L(\tau)(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) d\tau(x) \right| \leq |\tau|(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \|f\|_\infty,$$

d'où $\|L(\tau)\|_{C_b'} \leq |\tau|(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, où $\|\cdot\|_{C_b'}$ désigne la norme d'opérateur subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$, c'est à dire la norme dont est muni $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$ (on pourrait même montrer que $\|L(\tau)\|_{C_b'} = |\tau|(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, mais ce n'est pas nécessaire ici).

Lemme 4-17. Soit Λ^* transformée de Legendre de Λ sur l'espace dual de $(C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$. Alors $\Lambda^* \circ L = \iota_{\Theta(-\mu_0, -\mu_1)} - \Phi$.

Preuve : Soit $\tau \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$: on a donc $L(\tau)(u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u d\tau$ pour toute fonction $u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

— Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\tau(A \times \mathbb{R}^d) < -\mu_0(A)$. Il existe alors une fonction $f \in C_b^+(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) d\tau(x, y) < - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x). \quad (4-10)$$

(en désignant, par abus de notation, également par f la fonction $(x, y) \mapsto f(x)$). En effet, on peut appliquer le lemme 4-14 à la mesure $\nu = -\tau_g - \mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, où τ_g est la mesure sur \mathbb{R}^d définie par $\tau_g(E) = \tau(E \times \mathbb{R}^d)$ pour tout borélien E de \mathbb{R}^d (on a donc bien $\tau_g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$). D'après ce lemme, il existe une $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $f \leq 1$, et telle que

$$0 < \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\nu(x) = - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\tau_g(x)}_{= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) d\tau(x, y)} - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x).$$

Fixons donc une telle fonction f : pour tout $\lambda > 0$, on définit la fonction u_λ par la fonction $u_\lambda(x, y) = K(\lambda f, -1) = -(\lambda f(x) + 1) = (-1 + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (\lambda f(x) + 1)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. On a alors $\Lambda(u) = J_{\mu_0, \mu_1}(\lambda f, -1) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}^d} d\mu_1(y)$, et ainsi

$$\begin{aligned}
L(\tau)(u_\lambda) - \Lambda(u_\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u_\lambda d\tau - \Lambda(u_\lambda) \\
&= - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (\lambda f(x) + 1) d\tau(x, y) - \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} d\mu_1(y) \\
&= \lambda \underbrace{\left(- \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) d\tau(x, y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x) \right)}_{>0} - \tau(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty,
\end{aligned}$$

$$\text{d'où } \Lambda^*(L(\tau)) = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} [L(\tau)(u) - \Lambda(u)] = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u d\tau - \Lambda(u) \right] = +\infty.$$

— Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d \times B} e^{-\zeta(|x-y|)} \tau(x, y) \neq -\mu_1(B)$. On peut alors de nouveau appliquer le lemme 4-14 à la mesure ν' définie par $\nu'(E) = \pm \left(\int_{\mathbb{R}^d \times E} e^{-\zeta(|x-y|)} \tau(x, y) + \mu_1(E) \right)$ pour tout borélien E de \mathbb{R}^d , selon le signe de $\int_{\mathbb{R}^d \times B} e^{-\zeta(|x-y|)} \tau(x, y) + \mu_1(B)$. D'après ce lemme, il existe une fonction $g \in C_b^+(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\nu'(y) > 0$.

Ainsi, quitte à inverser le signe de g^a , on peut considérer que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} g(y) e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) > - \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y).$$

Alors, choisissant pour tout $\lambda > 0$ la fonction $u_\lambda(x, y) = K(0, \lambda g) = (g(y) + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (0 + 1)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a $\Lambda(u) = J_{\mu_0, \mu_1}(0, \lambda g) = - \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y)$, et ainsi

$$\begin{aligned}
L(\tau)(u_\lambda) - \Lambda(u_\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u_\lambda d\tau - \Lambda(u_\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} [(g(y) + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - 1] d\tau(x, y) + \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) \\
&= \lambda \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} g(y) e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) + \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) \right)}_{>0} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} [e^{-\zeta(|x-y|)} - 1] d\tau(x, y) \\
&\xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty,
\end{aligned}$$

$$\text{d'où } \Lambda^*(L(\tau)) = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u d\tau - \Lambda(u) \right] = +\infty.$$

— Supposons enfin que l'on ait $\tau \in \Theta(-\mu_0, -\mu_1)$ (si $\Theta(-\mu_0, -\mu_1) \neq \emptyset$), i.e. pour tout $f \in C_b^+(\mathbb{R}^d)$ et tout $g \in C_b(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} g(y) e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) = - \int_{\mathbb{R}^d} g(y) d\mu_1(y) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) d\tau(x, y) \geq - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_0(x).$$

Alors, pour toute fonction $u \in K(C_b^+(\mathbb{R}^d) \times C_b(\mathbb{R}^d))$, avec $\{(f, g)\} = K^{-1}(\{u\})$, on a

a. On a donc $g \geq 0$ ou $g \leq 0$.

$$\begin{aligned}
L(\tau)(u) - \Lambda(u) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u \, d\tau - \Lambda(u) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u(x, y) \, d\tau(x, y) - \overbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\mu_0(x) - \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \, d\mu_1(y) \right)}{= -J_{\mu_0, \mu_1}(f, g)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left[(g(y) + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (f(x) + 1) \right] \, d\tau(x, y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \, d\mu_1(y) \\
&= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} g(y)e^{-\zeta(|x-y|)} \, d\tau(x, y) + \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \, d\mu_1(y) \right)}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{\left(- \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x) \, d\tau(x, y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\mu_0(x) \right)}_{\leq 0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left[e^{-\zeta(|x-y|)} - 1 \right] \, d\tau(x, y)}_{= -\Phi(\tau)} \\
&\leq -\Phi(\tau),
\end{aligned}$$

$$\Lambda^*(L(\tau)) = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u \, d\tau - \Lambda(u) \right] \leq -\Phi(\tau).$$

Pour finir, en choisissant $u(x, y) = (0 + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (0 + 1) = e^{-\zeta(|x-y|)} - 1$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, i.e. telle que $(0, 0) \in K(u)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u \, d\tau - \Lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \left[e^{-\zeta(|x-y|)} - 1 \right] \, d\tau(x, y) - \underbrace{J_{\mu_0, \mu_1}(0, 0)}_{=0} = -\Phi(\tau),$$

$$\text{d'où } \Lambda^*(L(\tau)) = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u \, d\tau - \Lambda(u) \right] = -\Phi(\tau).$$

Dans tous les cas, on a bien $\Lambda^* \circ L = \iota_{\Theta(-\mu_0, -\mu_1)} - \Phi$.

□

Définition 4-8. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $m > 0$, on définit les ensembles

$$\Upsilon_{x,m}^- = \{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), u(x, y) \leq 0, \forall x, y \in B(x, m/2)\},$$

et

$$\Upsilon_{x,m}^0 = \{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), u(x, y) = 0, \forall x, y \in B(x, m/2)\}.$$

Lemme 4-18. Soit $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*$ transformée de Legendre de $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}$ sur l'espace dual de $(C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ (où a est défini au début de la sous-section).

Alors $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^* = \iota_{L(\mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})}$, où $\mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})$ désigne par abus de notation le sous ensemble des mesures positives de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ à support dans $\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}$.

Preuve :

— Soit $\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$. Supposons qu'il existe une fonction $u \in \Upsilon_{a,M}^0$ telle que $\vartheta(u) \neq 0$. Comme $-u \in \Upsilon_{a,M}^0$, on peut supposer que $\vartheta(u) > 0$ quitte à remplacer par $-u$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda u \in \Upsilon_{a,M}^0 \subset \Upsilon_{a,M}^-$, et ainsi

$$\vartheta(\lambda u) - \underbrace{\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(\lambda u)}_{=0} \lambda \vartheta(u) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty,$$

$$\text{d'où } \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} [\vartheta(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u)] = \sup_{u \in \Upsilon_{a,M}^-} \vartheta(u) = +\infty.$$

Ainsi, par contraposée, si $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) = 0$, alors on a $\vartheta(u) = 0$ pour toute fonction $u \in \Upsilon_{a,M}^0$.

— D'après le théorème 2-1, l'ensemble $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, i.e. l'ensemble des mesures de Radon signées et finies sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, muni de la norme de variation totale, est assimilable au dual topologique de l'espace de Banach $(C_0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$.

Or, remarquons que comme $C_0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \subset C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, la restriction de tout élément de $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$ à $C_0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ est un élément du dual de $C_0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, et donc est associée à une mesure élément de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Autrement dit, pour tout $\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$, il existe une unique mesure $\tau_\vartheta \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $u \in C_0(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on ait $\vartheta(u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u d\tau_\vartheta$.

Soit $\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$ tel que $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) = 0$, et soit $\tau_\vartheta \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ la mesure associée à ϑ au titre du paragraphe précédent.

Soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 2-4 (lemme d'Urysohn), il existe une fonction $\chi \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telle que $\mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} \leq \chi \leq \mathbb{1}_{B(a,M/2+\epsilon) \times B(a,M/2+\epsilon)}$. Pour toute fonction $u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on a alors $(1-\chi)u \in \Upsilon_{a,M}^0$ et $\chi u \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$: ainsi, $\vartheta((1-\chi)u) = 0$ et $\vartheta(\chi u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \chi u d\tau_\vartheta$, d'où

$$\vartheta(u) = \vartheta((1-\chi)u) + \vartheta(\chi u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \chi u d\tau_\vartheta.$$

Soit $u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une fonction $\chi_n \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telle que $\mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} \leq \chi_n \leq \mathbb{1}_{B(a,M/2+2^{-n}) \times B(a,M/2+2^{-n})}$. La suite de fonction $(\chi_n u)_n$ converge donc simplement vers la fonction $\mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} u$, avec de plus $|\chi_n u| \leq |u|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |u| d|\tau_\vartheta| < +\infty$ (la mesure $|\tau_\vartheta|$ étant finie). Ainsi, par convergence dominée, on a

$$\vartheta(u) = \underbrace{\vartheta((1-\chi_n)u)}_{=0} + \vartheta(\chi_n u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \chi_n u d\tau_\vartheta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u \mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} d\tau_\vartheta,$$

i.e. $\vartheta(u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u \mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} d\tau_\vartheta = L\left(\mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} \tau_\vartheta\right)(u)$, et ceci pour toute fonction $u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, d'où $\vartheta = L\left(\mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} \tau_\vartheta\right)$.

Par ailleurs, supposons qu'il existe $u \in \Upsilon_{a,M}^-$ telle que $\vartheta(u) > 0$. Du fait que pour tout $\lambda \geq 0$ on a $\lambda u \in \Upsilon_{a,M}^-$, on aurait alors

$$\vartheta(\lambda u) - \underbrace{\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(\lambda u)}_{=0} = \lambda \vartheta(u) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} +\infty,$$

d'où $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} [\vartheta(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u)] = \sup_{u \in \Upsilon_{a,M}^-} \vartheta(u) = +\infty$, ce qui contredirait l'hypothèse que $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) = 0$.

Ainsi, on a $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u \mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} d\tau_\vartheta = \vartheta(u) \leq 0$ pour toute fonction $u \in \Upsilon_{a,M}^-$; et donc pour toute fonction $u \in C_b^-(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \subset \Upsilon_{a,M}^-$, d'où $\mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} \tau_\vartheta \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, i.e. $\mathbb{1}_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} \tau_\vartheta \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)})$, et ainsi

$$\vartheta \in L\left(\mathcal{M}_+(\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)})\right).$$

— Inversement soit $\tau \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)})$. Pour toute fonction $u \in \Upsilon_{a,M}^-$, on a

$$L(\tau)(u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u d\tau = \int_{\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)}} u d\tau \leq 0,$$

i.e. $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(L(\tau)) = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} [L(\tau)(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u)] \leq 0$. Pour finir, considérant la fonction nulle (qui est bien un élément de $\Upsilon_{a,M}^-$), on a $L(\tau)(0) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(0) = 0$, d'où

$$\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(L(\tau)) = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} [L(\tau)(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u)] = 0.$$

On a donc bien montré que $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) = 0 \iff \vartheta \in L\left(\mathcal{M}_+(\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)})\right)$, i.e. que

$$\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^* = \iota_{L(\mathcal{M}_+(\overline{B(a,M/2)} \times \overline{B(a,M/2)})}.$$

□

Remarque 4-10. Remarquons que les fonctions $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}$ et $\iota_L(\mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}))$, sont toutes deux homogènes en plus d'être des indicatrices d'ensembles convexes : il n'est donc pas incohérent dans ce cas que deux indicatrices soient conjuguées l'une à l'autre.

Définition 4-9. On définit l'ensemble $\mathcal{D}_{a,M}^{pro}$ suivant :

$$\mathcal{D}_{a,M}^{pro} = \left\{ (f, g) \in C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d), 1 + f(x) \geq (1 + \max\{0, g(y)\}) e^{-\zeta(|x-y|)}, \forall x, y \in B(a, M/2) \right\}.$$

Notons que l'on a $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_M \subset \mathcal{D}_{a,M}^{pro}$.

Lemme 4-19. S'il existe $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, M/2)$ (ce qui correspond, rappelons-le, aux hypothèses générales de cette sous-section), alors

$$\sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_{a,M}^{pro}} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g). \quad (4-11)$$

Preuve : Tout d'abord, du fait que $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_{a,M}^{pro}$, on a $\sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_{a,M}^{pro}} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) \geq \sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g)$.

Soit $0 < m < M/2$ tel que $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, m) \subset B(a, M/2)$. Par ailleurs, pour tout couple $(f^1, g^1) \in \mathcal{D}_{a,M}^{pro}$, on a $(f^1|_{B(a, M/2)}, g^1|_{B(a, M/2)}) \in \mathcal{D}_{a,M}^{res}$ (voir la définition 2-9) : ainsi, d'après le lemme 2-3, il existe un couple $(f^2, g^2) \in \mathcal{D}_\infty$, tel que $f^2|_{B(a, m)} = f^1|_{B(a, m)}$ et $g^2|_{B(a, m)} = g^1|_{B(a, m)}$, et par conséquent tel que $J_{\mu_0, \mu_1}(f^2, g^2) = J_{\mu_0, \mu_1}(f^1, g^1)$. On a donc bien (4-11). \square

Proposition 4-6. Sous les hypothèses de cette sous-section, à savoir que la fonction de dissipation ζ est continue, positive et coercive, on a de façon générale :

$$\min_{\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi(\tau) = \sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g),$$

en considérant que $+\infty$ est une valeur atteignable pour un minimum dans le cas où on aurait $\Psi(\mu_0, \mu_1) = \emptyset$ (voir la remarque 4-11).

Dans le cas contraire, si $\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}) \neq \emptyset$, alors

$$\operatorname{argmin}_{\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi(\tau) \neq \emptyset.$$

Preuve : Nous allons appliquer le théorème 4-2 (théorème de Fenchel-Rockafellar) entre $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et son dual $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$. Prenons le couple $(0, -1) \in \mathcal{D}_{a,M}^{pro}$, et soit la fonction u_0 définie par $u_0(x, y) = (-1+1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (0+1) = -1$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$: pour tout $r \in]0, 1[$, on a alors $B_{\|\cdot\|_\infty}(u_0, r) \subset C_b^-(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \subset \Upsilon_{a,M}^-$. Ainsi, la fonction $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}$ est uniformément nulle sur $B_{\|\cdot\|_\infty}(u, r)$, et donc continue au voisinage de u_0 . De plus, $\Lambda(u_0) \leq -J_{\mu_0, \mu_1}(1, -1) < +\infty$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 4-2 de Fenchel-Rockafellar :

$$\begin{aligned} \inf_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[\Lambda(u) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] &= \sup_{\tau \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda^*(-\tau) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\tau) \right] \\ &= \max_{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'} \left[-\Lambda^*(-\vartheta) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \right]. \end{aligned} \quad (4-12)$$

D'après lemme 4-18, $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^* = \iota_L(\mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}))$.

Soit $\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$ tel que $\Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \neq +\infty$. On a donc en particulier $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) = \iota_L(\mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})) = 0$, i.e. $\vartheta \in L(\mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}))$: il existe donc une unique mesure $\tau \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})$ (L étant injectif), c'est à dire, rappelons-le, une mesure de Radon positive et finie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ à support dans $\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}$, telle que $\vartheta = L(\tau)$. Ainsi, d'après le lemme 4-17, on a

$$\Lambda^*(-\vartheta) = \Lambda^*(L(-\tau)) = \iota_{\Theta(-\mu_0, -\mu_1)}(-\tau) - \Phi(-\tau) = \iota_{\Theta(-\mu_0, -\mu_1)}(-\tau) + \Phi(\tau),$$

d'où notamment $\iota_{\Theta(-\mu_0, -\mu_1)}(-\tau) = 0$. Remarquons que comme $\tau \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on a $-\tau \in \Theta(-\mu_0, -\mu_1) \iff \tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$ (voir la définition 4-7 pour $\Psi(\mu_0, \mu_1)$), d'où

$$\begin{aligned} \Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) &= \Phi(\tau) + \iota_{\Psi(\mu_0, \mu_1)}(\tau) + \iota_{\mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})}(\tau) \\ &\geq \inf_{\tau \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \left[\Phi(\tau) + \iota_{\Psi(\mu_0, \mu_1)}(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\min_{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'} \left[\Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \right] \geq \inf_{\tau \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \left[\Phi(\tau) + \iota_{\Psi(\mu_0, \mu_1)}(\tau) \right].$$

Inversement, pour toute mesure $\tau \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})$, on a bien sûr $L(\tau) \in L(\mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}))$, d'où $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(L(\tau)) = 0$. Si de plus $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$ (si $\Psi(\mu_0, \mu_1) \neq \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})$), alors $-\tau \in \Theta(-\mu_0, -\mu_1)$, i.e. $\iota_{\Theta(-\mu_0, -\mu_1)}(-\tau) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) + \iota_{\Psi(\mu_0, \mu_1)}(\tau) &= \underbrace{\Phi(\tau) + \iota_{\Theta(-\mu_0, -\mu_1)}(-\tau)}_{=\Lambda^*(L(-\tau))} + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(L(\tau)) \\ &= \Lambda^*(-L(\tau)) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(L(\tau)) \\ &\geq \min_{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'} \left[\Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \right], \end{aligned}$$

d'où

$$\inf_{\tau \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \left[\Phi(\tau) + \iota_{\Psi(\mu_0, \mu_1)}(\tau) \right] \geq \min_{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'} \left[\Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \right].$$

et ainsi

$$\min_{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'} \left[\Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \right] = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \left[\Phi(\tau) + \iota_{\Psi(\mu_0, \mu_1)}(\tau) \right] = \inf_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi.$$

Par ailleurs, si $\min_{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'} \left[\Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \right] < +\infty$, alors pour tout $\vartheta \in \operatorname{argmin}_{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'} \left[\Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \right]$ et $\tau \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'$ telle que $\vartheta = L(\tau)$, on a $\tau \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})$, et

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) + \iota_{\Psi(\mu_0, \mu_1)}(\tau) &= \Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) = \min_{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'} \left[\Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \right] = \inf_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi \\ &= \min_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi. \end{aligned}$$

En recompilant avec (4-12), et en inversant les signes, on obtient finalement

$$\sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] = \inf_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi = \min_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi. \quad (4-13)$$

Notons que (4-13) est trivialement valable si $\min_{\vartheta \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)'} \left[\Lambda^*(-\vartheta) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}^*(\vartheta) \right] = +\infty$.

Autrement dit, si $\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}) \neq \emptyset$, il existe une mesure $\bar{\tau} \in \Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})$ telle que

$$-\Phi(\bar{\tau}) = \inf_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[\Lambda(u) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \left[-\Phi(\tau) - \iota_{\Psi(\mu_0, \mu_1)}(\tau) \right],$$

i.e. $\operatorname{argmin}_{\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi(\tau) \neq \emptyset$ (ce qui conclut en particulier le dernier point du lemme).

Pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_{a,M}^{pro}$, en définissant la fonction $u(x, y) = (g(y) + 1)e^{-\zeta(|x-y|)} - (f(x) + 1)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $(f, g) = K(u)$, d'où $\Lambda(u) = -J_{\mu_0, \mu_1}(f, g)$, et $u \in C_b^-(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \subset \Upsilon_{a,M}^-$, d'où $\iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) = 0$, et ainsi

$$J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = -\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \leq \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right],$$

i.e.

$$\sup_{(f, g) \in \mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) \leq \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right]. \quad (4-14)$$

Supposons que $\sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] < +\infty$, et soit $\epsilon > 0$ et soit $\bar{u} \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ tel que

$$\sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] \leq -\Lambda(\bar{u}) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(\bar{u}) \geq \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] - \epsilon < +\infty.$$

Comme $\Lambda(\bar{u}) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(\bar{u})$ est fini, on a donc nécessairement $\bar{u} \in \Upsilon_{a,M}^-$ et $K^{-1}(\{\bar{u}\}) \neq \emptyset$. On considère le couple $(\bar{f}, \bar{g}) = K^{-1}(\bar{u})$: comme $\bar{u} \in \Upsilon_{a,M}^-$, on a $(\bar{f}, \bar{g}) \in \mathcal{D}_{a,M}^{pro}$, et

$$-\Lambda(\bar{u}) = J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g}) \geq \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] - \epsilon.$$

Par conséquent,

$$\sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_{a,M}^{pro}} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) \geq J_{\mu_0, \mu_1}(\bar{f}, \bar{g}) \geq \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] - \epsilon,$$

et ceci pour tout $\epsilon > 0$. Ainsi, et du fait de l'égalité 4-11 (lemme 4-19), on a

$$\sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_{a,M}^{pro}} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) \geq \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right].$$

De ce fait, en combinant avec (4-13) et (4-14), on obtient

$$\sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] = \min_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi. \quad (4-15)$$

Cela vaut aussi pour le cas où $\sup_{u \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \left[-\Lambda(u) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u) \right] = \min_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi = +\infty$, i.e. si $\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}) = \emptyset$.

En effet dans ce cas il existe une suite $(u_n)_n$ de fonctions de $C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telle que $-\Lambda(u_n) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Dans ce cas $\Lambda(u_n) + \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u_n)$ est finie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $u_n \in \Upsilon_{a,M}^-$ et $K^{-1}(\{u_n\}) \neq \emptyset$. En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_n, g_n) = K^{-1}(u_n)$, on obtient bien $(f_n, g_n) \in \mathcal{D}_{a,M}^{pro}$ et

$$J_{\mu_0, \mu_1}(f_n, g_n) = -\Lambda(u_n) = -\Lambda(u_n) - \iota_{\Upsilon_{a,M}^-}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

D'où, toujours du fait de l'égalité 4-11 :

$$\sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_{a,M}^{pro}} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = +\infty.$$

Pour finir, on sait par la remarque 4-6 que $\sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \sup_{(f,g) \in \mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}(f, g)$.

□

Remarque 4-11. Remarquons que si $\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)}) = \emptyset$, alors $\Lambda^* \equiv +\infty$, d'où $\sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_{a,M}^{pro}} J_{\mu_0, \mu_1} = +\infty$ d'après (4-12).

Autrement dit :

$$\Psi(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset \iff \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} < +\infty \iff \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \mu_0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d)$$

(résultat repris dans le corollaire 4-3).

4.3.3 Résolution de l'égalité inf-sup dans le cas lagrangien

Dans toute cette sous-sous-section 4.3.3, $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue, convexe et strictement croissante (donc coercive) telle que $\zeta(0) = 0$

Lemme 4-20. Soient X, Y et Z trois ensembles quelconques, et soient deux applications $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow Z$. Alors pour tous sous-ensembles $A \subset X$ et $B \subset Y$, on a

$$(f, g)^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B).$$

Preuve : En effet, on a

$$x \in (f, g)^{-1}(A \times B) \iff (f(x), g(x)) \in A \times B \iff x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in g^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B).$$

□

Lemme 4-21. On considère de nouveau la fonction Γ (voir la définition 2-11). On a

- $\Gamma \# \Psi(\mu_0, \mu_1) = \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, au sens où pour toute mesure $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$, on a $\Gamma \# \tau \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, et où pour toute mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, il existe une unique mesure $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$ telle que $\omega = \Gamma \# \tau$.

De plus, pour toute mesure $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$, on a $\mathcal{K}(\Gamma \# \tau) = \Phi(\tau)$.

- $(\pi_0, \pi_1) \# [\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})] = \Psi(\mu_0, \mu_1)$, au sens où pour toute mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$, on a $(\pi_0, \pi_1) \# \omega \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$, avec de plus $\mathcal{K}(\omega) = \Phi(\tau)$, et où pour toute mesure $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$, il existe une unique mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ telle que $\tau = (\pi_0, \pi_1) \# \omega$.

De plus, pour toute mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, on a $\Phi((\pi_0, \pi_1) \# \omega) = \mathcal{K}(\omega)$.

- De façon plus générale, pour toute mesure $\tau \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on a $(\pi_0, \pi_1) \# (\Gamma \# \tau) = \tau$ et, pour toute mesure $\omega \in \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, on a $\Gamma \# ((\pi_0, \pi_1) \# \omega) = \omega$.

Preuve :

- Soit $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$ (si $\Psi(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$), et soit $\omega = \Gamma \# \tau$. Comme τ est une mesure positive, ω l'est donc également.

Rappelons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $\Gamma(x, y)' = y - x$, $\pi_0 \circ \Gamma(x, y) = \Gamma(x, y)(0) = x$ et $\pi_1 \circ \Gamma(x, y) = \Gamma(x, y)(1) = y$. Ainsi, pour tout sous-ensemble X de \mathbb{R}^d , on a $(\pi_0 \circ \Gamma)^{-1}(X) = X \times \mathbb{R}^d$ et $(\pi_1 \circ \Gamma)^{-1}(X) = \mathbb{R}^d \times X$.

De plus, comme Γ est à image dans IntLin , on a donc, pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(L^{d,M})$, $\Gamma^{-1}(A) = \Gamma^{-1}(A \cap \text{IntLin})$, et ainsi

$$\omega(A) = \tau(\Gamma^{-1}(A)) = \tau(\Gamma^{-1}(A \cap \text{IntLin})) = \omega(A \cap \text{IntLin}).$$

Autrement dit, la mesure ω est support dans IntLin , i.e. $\omega \in \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$.

- Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mu_\omega^0(A) = \omega(\pi_0^{-1}(A)) = \tau(\Gamma^{-1}(\pi_0^{-1}(A))) = \tau((\pi_0 \circ \Gamma)^{-1}(A)) = \tau(A \times \mathbb{R}^d) \leq \mu_0(A). \quad (4-16)$$

- Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} \mu_\omega^1(B) &= \int_{L^{d,M}} \mathbb{1}_{\pi_1^{-1}(B)}(\gamma) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) \\ &= \int_{L^{d,M}} \mathbb{1}_{\pi_1^{-1}(B)}(\Gamma(x, y)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\Gamma(x, y)'(s)|) ds} d\tau(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\Gamma^{-1}(\pi_1^{-1}(B))}(x, y) e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(\pi_1 \circ \Gamma)^{-1}(B)}(x, y) e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \times B}(x, y) e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) = \mu_1(B). \end{aligned} \quad (4-17)$$

On a donc bien $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, i.e. $\Gamma \# (\Psi(\mu_0, \mu_1)) \subset \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$.

De plus, d'après (4-16), on a $\mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) = \tau(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et d'après (4-17), on a $\mu_\omega^1(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y)$, d'où

$$\mathcal{K}(\omega) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) - \mu_\omega^1(\mathbb{R}^d) = \tau(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (1 - e^{-\zeta(|x-y|)}) d\tau(x, y) = \Phi(\tau).$$

- Soit $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$ (si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, i.e. $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin}) \neq \emptyset$ d'après la proposition 2-1), et soit $\tau = (\pi_0, \pi_1) \# \omega$. Comme ω est une mesure positive, τ l'est donc également. D'après le lemme 4-20,

- Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et sachant que $\pi_1^{-1}(\mathbb{R}^d) = L^{d,M}$, on a

$$\tau(A \times \mathbb{R}^d) = \omega((\pi_0, \pi_1)^{-1}(A \times \mathbb{R}^d)) = \omega(\pi_0^{-1}(A) \cap \pi_1^{-1}(\mathbb{R}^d)) = \omega(\pi_0^{-1}(A)) = \mu_\omega^0(A) \leq \mu_0(A). \quad (4-18)$$

- Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a $(\pi_0, \pi_1)^{-1}(\mathbb{R}^d \times B) = \underbrace{\pi_0^{-1}(\mathbb{R}^d)}_{=L^{d,M}} \cap \pi_1^{-1}(B) = \pi_1^{-1}(B)$. De plus, comme $\omega \in$

$\mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, on a $\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds = \zeta(|\gamma(1) - \gamma(0)|) = \zeta(|\pi_0(\gamma) - \pi_1(\gamma)|)$ pour ω -presque tout $\omega \in L^{d,M}$.

Ainsi, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d \times B} e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \times B}(x, y) e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) \\
&= \int_{L^{d, M}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \times B}(\pi_0(\gamma), \pi_1(\gamma)) e^{-\zeta(|\pi_0(\gamma) - \pi_1(\gamma)|)} d\omega(\gamma) \\
&= \int_{L^{d, M}} \mathbb{1}_{(\pi_0, \pi_1)^{-1}(\mathbb{R}^d \times B)}(\gamma) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) \tag{4-19} \\
&= \int_{L^{d, M}} \mathbb{1}_{\pi_1^{-1}(B)}(\gamma) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) \\
&= \int_{\pi_1^{-1}(B)} e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) = \mu_\omega^1(B) = \mu_1(B).
\end{aligned}$$

on a donc bien $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$, i.e. $(\pi_0, \pi_1) \# [\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})] \subset \Psi(\mu_0, \mu_1)$.

De plus, d'après (4-18), on a $\tau(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d)$ et d'après (4-19), on a $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) = \mu_\omega^1(\mathbb{R}^d)$, d'où

$$\Phi(\tau) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (1 - e^{-\zeta(|x-y|)}) d\tau(x, y) = \tau(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{-\zeta(|x-y|)} d\tau(x, y) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) - \mu_\omega^1(\mathbb{R}^d) = \mathcal{K}(\omega).$$

— Pour finir, pour tout $\gamma \in \text{IntLin}$, on a $(\Gamma \circ (\pi_0, \pi_1))(\gamma) = \Gamma(\gamma(0), \gamma(1)) = \gamma$ et, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a $((\pi_0, \pi_1) \circ \Gamma)(x, y) = (\Gamma(x, y)(0), \Gamma(x, y)(1)) = (x, y)$, i.e. $\Gamma \circ (\pi_0, \pi_1) = \text{I}_{\text{IntLin}}$ et $(\pi_0, \pi_1) \circ \Gamma = \text{I}_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d}$. Autrement dit, Γ est une bijection de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans IntLin , de réciproque (π_0, π_1) .

Ainsi, pour toute mesure $\omega \in \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, et pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(L^{d, M})$, on a

$$\Gamma \# ((\pi_0, \pi_1) \# \omega)(A) = (\pi_0, \pi_1) \# \omega(\Gamma^{-1}(A)) = \omega((\pi_0, \pi_1)^{-1}(\Gamma^{-1}(A))) = \omega((\Gamma \circ (\pi_0, \pi_1))^{-1}(A)) = \omega(A),$$

i.e. $\Gamma \# ((\pi_0, \pi_1) \# \omega) = \omega$. Or, comme $(\pi_0, \pi_1) \# [\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})] \subset \Psi(\mu_0, \mu_1)$, si $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, on a $(\pi_0, \pi_1) \# \omega \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$. On a donc bien $\Gamma \# (\Psi(\mu_0, \mu_1)) = \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$.

On peut montrer de même que pour toute mesure $\tau \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on a $(\pi_0, \pi_1) \# (\Gamma \# \tau) = \tau$: pour tout borélien $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on a

$$(\pi_0, \pi_1) \# (\Gamma \# \tau)(X) = (\Gamma \# \tau)((\pi_0, \pi_1)^{-1}(X)) = \tau(\Gamma^{-1}((\pi_0, \pi_1)^{-1}(X))) = \tau((\Gamma \circ (\pi_0, \pi_1))^{-1}(X)) = \tau(X).$$

De même, comme $\Gamma \# (\Psi(\mu_0, \mu_1)) \subset \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, si $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$, alors $\Gamma \# \tau \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$. On a donc bien également $(\pi_0, \pi_1) \# [\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})] = \Psi(\mu_0, \mu_1)$.

Pour finir, remarquons qu'en combinant les deux premiers points on a $\Psi(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, i.e. $\Psi(\mu_0, \mu_1) = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) = \emptyset$: ce qui rend donc les trois points valables même si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) = \Psi(\mu_0, \mu_1) = \emptyset$.

□

Corollaire 4-2. *On suppose que la fonction de dissipation ζ est positive, continue et coercive.*

— Si $\Psi(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, alors $\text{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi \neq \emptyset$ et

$$\Gamma \# \left(\text{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi \right) = \text{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})} \mathcal{K}.$$

On a donc notamment $\emptyset \neq \text{argmin}_{\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})} \mathcal{K} \subset \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$.

— Si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, alors $\text{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})} \mathcal{K} \neq \emptyset$ et

$$(\pi_0, \pi_1) \# \left(\text{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})} \mathcal{K} \right) = \text{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi.$$

On a donc notamment $\emptyset \neq \text{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi \subset \Psi(\mu_0, \mu_1)$.

— Dans l'un ou l'autre des cas précédents (qui sont de fait équivalents), on a de plus

$$\min_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\text{IntLin})} \mathcal{K}.$$

Preuve : Traitons le premier point : supposons que $\Psi(\mu_0, \mu_1)$ soit non vide. Alors d'après la proposition 4-6 (rappelons que ζ est supposée positive, continue et coercive), on a $\operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi \neq \emptyset$. Soit $\tau \in \operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi$: on a alors $\Gamma \# \tau \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})$ d'après le lemme 4-21 (en particulier, on a $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin}) \neq \emptyset$), et

$$\min_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi = \Phi(\tau) = \mathcal{K}(\Gamma \# \tau) \geq \inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K}. \quad (4-20)$$

Soit $\epsilon > 0$ soit une mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})$ telle que

$$\inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K} \leq \mathcal{K}(\omega) \leq \inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K} + \epsilon.$$

Toujours d'après le lemme 4-21, on a $(\pi_0, \pi_1) \# \omega \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$ et ainsi, d'après (4-20)

$$\inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K} + \epsilon \geq \mathcal{K}(\omega) = \Phi((\pi_0, \pi_1) \# \omega) \geq \min_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi = \Phi(\tau) = \mathcal{K}(\Gamma \# \tau).$$

Autrement dit, on a $\inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K} + \epsilon \geq \mathcal{K}(\Gamma \# \tau)$, et ceci pour tout $\epsilon > 0$, d'où

$$\min_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi = \mathcal{K}(\Gamma \# \tau) = \inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K} = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K},$$

i.e. $\Gamma \# \tau \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K}$, et ceci pour tout $\tau \in \operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi$, d'où $\Gamma \# (\operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi) \subset \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K}$.

Pour finir, soit $\omega \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K}$: d'après le lemme 4-21, il existe une unique mesure $\tau \in \Psi(\mu_0, \mu_1)$ telle que $\omega = \Gamma \# \tau$, et ainsi

$$\min_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K}(\omega) = \mathcal{K}(\Gamma \# \tau) = \Phi(\tau),$$

d'où $\tau \in \operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi$. On a donc bien

$$\Gamma \# (\operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi) = \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K}. \quad (4-21)$$

Par ailleurs, d'après la proposition 2-1, $\operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K} \subset \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}$, d'où

$$\min_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K}.$$

Le second point : si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, alors $\operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K} \neq \emptyset$ d'après la proposition 2-1. D'après le lemme 4-21, on a $(\pi_0, \pi_1) \# [\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})] = \Psi(\mu_0, \mu_1)$, donc $\Psi(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$: on peut alors se ramener au premier point. D'après ce dernier, $\operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi \neq \emptyset$ et on a la relation (4-21).

Par ailleurs, toujours d'après le lemme 4-21, on sait que pour toute mesure $\tau \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on a $(\pi_0, \pi_1) \# (\Gamma \# \tau) = \tau$, i.e. $(\pi_0, \pi_1) \# (\Gamma \# X) = X$ pour tout sous-ensemble X de $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. En reprenant la relation 4-21, on a

$$\operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi = (\pi_0, \pi_1) \# (\Gamma \# (\operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi)) = (\pi_0, \pi_1) \# (\operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\operatorname{IntLin})} \mathcal{K}).$$

□

Corollaire 4-3. *On suppose que la fonction de dissipation ζ est positive, continue et coercive. Alors*

$$\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}.$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) = \emptyset$, on a $\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = +\infty$. Plus généralement,

$$\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset \iff \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} < +\infty \iff \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} < +\infty \iff \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \mu_0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d). \quad (4-22)$$

Preuve : D'après la proposition 4-6, on a

$$\min_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi = \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1},$$

et d'après le corollaire 4-2, si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, alors $\operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \neq \emptyset$, $\operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi \neq \emptyset$ et

$$\min_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \leq \mu_0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d).$$

Par ailleurs, d'après le lemme 4-1, on a $\inf_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \geq \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$, d'où

$$\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \min_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi \leq \min_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi = \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1},$$

i.e.

$$\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \min_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi = \min_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi = \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}.$$

Inversement, si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) = \emptyset$, alors $\Psi(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$ (car si ce n'était pas le cas, $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ serait non vide d'après le lemme 4-21). D'après la proposition 4-6 et la remarque 4-11, on a alors $\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = +\infty$. En résumé :

- si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, alors $\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = \min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \leq \mu_0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d)$,
- si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) = \emptyset$, alors $\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = +\infty$,

i.e. si $\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} < +\infty$ est fini, alors forcément $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, et donc $\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \mu_0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d)$, d'où la relation d'équivalence (4-22). □

Remarque 4-12. La preuve du corollaire 4-3 montre en outre que si $\Psi(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$ ou $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$ (ce qui est équivalent d'après le corollaire 4-2, alors $\operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi \neq \emptyset$ et

$$\operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+(\overline{B(a, M/2)} \times \overline{B(a, M/2)})} \Phi \subset \operatorname{argmin}_{\Psi(\mu_0, \mu_1)} \Phi.$$

4.3.4 Existence d'un maximum de J_{μ_0, μ_1} sur \mathcal{D}_M et finalisation de la preuve d'existence d'un point selle du lagrangien L_c

Pour finir, montrons que (sous les conditions de cette sections) J_{μ_0, μ_1} admet bien un maximum sur \mathcal{D}_M (et plus précisément sur \mathcal{D}_∞).

Définition 4-10. Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^d . On définit l'ensemble suivant (où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) :

$$\operatorname{Cond}_\zeta(X, \overline{\mathbb{R}}) = \{(f, g), f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \forall x, y \in X, g(x) \leq f(y) + \zeta(|x - y|)\}.$$

Lemme 4-22. Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , et soit $\{(f_i, g_i)_{i \in I}\}$ une famille d'éléments de $\operatorname{Cond}_\zeta(X, \overline{\mathbb{R}})$ indexée sur un ensemble I quelconque. Alors

$$\left(\inf_{i \in I} f_i, \inf_{i \in I} g_i \right) \in \operatorname{Cond}_\zeta(X, \overline{\mathbb{R}}) \quad \text{et} \quad \left(\sup_{i \in I} f_i, \sup_{i \in I} g_i \right) \in \operatorname{Cond}_\zeta(X, \overline{\mathbb{R}}).$$

Preuve : Pour tous $x, y \in X$, on a :

- $\inf_{i \in I} g_i(x) \leq g_j(x) \leq f_j(y) + \zeta(|x - y|)$, pour tout $j \in I$, d'où $\inf_{i \in I} g_i(x) - \zeta(|x - y|) \leq \inf_{i \in I} f_i(y)$.
- De même, $\sup_{i \in I} f_i(y) \geq f_j(y) \geq g_j(x) + \zeta(|x - y|)$, pour tout $j \in I$, d'où $\sup_{i \in I} f_i(y) - \zeta(|x - y|) \geq \sup_{i \in I} g_i(x)$.

□

Corollaire 4-4. Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , et soit $\{(f_n, g_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ une suite d'éléments de $\operatorname{Cond}_\zeta(X, \overline{\mathbb{R}})$. Alors

$$\left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow +\infty} g_n \right) \in \operatorname{Cond}_\zeta(X, \overline{\mathbb{R}}) \quad \text{et} \quad \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} g_n \right) \in \operatorname{Cond}_\zeta(X, \overline{\mathbb{R}}).$$

Preuve : Application directe du lemme 4-22. □

Définition 4-11. On définit l'ensemble suivant :

$$\operatorname{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+) = \{(f, g) \in C_+(\mathbb{R}^d)^2, \forall x, y \in X, g(x) \leq f(y) + \zeta(|x - y|)\}.$$

Définition 4-12. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, et soit $m > 0$. On définit l'ensemble $\operatorname{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a, m}(\mathbb{R}^d)$ des couples $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ pour lesquels il existe une constante réelle $K(\alpha) > 0$ telle que

- $\alpha(x) \leq K(\alpha)$ pour tout $x \in B(a, m)$,
- $\alpha(x) = K(\alpha)$ et $\beta(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(a, m)$.

On définit également l'ensemble $\mathcal{D}_\infty^+ = \mathcal{D}_\infty \cap C_+(\mathbb{R}^d)^2$.

Lemme 4-23. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soient $m, m', M \in \mathbb{R}$ tels que $0 < 2m < 2m' < M$, et tels que $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, m)$.

Alors pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, il existe un couple $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \text{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a, m'}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$J_{\mu_0, \mu_1} (e^{\bar{\alpha}} - 1, e^{\bar{\beta}} - 1) = J_{\mu_0, \mu_1} (e^\alpha - 1, e^\beta - 1).$$

Plus précisément, en reprenant les notations de la définition 4-12, on a

$$K(\bar{\alpha}) = \ln \left(e^{\zeta(M)} \sup_{B(a, m')} |e^\alpha - 1| + 1 \right).$$

Preuve : On a bien sûr $e^{\text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)} - 1 = \mathcal{D}_\infty^+$ au sens où $(e^\alpha - 1, e^\beta - 1) \in \mathcal{D}_\infty^+$ pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, et inversement, pour tout $(f, g) \in \mathcal{D}_\infty^+$, on a $(\ln(f+1), \ln(g+1)) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$: et posons $(f^\alpha, g^\beta) = (e^\alpha - 1, e^\beta - 1) \in \mathcal{D}_\infty^+ \subset \mathcal{D}_M$. D'après le lemme 2-3 et son corollaire 2-1 il existe un couple $(\bar{f}^\alpha, \bar{g}^\beta) \in \mathcal{D}_\infty^+$ tel que :

- $\bar{f}^\alpha|_{B(a, m)} = f^\alpha|_{B(a, m)}$ et $\bar{g}^\beta|_{B(a, m)} = g^\beta|_{B(a, m)}$.
- \bar{f}^α et \bar{g}^β sont toutes deux constantes sur $\mathbb{R}^d \setminus B(a, m')$, avec de plus et $\bar{g}^\beta(x) = 0$ et $\bar{f}^\alpha(x) = e^{\zeta(M)} \sup_{B(a, m')} |f^\alpha|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(a, m')$.
- Pour tout $x \in B(a, m')$, on a $f(x) \leq e^{\zeta(M)} \sup_{B(a, m')} |f^\alpha|$.
- $\bar{g}^\beta \geq 0$ du fait que $g^\beta \geq 0$.

On pose alors $\bar{\alpha} = \ln(\bar{f}^\alpha + 1)$ et $\bar{\beta} = \ln(\bar{g}^\beta + 1)$. On a ainsi, en posant $K = \ln(e^{\zeta(M)} \sup_{B(a, m')} |f^\alpha| + 1)$:

- $\bar{\beta} \geq 0$.
- $\bar{\alpha}(x) \leq K$ pour tout $x \in B(a, m')$.
- $\bar{\beta}(x) = 0$ et $\bar{\alpha}(x) = K$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(a, m')$.
- $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, et donc $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \text{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a, m'}(\mathbb{R}^d)$ d'après les trois points précédents et la définition 4-12.
- Pour finir, du fait que $\bar{f}^\alpha|_{B(a, m)} = f^\alpha|_{B(a, m)}$ et $\bar{g}^\beta|_{B(a, m)} = g^\beta|_{B(a, m)}$ on a :

$$J_{\mu_0, \mu_1} (e^{\bar{\alpha}} - 1, e^{\bar{\beta}} - 1) = J_{\mu_0, \mu_1} (\bar{f}^\alpha, \bar{g}^\beta) = J_{\mu_0, \mu_1} (f^\alpha, g^\beta) = J_{\mu_0, \mu_1} (e^\alpha - 1, e^\beta - 1).$$

□

Remarque 4-13. On aurait bien sûr pu refaire la preuve du lemme 2-3 et poser directement $\bar{\beta} = \chi\beta$ et $\bar{\alpha} = \chi\alpha + (1 - \chi)K$ où $\chi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ est une fonction telle que $\mathbb{1}_{B(a, m)} \leq \chi \leq \mathbb{1}_{B(a, M/2)}$ (qui existe d'après le lemme 2-4), mais cela nous aurait contraint à re-détailler les cas (similaires) une seconde fois. Nous avons donc fait le choix de repartir du résultat du lemme 2-3 même si à première vue cette forme ne semble pas optimale.

On a donc, pour $0 < 2m < 2m' < M$ tels que $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, m)$:

$$\sup_{(\alpha, \beta) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})} J_{\mu_0, \mu_1} (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^{\zeta\beta} - 1) = \sup_{(\alpha', \beta') \in \text{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a, m'}(\mathbb{R}^d)} J_{\mu_0, \mu_1} (e^{\alpha'} - 1, e^{\beta'} - 1). \quad (4-23)$$

Lemme 4-24. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive et coercive telle que $\zeta(0) = 0$ et telle que $\zeta(s) > 0$ si $s > 0$. Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^d et soit $\beta \in C_+(\mathbb{R}^d)$ telle que $\beta(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus E$.

Alors, pour tout $x \in E$, on a $\partial_\zeta \beta(x) \subset E$.

Preuve : Comme ζ est continue et coercive, et que β est continue et bornée, on a $\text{Dom}(\partial_\zeta \beta) = \mathbb{R}^d$. Soit $x \in E$. Pour tout $y \in \partial_\zeta \beta(x)$, on a

$$0 \leq \beta(x) = \beta(x) - \underbrace{\zeta(|x - x|)}_{=0} \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^d} [\beta(z) - \zeta(|x - z|)] = -\zeta\beta(x) = \beta(y) - \zeta(|y - x|).$$

Soit $y \in \partial_\zeta \beta(x)$: si l'on avait $y \notin E$, on aurait alors $\beta(y) = 0$ et $|y - x| > 0$, d'où $\zeta(|y - x|) > 0$ et ainsi

$$\beta(x) \leq -\zeta\beta(x) = \underbrace{\beta(y)}_{=0} - \underbrace{\zeta(|y - x|)}_{>0} < 0,$$

ce qui contredirait la positivité de β .

□

Lemme 4-25. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue, positive et coercive telle que $\zeta(0) = 0$ et telle que $\zeta(s) > 0$ si $s > 0$. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soit $m > 0$ et soit $\beta \in C_+(\mathbb{R}^d)$ telle que $\beta(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(a, m)$.

Alors, pour tout $x, y \in B(a, m)$, on a $|\zeta\beta(x) - \zeta\beta(y)| \leq \sup \zeta(\overline{B(0, 2m)})$.

Preuve : Comme ζ est continue et coercive, et que β est continue et bornée, on a $\text{Dom}(\partial_\zeta\beta) = \mathbb{R}^d$. De plus la continuité de ζ assure que $\sup \zeta(\overline{B(0, 2m)})$ est bien fini.

Soient $x, y \in B(0, 2m)$. Soit $z_x \in \partial_\zeta\beta(x)$. D'après le lemme 4-24, on a donc $z_x \in B(a, m)$, et donc $|z_x - y| \leq |z_x - a| + |a - y| < 2m$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \zeta\beta(y) - \zeta\beta(x) &\leq \underbrace{\zeta(|z_x - y|) - \beta(z_x)}_{\geq \zeta\beta(y)} - \underbrace{(\zeta(|z_x - x|) - \beta(z_x))}_{=\zeta\beta(x)} \\ &= \zeta(|z_x - y|) - \underbrace{\zeta(|z_x - x|)}_{\geq 0} \\ &= \zeta(|z_x - y|) \leq \sup \zeta(\overline{B(0, 2m)}) < +\infty. \end{aligned}$$

On montre de même que $\zeta\beta(x) - \zeta\beta(y) \leq \sup \zeta(\overline{B(0, 2m)})$.

□

Définition 4-13. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soit $R > 0$. On définit l'ensemble

$$\text{Cond}_{b,\zeta}^{a,R}(\mathbb{R}^d) = \{(\alpha, \beta) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+), 0\beta \leq \alpha \leq \mathcal{G}(R)\}.$$

où $\mathcal{G}(R) = \ln \left(e^{\zeta(R)} \left| e^{\sup \zeta(\overline{B(0,R)})} - 1 \right| + 1 \right)$.

Lemme 4-26. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue, coercive, strictement croissante telle que $\zeta(0) = 0$. Supposons que $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $0 < 2m < M$, et tels que $\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1) \subset B(a, m)$.

Alors pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, il existe un couple $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \text{Cond}_{b,\zeta}^{a,M}(\mathbb{R}^d) \cap \text{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a,M/2}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\bar{\alpha}} - 1, e^{\bar{\beta}} - 1) \geq J_{\mu_0, \mu_1}(e^\alpha - 1, e^\beta - 1).$$

Preuve : Soit $m' \in \mathbb{R}$ tel que $0 < 2m < 2m' < M$. Soit $(\alpha, \beta) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$. D'après le lemme 4-23, il existe un couple $(\alpha^1, \beta^1) \in \text{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a,m'}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^1} - 1, e^{\beta^1} - 1) = J_{\mu_0, \mu_1}(e^\alpha - 1, e^\beta - 1).$$

On a donc notamment $\inf_{\mathbb{R}^d} \alpha^1 = \inf_{\overline{B(a, m')}} \alpha^1$, et ainsi, par continuité de α^1 , celle-ci admet un minimum global sur $\overline{B(a, m')}$, i.e. $\text{argmin}_{\mathbb{R}^d} \alpha^1 \cap \overline{B(a, m')} \neq \emptyset$.

Soit $c = \min_{\mathbb{R}^d} \alpha^1 \geq 0$. On pose $\alpha^2 = \alpha^1 - c$ et $\beta^2 = \max\{0, \beta^1 - c\}$. D'après le lemme 4-22, et du fait $(\alpha^2, 0) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ (α^2 étant positive) on a toujours $(\alpha^2, \beta^2) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ (avec toujours $\beta^2(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(a, m')$), et donc $(\alpha^2, \beta^2) \in \text{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a,m'}(\mathbb{R}^d)$ avec $\min_{\mathbb{R}^d} \alpha^2 = 0$ et toujours $\text{argmin}_{\mathbb{R}^d} \alpha^2 \cap \overline{B(a, m')} \neq \emptyset$.

On a alors l'inégalité :

$$\begin{aligned} J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^1}, e^{\beta^1}) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\beta^1} d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha^1} d\mu_0 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} e^{\max\{c, \beta^1\}} d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha^1} d\mu_0 \\ &= e^c \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{\max\{0, \beta^1 - c\}} d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha^1 - c} d\mu_0 \right) \\ &= e^c \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{\beta^2} d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha^2} d\mu_0 \right) \\ &= e^c J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^2}, e^{\beta^2}). \end{aligned} \tag{4-24}$$

Or, d'après le corollaire 4-3 (qui s'applique sous les hypothèses de ce lemme), on a

$$\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}.$$

Soit $\omega \in \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}$ (rappelons que l'énoncé du lemme suppose que $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$). Pour tout $(\alpha', \beta') \in \operatorname{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, on a donc $(e^{\alpha'} - 1, e^{\beta'} - 1) \in \mathcal{D}_\infty$ et ainsi

$$J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha'} - 1, e^{\beta'} - 1) = J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha'}, e^{\beta'}) - \mu_1(\mathbb{R}^d) + \mu_0(\mathbb{R}^d) \leq \underbrace{\mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d)}_{=\mathcal{K}(\omega)},$$

d'où $J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha'}, e^{\beta'}) \leq \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) - \mu_0(\mathbb{R}^d) \leq 0$.

Dans notre cas, comme $e^c \geq 1$, on a alors $e^c J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^2}, e^{\beta^2}) \leq J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^2}, e^{\beta^2}) \leq 0$, et ainsi

$$J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^1}, e^{\beta^1}) \leq J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^2}, e^{\beta^2}),$$

du fait de l'inégalité (4-24), i.e.

$$J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^2} - 1, e^{\beta^2} - 1) \geq J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^1} - 1, e^{\beta^1} - 1).$$

On pose alors $\alpha^3 = -\zeta\beta^2$ et $\beta^3 = \beta^2$. On a alors

$$0 \leq \underbrace{\beta^3}_{=\beta^2} \leq \underbrace{\alpha^3}_{=-\zeta\beta^2} \leq \alpha^2. \quad (4-25)$$

Rappelons en effet que comme $(\alpha^2, \beta^2) \in \operatorname{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, on a $\beta^2(y) - \zeta(|x - y|) \leq \alpha^2(x)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$0 \leq \beta^2(x) = \beta^2(x) - \zeta(|x - x|) \leq \underbrace{\sup_{y \in \mathbb{R}^d} [\beta^2(y) - \zeta(|x - y|)]}_{=-\zeta\beta^2(x)} \leq \alpha^2(x).$$

Du fait de l'inégalité (4-25), on a :

$$- J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^3} - 1, e^{\beta^3} - 1) \geq J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^2} - 1, e^{\beta^2} - 1).$$

$$- \min_{\mathbb{R}^d} \alpha^3 = \min_{\mathbb{R}^d} \alpha^2 = 0 \text{ et } \emptyset \neq \operatorname{argmin}_{\mathbb{R}^d} \alpha^2 \cap \overline{B(a, m')} \subset \operatorname{argmin}_{\mathbb{R}^d} \alpha^3 \cap \overline{B(a, m')}.$$

Soit $x_0 \in \operatorname{argmin}_{\mathbb{R}^d} \alpha^3 \cap \overline{B(a, m')}$, vérifiant donc $\alpha^3 = -\zeta\beta^2(x_0) = 0$. Du fait de l'hypothèse de stricte croissance de ζ , on a bien $\zeta(s) > 0$ pour $s > 0$. On peut donc appliquer le lemme 4-25 d'après lequel, pour tout $x \in B(a, m')$, on a

$$0 \leq \alpha^3(x) = |\alpha^3(x) - \underbrace{\alpha^3(x_0)}_{=0}| = |-\zeta\beta(x) + \zeta\beta(x_0)| \leq \sup \zeta(\overline{B(0, 2m')}) \leq \sup \zeta(\overline{B(0, M)}), \quad (4-26)$$

i.e. On applique une dernière fois le lemme 4-23 par lequel il existe un couple $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \operatorname{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a, m'}(\mathbb{R}^d) \subset \operatorname{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a, M/2}(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\bar{\alpha}} - 1, e^{\bar{\beta}} - 1) = J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha^3} - 1, e^{\beta^3} - 1).$$

De plus, d'après ce même lemme et d'après l'inégalité (4-26) :

$$0 \leq \bar{\beta} \leq \bar{\alpha} \leq K(\bar{\alpha}) = \ln \left(e^{\zeta(M)} \sup_{B(a, m')} |e^{\alpha^3} - 1| + 1 \right) \leq \ln \left(\underbrace{e^{\zeta(M)} |e^{\sup \zeta(\overline{B(0, M)})} - 1| + 1}_{=\mathcal{G}(M)} \right).$$

□

Lemme 4-27. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue, coercive, strictement croissante telle que $\zeta(0) = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Supp}(\mu_0) \cup \operatorname{Supp}(\mu_1) \subset B(a, M/2)$.

Si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, alors

$$\sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} = \max_{\mathcal{D}_\infty^+} J_{\mu_0, \mu_1} = \max_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1},$$

i.e. il existe un couple $(f, g) \in \mathcal{D}_\infty^+$ tel que $J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \sup_{\mathcal{D}_\infty^+} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}$ ^a.

a. Autrement dit, $\operatorname{argmax}_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = \operatorname{argmax}_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} \neq \emptyset$: le problème dual énoncé dans la définition 2-7 admet bien au moins une solution.

Remarque 4-14. Faisons le petit rappel suivant avant la preuve du lemme 4-27. Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, on a donc par définition : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $0\beta(y) \leq \alpha(x) + \zeta(|y - x|)$, d'où

$$0 \leq \beta(x) = \beta(x) - \underbrace{\zeta(|x - x|)}_{=0} \leq \underbrace{\sup_{y \in \mathbb{R}^d} [\beta(y) - \zeta(|x - y|)]}_{=-\zeta\beta(x)} \leq \alpha(x).$$

Comme bien sûr on a $\beta(x) \leq \zeta(|y - x|) - \zeta\beta(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a donc également

$$\beta(x) \leq \underbrace{\inf_{y \in \mathbb{R}^d} [\zeta(|y - x|) - \zeta\beta(y)]}_{=\zeta\beta(x)} \leq \underbrace{\zeta(|x - x|)}_{=0} - \zeta\beta(x) = -\zeta\beta(x),$$

d'où

$$0 \leq \beta(x) \leq \zeta\beta(x) \leq -\zeta\beta(x) \leq \alpha(x). \quad (4-27)$$

Preuve du lemme 4-27 : Tout d'abord, notons que pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{D}_\infty$, on a $(f, \max\{g, 0\}) \in \mathcal{D}_\infty$ (d'après le lemme 4-22), d'où $(f, \max\{g, 0\}) \in \mathcal{D}_\infty^+$ et

$$J_{\mu_0, \mu_1}(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} g d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \max\{g, 0\} d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_0 = J_{\mu_0, \mu_1}(f, \max\{g, 0\}).$$

On a donc $\sup_{\mathcal{D}_\infty^+} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}$.

En rappelant que $e^{\text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)} - 1 = \mathcal{D}_\infty^+$, soit $(\alpha_n, \beta_n)_n$ une suite d'éléments de $\text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ telle que la suite $(e^{\alpha_n} - 1, e^{\beta_n} - 1)$ soit maximisante pour J_{μ_0, μ_1} sur \mathcal{D}_∞^+ , i.e. telle que

$$J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha_n} - 1, e^{\beta_n} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup_{\mathcal{D}_\infty^+} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}.$$

D'après le lemme 4-26, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un couple $(\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n) \in \text{Cond}_{b, \zeta}^{a, M}(\mathbb{R}^d) \cap \text{Cond}_{\zeta, \text{const}}^{a, M/2}(\mathbb{R}^d) \subset \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ tel que

$$J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha_n} - 1, e^{\beta_n} - 1) \leq J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\bar{\alpha}_n} - 1, e^{\bar{\beta}_n} - 1) \leq \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1},$$

La suite $(e^{\bar{\alpha}_n} - 1, e^{\bar{\beta}_n} - 1)_n$ est donc également maximisante pour J_{μ_0, μ_1} et, par définition de $\text{Cond}_{b, \zeta}^{a, M}(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n)$ est uniformément bornée dans $C_b^+(\mathbb{R}^d) \times C_b^+(\mathbb{R}^d)$.

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha'_n = -\bar{\beta}_n$ et $\beta'_n = \zeta(-\alpha'_n) = \zeta\bar{\beta}_n$. On a donc en particulier, d'après la relation (4-27) rappelée dans la remarque 4-14 :

$$0 \leq \bar{\beta}_n \leq \underbrace{\beta'_n}_{=\zeta\bar{\beta}_n} \leq \underbrace{\alpha'_n}_{=-\zeta\bar{\beta}_n} \leq \bar{\alpha}_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\bar{\beta}_n} - 1) d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\beta'_n} - 1) d\mu_1$ et $\int_{\mathbb{R}^d} (e^{\alpha'_n} - 1) d\mu_0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\bar{\alpha}_n} - 1) d\mu_0$, d'où

$$\begin{aligned} J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\bar{\alpha}_n} - 1, e^{\bar{\beta}_n} - 1) &= \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\bar{\beta}_n} - 1) d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\bar{\alpha}_n} - 1) d\mu_0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\beta'_n} - 1) d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\alpha'_n} - 1) d\mu_0 \\ &= J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha'_n} - 1, e^{\beta'_n} - 1). \end{aligned}$$

Comme on a bien sûr $(\alpha'_n, \beta'_n) \in \text{Cond}_\zeta(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(e^{\alpha'_n} - 1, e^{\beta'_n} - 1)_n$ est également maximisante pour J_{μ_0, μ_1} dans \mathcal{D}_∞ , i.e.

$$J_{\mu_0, \mu_1}(e^{\alpha'_n} - 1, e^{\beta'_n} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}. \quad (4-28)$$

Par ailleurs, les familles $\{\bar{\beta}_n\}$ et $\{\alpha'_n\}$ étant uniformément bornées dans $C_b^+(\mathbb{R}^d)$, alors d'après le lemme A-14, les familles $\underbrace{\{-\zeta\bar{\beta}_n\}}_{=\{\alpha'_n\}}$ et $\underbrace{\{\zeta(-\alpha'_n)\}}_{=\{\beta'_n\}}$ sont équicontinues (et également uniformément bornées dans $C_b^+(\mathbb{R}^d)$).

D'après le théorème d'Ascoli, la famille $\{(\alpha'_n)_{|B(a, M/2)}, (\beta'_n)_{|B(a, M/2)}\}$ est relativement compacte dans l'espace $(C^+(\overline{B(a, M/2)}) \times C^+(\overline{B(a, M/2)}), \|\cdot\|_\infty)$: ainsi, il existe un couple $(\alpha^0, \beta^0) \in C^+(\overline{B(a, M/2)}) \times C^+(\overline{B(a, M/2)})$

et une sous-suite $\left((\alpha'_{\varphi(n)})_{|B(a, M/2)}, (\beta'_{\varphi(n)})_{|B(a, M/2)} \right)_n$ extraite de $\left((\alpha'_n)_{|B(a, M/2)}, (\beta'_n)_{|B(a, M/2)} \right)_n$ convergeant uniformément vers (α^0, β^0) .

Soient $m, m' \in \mathbb{R}$ tels que $0 < 2m < 2m' < M$ et tels que $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, m)$. On pose $(f^0, g^0) = (e^{\alpha^3} - 1, e^{\beta^3} - 1)$: on a donc $(f^0, g^0) \in \mathcal{D}_{a, M}^{res}$, avec $g^0 \geq 0$. Ainsi, d'après le lemme 2-3, il existe un couple $(f, g) \in \mathcal{D}_\infty$ avec $g \geq 0$, i.e. $(f, g) \in \mathcal{D}_\infty^+$, tel que $f|_{B(a, m)} = f^0|_{B(a, m)}$ et $g|_{B(a, m)} = g^0|_{B(a, m)}$.

Autrement dit, la restriction de la suite $\left(e^{\alpha'_{\varphi(n)}} - 1, e^{\beta'_{\varphi(n)}} - 1 \right)_n$ à $B(a, m)$ converge uniformément vers la restriction de (f, g) à $B(a, m)$. Et comme $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, m)$, on a donc

$$J_{\mu_0, \mu_1} (e^{\alpha_n} - 1, e^{\beta_n} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} J_{\mu_0, \mu_1} (f, g),$$

d'où $J_{\mu_0, \mu_1} (f, g) = \sup_{\mathcal{D}_\infty^+} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}$ d'après (4-28). □

Remarque 4-15. Rappelons que dans le cadre de l'énoncé, nous n'avons pas supposé que ζ était strictement convexe, ni même localement lipschitzienne : nous n'avons donc pas appliqué les résultats de la sous-section 4.2.1 au début de la preuve du lemme 4-27, notamment les observations de la remarque 4-6, qui énoncent que $\sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_{Fix_{x^+}} J_{\mu_0, \mu_1}}, \mathcal{D}_{Fix_{x^-}} J_{\mu_0, \mu_1}$ (voir la définition 4-3).

Remarque 4-16. Remarquons que même si l'ensemble \mathcal{D}_∞ est, contrairement à \mathcal{D}_M , indépendant de la borne M , l'existence d'un maximum pour J_{μ_0, μ_1} sur \mathcal{D}_∞ dépend tout de même de M par l'intermédiaire des mesures μ_0 et μ_1 dont dépend J_{μ_0, μ_1} du fait que :

- Il faut que l'on ait $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, M/2)$.
- Il faut que l'on ait $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$.

Proposition 4-7. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, convexe et strictement croissante (donc coercive) telle que $\zeta(0) = 0$ (donc continue). Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, M/2)$. Supposons de plus que $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$.

Si $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset$, alors le lagrangien L_c admet un point selle sur $\mathcal{M}_+ (L^{d, M}) \times [C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)]$.

Preuve : Sous les hypothèses de l'énoncé, on a :

- $\text{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} \neq \emptyset$ et $\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = \sup_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}$ d'après le corollaire 4-3,
- $\text{argmax}_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1} \neq \emptyset$ d'après le lemme 4-27.

Ainsi, d'après la proposition 4-2, le lagrangien L_c admet un point selle sur $\mathcal{M}_+ (L^{d, M}) \times [C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)]$. □

Définition 4-14. On définit l'ensemble $\text{Fix}_\zeta^{opt} (J_{\mu_0, \mu_1}) = \left\{ \alpha \in \text{Fix}_\zeta (\mathbb{R}^d), (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \in \text{argmax}_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \right\}$.

Remarque 4-17. Si ζ, μ_0 et μ_1 vérifient les hypothèses de la proposition 4-7, alors d'après celle-ci et la proposition 4-5, on a donc $\text{Fix}_\zeta^{opt} (J_{\mu_0, \mu_1}) \neq \emptyset$.

Remarque 4-18. En ajoutant aux hypothèses de la proposition 4-7 l'hypothèse que la fonction de dissipation ζ est également de classe C^1 et convexe, on peut alors appliquer les résultats des propositions 4-3 et 4-4 et des lemmes 4-4 4-5, 4-6 et 4-11, pour obtenir notamment l'unicité et une forme explicite de la mesure optimale ω (i.e. minimisant l'énergie \mathcal{K} sur $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$) en fonction d'un potentiel $\alpha \in \text{Fix}_\zeta^{opt} (J_{\mu_0, \mu_1})$.

5 Conclusion et perspectives

5.1 Récapitulatif des principaux résultats

Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1)} \subset B(a, M/2)$. On suppose de plus que $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$.

Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, convexe et strictement croissante (donc coercive) telle que $\zeta(0) = 0$ (donc continue).

Si l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ est non vide, alors :

1. Le problème primal (voir la définition 2-5), c'est à dire l'existence d'une mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ minimisant l'énergie \mathcal{K} sur $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, admet une solution (proposition 2-1).

Plus précisément, une telle solution est dans $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \cap \mathcal{M}_+ (\text{IntLin})$: cette solution n'alloue la masse que sur des chemins de type "interpolation linéaire" (tous les déplacements se font en ligne droite à vitesse constante).

2. Le problème dual (voir la définition 2-7), à savoir l'existence d'un maximum de la fonctionnelle J_{μ_0, μ_1} sur l'ensemble \mathcal{D}_M (ou \mathcal{D}_∞), admet une solution (lemme 4-27). On a un raccordement inf-sup (et même min-max) entre le problème dual et le problème dual (voir le lemme 4-27, le corollaire 4-3 et la proposition 4-7) :

$$\min_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K} = \max_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = \max_{\mathcal{D}_\infty} J_{\mu_0, \mu_1}.$$

3. Le lagrangien L_c (définition 4-1) admet un point selle sur $\mathcal{M}_+ (L^{d, M}) \times [C^+(\mathbb{R}^d) \times C(\mathbb{R}^d)]$ (proposition 4-7). Plus précisément, n'importe quel couple $(\omega, (f, g))$, où ω est une solution du problème primal (c'est à dire du point 1.) et (f, g) une solution du problème dual (c'est à dire du point 2.) est un point selle de L_c (proposition 4-2).
4. Pour toute solution $(f, g) \in \mathcal{D}_M$ du problème dual, il existe une fonction $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ (vérifiant donc les propriétés (II), voir la définition 4-2), telle que $\bar{f} = e^{-\zeta\alpha} - 1$ μ_0 -presque partout ^a, et $\bar{g} = e^\alpha - 1$ μ_1 -presque partout (lemmes 4-4 et 4-5).

Autrement dit $\text{argmax}_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} = \text{argmax}_{\mathcal{D}_{\text{Fix}_\zeta}} J_{\mu_0, \mu_1}$ (remarque 4-6), i.e. $\text{Fix}_\zeta^{\text{opt}}(J_{\mu_0, \mu_1}) \neq \emptyset$ (remarque 4-17).

5. Toute solution du problème primal sélectionne la mesure de départ initialement disponible μ_0 de façon "bang-bang". Autrement dit, si $\omega \in \text{argmin}_{\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)} \mathcal{K}$, alors il existe un borélien V_ω de \mathbb{R}^d pour lequel on a :

$$\mu_\omega^0 = \pi_0 \# \omega = \mathbb{1}_{V_\omega} \mu_0$$

(proposition 3-1).

Si de plus on suppose que ζ est de classe C^1 et strictement convexe alors :

- Le problème primal admet une **unique** solution ω_{opt} définie explicitement en fonction de tout potentiel $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1) \in \text{argmax}_{\mathcal{D}_{\text{Fix}_\zeta}} J_{\mu_0, \mu_1}$ par :

$$\omega_{\text{opt}} = \Gamma \circ (\text{I}, \nabla_\zeta \alpha) \# (\mathbb{1}_{\zeta\alpha^{-1}(\mathbb{R}_-)} \mu_0). \quad (5-1)$$

(proposition 4-5 pour (5-1) et définitions A-3 et 2-11 pour respectivement $\nabla_\zeta \alpha$ et Γ). En particulier, on a $\mu_{\omega_{\text{opt}}}^0 \mathbb{1}_{\zeta\alpha^{-1}(\mathbb{R}_-)} \mu_0$ (propositions 4-3 et 4-5).

- Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\mu_{\omega_{\text{opt}}}^t = ((1-t)\text{I} + t\nabla_\zeta \alpha) \# (e^{-t\zeta(|\nabla_\zeta \alpha| - \text{I})} \mathbb{1}_{\zeta\alpha^{-1}(\mathbb{R}_-)} \mu_0) \quad (5-2)$$

(proposition 4-5).

Pour finir, notons que le corollaire 4-3 nous donne également un premier critère (dont l'utilité pratique reste à prouver) pour déterminer si l'ensemble des contraintes $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ est non vide :

$$\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1) \neq \emptyset \iff \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} < +\infty \iff \sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1} \leq \mu_0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d).$$

5.2 Perspectives à court terme

5.2.1 Formulation dynamique d'un point de vue eulérien

Notre principale perspective à court terme est de revenir à la formulation dynamique eulérienne énoncée en (1-2), dans la section d'introduction de notre problème.

Pour faire le lien avec notre problème, supposons que la fonction de dissipation ζ soit une fonction de classe C^1 , strictement convexe telle que $\zeta(0) = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1) \subset B(a, M/2)$. Supposons de plus que $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$.

D'après les propositions 4-7, 4-2 et 4-5 ainsi que le lemme 4-5, il existe une unique mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ minimisant l'énergie \mathcal{K} sur $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$, et un potentiel $\alpha \in \text{Fix}_\zeta(\mathbb{R}^d)$ tel que $(e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1)$ maximise J_{μ_0, μ_1} sur \mathcal{D}_M (i.e. $\alpha \in \text{Fix}_\zeta^{\text{opt}}(J_{\mu_0, \mu_1})$), c'est à dire tel que $(\omega, (e^{-\zeta\alpha} - 1, e^\alpha - 1))$ soit un point selle de L_c et tel que l'on ait

$$\mu_\omega^t = ((1-t)\text{I} + t\nabla_\zeta \alpha) \# (e^{-t\zeta(|\nabla_\zeta \alpha| - \text{I})} \mathbb{1}_{\zeta\alpha^{-1}(\mathbb{R}_-)} \mu_0).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, parmi tous les chemins de $L^{d, M}$ partant du point x , la mesure ω n'alloue (éventuellement) de la masse qu'aux chemins $\gamma_x : t \mapsto (1-t)x + t\nabla_\zeta \alpha(x)$.

Supposons qu'il existe un champ (de vitesse) borélien intégrable $v :]0, 1[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ en lequel ζ_α est Fréchet-différentiable, on ait

$$\gamma'_x(t) = \nabla_\zeta \alpha(x) - x = v(t, (1-t)x + t\nabla_\zeta \alpha(x)) = v(t, \gamma_x(t)). \quad (5-3)$$

Par ailleurs :

a. Voir la définition A-2 pour la définition de $\alpha \mapsto \zeta_\alpha$.

- D'après le lemme 4-7, on a $\omega \in \mathcal{M}_+(\text{IntLin})$, i.e. $\gamma \in \text{IntLin}$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, i.e. $\gamma(t) = (1-t)\gamma(0) + t\gamma(1)$.
- D'après le lemme 4-8, ζ_α est Fréchet-différentiable en $\gamma(0)$, $\gamma(0) \in \text{Dom}(\nabla_\zeta \alpha)$ et $\gamma(1) = \nabla_\zeta \alpha(\gamma(0))$ pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$.

Autrement dit, pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $\gamma(t) = (1-t)\gamma(0) + \underbrace{t\nabla_\zeta \alpha(\gamma(0))}_{=\gamma(1)}$. Ainsi, si v vérifie

la relation (5-3), on a

$$\gamma'(t) = \nabla_\zeta \alpha(\gamma(0)) - \gamma(0) = v(t, (1-t)\gamma(0) + t\nabla_\zeta \alpha(\gamma(0))) = v(t, \gamma(t)). \quad (5-4)$$

pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$ et tout $t \in [0, 1]$.

On note μ_ω la mesure borélienne sur $]0, 1[\times \mathbb{R}^d$ définie par

$$\mu_\omega(A) = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(t, x) d\mu_\omega^t(x) \right) dt \quad (5-5)$$

pour tout borélien A de $[0, 1] \times \mathbb{R}^d$.

Le couple (μ_ω, v) vérifie alors l'équation de continuité (au sens des distributions) :

$$\partial_t \mu_\omega + \text{div}_x (v \mu_\omega) = -\zeta(|v|) \mu_\omega \quad (5-6)$$

avec de plus $\mathcal{K}(\omega) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(|v(t, x)|) d\mu_\omega^t(x) dt = \int_{]0, 1[\times \mathbb{R}^d} \zeta(|v|) d\mu_\omega$.

Pour une justification formelle de cette équivalence (peu rigoureuse sur le fond), voir l'annexe C.

Le point important ici serait qu'un tel champ de vitesse v existe : en reformulant la relation (5-3), il serait suffisant que celui-ci vérifie

$$\frac{F_\alpha(t, x) - x}{t} = v(t, F_\alpha(t, x)). \quad (5-7)$$

où la fonction $F_\alpha : [0, 1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est définie pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^d$ par $F_\alpha(t, x) = (1-t)x + t\nabla_\zeta \alpha(x)$.

Si l'on pouvait montrer qu'il existe un potentiel $\alpha \in \text{Fix}_\zeta^{\text{opt}}(J_{\mu_0, \mu_1})$ ^b tel que pour tout $t \in]0, 1[$, la fonction $F_\alpha(t, \cdot)$ soit inversible (au moins à gauche), on pourrait donc définir v par

$$v(t, y) = \frac{y - F_\alpha(t, \cdot)^{-1}(y)}{t} \quad (5-8)$$

pour tout $(t, y) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^d$.

5.2.2 Exploitation numérique du modèle eulérien par relaxation convexe

La formulation dynamique eulérienne de la sous-sous-section 5.2.1 ouvre la voie à des traitements numériques classiques au domaine de l'optimisation variationnelle sous contraintes.

Par exemple, si l'on choisit la fonction de dissipation ζ de telle façon à ce que la fonction $(s, z) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^d \mapsto \zeta\left(\frac{|z|}{s}\right)$ soit convexe (par exemple $\zeta = |\cdot|^2$), il est possible, en utilisant le changement de terme $m = \rho v$ ^c proposé dans [3], de relaxer l'ensemble de contraintes de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(m) \leq -\zeta\left(\frac{|m|}{\rho}\right) \rho, \\ \rho(0, \cdot) \leq \rho_0 \text{ et } \rho(1, \cdot) \geq \rho_1. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi un ensemble de contraintes convexes en (ρ, m) sur lequel on cherche à minimiser le coût convexe

$$\mathbf{K}'(\rho, m) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \zeta\left(\frac{|m(t, x)|}{\rho(t, x)}\right) \rho(t, x) dx dt.$$

On compte alors sur la coïncidence^d entre les solutions du problème relaxé et les solutions du problème initial (i.e. du problème défini par (1-1) et (1-2) via le changement de terme $m = \rho v$).

Parmi les méthodes d'optimisation convexe sous contraintes ayant déjà été largement explorées et exploitées dans le cadre de modèles de transport optimal dynamique (formulation eulérienne), on peut citer en particulier les méthodes de Lagrangien augmenté [3], splitting-proximal ou primal-dual[15, 25, 5].

a. Rappelons que d'après le théorème de Fubini-Tonelli (voir [32]), l'application $x \mapsto \mathbb{1}_A(t, x)$ est borélienne pour tout $t \in [0, 1]$.

b. Voir la définition 4-14 et la remarque 4-17.

c. Nous reprenons ici l'expression de ce problème en terme de couple densité-vitesse (ρ, v) tel qu'utilisé dans la section d'introduction

1. Le terme m correspond alors à la quantité de mouvement.

d. Point à montrer rigoureusement.

5.2.3 Critère de consistance, exploitation numérique du modèle lagrangien et cas particuliers explicites

Comme déjà à la fin de la sous-section 5.1, le corollaire 4-3 nous donne un critère théorique pour déterminer la consistance du problème primal (i.e. celui de la définition 2-5), autrement dit, pour déterminer l'ensemble des contraintes $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ est non vide (i.e. s'il est possible de livrer la mesure cible μ_1 à partir de la mesure de disponibilité initiale μ_0). Il s'agit de déterminer si le terme dual $\sup_{\mathcal{D}_M} J_{\mu_0, \mu_1}$ est fini ou non, sachant que s'il est fini, il est forcément inférieur à $\mu_0(\mathbb{R}^d) - \mu_1(\mathbb{R}^d)$.

Une question serait donc de savoir s'il est possible d'exploiter efficacement ce critère de façon pratique. Si ce n'est pas le cas, il faudra alors rechercher d'autres critères de consistance plus efficaces en pratique. Mais si c'est le cas, ce calcul peut être couplé à la recherche directe d'un potentiel $\alpha \in \text{Fix}_{\zeta}^{\text{opt}}(J_{\mu_0, \mu_1})$ dont la connaissance permettrait de calculer directement la mesure ω_{opt} d'allocation optimale sur $L^{d, M}$, c'est à dire le plan de transport optimal : en effet la proposition 4-5 nous donne la relation (5-1), et même la relation (5-2) à partir de laquelle on peut également retrouver les solutions (μ, v) (ou (ρ, v) pour $\mu = \rho \mathcal{L}^d$) du problème dynamique.

Un dernier point sur lequel le modèle lagrangien pourrait dans tous les cas être également utile (en plus des propriétés descriptives établies via celui-ci^a), c'est à dire que l'on exploite numériquement ou non ce modèle (par exemple par rapport à un modèle eulérien), serait de pouvoir déterminer explicitement les solutions d'un certain nombre de cas particuliers dans le but de pouvoir utiliser ceux-ci comme des critères de comparaisons pour vérifier la validité empirique de différentes méthodes numériques qui pourraient être testées, et pour observer leurs différences d'efficacité mutuelles (toujours empiriquement).

5.3 Perspectives à plus long terme

5.3.1 Variante anisotrope ou inhomogène du modèle

Faire dépendre de la position spatiale, voir du temps la fonction de dissipation ζ , c'est à dire (si on reste dans une formulation dynamique) de minimiser un coût en (ρ, v) de type

$$\mathbf{K}(\rho, v) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(t, x, v(t, x)) \rho(t, x) dx dt \quad (5-9)$$

(avec $\zeta(t, x, 0) = 0$) parmi les couples (ρ, v) vérifiant la contrainte de dissipation :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho v) = -\zeta(t, x, v) \rho, \\ \rho(0, \cdot) \leq \rho_0 \text{ et } \rho(1, \cdot) = \rho_1. \end{cases}$$

La fonction $\zeta : [0, 1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ pourrait dans ce cadre modéliser un environnement inhomogène ou anisotrope (obstacles, courants, maelström, etc) évoluant ou non dans le temps.

Si, comme proposé dans la sous-sous-section 5.2.2, on souhaite obtenir un coût

$$\mathbf{K}'(\rho, m) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \zeta\left(t, x, \frac{m(t, x)}{\rho(t, x)}\right) \rho(t, x) dx dt$$

convexe en (ρ, m) (en introduisant de nouveau le terme de quantité de mouvement $m = \rho v$), on peut par exemple prendre $\zeta(t, x, v) = |R(t, x)v|^2$, où $(t, x) \mapsto R(t, x)$ est une fonction de classe C^1 définie sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^d$ à valeur dans $\text{GL}_d(\mathbb{R})$.

Cet exemple pourrait se rapprocher de travaux exploratoires [16] portant sur l'introduction de diverses contraintes physiques dans le modèle de transport optimal dynamique introduit dans [3] (transport optimal "classique" dans L^2 pour un coût euclidien quadratique).

Un tel problème peut aisément se transposer dans un cadre lagrangien tel que traité dans ce rapport : si, pour tout $t \in [0, 1]$ et toute mesure $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d, M})$, on définit la mesure de Radon $\mu_\omega^t = \pi_t \# (e^{-\ell_t} \omega)$ (sur \mathbb{R}^d) avec $\ell_t : \gamma \mapsto \int_0^t \zeta(s, \gamma(s), \gamma'(s)) ds$, i.e.

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_\omega^t(x) = \int_{L^{d, M}} f(\gamma(t)) e^{-\int_0^t \zeta(s, \gamma(s), \gamma'(s)) ds} d\omega(\gamma),$$

le problème revient alors à minimiser sur $\mathcal{M}_+(L^{d, M})$ le coût de dissipation

$$\mathcal{K}(\omega) = \mu_\omega^0(\mathbb{R}^d) - \mu_\omega^1(\mathbb{R}^d) = \int_{L^{d, M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(s, \gamma(s), \gamma'(s)) ds}\right) d\omega(\gamma)$$

sous la contrainte $\mu_\omega^0 \leq \mu_0$ et $\mu_\omega^1 = \mu_1$.

Il est alors aisé de constater que les calculs formels effectués dans la petite annexe C fonctionnent de la même façon

a. Telle que la sélection de type de "bang-bang" de la masse à déplacer par rapport à la mesure de masse initialement disponible μ_0 .

avec les mesures μ_ω^t telles que définies ci-dessus (et pour la mesure μ_ω telle que définie en (5-5) par rapport aux mesures μ_ω^t). On peut alors également établir dans les mêmes conditions que (μ_ω, v) vérifie l'équation de continuité

$$\partial_t \mu_\omega + \operatorname{div}_x (v \mu_\omega) = -\zeta(t, x, v) \mu_\omega.$$

au sens des distributions, et

$$\mathcal{K}(\omega) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(t, x, v(t, x)) d\mu_\omega^t(x) dt = \int_{]0,1[\times \mathbb{R}^d} \zeta(t, x, v(t, x)) d\mu_\omega(t, x)$$

pour toute mesure $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$ et tout champ de vitesse v vérifiant $\gamma'(t) = v(t, \gamma(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$ et ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$.

Avec un tel modèle, comme pour ceux étudiés dans [16], les trajectoires des transports optimaux n'ont plus de raison d'être des déplacements en ligne droite à vitesse constante, i.e. n'ont plus de raison d'être des interpolations linéaires en temps.

La perspective de ce modèle nous amène à privilégier l'approche de la sous-sous-section 5.2.2 plutôt que sur celle de la sous-sous-section 5.2.3 : en effet, la formulation eulérienne nous semble beaucoup plus souple pour introduire ces contraintes de pénalisation extérieures. Dans un modèle eulérien, nous calculons directement le couple (ρ, v) en espace et en temps : or, une précédente étude [16] nous avait permis de conclure qu'en pratique les méthodes numériques utilisées pour résoudre les cas homogènes et isotropes ne se complexifiaient que très peu avec l'introduction de contraintes d'environnement du même type que celles que nous avons décrites. Les algorithmes ne tournaient pas beaucoup plus lentement dans ces cas et étaient très similaires.

Au contraire, un méthode basée sur un point de vu lagrangien nous semble plus complexe à mettre en place. Dès lors que les chemins de transport ne seront plus des interpolations linéaires, mais des chemins courbés pouvant être parcourus à des vitesses non constantes (ce qui pourra être le cas si ζ varie avec le temps), nous aurons à faire à une question beaucoup plus compliquée qu'un simple problème d'allocation : la détermination de la solution au problème primal en fonction d'une solution au problème dual sera peut-être plus complexe (mais peut-être pas, et il faudra faire l'étude théorique pour le savoir).

5.3.2 Variante du modèle pour un temps de transport maximal fixé localement et non globalement

Remarquons que dans notre modèle, nous avons fixé un temps de parcours uniforme égal à 1 (i.e. $L^{d,M} = \operatorname{Lip}_M([0, 1], \mathbb{R}^d)$). Dans le cas d'une formulation eulérienne d'un problème de transport optimal, sans introduction d'un terme source dans l'équation de continuité (comme pour les autres cas de transport "unbalanced"), le temps de parcours global n'influe ni sur les solutions du problème (i.e. les plans de transport optimaux), ni sur le coût de transport optimal global (notamment dans le cas du modèle de [3]). On peut donc choisir le temps de parcours de façon indifférenciée, et donc le choix $t = 1$ est un choix de convenance parfaitement neutre.

Dans notre modèle, le temps de parcours revêt au contraire une grande importance, notamment lorsque la fonction de dissipation ζ est strictement convexe, et que le taux de dissipation n'est plus proportionnel à la vitesse, en évoluant de façon sur-linéaire par rapport à celle-ci. Cette réflexion qualitative nous le fait bien percevoir : dans le cas où ζ est sur-linéaire, plus on effectue rapidement un même parcours, plus la consommation sera importante. Dans notre cas, on voit qu'un même transport effectué en un temps $t = 1$ ne sera peut-être plus possible s'il est effectué en un temps inférieur faute de masse initialement disponible à consommer pour effectuer celui-ci.

D'ailleurs, si un transport est optimal, i.e. si une mesure d'allocation $\omega_{opt} \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ sur $L^{d,M}$ est optimale (ce qui implique une sélection de masse de départ $\mu_{\omega_{opt}}^0$ de type "bang-bang" ^a), il est en fait impossible (sauf cas triviaux) de conserver le même plan de transport (c'est à dire en "chargeant" les mêmes chemins, ou plus précisément en conservant le même opérateur $\nabla_\zeta \alpha$ d'allocation optimale dans \mathbb{R}^d) pour effectuer le même transport en un temps inférieur étant donné qu'il n'existe aucune "réserve supplémentaire à consommer" au départ de chaque chemin "chargé" par ω_{opt} ^b. Autrement dit, il n'y a que pour une mesure $\omega \in \mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_1)$ pour laquelle μ_ω^0 ne soit pas "bang-bang" par rapport à ω , et même que pour une mesure dont la densité ρ_ω^0 soit μ_0 -presque partout strictement inférieure à la densité ρ_0 de μ_0 ^c, que l'on peut éventuellement espérer conserver un même plan d'allocation tout en conservant les objectifs de livraison (mais avec la possibilité de "charger d'avantage" ces chemins au départ, tout cela dépendant de la limite en chaque point et du temps fixé).

Autrement dit, à chaque temps de parcours global fixé correspond une sélection de départ et une allocation optimale dans \mathbb{R}^d différente des autres, voir correspond l'existence ou non d'une solution (l'ensemble de contraintes $\mathcal{C}_M(\mu_0, \mu_t)$ peut être vide ou non selon le temps global de livraison t fixé).

Remarquons également que dans beaucoup d'autres modèles (dont le modèle de référence [3]), le choix d'un temps uniforme n'est à l'origine pas un choix de modélisation première : il résulte de la reformulation dynamique d'un problème

a. Dans le cas de mesures μ_0 et μ^1 à supports disjoints.
b. La totalité la masse locale infinitésimale de μ_0 en ce point est déjà sélectionnée, et donc déjà "consommée ou livrée" pour un transport correspondant à la durée d'origine, ici $t = 1$.
c. Si on se place dans le cas où $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$.

d'allocation optimale posé en d'autres termes (dans laquelle la notion de temps de trajet et le détail du transport en général n'apparaît pas). Autrement dit, sa formulation dynamique ne résulte pas directement d'un besoin de modéliser un cas pratique de transport "continu en temps".

Dans notre cas, nous avons au contraire la volonté de modéliser un transport en pratique continu en temps. C'est pourquoi, plutôt qu'un modèle qui impose un temps global et uniforme de livraison, c'est à dire qui impose que tous les points de l'espace (ou du moins en tout point du support de la mesure cible μ_1) soient "livrés en même temps", un modèle plus pratique et plus en adéquation avec des applications potentielles devrait permettre de différencier les temps de livraison entre chaque point de \mathbb{R}^d .

Nous souhaiterions donc pouvoir étudier un modèle dans lequel nous fixons **deux mesures d'arrivée** (ou une mesure vectorielle à image dans \mathbb{R}_+^2) : l'une fixant en chaque point de \mathbb{R}^d le "besoin de livraison" ou "la répartition de masse cible" (correspondant donc à μ_1 ^a dans le cadre de cette première étude), et l'autre fixant en chaque point de \mathbb{R}^d un temps/délai maximal de livraison.

L'étude d'une telle variante de notre modèle d'origine (variante qui risque même d'être très éloignée) peut bien sûr parfaitement se combiner avec celle proposée dans la sous-sous-section 5.3.1.

5.3.3 Autres possibilités de variantes et complexifications du modèle

- Développer un modèle discret plutôt que continu. Nous nous attendons alors à perdre en partie les propriétés de sélection "bang-bang" de la répartition de masse initialement disponible, et de ne plus forcément avoir d'allocations unilatérales (un atome pourra diviser sa masse entre plusieurs destinations^b). Cependant, nous pourrions probablement nous appuyer sur le modèle continu (i.e. basé sur des mesures "diffuses", c'est à dire absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue) pour approximer des parties atomiques (i.e. non absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue).
- Introduire un coût d'économie d'échelle : par exemple à la façon des modèles classiques de transport branché, ou encore en autorisant des échanges de masses entre différents points au cours du déplacement pour un coût (sur-linéaire) dépendant de leur distance mutuelle, incitant ainsi au rapprochement temporaire, voir au croisement ou à la mutualisation temporaire de trajectoire. Un tel modèle nous semblerait plus adapté en tant que sous-variante de la variante proposée dans la sous-sous-section 5.3.2.
- Proposer des modèles de dissipation de masse lors de la seule impulsion de départ sans dissipation continues (comme pourrait l'être par exemple un vol balistique) plutôt que des modèles de dissipation continue le long du trajet comme c'est le cas pour le modèle présenté dans ce dossier et les variantes proposées jusqu'ici.

Références

- [1] Jean-François Babadjian. *Cours d'analyse II (Université Paris Saclay - Master Mathématiques et Applications)*. <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~jean-francois.babadjian/files/Analyse-M1/Poly-Analyse.pdf>.
- [2] Heinz H Bauschke and Patrick L Combettes. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Springer, 2017.
- [3] J.-D. Benamou and Y. Brenier. A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem. *Numerische Mathematik*, 84(3) :375–393, 2000.
- [4] Jean-David Benamou. Numerical resolution of an "unbalanced" mass transport problem. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(5) :851–868, 2003.
- [5] Jean-David Benamou and Guillaume Carlier. Augmented lagrangian methods for transport optimization, mean field games and degenerate elliptic equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 167(1) :1–26, 2015.
- [6] V. ; Morel J-M. Bernot, M. ; Caselle. *Optimal transportation networks : models and theory*. Springer, 2008.
- [7] Lorenzo Brasco, Giuseppe Buttazzo, and Filippo Santambrogio. A benamou–brenier approach to branched transport. *SIAM journal on mathematical analysis*, 43(2) :1023–1040, 2011.
- [8] Haim Brezis, Philippe G Ciarlet, and Jacques Louis Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.
- [9] Lenaïc Chizat, Gabriel Peyré, Bernhard Schmitzer, and François-Xavier Vialard. An interpolating distance between optimal transport and fisher–rao metrics. *Foundations of Computational Mathematics*, 18(1) :1–44, 2018.
- [10] Lenaïc Chizat, Gabriel Peyré, Bernhard Schmitzer, and François-Xavier Vialard. Scaling algorithms for unbalanced optimal transport problems. *Mathematics of Computation*, 87(314) :2563–2609, 2018.
- [11] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC PRESS, 1992.

a. Remarquons que dans le cadre de cette réflexion, nous employons de façon impropre cette notation : l'indice "1" sous-entend justement ici un temps global de parcours égal à 1.

b. Un transport de type Kantorovitch et plutôt que de type Monge.

- [12] Nelson Feyeux. Transport optimal pour l'assimilation de données images, *Manuscrit de Thèse*, Université Grenoble-Alpes. 2016.
- [13] Wilfrid Gangbo and Robert J McCann. The geometry of optimal transportation. 1996.
- [14] Edgar N Gilbert. Minimum cost communication networks. *Bell System Technical Journal*, 46(9) :2209–2227, 1967.
- [15] Morgane Henry, Emmanuel Maitre, and Valérie Perrier. Primal-dual formulation of the dynamic optimal transport using helmholtz-hodge decomposition. 2019.
- [16] R. Hug, E. Maitre, and N. Papadakis. Multi-physics optimal transportation and image interpolation. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 49(6) :1671–1692, 2015.
- [17] Romain Hug. *Analyse mathématique et convergence d'un algorithme pour le transport optimal dynamique : cas des plans de transports non réguliers, ou soumis à des contraintes*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes, 2016.
- [18] Stanislav Kondratyev, Léonard Monsaingeon, Dmitry Vorotnikov, et al. A new optimal transport distance on the space of finite radon measures. *Advances in Differential Equations*, 21(11/12) :1117–1164, 2016.
- [19] Matthias Liero, Alexander Mielke, and Giuseppe Savaré. Optimal entropy-transport problems and a new hellinger–kantorovich distance between positive measures. *Inventiones mathematicae*, 211(3) :969–1117, 2018.
- [20] Damiano Lombardi and Emmanuel Maitre. Eulerian models and algorithms for unbalanced optimal transport. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 49(6) :1717–1744, 2015.
- [21] Jan Maas, Martin Rumpf, Carola Schönlieb, and Stefan Simon. A generalized model for optimal transport of images including dissipation and density modulation. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 49(6) :1745–1769, 2015.
- [22] Robert J. McCann. A convexity principle for interacting gases. *Advances in mathematics*, 128(1) :153–179, 1997.
- [23] Antonin Monteil. Uniform estimates for a modica–mortola type approximation of branched transportation. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 23(1) :309–335, 2017.
- [24] Edouard Oudet and Filippo Santambrogio. A modica-mortola approximation for branched transport and applications. *Archive for rational mechanics and analysis*, 201(1) :115–142, 2011.
- [25] Nicolas Papadakis, Gabriel Peyré, and Edouard Oudet. Optimal transport with proximal splitting. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 7(1) :212–238, 2014.
- [26] Paul Pegon. 11 on the lagrangian branched transport model and the equivalence with its eulerian formulation. *Topological Optimization and Optimal Transport : In the Applied Sciences*, 17 :281, 2017.
- [27] Paul Pegon, Filippo Santambrogio, and Qinglan Xia. A fractal shape optimization problem in branched transport. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 123 :244–269, 2019.
- [28] Gabriel Peyré, Lenaïc Chizat, François-Xavier Vialard, and Justin Solomon. Quantum optimal transport for tensor field processing. *arXiv preprint arXiv :1612.08731*, 2016.
- [29] Benedetto Piccoli and Francesco Rossi. Generalized wasserstein distance and its application to transport equations with source. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 211(1) :335–358, 2014.
- [30] Benedetto Piccoli, Francesco Rossi, and Magali Tournus. A wasserstein norm for signed measures, with application to nonlocal transport equation with source term. *arXiv preprint arXiv :1910.05105*, 2019.
- [31] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe : cours et exercices*. Dunod, 1998.
- [32] Walter Rudin, Nicole Dhombres, and François Hoffman. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, Department of Mathematics, 1975.
- [33] C. Villani. *Topics in Optimal Transportation*. American Mathematical Society, 2003.
- [34] Qinglan Xia. Optimal paths related to transport problems. *Communications in Contemporary Mathematics*, 5(02) :251–279, 2003.

Annexes

A Transformées c -concaves : généralités et cas particuliers dans le cadre de cette étude

La recherche d'une expression des solutions du problème primal de notre modèle en fonction des solutions du problème dual se ramène à une configuration classique en transport optimal. Deux termes duaux optimaux se retrouvent couplés par une relation mutuelle de transformation par inf-convolution, lesquelles peuvent se ramener à une involution par double transformation c -concave. La détermination des couplages d'allocation optimale entre chaque point de départ et son (leurs) point(s) d'arrivée correspond aux arguments (i.e. argmin) de ces transformations (et réciproquement).

Les propriétés de ces transformations c -concaves ont été largement explorées dans le cadre de problèmes de transports optimaux "classiques", c'est à dire pour des problèmes d'allocation avec conservation de la masse minimisant un coût $c(x, y)$ (lequel correspond au paramètre " c " de ces transformations dites " c -concaves"). Nous renvoyons notamment aux travaux de W. Gangbo et R.-J. McCann [13] (en oubliant probablement beaucoup d'autres productions établies après, ou avant, ces travaux).

Cette annexe vise à reprendre et réinvestir ce cadre théorique dans le contexte de notre modèle.

A.1 Quelques généralités préalables

Lemme A-1. *Soit H un espace de Hilbert, et soient $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions propres. On a les résultats suivants :*

- Si f et g sont convexes, alors $f \square g$ est convexe.
- Si f ou g est concave, alors $f \square g$ est concave (quelle que soit la nature de l'autre fonction).

Preuve :

- Supposons que f et g soient convexes. Soient $x_1, x_2 \in H$ et soit $\lambda \in [0, 1]$. Pour tous $y_1, y_2 \in H$, on a

$$\begin{aligned} (f \square g)((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) &\leq f((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) + g((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 - ((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)) \\ &= f((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2) + g((1 - \lambda)(x_1 - y_1) + \lambda(x_2 - y_2)) \\ &\leq (1 - \lambda)f(y_1) + \lambda f(y_2) + (1 - \lambda)g(x_1 - y_1) + \lambda g(x_2 - y_2) \\ &= (1 - \lambda)[f(y_1) + g(x_1 - y_1)] + \lambda[f(y_2) + g(x_2 - y_2)]. \end{aligned}$$

En passant à l'infimum en y_1 et y_2 , on a

$$(f \square g)((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)(f \square g)(x_1) + \lambda(f \square g)(x_2).$$

La fonction $f \square g$ est donc convexe.

- Supposons par exemple que g soit concave (et que f soit quelconque). Soient $x_1, x_2 \in H$ et soit $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $y \in H$, on a

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(f \square g)(x_1) + \lambda(f \square g)(x_2) &\leq (1 - \lambda)[f(y) + g(x_1 - y)] + \lambda[f(y) + g(x_2 - y)] \\ &= f(y) + [(1 - \lambda)g(x_1 - y) + \lambda g(x_2 - y)] \\ &\leq f(y) + g((1 - \lambda)(x_1 - y) + \lambda(x_2 - y)) \\ &= f(y) + g((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 - y) \end{aligned}$$

En passant à l'infimum en y , on a

$$(1 - \lambda)(f \square g)(x_1) + \lambda(f \square g)(x_2) \leq (f \square g)((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2).$$

La fonction $f \square g$ est donc concave. Bien sûr, comme $f \square g = g \square f$, on peut intervertir les rôles de f et g .

□

Lemme A-2. *Soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que g soit continue et f soit semi-continue inférieurement. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ et soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de \mathbb{R}^d convergeant respectivement vers x et y . Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $y_n \in \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [f(z) + g(x_n - z)]$. Alors $y \in \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [f(z) + g(x - z)]$.*

Preuve : Soit $z \in \mathbb{R}^d$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $f(y_n) + g(x_n - y_n) \leq f(z) + g(x_n - z)$, et ainsi, par passage à la limite inférieure, on a

$$f(y) + g(x - y) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} [f(y_n) + g(x_n - y_n)] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} [f(z) + g(x_n - z)] = f(z) + g(x - z),$$

et ceci pour tout $z \in \mathbb{R}^d$. □

Corollaire A-1. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que g soit continue et f soit semi-continue inférieurement. Alors l'ensemble $E = \{y \in \mathbb{R}^d, y \in \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [f(z) + g(y - z)]\}$ est fermé dans \mathbb{R}^d .

Preuve : Supposons que E soit non vide, et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E convergeant vers un point x de \mathbb{R}^d . D'après le lemme A-2, on a donc $x \in \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [f(z) + g(x - z)]$, d'où $x \in E$. □

Corollaire A-2. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que g soit continue et f soit semi-continue inférieurement.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $f \square g = f \boxplus g$ au voisinage de x (i.e. tel que $\operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [f(z) + g(y - z)]$ soit non vide pour tout y dans un voisinage de x), et tel que $x \notin \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [f(z) + g(x - z)]$.

Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, r)$, on a $y \notin \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [f(z) + g(y - z)]$.

Preuve : Par hypothèse, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $y \in B(x, R)$, $\operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [f(z) + g(y - z)]$ est non vide. De plus, par hypothèse, on a $x \in \mathbb{R}^d \setminus E$ où l'ensemble E est défini comme dans l'énoncé du corollaire A-1 : or d'après ce même corollaire, l'ensemble E est fermé, et ainsi, x appartenant à l'ouvert $B(x, R) \cap [\mathbb{R}^d \setminus E]$, il existe bien $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset B(x, R) \cap [\mathbb{R}^d \setminus E]$. □

Lemme A-3. Soient X et Y deux espaces topologiques non-vides, et soient μ et ν deux mesures positives boréliennes et finies sur respectivement X et Y . Soit un borélien D de X tel que $\mu(X \setminus D) = 0$, et soit un opérateur mesurable $T : (D, \mathcal{T}(\mu) \cap D, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{T}(\nu), \nu)$ poussant la mesure μ sur la mesure ν , i.e. $T\# \mu = \nu$.

Alors $\operatorname{Supp}(\nu) \subset \overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))}$.

Preuve : On a $\operatorname{Supp}(\mu) \cap D \subset T^{-1}(\overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))})$ ^a. On a alors

$$\begin{aligned} \nu(\overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))}) &= \mu(T^{-1}(\overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))})) \geq \mu(\operatorname{Supp}(\mu) \cap D) = \mu(\operatorname{Supp}(\mu) \cap D) = \mu(\operatorname{Supp}(\mu)) + \underbrace{\mu(X \setminus \operatorname{Supp}(\mu))}_{=0} \\ &= \mu(X) = \mu(T^{-1}(Y)) = \nu(Y) = \nu(\overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))}) + \nu(Y \setminus \overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))}). \end{aligned}$$

En résumé, on a $\nu(\overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))}) \geq \nu(\overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))}) + \nu(Y \setminus \overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))})$, d'où $0 \geq \nu(Y \setminus \overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))}) \geq 0$, i.e. $\nu(Y \setminus \overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))}) = 0$, d'où $\operatorname{Supp}(\nu) \subset \overline{T(\operatorname{Supp}(\mu))}$. □

Lemme A-4. Soit une fonction $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable sur \mathbb{R}_{++} . Alors :

— Si $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, la fonction $\zeta \circ |\cdot|$ est différentiable en x (donc $\partial(\zeta \circ |\cdot|)(x) = \{\nabla(\zeta \circ |\cdot|)(x)\}$) avec $\nabla(\zeta \circ |\cdot|)(x) = \frac{\zeta'(|x|)}{|x|}x$.

— Si de plus ζ est dérivable en 0, convexe et croissante, et telle que $\zeta(0) = 0$, alors $\partial(\zeta \circ |\cdot|)(0) = \zeta'(0)\overline{B(0, 1)}$.

Preuve :

— Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$: pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a

a. Quand on parle de l'image $T(A)$ d'un sous-ensemble A de X par T , on parle bien sûr de l'image du sous-ensemble de A sur lequel T est bien définie, c'est à dire $A \cap D$. On pourrait/devrait donc écrire $T(A \cap D)$ plutôt que $T(A)$. En particulier ici, on pourrait écrire $T(\operatorname{Supp}(\mu) \cap D)$ au lieu de $T(\operatorname{Supp}(\mu))$

$$\begin{aligned}
\zeta(|x+h|) &= \zeta\left(\sqrt{|x|^2 + 2\langle x, h \rangle + |h|^2}\right) \\
&= \zeta\left(|x|\sqrt{1 + \frac{2}{|x|}\langle x, h \rangle + \frac{|h|^2}{|x|^2}}\right) \\
&= \zeta\left(|x|\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{|x|}\langle x, h \rangle + \frac{|h|^2}{|x|^2} + \underbrace{o\left(\frac{1}{2}\frac{2}{|x|}\langle x, h \rangle + \frac{|h|^2}{|x|^2}\right)}_{=o(|h|)}\right)\right) \\
&= \zeta(|x|) + \zeta'(|x|)\left[\frac{1}{|x|}\langle x, h \rangle + \frac{|h|^2}{|x|^2} + o(|h|)\right] + \underbrace{o\left(\frac{1}{|x|}\langle x, h \rangle + \frac{|h|^2}{|x|^2} + o(|h|)\right)}_{=o(|h|)} \\
&= \zeta(|x|) + \frac{\zeta'(|x|)}{|x|}\langle x, h \rangle + o(|h|).
\end{aligned}$$

— Supposons que ζ soit dérivable également en 0, convexe et croissante avec $\zeta(0) = 0$. Pour tout $\xi \in \overline{B(0,1)}$, et pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a $|h| \geq \langle \xi, h \rangle$, d'où

$$\zeta(|h|) \geq \zeta(\langle \xi, h \rangle) \geq \underbrace{\zeta(0)}_{=0} + \zeta'(0)\langle \xi, h \rangle = \zeta'(0)\langle \xi, h \rangle.$$

On a donc $\zeta'(0)\xi \in \partial(\zeta \circ |\cdot|)(0)$, i.e. $\zeta'(0)\overline{B(0,1)} \subset \partial(\zeta \circ |\cdot|)(0)$.

Inversement, soit $\theta \in \partial(\zeta \circ |\cdot|)(0) \setminus \{0\}$: on a donc $\zeta(|h|) \geq \underbrace{\zeta(0)}_{=0} + \langle \theta, h \rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^d$. On pose $h = t\theta$, pour $t > 0$, d'où :

$$\zeta(t|\theta|) \geq t|\theta|^2 \iff |\theta| \leq \frac{\zeta(t|\theta|) - \zeta(0)}{t|\theta|}.$$

Ainsi, en faisant tendre t vers 0^+ , on a $|\theta| \leq \zeta'(0)$, i.e. $\theta \in \zeta'(0)\overline{B(0,1)}$. Autrement dit, on a $\partial(\zeta \circ |\cdot|)(0) \subset \zeta'(0)\overline{B(0,1)}$, i.e. $\partial(\zeta \circ |\cdot|)(0) = \zeta'(0)\overline{B(0,1)}$. □

Remarque A-1. D'après le lemme A-4, pour tout $R > 0$, on a $\sup \left| \partial(\zeta \circ |\cdot|)(\overline{B(0,R)}) \right| \leq \sup |\zeta'([0,R])| < +\infty$ (car ζ' est continue sur \mathbb{R}_+).

A.2 Quelques généralités sur les transformées c -concaves

Définition A-1. Soit $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un coût symétrique (i.e. $c(x,y) = c(y,x)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^d$).

— Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, on définit ${}^c f$ la transformée c -concave de f par

$${}^c f(x) = \inf_{z \in \mathbb{R}^d} [c(x,z) - f(z)],$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

— On définit l'ensemble \mathcal{F}_c des fonctions de $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquels le domaine de ${}^c f$ est égal à \mathbb{R}^d (i.e. pour lesquels ${}^c f$ a des valeurs finies en tout point de \mathbb{R}^d).

Lemme A-5. Soit $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, et soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $g \leq f$. Alors ${}^c f \leq {}^c g$.

Preuve : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$${}^c f(x) = \inf_{z \in \mathbb{R}^d} [c(x,z) - f(z)] \leq c(x,y) - f(y) \leq c(x,y) - g(y),$$

i.e. ${}^c f(x) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^d} [c(x,y) - g(y)] = {}^c g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. □

Remarque A-2. Quel que soit le coût $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, l'application $f \mapsto {}^c f$ est concave décroissante sur l'espace des fonctions sur \mathbb{R}^d à valeur dans \mathbb{R} munie de la relation d'ordre classique (i.e. induite par la relation d'ordre classique sur \mathbb{R}).

Lemme A-6. Soit $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un coût symétrique (i.e. $c(x, y) = c(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^d$), et soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre les trois assertions suivantes :

- $g \leq {}^c f$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^d, g(x) + f(y) \leq c(x, y)$,
- $f \leq {}^c g$.

Si ces propriétés sont vérifiées, alors $f, g \in \mathcal{F}_c$.

Preuve : On a en effet les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} {}^c f \geq g &\iff \forall x \in \mathbb{R}^d, \inf_{z \in \mathbb{R}^d} [c(x, z) - f(z)] = {}^c f(x) \geq g(x) \\ &\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \underbrace{c(x, y)}_{=c(y, x)} \geq g(x) + f(y) \\ &\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^d, c(y, x) - g(x) \geq f(y) \\ &\iff \forall y \in \mathbb{R}^d, {}^c g(y) = \inf_{z \in \mathbb{R}^d} [c(y, z) - g(z)] \geq f(y) \\ &\iff f \leq {}^c g. \end{aligned}$$

Pour finir, f et g étant à valeur finie en tout point de \mathbb{R}^d , si ces propriétés sont vérifiées, on aura bien ${}^c f(x) \geq g(x) > -\infty$ et ${}^c g(y) \leq f(y) > -\infty$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$. □

Lemme A-7. Soit un coût $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto c(x, y)$ soit semi-continue supérieurement pour tout $y \in \mathbb{R}^d$. Si $x \mapsto c(x, y)$ est semi-continue supérieurement pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_c$, ${}^c f$ est semi-continue supérieurement.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{F}_c$, et soit une suite $(x_n)_n$ de points de \mathbb{R}^d convergeant vers un point $x \in \mathbb{R}^d$. Soit $\epsilon > 0$, et soit $z_x \in \mathbb{R}^d$ tel que ${}^c f(x) \leq c(x, z_x) - f(z_x) < {}^c f(x) + \epsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ${}^c f(x_n) \leq c(x_n, z_x) - f(z_x)$, d'où

$${}^c f(x_n) - {}^c f(x) \leq (c(x_n, z_x) - f(z_x)) - (c(x, z_x) - f(z_x) - \epsilon) = c(x_n, z_x) - c(x, z_x) + \epsilon.$$

Comme $x \mapsto c(x, z_x)$ est semi-continue supérieurement, on a $\limsup_{n \rightarrow +\infty} [c(x_n, z_x) - c(x, z_x)] \leq 0$, d'où $\limsup_{n \rightarrow +\infty} {}^c f(x_n) \leq {}^c f(x) + \epsilon$, et ceci pour tout $\epsilon > 0$, d'où $\limsup_{n \rightarrow +\infty} {}^c f(x_n) \leq {}^c f(x)$. La transformée ${}^c f$ est donc semi-continue inférieurement. □

Lemme A-8. Soit $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un coût symétrique (i.e. $c(x, y) = c(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^d$). Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_c$, on a :

1. ${}^c f \in \mathcal{F}_c$,
2. ${}^{cc} f := c({}^c f) \geq f$,
3. ${}^{ccc} f := c(c({}^c f)) = {}^c f$.

Preuve : Soit $f \in \mathcal{F}_c$.

— (Points 1. et 2.) Par définition de ${}^c f$, on a ${}^c f(x) \leq c(x, y) - f(y)$, i.e. $f(y) \leq \underbrace{c(x, y)}_{=c(y, x)} - {}^c f(x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$.

D'où

$${}^{cc} f(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} [c(y, x) - {}^c f(x)] \geq f(y) > -\infty, \tag{A-1}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ (et on a donc bien entre autre ${}^c f \in \mathcal{F}_c$).

— (Point 3.) Par ailleurs,

$${}^{ccc} f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} [c(x, y) - \underbrace{\inf_{z \in \mathbb{R}^d} [c(y, z) - \overbrace{\inf_{u \in \mathbb{R}^d} [c(z, u) - f(u)]}{{}^c f(z)}}]_{= {}^{cc} f(y)}$$

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^d} \sup_{z \in \mathbb{R}^d} \inf_{u \in \mathbb{R}^d} [c(x, y) - c(y, z) + c(z, u) - f(u)]$$

Or, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^d} [c(x, y) - c(y, z) + c(z, u) - f(u)] \leq c(x, y) - \underbrace{c(y, z) + c(z, y)}_{=0} - f(y) = c(x, y) - f(y),$$

Par suite, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^d} \inf_{u \in \mathbb{R}^d} [c(x, y) - c(y, z) + c(z, u) - f(u)] \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^d} [c(x, y) - f(y)] \leq c(x, y) - f(y),$$

et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$${}^{cc}f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \sup_{z \in \mathbb{R}^d} \inf_{u \in \mathbb{R}^d} [c(x, y) - c(y, z) + c(z, u) - f(u)] \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^d} [c(x, y) - f(y)] = {}^c f(x).$$

On a donc à la fois ${}^{cc}f \leq {}^c f$ et, du fait du deuxième point, ${}^{cc}f = {}^{cc}({}^c f) \geq {}^c f$, i.e. ${}^{cc}f = {}^c f$.

□

Lemme A-9. Soit $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ un coût symétrique (i.e. $c(x, y) = c(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$) et telle que $c(x, x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Alors ${}^c(-f) \leq -{}^{cc}(-f) \leq f$.

Preuve : Pour toute fonction $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, on a ${}^c h \leq -h$: en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$${}^c h(x) = \inf_{z \in \mathbb{R}^d} [c(x, z) - h(z)] \leq \underbrace{c(x, x)}_{=0} - h(x) = -h(x).$$

Ainsi, ${}^{cc}(-f) = {}^c({}^c(-f)) \leq -{}^c(-f)$, i.e. ${}^c(-f) \leq -{}^{cc}(-f)$.

De plus, d'après le lemme A-8, on a ${}^{cc}(-f) \geq -f$, i.e. $-{}^{cc}(-f) \leq f$.

□

A.3 Propriétés sous des hypothèses plus spécifiques à notre étude

Définition A-2.

- Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Par abus de notation, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, nous noterons ${}^\zeta f$ la transformée de c -concave de f pour $c(x, y) = \zeta(|x - y|)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, i.e. ${}^\zeta f = \zeta \square(-f)$ (l'inf-convolution entre ζ et $-f$). Dans ce cas, on note également $\mathcal{F}_\zeta = \mathcal{F}_c$.
- Soient $R, \beta > 0$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_\zeta$, on définit l'ensemble :

$$\text{Arg}[f]_\zeta(R, \beta) = \bigcup_{x \in \overline{B(0, R)}} \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \beta),$$

$$\text{où } \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \beta) = \{z \in \mathbb{R}^d, {}^\zeta f(x) \leq \zeta(|x - z|) - f(z) \leq {}^\zeta f(x) + \beta\}.$$

Lemme A-10. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive. Alors, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ bornée supérieurement, on a $f \in \mathcal{F}_\zeta$.

Preuve : Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée inférieurement par une constante. Comme f est bornée pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $\zeta(|x - y|) - f(y) \geq -f(y) \geq -\sup_{\mathbb{R}^d} f > -\infty$, i.e. ${}^\zeta f(x) > -\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et ainsi $f \in \mathcal{F}_\zeta$.

□

Définitions et rappels de notations :

- On désignera par $F_b(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} bornées. On munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour toute fonction $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Rappelons que $(F_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ est également un espace de Banach. Remarquons également que $F_b(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}_\zeta$, d'après le lemme A-10.

- On rappelle également que $C_b(\mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} continues et bornées. On munit également cet espace de la norme $\|\cdot\|_\infty$: $C_b(\mathbb{R}^d)$ peut être considéré comme un sous-espace vectoriel de $F_b(\mathbb{R}^d)$. Rappelons que $(C_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ est également un espace de Banach.

Remarque A-3. Pour une preuve de la complétude de $F_b(\mathbb{R}^d)$ et $C_b(\mathbb{R}^d)$, et plus généralement de $F_b(X)$ et $C_b(X)$ pour un espace métrique non vide X quelconque, on peut également se référer au début de la synthèse évoquée à la section 2 pour la preuve du théorème 2-1^a.

Lemme A-11. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive telle que $\zeta(0) = 0$. Soit A un sous-ensemble borné de $(F_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$.

Alors pour tout $R > 0$ et tout $\beta > 0$, il existe une constante $R' > R$ telle que $\text{Arg}[A]_\zeta(R, \beta) \subset \overline{B(0, R')}$ (au sens où $\text{Arg}[f]_\zeta(R, \beta) \subset \overline{B(0, R')}$ pour toute fonction $f \in A$).

Preuve : Rappelons que $F_b(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}_\zeta$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq f \leq b$ pour toute fonction $f \in A$.

Soit $f \in A$, soit $x \in \overline{B(0, R)}$, et soit $z_x \in \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \beta) \subset \text{Arg}[f]_\zeta(R, \beta)$. Alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \zeta(|x - z_x|) &\leq \underbrace{b - f(z_x)}_{\geq 0} + \zeta(|x - z_x|) = \underbrace{\zeta(|x - z_x|) - f(z_x)}_{\leq \zeta f(x) + \beta} + b = \zeta f(x) + \beta + b \\ &= \underbrace{\zeta(|x - x|) - f(x)}_{\geq \zeta f(x)} + \beta + b = \underbrace{-f(x)}_{-a} + \beta + b \leq \beta + b - a < +\infty. \end{aligned} \tag{A-2}$$

Autrement dit, on a $0 \leq \zeta(|x - z_x|) \leq \beta + b - a$. La fonction ζ étant coercive, il existe $K > 0$ tel que $\zeta^{-1}(\overline{[0, \beta + b - a]}) \subset [0, K]$. Ainsi, on a $|z_x| \leq |x| + |x - z_x| \leq |x| + K \leq R + K$. En posant $R' = R + K > R$, on a donc $z_x \in \overline{B(0, R')}$, et ceci pour tout $z_x \in \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \beta)$. D'où $\text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \beta) \subset \overline{B(0, R')}$, et ceci pour tout $x \in \overline{B(0, R)}$, c'est à dire $\text{Arg}[f]_\zeta(R, \beta) \subset \overline{B(0, R')}$. Au final, étant de nouveau valide pour tout $f \in A$, on a donc bien $\text{Arg}[A]_\zeta(R, \beta) \subset \overline{B(0, R')}$. \square

Lemme A-12. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive telle que $\zeta(0) = 0$, et soit une fonction $f \in F_b(\mathbb{R}^d)$.

Alors, la fonction ζf est continue sur \mathbb{R}^d .

Preuve : Rappelons que d'après le lemme A-10, on a $F_b(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}_\zeta$. Soit $R > 0$. D'après le lemme A-11 (en prenant $A = \{f\}$), il existe $R' > 0$ tel que $\text{Arg}[f]_\zeta(R, 1) \subset \overline{B(0, R')}$. La fonction ζ étant continue sur \mathbb{R}_+ , elle est uniformément continue sur $[0, R' + R]$ (théorème de Heine) : il existe donc une constante $\delta > 0$ telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $|a - b| \leq \delta$, on ait $|\zeta(b) - \zeta(a)| \leq \epsilon$. Soient $x, y \in \overline{B(0, R)}$ vérifiant $|x - y| \leq \delta$.

Soient $\epsilon \in]0, 1]$ et soient $x, y \in \overline{B(0, R)}$ tels que $|x - y| \leq \delta$. On a

$$\text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \epsilon), \text{ArgPt}[f]_\zeta(y, \epsilon) \subset \text{Arg}[f]_\zeta(R, \epsilon) \subset \text{Arg}[f]_\zeta(R, 1) \subset \overline{B(0, R')}.$$

Soit $z_x \in \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \epsilon)$, i.e. $\zeta f(x) \leq \zeta(|x - z_x|) - f(z_x) < \zeta f(x) + \epsilon$. Remarquons que l'on a également $\zeta f(y) \leq \zeta(|y - z_x|) - f(z_x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \zeta f(y) - \zeta f(x) &\leq \underbrace{\zeta(|y - z_x|) - f(z_x)}_{\geq \zeta f(y)} - \underbrace{[\zeta(|y - z_x|) - f(z_x) - \epsilon]}_{\leq \zeta f(x)} \\ &\leq \zeta(|y - z_x|) - \zeta(|y - z_x|) + \epsilon \end{aligned}$$

Comme $z_x \in \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \epsilon) \subset \overline{B(0, R')}$, on a $|y - z_x|, |x - z_x| \in \overline{B(0, R + R')}$. Ainsi, on a $||y - z_x| - |x - z_x|| \leq |y - x| \leq \delta$, d'où $|\zeta(|y - z_x|) - \zeta(|x - z_x|)| \leq \epsilon$. On a alors :

$$\zeta f(y) - \zeta f(x) \leq \underbrace{\zeta(|y - z_x|) - \zeta(|x - z_x|)}_{\leq \epsilon} + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

En inversant les rôles de x et y , on obtient finalement $|\zeta f(y) - \zeta f(x)| \leq 2\epsilon$, et ceci pour tous $x, y \in \overline{B(0, R)}$ vérifiant $|x - y| \leq \delta$.

La fonction ζf est donc uniformément continue sur $\overline{B(0, R)}$, et ceci pour tout $R > 0$: ζf est donc continue sur \mathbb{R}^d . \square

a. On peut y accéder sous le lien suivant : <https://amubox.univ-amu.fr/s/w9pc6xJdXafYPic>

Lemme A-13. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, coercive, localement lipschitzienne et telle que $\zeta(0) = 0$. Alors pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ bornée (d'où notamment $f \in \mathcal{F}_\zeta$ d'après le lemme A-10), la fonction ${}^\zeta f$ est localement lipschitzienne.

Preuve : Soit f une fonction bornée, et soit $R > 0$. D'après le lemme A-11 (en prenant $A = \{f\}$), il existe $R' > 0$ tel que $\text{Arg}[f]_\zeta(R, 1) \subset B(0, R')$, et ainsi, pour tout $\epsilon \in]0, 1]$:

$$\text{Arg}[f]_\zeta(R, \epsilon) \subset \text{Arg}[f]_\zeta(R, 1) \subset B(0, R').$$

Soit $L > 0$ une constante de Lipschitz de la restriction de ζ à $[0, R + R']$.

Soient $x, y \in \overline{B(0, R)}$, et soit $\epsilon \in]0, 1]$. Soient $z_x^\epsilon \in \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \epsilon) \subset \text{Arg}[f]_\zeta(R, \epsilon)$ et $z_y^\epsilon \in \text{ArgPt}[f]_\zeta(y, \epsilon)$: ainsi, $x - z_x^\epsilon, y - z_x^\epsilon \in \overline{B(0, R + R')}$. On a alors

$$\begin{aligned} {}^\zeta f(y) - {}^\zeta f(x) &\leq \underbrace{\zeta(|y - z_x^\epsilon|) - f(z_x^\epsilon)}_{\geq {}^\zeta f(y)} + \underbrace{(-\zeta(|x - z_x^\epsilon|) + f(z_x^\epsilon) + \epsilon)}_{\geq -{}^\zeta f(x)} \\ &= \zeta(|y - z_x^\epsilon|) - \zeta(|x - z_x^\epsilon|) + \epsilon \leq L(|y - z_x^\epsilon| - |x - z_x^\epsilon|) + \epsilon \leq L|y - x| + \epsilon, \end{aligned}$$

et ceci pour tout $\epsilon \in]0, 1]$, d'où ${}^\zeta f(y) - {}^\zeta f(x) \leq L|y - x|$. On obtient de même ${}^\zeta f(x) - {}^\zeta f(y) \leq L|y - x|$, i.e. $|{}^\zeta f(y) - {}^\zeta f(x)| \leq L|y - x|$. Et ceci pour tout $R > 0$: ${}^\zeta f$ est donc bien localement lipschitzienne sur \mathbb{R}^d . □

Lemme A-14. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive telle que $\zeta(0) = 0$. Alors, pour tout un sous-ensemble borné A de $(F_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$, ${}^\zeta A$ est un sous-ensemble de fonctions équicontinues sur \mathbb{R}^d .

Preuve : Rappelons que $F_b(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}_\zeta$ (d'après le lemme A-10). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq f \leq b$ pour tout $f \in A$, et soit $R > 0$. Montrons que l'ensemble est uniformément équicontinue sur $\overline{B(0, R)}$. Soit $\epsilon > 0$.

D'après le lemme A-11, il existe $R' > R$ telle que $\text{Arg}[A]_\zeta(R, 1) \subset \overline{B(0, R')}$. Par ailleurs, la fonction ζ étant continue sur \mathbb{R}_+ , elle est uniformément continue sur $[0, R' + R]$ (théorème de Heine) : il existe donc une constante $\delta > 0$ telle que pour tous $u, v \in [0, R' + R]$ vérifiant $|u - v| \leq \delta$, on ait $|\zeta(u) - \zeta(v)| \leq \epsilon$.

Soit $f \in A$ et soient $x, y \in \overline{B(0, R)}$ vérifiant $|x - y| \leq \delta$. Soit $z_x^\epsilon \in \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \epsilon)$, on a :

$${}^\zeta f(y) - {}^\zeta f(x) \leq \underbrace{(\zeta(|y - z_x^\epsilon|) - f(z_x^\epsilon))}_{\geq {}^\zeta f(y)} + \underbrace{(-(\zeta(|x - z_x^\epsilon|) - f(z_x^\epsilon)) + \epsilon)}_{\geq -{}^\zeta f(x)} = \zeta(|y - z_x^\epsilon|) - \zeta(|x - z_x^\epsilon|) + \epsilon.$$

Or, $z_x^\epsilon \in \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \epsilon) \subset \text{Arg}[f]_\zeta(R, \epsilon) \subset \text{Arg}[f]_\zeta(R, 1) \subset \text{Arg}[A]_\zeta(R, 1) \subset \overline{B(0, R')}$, d'où $|x - z_x^\epsilon|, |y - z_x^\epsilon| \in [0, R' + R]$. De plus, on a $||x - z_x^\epsilon| - |y - z_x^\epsilon|| \leq |x - y| \leq \delta$, et ainsi

$${}^\zeta f(y) - {}^\zeta f(x) \leq \zeta(|y - z_x^\epsilon|) - \zeta(|x - z_x^\epsilon|) + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

On peut montrer de même que ${}^\zeta f(x) - {}^\zeta f(y) \leq 2\epsilon$, i.e. $|{}^\zeta f(y) - {}^\zeta f(x)| \leq 2\epsilon$, et ceci pour tout $x, y \in \overline{B(0, R)}$ et tout $f \in A$. Ce raisonnement étant valable pour tout $\epsilon > 0$, la famille ${}^\zeta A$ est bien un ensemble de fonctions uniformément équicontinues sur $\overline{B(0, R)}$ et ceci pour tout $R > 0$: elle est donc un ensemble de fonctions équicontinues sur \mathbb{R}^d . □

Lemme A-15. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive telle que $\zeta(0) = 0$. Alors, ${}^\zeta F_b(\mathbb{R}^d) \subset F_b(\mathbb{R}^d)$, et l'opérateur $f \mapsto {}^\zeta f$ est non-expansif (i.e. 1-lipschitzien) sur $(F_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$.

Preuve : Rappelons que $F_b(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}_\zeta$.

Soit $f \in F_b(\mathbb{R}^d)$: pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a donc

$$-\infty < -\sup_{\mathbb{R}^d} |f| \leq {}^\zeta f = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} [\zeta(|x - y|) - f(y)] \leq \underbrace{\zeta(|x - x|)}_{=0} - f(x) \leq \sup_{\mathbb{R}^d} |f| < +\infty,$$

i.e. ${}^\zeta f \in F_b(\mathbb{R}^d)$, et ceci pour tout $f \in F_b(\mathbb{R}^d)$: on a donc bien ${}^\zeta F_b(\mathbb{R}^d) \subset F_b(\mathbb{R}^d)$.

Soient $f, g \in F_b(\mathbb{R}^d)$ et soit $\epsilon > 0$: pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et tout $z_x^\epsilon \in \text{ArgPt}[f]_\zeta(x, \epsilon)$, on a

$${}^\zeta g(x) - {}^\zeta f(x) \leq \underbrace{(\zeta(|x - z_x^\epsilon|) - g(z_x^\epsilon))}_{\geq {}^\zeta g(x)} + \underbrace{(-(\zeta(|x - z_x^\epsilon|) - f(z_x^\epsilon)) + \epsilon)}_{\geq -{}^\zeta f(x)} = g(z_x^\epsilon) - f(z_x^\epsilon) + \epsilon \leq \|f - g\|_\infty + \epsilon.$$

De même, on a ${}^\zeta g(x) - {}^\zeta f(x) \leq \|f - g\|_\infty + \epsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, d'où

$$\|\zeta g - \zeta f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\zeta g(x) - \zeta f(x)| \leq \|f - g\|_\infty + \epsilon,$$

et ceci pour tout $\epsilon > 0$, d'où $\|\zeta g - \zeta f\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty$. L'opérateur $f \mapsto \zeta f$ est donc bien non-expansif. □

Proposition A-1. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive telle que $\zeta(0) = 0$.

Soient $f, g \in F_b(\mathbb{R}^d)$ (d'où $f \in \mathcal{F}_\zeta$) vérifiant $g(x) \leq f(y) + \zeta(|x - y|)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Alors il existe une fonction $h \in C_b(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}_\zeta$ telle que :

1. $\zeta h \in C_b(\mathbb{R}^d)$.
2. h est un point fixe de l'opérateur $u \mapsto \zeta u$.
3. $g \leq h \leq -\zeta h \leq f$.
4. Si de plus ζ est localement lipschitzienne, alors h et ζh sont localement lipschitziennes.

Preuve : Posons $h = \zeta(-f)$. D'après le lemme A-6 on a $g \leq \zeta(-f)$ et, d'après le lemme A-9, on a $\zeta(-f) \leq -\zeta\zeta(-f) \leq f$, i.e. $g \leq h \leq -\zeta h \leq f$ (ce qui nous permet de conclure immédiatement le point 3. et que $h, \zeta h \in F_b(\mathbb{R}^d)$).

Par ailleurs, d'après le lemme A-8, on a bien $\zeta\zeta h = \zeta\zeta\zeta(-f) = \zeta(-f) = h$, et d'après le lemme A-12, $h = \zeta(-f)$ est continue, de même que ζh (i.e. $h, \zeta h \in C_b(\mathbb{R}^d)$).

Pour finir, si de plus ζ est localement lipschitzienne, alors d'après le lemme A-13, h de même que ζh sont localement lipschitziennes. □

Lemme A-16. Supposons que la fonction $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ soit convexe. On a les résultats suivants :

- Si f est convexe, alors ζf est concave.
- Si f est concave, alors ζf est convexe.

Preuve : Supposons que f soit convexe, i.e. que $-f$ soit concave. Comme $\zeta f = (-f) \square \zeta$, ζf est concave d'après le second point du lemme A-1.

Supposons que f soit concave, i.e. que $-f$ soit convexe. Comme $\zeta f = (-f) \square \zeta$, ζf est également convexe d'après le premier point du lemme A-1. □

A.4 Caractérisation des plans de transports

Définition A-3. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive telle que $\zeta(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue élément de \mathcal{F}_ζ . Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on définit l'ensemble $\partial_\zeta f(x)$ par :

$$\partial_\zeta f(x) = \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^d} [\zeta(|z - x|) - f(z)].$$

On définit de plus le domaine $\operatorname{Dom}(\partial_\zeta f)$ de $\partial_\zeta f$ comme l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $\partial_\zeta f(x) \neq \emptyset$.

On définit également l'ensemble $\operatorname{Dom}(\nabla_\zeta f)$ des points $x \in \mathbb{R}^d$ en lesquels $\partial_\zeta f(x)$ admet un unique élément, que l'on notera $\nabla_\zeta f(x)$ (i.e. $\partial_\zeta f(x) = \{\nabla_\zeta f(x)\}$).

Définition A-4. Pour tout sous-ensemble X de \mathbb{R}^d , et toute fonction $f \in \mathcal{F}_\zeta$, on définit l'ensemble $\partial_\zeta f(X)$ par

$$\partial_\zeta f(X) = \bigcup_{x \in X} \partial_\zeta f(x)$$

Lemme A-17. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, semi-continue inférieurement et coercive. Si la fonction $f, : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement et bornée supérieurement, alors $\operatorname{Dom}(\partial_\zeta f) = \mathbb{R}^d$.

Preuve : Pour le cas de $\partial_\zeta f$, on note $S(f) = \sup_{\mathbb{R}^d} f < +\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$: pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, on a donc $-S(f) \leq \underbrace{\zeta(|x - z|) - S(f)}_{\geq 0} \leq \zeta(|x - z|) - f(z)$. La fonction ζ étant coercive, il en est donc de même pour la fonction (semi-continue inférieurement) $z \mapsto \zeta(|x - z|) - f(z)$: celle-ci admet donc au moins un minimum global sur \mathbb{R}^d , i.e. $\partial_\zeta f(x) \neq \emptyset$. □

Lemme A-18. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive.

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, élément de \mathcal{F}_ζ , et $\zeta(\cdot - \cdot)$ -concave, c'est à dire point fixe de l'application $f \mapsto \zeta f := \zeta(\zeta f)$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a équivalence entre les trois assertions suivantes :

- $y \in \partial_\zeta f(x)$ (et donc $x \in \text{Dom}(\partial_\zeta f)$).
- $\zeta f(x) = \zeta(|x - y|) - f(y)$.
- $x \in \partial_\zeta \zeta f(y)$ (et donc $y \in \text{Dom}(\partial_\zeta \zeta f)$).

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$. Par définition de $\partial_\zeta f(x)$, $y \in \partial_\zeta f(x) \Leftrightarrow \zeta f(x) = \zeta(|x - y|) - f(y)$. De même, par définition de $\partial_\zeta \zeta f(y)$, et comme f est un point fixe de $f \mapsto \zeta f$, on a

$$x \in \partial_\zeta \zeta f(y) \Leftrightarrow f(y) = \zeta f(y) = \zeta(|y - x|) - \zeta f(x),$$

i.e. $\zeta f(x) = \zeta(|x - y|) - f(y)$ (i.e. $y \in \partial_\zeta f(x)$).

Remarque : on a en cohérence : $x \in \partial_\zeta \zeta f(x) \Leftrightarrow f(x) = \zeta f(y) = \zeta(|x - x|) - \zeta f(x) = -\zeta f(x)$.

□

Lemme A-19. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive. Soit A un sous-ensemble borné de $(C_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$.

Alors pour tout $R > 0$, il existe une constante $R' > R$ telle que $\partial_\zeta A(\overline{B(0, R)}) \subset \overline{B(0, R')}$ (au sens où $\partial_\zeta f(\overline{B(0, R)}) \subset \overline{B(0, R')}$ pour toute fonction $f \in A$).

Preuve : Il suffit d'appliquer le lemme A-11 en remarquant que pour tout $R > 0$ et tout $\beta > 0$, on a $\partial_\zeta A(\overline{B(0, R)}) \subset \text{Arg}[A]_\zeta(R, \beta)$.

□

Lemme A-20. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue supérieurement telle que $\text{Dom}(\partial_\zeta f) \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de $\text{Dom}(\partial_\zeta f)$ convergeant vers un élément x de \mathbb{R}^d , et une suite $(y_n)_n$ d'éléments de \mathbb{R}^d convergeant vers un point $y \in \mathbb{R}^d$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $y_n \in \partial_\zeta f(x_n)$.

Alors $\partial_\zeta f(x) \neq \emptyset$ et $y \in \partial_\zeta f(x)$.

Preuve : Application directe du lemme A-2, sachant que $-f$ est semi-continue inférieurement.

□

Lemme A-21. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue supérieurement telle que $\text{Int}(\text{Dom}(\partial_\zeta f)) \cap \text{Dom}(\nabla_\zeta f) \neq \emptyset$, et soit $x \in \text{Int}(\text{Dom}(\partial_\zeta f)) \cap \text{Dom}(\nabla_\zeta f)$ et $r > 0$ telle que $B(x, r) \subset \text{Dom}(\partial_\zeta f)$.

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta \in]0, r]$ tel que $\nabla_\zeta f(B(x, \delta)) \subset B(\nabla_\zeta f(x), \epsilon)$.

Preuve : Soient f , x et r tels que décrits dans les conditions de l'énoncé. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un seuil $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, r]$, il existe $x' \in B(x, \delta)$ pour lequel on a $\partial_\zeta f(x') \cap [\mathbb{R}^d \setminus B(\nabla_\zeta f(x), \epsilon)] \neq \emptyset$.

On définit alors deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans \mathbb{R}^d vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n \in B(x, 1/n) \quad \text{et} \quad y_n \in \partial_\zeta f(x_n) \cap [\mathbb{R}^d \setminus B(\nabla_\zeta f(x), \epsilon)].$$

D'après le lemme A-19, en prenant $A = \{f\}$ et en prenant $R > 0$ suffisamment grand pour que $B(x, r) \subset B(0, R)$, il existe $R' > 0$ tel que $\partial_\zeta f(B(x, r)) \subset \partial_\zeta f(\overline{B(0, R)}) \subset \overline{B(0, R')}$: on a donc $y_n \in \overline{B(0, R')}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La boule $\overline{B(0, R')}$ étant relativement compacte dans \mathbb{R}^d , il existe une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_n$ extraite de $(y_n)_n$ convergeant vers un point $y \in \mathbb{R}^d$. De plus, $\mathbb{R}^d \setminus B(\nabla_\zeta f(x), \epsilon)$ étant un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^d , on a $y \in \mathbb{R}^d \setminus B(\nabla_\zeta f(x), \epsilon)$, d'où $y \neq \nabla_\zeta f(x)$.

Or, parallèlement, du fait que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$, on a $y \in \partial_\zeta f(x) = \{\nabla_\zeta f(x)\}$ d'après le lemme A-20. D'où $y = \nabla_\zeta f(x)$, ce qui contredit ainsi la conclusion du paragraphe précédent.

□

Lemme A-22. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^d , et soit μ une mesure borélienne et finie sur \mathbb{R}^d telle que $\mu \subset U$.

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue supérieurement telle que $U \subset \text{Dom}(\partial_\zeta f)$ et telle que $\mu(U \setminus \text{Dom}(\nabla_\zeta f)) = 0$, i.e. telle que pour μ -presque tout $x \in U$, on ait $x \in \text{Dom}(\nabla_\zeta f)$.

Alors $\overline{\nabla_\zeta f(\text{Supp}(\mu))} = \text{Supp}(\nabla_\zeta f \# \mu)$ ^a.

a. Voir la note de bas de page du lemme A-3 : on pourrait/devrait donc écrire $\nabla_\zeta f(A \cap \text{Dom}(\nabla_\zeta f))$ plutôt que $\nabla_\zeta f(A)$.

Preuve : Tout d'abord, remarquons que $\nabla_\zeta f(\text{Supp}(\mu)) \subset \partial_\zeta f(\text{Supp}(\mu))$, d'où $\overline{\nabla_\zeta f(\text{Supp}(\mu))} \subset \overline{\partial_\zeta f(\text{Supp}(\mu))}$ d'après le lemme A-3, on a

$$\text{Supp}(\nabla_\zeta f \# \mu) \subset \overline{\nabla_\zeta f(\text{Supp}(\mu))} \subset \overline{\partial_\zeta f(\text{Supp}(\mu))}.$$

Montrons réciproquement que $\overline{\nabla_\zeta f(\text{Supp}(\mu))} \subset \text{Supp}(\nabla_\zeta f \# \mu)$. Soit $x \in \text{Supp}(\mu) \cap \text{Dom}(\nabla_\zeta f)$. Soit $\epsilon > 0$: d'après le lemme A-21, il existe une borne $\delta > 0$, que l'on prendra suffisamment petite pour $B(x, \delta) \subset U$, telle que

$$\partial_\zeta f(B(x, \delta)) \subset B(\nabla_\zeta f(x), \epsilon).$$

Du fait que $x \in \text{Supp}(\mu)$, on a $\mu(B(x, \delta)) > 0$ (voir le lemme B-9). Sachant que par ailleurs on a $B(x, \delta) \cap \text{Dom}(\nabla_\zeta f) \subset \nabla_\zeta f^{-1}(\nabla_\zeta f(B(x, \delta)))$, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} 0 < \mu(B(x, \delta)) &= \mu(B(x, \delta) \cap \text{Dom}(\nabla_\zeta f)) \leq \mu[\nabla_\zeta f^{-1}(\nabla_\zeta f(B(x, \delta)))] = (\nabla_\zeta f \# \mu)(\nabla_\zeta f(B(x, \delta))) \\ &\leq (\nabla_\zeta f \# \mu)(\partial_\zeta f(B(x, \delta))) \\ &\leq (\nabla_\zeta f \# \mu)(B(\nabla_\zeta f(x), \epsilon)), \end{aligned}$$

i.e. $(\nabla_\zeta f \# \mu)(B(\nabla_\zeta f(x), \epsilon)) > 0$, et ceci pour tout $\epsilon > 0$: d'après le lemme B-9, on a donc $\nabla_\zeta f(x) \in \text{Supp}(\nabla_\zeta f \# \mu)$, et ceci pour tout $x \in \text{Supp}(\mu) \cap \text{Dom}(\nabla_\zeta f)$.

On a donc $\underbrace{\nabla_\zeta f(\text{Supp}(\mu) \cap \text{Dom}(\nabla_\zeta f))}_{=\nabla_\zeta f(\text{Supp}(\mu))} \subset \text{Supp}(\nabla_\zeta f \# \mu)^a$, et ainsi, l'ensemble $\text{Supp}(\nabla_\zeta f \# \mu)$ étant par définition fermé,

$$\overline{\nabla_\zeta f(\text{Supp}(\mu))} \subset \text{Supp}(\nabla_\zeta f \# \mu).$$

□

Lemme A-23. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et coercive, telle que $\zeta(0) = 0$. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée supérieurement, alors $\text{Dom}(\partial_\zeta f) = \mathbb{R}^d$.

Preuve : Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée inférieurement (d'où $f \in \mathcal{F}_\zeta$ d'après le lemme A-10). Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a $\zeta(|x - y|) - f(y) \geq \underbrace{-\sup |f|}_{> -\infty} + \zeta(|x - y|)$: la fonction $y \mapsto f(y) + \zeta(|x - y|)$ est

donc coercive. Étant de plus continue, elle admet donc au moins un minimum global sur \mathbb{R}^d .

□

Lemme A-24. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, de classe C^1 et coercive, telle que $\zeta(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \in \mathcal{F}_\zeta$ (d'où la continuité également de ζf d'après le lemme A-12).

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\partial_\zeta f$ soit non vide au voisinage de x , et tel que $x \notin \partial_\zeta f(x)$. Alors :

- Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, ζf admet une dérivée directionnelle en x dirigée par h , notée $D_h(\zeta f)(x)$.
- Soit une suite réelle strictement positive $(t_n)_n$ convergeant vers 0, et soit une suite $(y_n)_n$ d'éléments de \mathbb{R}^d vérifiant $y_n \in \partial_\zeta f(x + t_n h)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(y_n)_n$ est bornée et, pour tout point d'adhérence \bar{y} de $(y_n)_n$, on a $\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)$ et

$$D_h(\zeta f)(x) = \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle = \langle \nabla_x[\zeta(|\cdot|)](x - \bar{y}), h \rangle.$$

- On a pour finir $D_h(\zeta f)(x) = \min_{\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle = \min_{\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)} \langle \nabla_x[\zeta(|\cdot|)](x - \bar{y}), h \rangle$.

Preuve : Soit $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \text{Dom}(\partial_\zeta f)$, i.e. $\partial_\zeta f(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in B(x, r)$.

- Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et soit $\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)$ (d'où $\bar{y} \neq x$) : d'après le lemme A-4, pour tout $t \in]0, r/(2|h|)[$, on a

$$\zeta f(x + th) \leq \zeta(|x + th - \bar{y}|) - f(\bar{y}) = \underbrace{\zeta(|x - \bar{y}|) - f(\bar{y})}_{=\zeta f(x)} + t \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle + o(t)$$

$$\text{i.e. } \frac{\zeta f(x + th) - \zeta f(x)}{t} \leq \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle + \frac{o(t)}{t} \text{ pour tout } t \in]0, r/(2|h|)[, \text{ et ainsi}$$

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\zeta f(x + th) - \zeta f(x)}{t} \right) \leq \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle, \quad (\text{A-3})$$

et ceci pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ et tout $\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)$.

a. cf. les notes de bas de page de l'énoncé du lemme.

- Soit une suite réelle strictement positive $(t_n)_n$ convergeant vers 0 telle que $t_n \in]0, r/(2|h|)[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit une suite $(y_n)_n$ d'éléments de \mathbb{R}^d vérifiant $y_n \in \partial_\zeta f(x + t_n h)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme A-11 (en prenant $A = \{f\}$), il existe $R > 0$ tel que $\text{Arg}[f]_\zeta(|x| + r, 1) \subset B(0, R)$, d'où $\partial_\zeta f(x + t_n h) \subset \text{ArgPt}[f]_\zeta(x + t_n h, 1) \subset \text{Arg}[f]_\zeta(|x| + r, 1) \subset B(0, R)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(y_n)_n$ est donc bornée dans \mathbb{R}^d : son adhérence est donc non-vide.

Soit \bar{y}_0 un point de l'adhérence de la suite $(y_n)_n$, et soit $(y_{\phi(n)})_n$ une sous-suite extraite de la suite $(y_n)_n$ convergeant vers \bar{y}_0 . D'après le lemme A-2, les fonctions f et $\zeta \circ |\cdot|$ étant continues, on a $\bar{y}_0 \in \partial_\zeta f(x)$. En particulier, on a $\bar{y}_0 \neq x$: on peut donc choisir la sous-suite $(y_{\phi(n)})_n$ telle que tous ses termes soient suffisamment proches de \bar{y}_0 de façon à ce que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $y_{\phi(n)} \neq x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par convexité de la fonction $\zeta \circ |\cdot|$, on a

$$\zeta(|x + t_{\phi(n)}h - y_{\phi(n)}|) \geq \zeta(|x - y_{\phi(n)}|) + t_{\phi(n)} \langle \nabla_x[\zeta(|\cdot|)](x - y_{\phi(n)}), h \rangle,$$

d'où

$$\begin{aligned} \zeta f(x + t_{\phi(n)}h) &= \zeta(|x + t_{\phi(n)}h - y_{\phi(n)}|) - f(y_{\phi(n)}) \\ &\geq \underbrace{\zeta(|x - y_{\phi(n)}|) - f(y_{\phi(n)})}_{\zeta f(x)} + t_{\phi(n)} \langle \nabla_x[\zeta(|\cdot|)](x - y_{\phi(n)}), h \rangle \\ &\geq \zeta f(x) + t_{\phi(n)} \langle \nabla_x[\zeta(|\cdot|)](x - y_{\phi(n)}), h \rangle, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\frac{\zeta f(x + t_{\phi(n)}h) - \zeta f(x)}{t_{\phi(n)}} \geq \langle \nabla_x[\zeta(|\cdot|)](x - y_{\phi(n)}), h \rangle = \frac{\zeta'(|x - y_{\phi(n)}|)}{|x - y_{\phi(n)}|} \langle x - y_{\phi(n)}, h \rangle.$$

Par passage à la limite inférieure (et comme la fonction $\zeta' \circ |\cdot|$ est continue du fait que ζ est de classe C^1), on obtient l'inégalité :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\zeta f(x + t_{\phi(n)}h) - \zeta f(x)}{t_{\phi(n)}} \right) \geq \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle. \quad (\text{A-4})$$

Or d'après l'inéquation (A-3) (valable pour n'importe quel $\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)$), on a également

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\zeta f(x + t_{\phi(n)}h) - \zeta f(x)}{t_{\phi(n)}} \right) \leq \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle,$$

et par conséquent

$$\frac{\zeta f(x + t_{\phi(n)}h) - \zeta f(x)}{t_{\phi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle. \quad (\text{A-5})$$

De plus, toujours d'après l'inégalité A-3, on a donc

$$\frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\zeta f(x + th) - \zeta f(x)}{t} \right) \leq \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle \quad (\text{A-6})$$

pour tout $\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)$, i.e. $\frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle = \min_{\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle$.

- Gardons le même point \bar{y}_0 qu'à l'étape précédente (défini sous les mêmes hypothèses : point d'adhérence de la même suite $(y_n)_n$), et montrons que la dérivée directionnelle dans la direction h de ζf en x est bien définie, c'est à dire que

$$\frac{\zeta f(x + t_{\phi(n)}h) - \zeta f(x)}{t_{\phi(n)}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle.$$

Supposons que ce ne soit pas le cas : il existerait alors $\epsilon > 0$ et une suite $(t'_n)_n$ réelle convergeant vers 0^+ et vérifiant $t'_n \in]0, r/(2|h|)[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle que

$$\left| \frac{\zeta f(x + t'_n h) - \zeta f(x)}{t'_n} - \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle \right| \geq \epsilon > 0, \quad (\text{A-7})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit une suite $(y'_n)_n$ d'éléments de \mathbb{R}^d vérifiant $y'_n \in \partial_\zeta f(x + t'_n h)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En raisonnant comme au point précédent via le lemme A-11, on déduit que la suite $(y'_n)_n$ est bornée dans \mathbb{R}^d et admet donc un point d'adhérence \bar{y}_1 . On a donc de même, pour une sous-suite $(y'_{\phi(n)})_n$ extraite de la suite $(y'_n)_n$ convergeant vers \bar{y}_1 :

$$\frac{\zeta f(x + t'_{\varphi(n)}h) - \zeta f(x)}{t'_{\varphi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_1|)}{|x - \bar{y}_1|} \langle x - \bar{y}_1, h \rangle.$$

et

$$\frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\zeta f(x + th) - \zeta f(x)}{t} \right) \leq \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle$$

pour tout $\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)$. En particulier, on a $\frac{\zeta'(|x - \bar{y}_1|)}{|x - \bar{y}_1|} \langle x - \bar{y}_1, h \rangle \leq \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle$.

Par ailleurs, l'inégalité (A-6) nous montre que l'on a également $\frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle \leq \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_1|)}{|x - \bar{y}_1|} \langle x - \bar{y}_1, h \rangle$, i.e.

$$\frac{\zeta f(x + t'_{\varphi(n)}h) - \zeta f(x)}{t'_{\varphi(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_1|)}{|x - \bar{y}_1|} \langle x - \bar{y}_1, h \rangle = \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle,$$

ce qui contredit l'inégalité (A-7).

On a donc bien $\frac{\zeta f(x + t_{\phi(n)}h) - \zeta f(x)}{t_{\phi(n)}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{\zeta'(|x - \bar{y}_0|)}{|x - \bar{y}_0|} \langle x - \bar{y}_0, h \rangle$, et la dérivée directionnelle de ζf est donc bien définie en x pour toute direction $h \in \mathbb{R}^d$. Elle vérifie également bien les propriétés définies dans l'énoncé. \square

Remarque A-4. La propriété $D_h(\zeta f)(x) = \min_{\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - \bar{y}|)}{|x - \bar{y}|} \langle x - \bar{y}, h \rangle = \min_{\bar{y} \in \partial_\zeta f(x)} \langle \nabla_x[\zeta(|\cdot|)](x - \bar{y}), h \rangle$ peut être vue comme une variante de la formule du maximum (théorème 17.18 de [2] 2e édition p. 296) : $g'(x; h) = \max \langle \partial g(x), h \rangle$. Ce qui conforte la comparaison de $\partial_\zeta f$ et $\partial_\zeta f$ avec la notion de classique sous-différentielle et appuie cette notation.

Lemme A-25. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, classe C^1 et coercive, telle que $\zeta(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue supérieurement telle que $f \in \mathcal{F}_\zeta$.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\partial_\zeta f$ soit non vide au voisinage de x , et tel que $x \notin \partial_\zeta f(x)$. Alors

$$D_h(\zeta g)(x) \leq - \sup_{y \in \partial_\zeta f(x)} D_h(\zeta^2 f)(y).$$

Preuve : D'après le lemme A-24, pour tout $y \in \partial_\zeta f(x)$, on a

$$D_h(\zeta f)(x) = \min_{z \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h \rangle \leq \frac{\zeta'(|x - y|)}{|x - y|} \langle x - y, h \rangle = - \frac{\zeta'(|y - x|)}{|y - x|} \langle y - x, h \rangle.$$

D'après le lemme A-18, on a $x \in \partial_\zeta \zeta f(y)$ pour tout $y \in \partial_\zeta f(x)$, et donc d'après lemme A-24 :

$$\frac{\zeta'(|y - x|)}{|y - x|} \langle y - x, h \rangle \geq \min_{z \in \partial_\zeta \zeta f(y)} \frac{\zeta'(|y - z|)}{|y - z|} \langle y - z, h \rangle = D_h(\zeta^2 f)(y),$$

d'où $D_h(\zeta f)(x) \leq -D_h(\zeta^2 f)(y)$, et ceci pour tout $y \in \partial_\zeta f(x)$. Ainsi, $D_h(\zeta f)(x) \geq - \sup_{y \in \partial_\zeta f(x)} D_h(\zeta^2 f)(y)$. \square

Lemme A-26. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, de classe C^1 et coercive, telle que $\zeta(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue supérieurement telle que $f \in \mathcal{F}_\zeta$.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\partial_\zeta f$ soit non vide au voisinage de x , et tel que $x \notin \partial_\zeta f(x)$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, la dérivée directionnelle $D_h(\zeta f)$ est bien définie et semi-continue inférieurement au voisinage de x (et s'exprime comme dans le lemme A-24). De plus, il existe $r_h > 0$ tel que $y \notin \partial_\zeta f(y)$ pour tout $y \in B(x, r_h)$.

Preuve : Soit $h \in \mathbb{R}^d$. D'après l'énoncé et le corollaire A-2, il existe $r_h > 0$ tel que $B(x, r_h) \subset \text{Dom}(\partial_\zeta f)$ et tel que $y \notin \partial_\zeta f(y)$ pour tout $y \in B(x, r_h)$. Ainsi, d'après le lemme A-24, $D_h(\zeta f)(y)$ est bien défini en tout $y \in B(x, r_h)$ et

$$D_h(\zeta f)(y) = \min_{z \in \partial_\zeta f(y)} \frac{\zeta'(|y - z|)}{|y - z|} \langle y - z, h \rangle.$$

Soit $y \in B(x, r_h)$ et soit (y_n) une suite d'éléments de $B(x, r_h)$ convergeant vers y . Soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^d vérifiant $z_n \in \partial_\zeta f(y_n)$ (et donc $z_n \neq y_n$ du fait que $y_n \notin \partial_\zeta f(y_n)$) et

$$D_h(\zeta f)(y_n) = \frac{\zeta'(|y_n - z_n|)}{|y_n - z_n|} \langle y_n - z_n, h \rangle$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le lemme A-11, il existe $R_h > 0$ tel que $\text{Arg}[f]_\zeta(|x| + r_h, 1) \subset B(0, R_h)$, d'où $\partial_\zeta f(y_n) \subset \text{ArgPt}[f]_\zeta(y_n, 1) \subset \text{Arg}[f]_\zeta(|x| + r_h, 1) \subset B(0, R_h)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(z_n)_n$ est donc bornée dans \mathbb{R}^d .

Montrons que l'on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} D_h(\zeta f)(y_n) \geq D_h(\zeta f)(y)$. Pour cela raisonnons par l'absurde, et supposons que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} D_h(\zeta f)(y_n) < D_h(\zeta f)(y)$, et dans ce cas prenons $0 < \epsilon < D_h(\zeta f)(y) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} D_h(\zeta f)(y_n)$.

Il existerait alors une sous-suite $(y_{\phi(n)})_n$ extraite de $(y_n)_n$ vérifiant

$$\inf_{m \geq n} D_h(\zeta f)(y_m) \leq D_h(\zeta f)(y_{\phi(n)}) < \liminf_{n \rightarrow +\infty} D_h(\zeta f)(y_n) + \epsilon < D_h(\zeta f)(y)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(z_n)_n$ est bornée, on peut supposer, quitte à extraire une autre sous-suite de $(z_{\phi(n)})_n$ (et donc de $(y_{\phi(n)})_n$), que la suite $(z_{\phi(n)})_n$ converge vers un point $z \in \mathbb{R}^d$, vérifiant plus précisément $z \in \partial_\zeta f(y)$ d'après le lemme A-20. On a donc

$$\underbrace{\frac{\zeta'(|y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}|)}{|y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}|} \langle y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)}, h \rangle}_{=D_h(\zeta f)(y_{\phi(n)})} < \liminf_{n \rightarrow +\infty} D_h(\zeta f)(y_n) + \epsilon < D_h(\zeta f)(y)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite $(y_{\phi(n)} - z_{\phi(n)})_n$ converge donc vers $y - z \neq 0$ (car $y \notin \partial_\zeta f(y)$). Ainsi, par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient (du fait de la continuité de ζ')

$$\underbrace{\frac{\zeta'(|y - z|)}{|y - z|} \langle y - z, h \rangle}_{\geq D_h(\zeta f)(y)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} D_h(\zeta f)(y_n) + \epsilon < D_h(\zeta f)(y),$$

d'où, du fait que $\frac{\zeta'(|y - z|)}{|y - z|} \langle y - z, h \rangle \geq D_h(\zeta f)(y)$,

$$D_h(\zeta f)(y) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} D_h(\zeta f)(y_n) + \epsilon < D_h(\zeta f)(y),$$

ce qui est bien évidemment absurde. On a donc bien $\liminf_{n \rightarrow +\infty} D_h(\zeta f)(y_n) \geq D_h(\zeta f)(y)$ et ceci pour tout $y \in B(x, r_h)$ et pour toute suite $(y_n)_n$ d'éléments de $B(x, r_h)$ convergeant vers y . La fonction $y \mapsto D_h(\zeta f)(y)$ est donc bien semi-continue inférieurement sur $B(x, r_h)$. □

Lemme A-27. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, de classe C^1 et coercive, telle que $\zeta(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue supérieurement telle que $f \in \mathcal{F}_\zeta$.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\partial_\zeta f$ soit non vide au voisinage de x , et tel que $x \notin \partial_\zeta f(x)$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, $D_h(\zeta f)$ est bien définie au voisinage de x , et la fonction $t \mapsto D_h(\zeta f)(x + th)$, définie au voisinage de 0 pour $t \geq 0$ est continue en $t = 0^+$.

Preuve : D'après l'énoncé et le corollaire A-2, il existe $r_h > 0$ tel que $B(x, r_h) \subset \text{Dom}(\partial_\zeta f)$ et tel que $y \notin \partial_\zeta f(y)$ pour tout $y \in B(x, r_h)$. Ainsi, d'après le lemme A-24, $D_h(\zeta f)(y)$ est bien définie en tout $y \in B(x, r_h)$ et $D_h(\zeta f)(y) =$

$$\min_{z \in \partial_\zeta f(y)} \frac{\zeta'(|y - z|)}{|y - z|} \langle y - z, h \rangle.$$

Montrons que $D_h(\zeta f)(x + th) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} D_h(\zeta f)(x)$. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ et une suite réelle strictement positive $(t_n)_n$ convergeant vers 0 telle que $t_n \in]0, r_h/(2|h|)[$ et

$$\left| D_h(\zeta f)(x) - D_h(\zeta f)(x + t_n h) \right| \geq \epsilon > 0 \tag{A-8}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit une suite $(z_n)_n$ d'éléments de \mathbb{R}^d vérifiant $z_n \in \partial_\zeta f(x + t_n h)$ et

$$D_h(\zeta f)(x + t_n h) = \frac{\zeta'(|x + t_n h - z_n|)}{|x + t_n h - z_n|} \langle x + t_n h - z_n, h \rangle$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ (rappelons que l'on a $x + t_n h \notin \partial_\zeta f(x + t_n h)$, et donc $z_n \neq x + t_n h$). D'après le lemme A-24, la suite $(z_n)_n$ est bornée dans \mathbb{R}^d : son adhérence est donc non-vide et donc, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $(z_n)_n$ converge dans \mathbb{R}^d vers un point \bar{z} vérifiant donc

$$D_h(\zeta f)(x) = \frac{\zeta'(|x - \bar{z}|)}{|x - \bar{z}|} \langle x - \bar{z}, h \rangle$$

d'après le second point du lemme A-24. En rappelant que l'on a $x \notin \partial_\zeta f(x)$, et donc $\bar{z} \neq x$, on a alors (du fait de la continuité de la fonction ζ') :

$$D_h(\zeta f)(x + t_n h) = \frac{\zeta'(|x + t_n h - z_n|)}{|x + t_n h - z_n|} \langle x + t_n h - z_n, h \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\zeta'(|x - \bar{z}|)}{|x - \bar{z}|} \langle x - \bar{z}, h \rangle = D_h(\zeta f)(x),$$

contredisant ainsi notre hypothèse (A-8). □

Lemme A-28. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, de classe C^1 et coercive, telle que $\zeta(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue supérieurement telle que $f \in \mathcal{F}_\zeta$.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\partial_\zeta f$ soit non vide au voisinage de x , et tel que $x \notin \partial_\zeta f(x)$. Alors :

- Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\lambda > 0$, on a $D_{\lambda h}(\zeta f)(x) = \lambda D_h(\zeta f)(x)$.
- Pour tous $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^d$, on a $D_{h_1+h_2}(\zeta f)(x) \geq D_{h_1}(\zeta f)(x) + D_{h_2}(\zeta f)(x)$.

Preuve : Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et soit $\lambda > 0$. D'après le lemme A-24, pour tout $z \in \partial_\zeta f(x)$, on a

$$\frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, \lambda h \rangle = \lambda \underbrace{\frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h \rangle}_{\geq \lambda D_h(\zeta f)(x)} \geq \lambda D_h(\zeta f)(x),$$

d'où $D_{\lambda h}(\zeta f)(x) = \min_{z \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h \rangle \geq \lambda D_h(\zeta f)(x)$. De même, on montre que l'on a $D_{(1/\lambda)h}(\zeta f)(x) \geq (1/\lambda)D_h(\zeta f)(x)$, d'où $D_{\lambda h}(\zeta f)(x) = \lambda D_h(\zeta f)(x)$.

Soient maintenant $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^d$. Toujours d'après le lemme A-24, pour tout $z \in \partial_\zeta f(x)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h_1 + h_2 \rangle &= \underbrace{\frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h_1 \rangle}_{\geq D_{h_1}(\zeta f)(x)} + \underbrace{\frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h_2 \rangle}_{\geq D_{h_2}(\zeta f)(x)} \\ &\geq D_{h_1}(\zeta f)(x) + D_{h_2}(\zeta f)(x). \end{aligned}$$

D'où $D_{h_1+h_2}(\zeta f)(x) = \min_{z \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h_1 + h_2 \rangle \geq D_{h_1}(\zeta f)(x) + D_{h_2}(\zeta f)(x)$. □

Lemme A-29. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, de classe C^1 et coercive, telle que $\zeta(0) = 0$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue supérieurement telle que $f \in \mathcal{F}_\zeta$.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\partial_\zeta f$ soit non vide au voisinage de x , et tel que $x \notin \partial_\zeta f(x)$.

Si ζf est Gateaux-différentiable en x , alors $\nabla_x \zeta f(x) = \frac{\zeta'(|x - y|)}{|x - y|} (x - y)$ pour tout $y \in \partial_\zeta f(x)$.

Preuve : Si ζf est Gateaux-différentiable en x , alors pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a $D_h(\zeta f)(x) = \langle \nabla_x \zeta f(x), h \rangle$. De plus, d'après le lemme A-24, on a également $D_h(\zeta f)(x) = \min_{z \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h \rangle$.

Pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} \max_{z \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h \rangle &= - \min_{z \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, -h \rangle \\ &= -D_{-h}(\zeta f)(x) = -\langle \nabla_x \zeta f(x), -h \rangle = \langle \nabla_x \zeta f(x), h \rangle \\ &= \min_{z \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in \partial_\zeta f(x)$, on a

$$\frac{\zeta'(|x - y|)}{|x - y|} \langle x - y, h \rangle = \min_{z \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h \rangle = \max_{z \in \partial_\zeta f(x)} \frac{\zeta'(|x - z|)}{|x - z|} \langle x - z, h \rangle = \langle \nabla_x \zeta f(x), h \rangle$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, i.e. $\nabla_x \zeta f(x) = \frac{\zeta'(|x - y|)}{|x - y|} (x - y)$. □

Remarque A-5. On aurait en fait prouver directement, et plus simplement, le lemme A-29 sans se référer aux résultats obtenus sur les dérivées directionnelles. En effet, d'après le lemme A-18, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\partial_\zeta f$ soit non vide au voisinage de x , et tel que $x \notin \partial_\zeta f(x)$, et tout $y \in \partial_\zeta f(x)$ (d'où $y \neq x$), on a $x \in \partial_\zeta \zeta f(y)$, i.e. x est un maximum de la fonction $z \mapsto \zeta(|y - z|) - \zeta f(z)$: celle-ci étant Gateaux-différentiable en x , ce dernier en est donc un point critique, i.e

$$\nabla_x [\zeta(|\cdot|)](x - y) - \nabla_x \zeta f(x) = 0,$$

$$\text{i.e. } \nabla_x \zeta f(x) = \nabla_x [\zeta(|\cdot|)](x - y) = \frac{\zeta'(|x - y|)}{|x - y|}(x - y).$$

Lemme A-30. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive de classe C^1 , strictement convexe, telle que $\zeta(0) = 0$ (et donc strictement croissante et coercive^a). Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue supérieurement telle que $f \in \mathcal{F}_\zeta$.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\partial_\zeta f$ soit non vide au voisinage de x , et tel que $x \notin \partial_\zeta f(x)$.

Si ζf est Gateaux-différentiable en x , alors $x \in \text{Dom}(\nabla_\zeta f)$ ^b, i.e. $\partial_\zeta f(x)$ est réduit à un seul élément et

$$\nabla_x \zeta f(x) = \nabla_x [\zeta(|\cdot|)](x - \nabla_\zeta f(x)) = \frac{\zeta'(|x - \nabla_\zeta f(x)|)}{|x - \nabla_\zeta f(x)|}(x - \nabla_\zeta f(x)).$$

Autrement dit, en considérant la fonction réciproque $(\zeta')^{-1} : [\zeta'(0), \zeta'(+\infty)[\rightarrow \mathbb{R}_+$ de la fonction $(\zeta')^{|\zeta'(0), \zeta'(+\infty)[}$, on a $\nabla_x \zeta f(x) \neq 0$ et

$$\nabla_\zeta f(x) = x - \frac{(\zeta')^{-1}(|\nabla_x \zeta f(x)|)}{|\nabla_x \zeta f(x)|} \nabla_x \zeta f(x).$$

Preuve : Pour le cas de ζf : si ζf est Gateaux-différentiable en x , alors d'après le lemme A-29, on a $\nabla_x \zeta f(x) = \frac{\zeta'(|x - y|)}{|x - y|}(x - y)$ pour tout $y \in \partial_\zeta f(x)$.

La fonction ζ étant de classe C^1 , strictement convexe et croissante sur \mathbb{R}_+ , sa dérivée ζ' est quant à elle continue, strictement positive (sauf éventuellement en 0) et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ (donc injective).

Soient $y_1, y_2 \in \partial_\zeta f(x)$: on a ainsi $\frac{\zeta'(|x - y_1|)}{|x - y_1|}(x - y_1) = \nabla_x \zeta f(x) = \frac{\zeta'(|x - y_2|)}{|x - y_2|}(x - y_2)$, d'où

$$\zeta'(|x - y_1|) = \left| \frac{\zeta'(|x - y_1|)}{|x - y_1|}(x - y_1) \right| = \left| \nabla_x \zeta f(x) \right| = \left| \frac{\zeta'(|x - y_2|)}{|x - y_2|}(x - y_2) \right| = \zeta'(|x - y_2|) > 0.$$

La fonction ζ' étant injective, on a ainsi $|x - y_1| = |x - y_2| > 0$, d'où $\frac{\zeta'(|x - y_1|)}{|x - y_1|} = \frac{\zeta'(|x - y_2|)}{|x - y_2|}$ et donc $x - y_1 = x - y_2$, i.e. $y_1 = y_2$.

L'ensemble $\partial_\zeta f(x)$ se réduit donc à un seul élément, noté $\nabla_\zeta f(x)$, et on a donc $|\nabla_x \zeta f(x)| = \zeta'(|x - \nabla_\zeta f(x)|) > 0$, d'où $(\zeta')^{-1}(|\nabla_x \zeta f(x)|) = |x - \nabla_\zeta f(x)|$.

Ainsi, on a $x - \nabla_\zeta f(x) = \frac{|x - \nabla_\zeta f(x)|}{\zeta'(|x - \nabla_\zeta f(x)|)} (\nabla_x \zeta f(x)) = \frac{(\zeta')^{-1}(|\nabla_x \zeta f(x)|)}{|\nabla_x \zeta f(x)|} \nabla_x \zeta f(x)$, i.e.

$$\nabla_\zeta f(x) = x - \frac{(\zeta')^{-1}(|\nabla_x \zeta f(x)|)}{|\nabla_x \zeta f(x)|} \nabla_x \zeta f(x).$$

□

Remarque A-6. Remarquons que si ζ n'est pas strictement convexe, rien n'interdit $\partial_\zeta f(x)$ de ne pas être réduit à un seul élément lorsque ζf est Gateaux-différentiable en x sous les conditions du lemme A-29.

Par exemple, si $\zeta = \text{I}$, on a $\nabla_x \zeta f(x) = \frac{1}{|x - y|}(x - y)$ pour tout $y \in \partial_\zeta f(x)$ (ce qui, pour un gradient $\nabla_x \zeta f(x)$ fixé, laisse potentiellement une infinité de possibilités pour y).

Lemme A-31. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive de classe C^1 , strictement convexe, telle que $\zeta(0) = 0$ (et donc strictement croissante et coercive). Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue supérieurement telle que $f \in \mathcal{F}_\zeta$.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\partial_\zeta f$ soit non vide au voisinage de x , et tel que $x \in \partial_\zeta f(x)$.

Si ζf est Gateaux-différentiable en x , alors $x \in \text{Dom}(\nabla_\zeta f)$, i.e. $\partial_\zeta f(x)$ est réduit à un seul élément, et $\nabla_\zeta f(x) = x$.

a. En effet, si $\zeta'(0)$ avait été strictement négative, ζ aurait été localement strictement décroissante au voisinage de 0, et donc ζ aurait été strictement négative au voisinage de 0, ce qui contredit sa positivité. Ainsi, $\zeta'(0) \geq 0$ et donc $\zeta'(t) > 0$ pour tout $t > 0$ du fait de la stricte croissance de ζ' . Par ailleurs, la coercivité de ζ est assurée par le fait que pour tout $t_0 > 0$, et tout $t \geq t_0$ on ait $\zeta'(t) \geq \zeta'(t_0) > 0$.

b. Voir la définition A-3 pour les notations $\text{Dom}(\nabla_\zeta f)$ et $\nabla_\zeta f(x)$.

Preuve : Supposons $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Soit $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \text{Dom}(\partial_\zeta f)$, i.e. $\partial_\zeta f(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in B(x, r)$.

— Comme $x \in \partial_\zeta f(x)$, pour tout $t \in]0, r/(2|h)[$, on a $\zeta f(x) = \underbrace{\zeta(|x-x|)}_{=0} - f(x) = -f(x)$, et ainsi

$$\zeta f(x+th) \leq \zeta(|x+th-x|) - \underbrace{f(x)}_{=-\zeta f(x)} = \zeta(t|h|) + \zeta f(x),$$

i.e. $\frac{\zeta f(x+th) - \zeta f(x)}{t} \leq \frac{\zeta(t|h|) - \overbrace{\zeta(0)}^{=0}}{t}$ pour tout $t \in]0, r/(2|h)[$, et ainsi

$$\langle \nabla_x \zeta f(x), h \rangle = D_h(\zeta f)(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\zeta f(x+th) - \zeta f(x)}{t} \right) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\zeta(t|h|) - \zeta(0)}{t} = \zeta'(0)|h|.$$

De même, on montre que

$$-\langle \nabla_x \zeta f(x), h \rangle = D_{-h}(\zeta f)(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\zeta f(x-th) - \zeta f(x)}{t} \right) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\zeta(t|h|) - \zeta(0)}{t} = \zeta'(0)|h|.$$

d'où $|\langle \nabla_x \zeta f(x), h \rangle| \leq \zeta'(0)|h|$, et ceci pour tout $h \in \mathbb{R}^d$. Ainsi, on a

$$|\nabla_x \zeta f(x)| \leq \zeta'(0). \quad (\text{A-9})$$

— Supposons qu'il existe $y \in \partial_\zeta f(x)$ tel que $y \neq x$. Soit $h \in \mathbb{R}^d$: d'après le lemme A-4, pour tout $t \in]0, r/(2|h)[$, on a

$$\zeta f(x+th) \leq \zeta(|x+th-y|) - f(y) = \underbrace{\zeta(|x-y|) - f(y)}_{=\zeta f(x)} + t \frac{\zeta'(|x-y|)}{|x-y|} \langle x-y, h \rangle + o(t)$$

i.e. $\frac{\zeta f(x+th) - \zeta f(x)}{t} \leq \frac{\zeta'(|x-y|)}{|x-y|} \langle x-y, h \rangle + \frac{o(t)}{t}$ pour tout $t \in]0, r/(2|h)[$, et ainsi

$$\langle \nabla_x \zeta f(x), h \rangle = D_h(\zeta f)(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\zeta f(x+th) - \zeta f(x)}{t} \right) \leq \frac{\zeta'(|x-y|)}{|x-y|} \langle x-y, h \rangle.$$

De même, on montre que

$$-\langle \nabla_x \zeta f(x), h \rangle = D_{-h}(\zeta f)(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\zeta f(x-th) - \zeta f(x)}{t} \right) \leq -\frac{\zeta'(|x-y|)}{|x-y|} \langle x-y, h \rangle,$$

d'où $\langle \nabla_x \zeta f(x), h \rangle = \frac{\zeta'(|x-y|)}{|x-y|} \langle x-y, h \rangle$, et ceci pour tout $h \in \mathbb{R}^d$. Par conséquent, on a $\nabla_x \zeta f(x) = \frac{\zeta'(|x-y|)}{|x-y|} (x-y)$, et ainsi, du fait que ζ' soit positive et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ ,

$$|\nabla_x \zeta f(x)| = \left| \frac{\zeta'(|x-y|)}{|x-y|} (x-y) \right| = \zeta'(|x-y|) > \zeta'(0),$$

ce qui contredit l'inégalité (A-9). Ainsi, $\partial_\zeta f(x)$ est réduit au seul point x , i.e. $x \in \text{Dom}(\nabla_\zeta f)$ avec $\nabla_\zeta f(x) = x$. □

Proposition A-2. Soit $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive de classe C^1 , strictement convexe, telle que $\zeta(0) = 0$ (et donc strictement croissante et coercive). On considère également la fonction réciproque $(\zeta')^{-1} : [\zeta'(0), \zeta'(+\infty)[\rightarrow \mathbb{R}_+$ de la fonction $(\zeta')|_{[\zeta'(0), \zeta'(+\infty)[}$.

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue supérieurement et bornée.

Alors $\text{Dom}(\partial_\zeta f) = \mathbb{R}^d$ et la fonction ζf est Fréchet-différentiable en \mathcal{L}^d -presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$. En chacun des points x où ζf est Fréchet-différentiable, on a $x \in \text{Dom}(\nabla_\zeta f)$, avec :

$$\begin{cases} \nabla_\zeta f(x) = x, & \text{si } x \in \partial_\zeta f(x), \text{ i.e. } \zeta f(x) = -f(x), \\ \nabla_\zeta f(x) = x - \frac{(\zeta')^{-1}(|\nabla_x \zeta f(x)|)}{|\nabla_x \zeta f(x)|} \underbrace{\nabla_x \zeta f(x)}_{\neq 0}, & \text{si } x \notin \partial_\zeta f(x), \text{ i.e. } \zeta f(x) \neq -f(x). \end{cases}$$

Preuve : Tout d'abord, remarquons que l'on a bien $\text{Dom}(\partial_\zeta f) = \mathbb{R}^d$ d'après le lemme A-17. De plus, d'après le lemme A-13, la fonction ζf est localement lipschitzienne sur \mathbb{R}^d : en effet la fonction ζ étant convexe et continue^a, elle est donc localement lipschitzienne sur \mathbb{R}_+ , et remplit donc avec f les conditions de ce dernier lemme. Ainsi, d'après le théorème 2-2 (théorème de Rademacher), la fonction ζf est \mathcal{L}^d -Fréchet-différentiable presque partout sur \mathbb{R}^d .

Il suffit pour finir d'appliquer en chacun des points x où ζf est Fréchet-différentiables le lemme A-31 si $x \in \partial_\zeta f(x)$, ou le lemme A-30 si $x \notin \partial_\zeta f(x)$.

Par ailleurs, remarquons que $x \in \partial_\zeta f(x) \Leftrightarrow \zeta f(x) = \underbrace{\zeta(|x-x|)}_{=0} - f(x) = -f(x)$.

□

B Annexe de la section 3

Cette annexe présente les définitions et les résultats utilisés dans la section 3.

B.1 Définitions et résultats pour la preuve de la proposition 3-2

Commençons par rappeler deux définitions :

Définition B-1. Soient (X_1, \mathcal{T}_1) et (X_2, \mathcal{T}_2) deux espaces mesurables, et soit une fonction $f : X_1 \rightarrow X_2$.

On dit qu'une fonction $f : X_1 \rightarrow X_2$ est mesurable de (X_1, \mathcal{T}_1) vers (X_2, \mathcal{T}_2) si pour tout $Y \in \mathcal{T}_2$ on a $f^{-1}(Y) \in \mathcal{T}_1$.

Par abus de notation et de langage, on dira souvent que la fonction $f : (X_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{T}_2)$ est mesurable (même si la fonction f est bien une fonction de X_1 dans X_2 et non de (X_1, \mathcal{T}_1) dans (X_2, \mathcal{T}_2)).

Définition B-2. Soit (X, \mathcal{T}) un espace mesurable. Par abus de langage, on dit qu'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est "mesurable" sur (X, \mathcal{T}) (sans plus de précision) si pour tout ouvert U de \mathbb{R} (muni de sa topologie canonique), on a $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Autrement dit f est dite "mesurable" si la fonction $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable au sens de la définition B-1 (où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne la tribu borélienne issue de la topologie canonique de \mathbb{R}).

Remarque B-1. Nous tenions à rappeler cette définition, pour pointer le fait que toute fonction à valeur dite mesurable, même si elle n'est pas borélienne (c'est à dire même si \mathcal{T} n'est pas la tribu borélienne issue d'une topologie associée à X), elle garde toujours une part de "boréliannité" liée à son espace d'arrivée.

Par exemple, on dira qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable, i.e. mesurable sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{TL}(\mathbb{R}^d))$, où $\mathcal{TL}(\mathbb{R}^d)$ désigne la tribu de Lebesgue sur \mathbb{R}^d (muni de sa topologie canonique), si la fonction $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{TL}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. En revanche une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{TL}(\mathbb{R}^d))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{TL}(\mathbb{R}))$ ($\mathcal{TL}(\mathbb{R})$ désignant la tribu de Lebesgue sur \mathbb{R}^d) au sens de la définition B-1 n'est pas dite mesurable au sens de la définition B-7.

En revanche du fait, selon la définition B-2, si on considère deux tribus \mathcal{T} et \mathcal{T}' sur un ensemble X telles que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, alors toute fonction mesurable sur (X, \mathcal{T}) est également mesurable sur (X, \mathcal{T}') (l'inverse n'est bien sûr pas vrai).

En particulier, toute fonction borélienne est Lebesgue-mesurable.

On rappelle également l'énoncé du théorème de représentation de Riesz (dont on peut trouver une preuve dans [32], théorème 2.14) :

Théorème B-1 (Théorème de représentation de Riesz [32]). Soit (X, d) un espace métrique localement compact. Soit L une forme linéaire positive sur $C_c(X)$, c'est à dire telle que $L(f) \geq 0$ pour toute fonction $f \in C_c^+(X)$.

Alors il existe une unique mesure de Radon positive μ représentant L au sens suivant :

$$\forall f \in C_c(X), L(f) = \int_X f d\mu.$$

B.1.1 Poussée de mesure, classes d'équivalences presque partout, intégrabilité et changement de variable

Lemme B-1. Soient $(X, \mathcal{T}(X), \mu)$ et $(Y, \mathcal{T}(Y), \nu)$ deux espaces mesurés non-vides ($\mathcal{T}(X)$ et $\mathcal{T}(Y)$ étant les tribus respectivement associées aux mesures μ et ν), et soit Z un ensemble non vide. Soit une fonction mesurable^b $f : (X, \mathcal{T}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{T}(Y))$ telle que pour tout ensemble $E \in \mathcal{T}(Y)$ vérifiant $\nu(E) = 0$, on ait $\mu(f^{-1}(E)) = 0$.

Soient deux fonctions $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ telles que pour ν -presque tout $y \in Y$, on ait $g_1(y) = g_2(y)$: ce qui sous-entend

a. Précision utile uniquement en $t = 0$.

b. Au sens de la définition B-1.

que l'ensemble $B_{g_1 \neq g_2} = \{y \in Y, g_1(y) \neq g_2(y)\}$ est un élément de la tribu $\mathcal{T}(Y)$ et que $\nu(B_{g_1 \neq g_2}) = 0$.

Alors on a $(g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x)$ pour μ -presque tout $x \in X$.

Preuve : On a $\nu(B_{g_1 \neq g_2}) = 0$ et $f^{-1}(B_{g_1 \neq g_2}) \in \mathcal{T}(X)$, d'où $\mu(f^{-1}(B_{g_1 \neq g_2})) = 0$. Or, pour tout $x \in X \setminus f^{-1}(B_{g_1 \neq g_2})$, on a $f(x) \in Y \setminus B_{g_1 \neq g_2}$, d'où $g_1(f(x)) = g_2(f(x))$.

On a donc bien, $(g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x)$ pour μ -presque tout $x \in X$. □

Définition B-3. Soit $(X, \mathcal{T}(X), \mu)$ et $(Y, \mathcal{T}(Y), \nu)$ deux espaces mesurés ($\mathcal{T}(X)$ et $\mathcal{T}(Y)$ étant les tribus respectivement associées aux mesures μ et ν). Soit un opérateur mesurable $T : (X, \mathcal{T}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{T}(Y))$.

On dit que T "pousse la mesure μ sur la mesure ν ", noté $T\#\mu = \nu$, si et seulement si $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ pour tout $A \in \mathcal{Y}$.

Dans de nombreuses preuves de ce document, nous avons utilisé l'équivalence entre la relation de "push-forward" $T\#\mu = \nu$ et la relation variationnelle $\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x)$ pour toute fonction $f \in C_c(Y)$. Cette équivalence n'est cependant pas valable sur tout espace mesurable Y . Dans le cadre de cette étude, nous avons besoin que cette équivalence fonctionne sur \mathbb{R}^d et sur $(L^{d,M}, d_\infty)$. C'est pourquoi nous montrons dans la proposition suivante cette propriété dans le cas où (Y, d) est un espace métrique propre, ce qui inclut donc le cas de \mathbb{R}^d et de $(L^{d,M}, d_\infty)$ (d'après le lemme B-6 à suivre dans cette même annexe).

Proposition B-1. Soit $(X, \mathcal{T}(X))$ un ensemble mesurable non vide^a et (Y, d) un espace métrique propre^b non vide. Soit $T : (X, \mathcal{T}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{B}_d(Y))$ un opérateur mesurable^c

Soit μ une mesure (positive) sur $(X, \mathcal{T}(X))$ et soit ν une mesure de Radon^d sur $\mathcal{B}_d(Y)$. On a alors l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

1. $T\#\mu = \nu$.
2. $\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x)$, $\forall f \in \mathcal{F}^+(Y)$, où $\mathcal{F}^+(Y)$ représente l'ensemble des fonctions boréliennes définies sur Y à valeur dans \mathbb{R}_+ ^e.
3. $\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x)$, $\forall f \in \ell^1(Y)$, où $\ell^1(Y)$ représente l'ensemble des fonctions boréliennes intégrables définies sur Y à valeur dans \mathbb{R} ^f.
4. $\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x)$, $\forall f \in C_c^+(Y)$.
5. $\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x)$, $\forall f \in C_c(Y)$ ^g.

Remarque B-2. Remarquons que pour ce qui est de l'équivalence entre les deux premiers points de la proposition B-1, il est juste nécessaire que X et Y soient munis de tribus $\mathcal{T}(X)$ et $\mathcal{T}(Y)$, que T soit mesurable de $(X, \mathcal{T}(X))$ dans $(Y, \mathcal{T}(Y))$, et que μ et ν soient des mesures sur respectivement $(X, \mathcal{T}(X))$ et $(Y, \mathcal{T}(Y))$. Dans ce cas, l'équivalence se traduit plus précisément ainsi :

1. $T\#\mu = \nu$.
2. $\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x)$ pour toute fonction mesurable sur $(Y, \mathcal{T}(Y))$ à valeur dans \mathbb{R}_+ (muni de sa topologie canonique, et de la tribu borélienne associée).

La preuve est immédiate par construction même de l'intégrale de Lebesgue comme le résume le début de la preuve de la proposition B-1.

Avant de démontrer la proposition B-1, nous allons montrer deux lemmes dont nous ferons usage dans la preuve.

Lemme B-2. Soit (X, d) un espace métrique propre^h et soit V un sous-ensemble ouvert de X . Il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles compacts de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K_{n+1}$, et

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

a. $\mathcal{T}(X)$ désignant une tribu sur X .
b. C'est à dire dans lequel les fermés bornés sont compacts. Un tel espace est notamment séparé (en tant qu'espace métrique), localement compact et σ -compact.
c. Où $\mathcal{B}_d(Y)$ désigne la tribu borélienne sur Y définie par la topologie issue de la distance d .
d. C'est à dire intérieurement régulières et localement finies.
e. Muni de sa topologie canonique.
f. Idem.
g. Rappelons que $C_c(Y)$ désigne l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Y à valeur dans \mathbb{R} , et $C_c^+(Y)$ les fonctions positives de $C_c(Y)$.
h. Toute partie bornée est relativement compacte (tout espace propre est donc en particulier localement compact)

Preuve : Supposons dans un premier temps que l'ensemble V soit borné. Son adhérence \overline{V} est donc un compact de X . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\overline{V} \subset \bigcup_{x \in \overline{V}} B\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$ et donc il existe $k_n \in \mathbb{N}$ et $x_0^n, \dots, x_{k_n}^n \in \overline{V}$ tel que

$$\overline{V} \subset \bigcup_{i=0..k_n} B\left(x_i^n, \frac{1}{n+1}\right) \subset \bigcup_{i=0..k_n} \overline{B\left(x_i^n, \frac{1}{n+1}\right)}. \quad (\text{B-1})$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \left\{ i \in \llbracket 0, k_n \rrbracket, \overline{B\left(x_i^n, \frac{1}{n+1}\right)} \subset V \right\} \quad \text{et} \quad K_n = \bigcup_{i \in A_n} \overline{B\left(x_i^n, \frac{1}{n+1}\right)} \subset V$$

(K_n étant compact du fait que A_n est fini). Montrons que V est la réunion des K_n . Tout d'abord, il est clair que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \subset V.$$

Soient $x \in V$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset V$, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/(n+1) < r/2$. D'après (B-1), il existe donc x_i^n tel que $x \in \overline{B\left(x_i^n, 1/(n+1)\right)}$. Ainsi pour tout $y \in \overline{B\left(x_i^n, 1/(n+1)\right)}$, on a

$$|x - y| \leq |x - x_i^n| + |x_i^n - y| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} < r,$$

donc

$$\overline{B\left(x_i^n, \frac{1}{n+1}\right)} \subset B(x, r) \subset V,$$

d'où $i \in A_n$ et $\overline{B\left(x_i^n, 1/(n+1)\right)} \subset K_n$. Il s'en suit que $x \in K_n$, et on peut ainsi conclure que plus généralement

$$V \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

Pour finir, si l'on ne suppose plus que V est borné, on peut toujours se ramener au fait que V peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'ouverts bornés (par exemple la réunion des $B(0, n) \cap V^a$). Donc en tant que réunion dénombrable de réunions dénombrables de compacts, V est la réunion d'une famille dénombrable $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts de \mathbb{R}^d .

Pour finir, quitte à poser pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$K'_n = \bigcup_{j=0}^n K_j,$$

on peut considérer que cette famille est croissante au sens de l'inclusion. □

Lemme B-3. Soit (X, d) un espace métrique propre et soit K un compact de \mathbb{R}^d . Il existe une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} \subset V_n$, et

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n.$$

Il existe de plus un ouvert borné V' de X (donc d'adhérence compact, (X, d) étant propre) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \subset V'$.

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K \subset \bigcup_{x \in \overline{V}} B\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$ et donc il existe, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ et $x_0^n, \dots, x_{k_n}^n \in K$ tel que

$$K \subset \bigcup_{i=0..k_n} B\left(x_i^n, \frac{1}{n+1}\right) \quad (\text{B-2})$$

On pose ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = \bigcup_{i=0..k_n} B\left(x_i^n, \frac{1}{n+1}\right).$$

Il est clair que

a. Tout espace métrique propre est σ -fini.

$$K \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n.$$

Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i_n \in \llbracket 0, k_n \rrbracket$ tel que $x \in B\left(x_{i_n}^n, \frac{1}{n+1}\right)$.

La suite $(x_{i_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (d'éléments de K) converge donc vers x , et donc $x \in K$. D'où

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset K.$$

Pour finir, quitte à poser pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n' = \bigcap_{j=0}^n V_j$, on peut considérer que la famille $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion.

On remarquera en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \subset V' = \bigcup_{x \in K} B(x, 1)$ (borné).

□

Preuve de la proposition B-1 : En remarquant que pour tout borélien $A \subset Y$, on a $\mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}$ et donc que

$$\nu(A) = \mu(T^{-1}(A)) = \int_X \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}(x) d\mu(x) = \int_X \mathbb{1}_A(T(x)) d\mu(x),$$

il est clair que 1. \Rightarrow 2. par définition et construction même de l'intégrale de Lebesgue, et inversement que 2. \Rightarrow 1. en ne considérant que les fonction boréliennes $\mathbb{1}_A$ pour tout borélien $A \subset Y$.

De même, les implications 2. \Rightarrow 4. et 5. \Rightarrow 4. sont immédiates du fait que $C_c^+(Y) \subset \mathcal{F}^+(Y) \cap C_c(Y)$.

Par ailleurs, pour toute fonction $f \in \ell^1(Y)$, on a $f^- = -\min\{f, 0\} \in \mathcal{F}^+(Y) \cap \ell^1(Y)$ et $f^+ = \max\{f, 0\} \in \ell^1(Y)$. Si le point 2. est vérifié, on a donc (pour toute fonction $f \in \ell^1(Y)$),

$$\int_X f^-(T(x)) d\mu(x) = \int_Y f^-(y) d\nu(y) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_X f^+(T(x)) d\mu(x) = \int_Y f^+(y) d\nu(y) < +\infty,$$

d'où $f^- \circ T \in \ell^1(X)$ ^a et $f^+ \circ T \in \ell^1(X)$, et ainsi

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_Y f^+(y) d\nu(y) - \int_Y f^-(y) d\nu(y) = \int_X f^+(T(x)) d\mu(x) - \int_X f^-(T(x)) d\mu(x) = \int_X f(T(x)) d\mu(x).$$

Autrement dit, on a 2. \Rightarrow 3. Inversement, supposons que 3. soit vérifié, et soit $f \in \mathcal{F}^+(Y)$ et soit $a \in Y$: on construit la suite $(f_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = \mathbb{1}_{B(a,n) \cap \{f \leq n\}}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_Y f_n d\nu \leq n\nu(B(a,n)) < +\infty$ (ν étant une mesure de Radon, donc finie sur tout compact), d'où $f_n \in \ell^1(Y)$. De plus la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f de façon croissante, et il en est donc de même pour $(f_n \circ T)_n$ vers $f \circ T$. D'après le théorème de Beppo Levi, on a donc :

$$\int_Y f_n(y) d\nu(y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_Y f(y) d\nu(y) \quad \text{et} \quad \underbrace{\int_X f_n(T(x)) d\mu(x)}_{= \int_Y f_n(y) d\nu(y)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f(T(x)) d\mu(x)$$

i.e. $\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x)$, d'où 3. \Rightarrow 2.. Il nous reste donc à montrer que 4. \Rightarrow 1. (ce qui constituera la majeure partie de cette preuve).

Supposons donc que la propriété du point 4. soit vérifiée. On considère la forme linéaire positive $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f d\nu$: celle-ci est bien définie pour tout $f \in C_c(Y)$ du fait que la mesure ν soit finie sur tout compact (en tant que mesure de Radon sur un espace localement compact et séparé^b, comme l'est (Y, d)). D'après le théorème B-1 (théorème de représentation de Riesz), il existe une mesure de Radon ν' sur (Y, d) extérieurement régulière, c'est à dire

$$\nu'(A) = \inf\{\nu'(V), A \subset V, V \text{ ouvert de } Y\}. \quad (\text{B-3})$$

a. Où $\ell^1(X)$ désigne, de même que pour $\ell^1(Y)$, l'ensemble des fonctions boréliennes intégrables sur X .

b. Une mesure borélienne localement finie (ce qui est le cas des mesures de Radon) sur un espace localement compact et séparé est une mesure de Borel (i.e. finie sur tout compact).

pour tout borélien $A \subset Y$, et telle que $\int_Y f(y) d\nu'(y) = \int_Y f(y) d\nu(y)$ pour tout $f \in C_c(Y)$ et ainsi, du fait de la propriété du point 3., on a

$$\int_Y f(y) d\nu'(y) = \int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x)$$

pour tout $f \in C_c^+(Y)$. Nous allons commencer par montrer que pour tout ouvert $V \subset Y$, on a $\nu'(V) = \nu(V) = \mu(T^{-1}(V))$ et de même que pour tout compact $K \subset Y$, on a $\nu'(K) = \nu(K) = \mu(T^{-1}(K))$, puis nous généraliserons à tout borélien (et nous montrerons que $\nu' = \nu$).

— Considérons tout d'abord V un ouvert borné de \mathbb{R}^d . D'après le Lemme B-2, il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts, croissante au sens de l'inclusion, tel que V soit la réunion des K_n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le lemme 2-4 (lemme d'Urysohn) nous donne l'existence d'un $f_n \in C_c^+(Y)$ tel que $\mathbb{1}_{K_n} \leq f_n \leq \mathbb{1}_V$. La suite d'indicatrices $(\mathbb{1}_{K_n})_n$ converge simplement vers $\mathbb{1}_V$ (et converge simplement partout, et non juste presque partout, donc indépendamment de toute mesure), il en est donc de même pour la suite $(f_n)_n$, et ainsi pour la suite $(f_n \circ T)_n$ vers $\mathbb{1}_V \circ T$.

La mesure ν' étant une mesure de Borel (car localement finie, en tant que mesure de Radon, sur un espace séparé localement compact), donc finie sur tout compact, $\nu(V) \leq \nu(\bar{V}) < +\infty$ (rappelons que comme (Y, d) est un espace métrique propre, tout fermé borné est compact, i.e. ici \bar{V} est un compact). Soit V' un ouvert borné de Y tel que $\bar{V} \subset V'$ ^a. Toujours d'après le lemme 2-4, il existe une fonction $g \in C_c(Y)$ tel que $\mathbb{1}_{\bar{V}} \leq g \leq \mathbb{1}_{V'}$. D'où

$$f_n \circ T \leq \mathbb{1}_V \circ T \leq \mathbb{1}_{\bar{V}} \circ T \leq g \circ T$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\int_Y g d\nu' = \int_X g(Tx) d\mu = \int_Y g d\nu \leq \nu(\bar{V}') < +\infty.$$

Ainsi, par convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} \nu'(V) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_V d\nu' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n d\nu' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n d\nu = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_V d\nu = \nu(V) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(Tx) d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_V(Tx) d\mu = \mu(T^{-1}(V)), \end{aligned} \tag{B-4}$$

i.e. $\nu'(V) = \nu(V) = \mu(T^{-1}(V))$, et ceci pour tout ouvert borné $V \subset Y$.

Considérons pour finir sur ce point un ouvert $V \subset Y$ quelconque. Alors V peut s'écrire sous la forme d'une réunion dénombrable d'ouverts bornés. Plus précisément, en fixant $a \in Y$, on a $V = V \cap \overbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(a, n)}^{=X} =$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [V \cap B(a, n)]$, d'où $T^{-1}(V) = T^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [V \cap B(a, n)]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-1}(V \cap B(a, n))$, et donc

$$\begin{aligned} \nu'(V) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu'(V \cap B(a, n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(V \cap B(a, n)) = \nu(V) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T^{-1}(V \cap B(a, n))) = \mu(T^{-1}(V)), \end{aligned} \tag{B-5}$$

i.e. $\nu'(V) = \nu(V) = \mu(T^{-1}(V))$, et ceci pour tout ouvert $V \subset Y$.

— Soit K un compact de \mathbb{R}^d . On raisonne comme dans le point précédent : le Lemme B-3 nous donne l'existence d'une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts, décroissante au sens de l'inclusion, tel que K soit l'intersection des V_n , ainsi que d'un ouvert borné V' tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \subset V'$.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, le lemme 2-4 d'Urysohn nous donne l'existence d'un $f_n \in C_c^+(Y)$ tel que $\mathbb{1}_K \leq f_n \leq \mathbb{1}_{V_n} \leq \mathbb{1}_{V'}$. La suite d'indicatrices $(\mathbb{1}_{V_n})_n$ convergent simplement (partout) vers $\mathbb{1}_K$, et ainsi donc de même pour la suite $(f_n)_n$, et pour la suite $(f_n \circ T)_n$ vers $\mathbb{1}_K \circ T$, avec la domination $f_n \circ T \leq \mathbb{1}_{V'} \circ T$, avec d'après le point précédent

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{V'}(Tx) d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{V'} d\nu' \leq \nu'(V') \leq \nu'(\bar{V}') < +\infty$$

(car ν' est aussi, rappelons-le, une mesure de Borel). On conclut alors par convergence dominée que $\nu'(K) = \nu(K) = \mu(T^{-1}(K))$.

^a. Il suffit de faire une extraction finie du recouvrement ouvert de \bar{V} par des boules de même rayon centrées en chacun de ses points, i.e. $\bar{V} = \bigcup_{x \in \bar{V}} B(x, r)$, pour tout $r > 0$.

- Soit A un borélien borné (ou du moins vérifiant $\nu'(A) < +\infty$). La mesure ν' étant extérieurement régulière (c'est à dire vérifiant (B-3)) et intérieurement régulière : c'est à dire

$$\nu'(A) = \inf\{\nu'(V), A \subset V, V \text{ ouvert}\} \quad \text{et} \quad \nu'(A) = \sup\{\nu'(K), K \subset A, K \text{ compact}\}.$$

Pour tous compacts K et ouverts V tel que $K \subset A \subset V$, on a

$$\nu'(K) = \mu(T^{-1}(K)) \leq \mu(T^{-1}(A)) \leq \mu(T^{-1}(V)) = \nu'(V),$$

d'où

$$\begin{aligned} \nu'(A) &= \sup\{\nu'(K), K \subset A, K \text{ compact}\} = \sup\{\mu(T^{-1}(K)), K \subset A, K \text{ compact}\} \\ &\leq \mu(T^{-1}(A)) \\ &\leq \inf\{\mu(T^{-1}(V)), A \subset V, V \text{ ouvert borne}\} = \inf\{\nu'(V), A \subset V, V \text{ ouvert borne}\} = \nu'(A), \end{aligned} \tag{B-6}$$

i.e. $\nu'(A) = \mu(T^{-1}(A))$. Enfin, si l'on considère maintenant que A est un borélien quelconque de Y , A peut s'écrire comme une réunion dénombrable de boréliens bornés : en fixant $a \in Y$, on a $A = A \cap \overbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(a, n)}^{=X} =$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [A \cap B(a, n)], \text{ d'où } T^{-1}(A) = T^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [A \cap B(a, n)]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-1}(A \cap B(a, n)), \text{ et ainsi}$$

$$\nu'(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu'(A \cap B(a, n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T^{-1}(A \cap B(a, n))) = \mu(T^{-1}(A)).$$

- Pour finir, montrons que $\nu' = \nu$ sur l'ensemble des boréliens de Y . On a montré dans le second point que l'on avait $\nu'(K) = \nu(K)$ pour tout compacts de Y . Or les mesures ν et ν' sont toutes deux intérieurement régulières sur la tribu borélienne : ainsi, pour tout borélien borné (ou plus généralement tout borélien dont la mesure par ν et ν' est finie), on a

$$\nu'(A) = \sup\{\nu'(K), K \subset A, K \text{ compact}\} = \sup\{\nu(K), K \subset A, K \text{ compact}\} = \nu(A).$$

On a donc pour tout borélien $A \subset Y$ quelconque :

$$\nu'(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu'(A \cap B(a, n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(A \cap B(a, n)) = \nu(A).$$

On a bien montré que 3. \Rightarrow 1.

Pour finir, l'implication 3. \Rightarrow 4. est quasi-immédiate : comme la mesure ν est en particulier une mesure de Borel (i.e. finie sur tout compact), toute fonction $f \in C_c(Y)$ est intégrable, i.e. $\int_Y |f(y)| d\nu(y) \leq \sup_Y |f| \nu(\text{Supp}(f)) < +\infty$ d'où le fait que les intégrales selon ν des parties positives et négatives de f (notées respectivement f^+ et f^-) soient également finies et donc, par application du point 2., on a $\int_Y f^-(y) d\nu(y) = \int_X f^-(T(x)) d\mu(x)$ et $\int_Y f^+(y) d\nu(y) = \int_X f^+(T(x)) d\mu(x)$, d'où

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x).$$

□

Lemme B-4. Soient $(X, \mathcal{T}(X), \mu)$ et $(Y, \mathcal{T}(Y), \nu)$ deux espaces mesurés non-vides. Soit un opérateur mesurable $T : (X, \mathcal{T}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{T}(Y))$ poussant la mesure μ sur la mesure ν , i.e. $T\#\mu = \nu$.

Alors pour tout $f \in L^1(Y, \nu)$, on a $f \circ T \in L^1(X, \mu)$ (et donc la classe d'équivalence par égalité μ -presque partout $f \circ T$ est bien définie) avec $\|f \circ T\|_{L^1(X, \mu)} = \|f\|_{L^1(Y, \nu)}$, et

$$\int_X f(T(x)) d\mu(x) = \int_Y f(y) d\nu(y).$$

Preuve : Par hypothèse, pour tout ensemble mesurable $E \in \mathcal{T}(Y)$ tel que $\nu(E) = 0$, on a $\mu(T^{-1}(E)) = \nu(E) = 0$. Ainsi, d'après le lemme B-1, la classe d'équivalence par égalité μ -presque partout de fonctions mesurables $f \circ T$ est bien définie ^a

a. i.e. pour tous représentants \bar{f}_1 et \bar{f}_2 de la classe d'équivalence ν -presque partout désignée par f , on a bien $(\bar{f}_1 \circ T)(x) = (\bar{f}_2 \circ T)(x)$ pour μ -presque tout $x \in X$.

Pour montrer que $f \circ T \in L^1(X, \mu)$, et plus précisément que $\|f \circ T\|_{L^1(X, \mu)} = \|f\|_{L^1(Y, \nu)}$, il suffit de remarquer que pour tout représentant \bar{f} de f , et μ -presque tout $x \in X$, on a

$$\underbrace{\int_Y |\bar{f}(y)| d\nu(y)}_{=\|f\|_{L^1(Y, \nu)}} = \underbrace{\int_X |\bar{f}(T(x))| d\mu(x)}_{=\|f \circ T\|_{L^1(X, \mu)}}$$

d'après la remarque B-2. Si on applique la même égalité aux parties positives et négatives de \bar{f} (que l'on notera respectivement \bar{f}^+ et \bar{f}^-), on a $\int_X \bar{f}^-(T(x)) d\mu(x) = \int_Y \bar{f}^-(y) d\nu(y) \leq \|f\|_{L^1(Y, \nu)} < +\infty$ et $\int_X \bar{f}^+(T(x)) d\mu(x) = \int_Y \bar{f}^+(y) d\nu(y) \leq \|f\|_{L^1(Y, \nu)} < +\infty$, d'où

$$\int_Y \bar{f}(y) d\nu(y) = \int_X \bar{f}(T(x)) d\mu(x).$$

□

Lemme B-5. Soient $(X, \mathcal{T}(X), \mu)$ et $(Y, \mathcal{T}(Y), \nu)$ deux espaces mesurés non-vides. Soit un opérateur mesurable $T : (X, \mathcal{T}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{T}(Y))$ poussant la mesure μ sur la mesure ν , i.e. $T\#\mu = \nu$.

Alors, pour toute fonction $f \in L^\infty(Y, \mathcal{T}(Y), \nu)$, on a $f \circ T \in L^\infty$ (et donc la classe d'équivalence par égalité μ -presque partout $f \circ T$ est bien définie), avec $\|f \circ T\|_{L^\infty(X, \mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)}$.

Si de plus ν est une mesure finie sur Y , alors pour tout $f \circ T \in L^\infty$, on a

$$\int_X f(T(x)) d\mu(x) = \int_Y f(y) d\nu(y).$$

Preuve : Par hypothèse, pour tout ensemble mesurable $E \in \mathcal{T}(Y)$ tel que $\nu(E) = 0$, on a $\mu(T^{-1}(E)) = \nu(E) = 0$. Ainsi, d'après le lemme B-1, la classe d'équivalence par égalité μ -presque partout de fonctions mesurables $f \circ T$ est bien définie^a

Pour montrer que $f \circ T \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mu)$, et plus précisément que $\|f \circ T\|_{L^\infty(X, \mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)} < +\infty$, il suffit de démontrer que pour tout représentant \bar{f} de la classe f , et μ -presque tout $x \in X$, on a $|\bar{f}(T(x))| \leq \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)}$.

C'est en effet le cas puisque par définition de $L^\infty(Y, \nu)$, on a

$$0 = \nu\left(\bar{f}^{-1}\left(\left] \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)}, +\infty \right]\right)\right) = \underbrace{\mu\left(T^{-1}\left(\bar{f}^{-1}\left(\left] \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)}, +\infty \right]\right)\right)\right)}_{=\mu\left((\bar{f} \circ T)^{-1}\left(\left] \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)}, +\infty \right]\right)\right)} = 0.$$

Supposons maintenant que la mesure ν soit finie sur Y . On a alors, pour tout $f \in L^\infty(Y, \nu)$ et tout représentant \bar{f} de f , on a

$$\begin{aligned} \int_Y |f(y)| d\nu(y) &= \int_{Y \setminus \bar{f}^{-1}\left(\left] \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)}, +\infty \right]\right)} |\bar{f}(y)| d\nu(y) \leq \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)} \nu\left(Y \setminus \bar{f}^{-1}\left(\left] \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)}, +\infty \right]\right)\right) \\ &= \|f\|_{L^\infty(Y, \nu)} \nu(Y) < +\infty, \end{aligned}$$

i.e. $f \in L^1(Y, \nu)$ et donc, d'après le lemme B-4, on a

$$\int_Y \bar{f}(y) d\nu(y) = \int_X \bar{f}(T(x)) d\mu(x).$$

□

B.1.2 Espace métrique $(L^{d, M}, d_\infty)$

Lemme B-6. L'espace métrique $(L^{d, M}, d_\infty)$ est propre : tout sous-ensemble non-vide borné est relativement compact. En particulier, cela implique que l'espace $(L^{d, M}, d_\infty)$ est localement compact.

Preuve : Tout d'abord, remarquons que l'ensemble $(L^{d, M}, d_\infty)$ est un sous-espace fermé de $(C([0, 1], \mathbb{R}^d), d_\infty)$ de fonctions équicontinues (car toutes M -lipschitziennes).

Soit A un sous-ensemble borné non-vide de $(L^{d, M}, d_\infty)$, et qui peut donc être considéré comme un sous-ensemble borné non-vide de $(C([0, 1], \mathbb{R}^d), d_\infty)$: l'espace d'arrivée \mathbb{R}^d étant de dimension finie, les sous-ensembles bornés

a. i.e. pour tous représentants \bar{f}_1 et \bar{f}_2 de la classe d'équivalence ν -presque partout désignée par f , on a bien $(\bar{f}_1 \circ T)(x) = (\bar{f}_2 \circ T)(x)$ pour μ -presque tout $x \in X$.

$A(t) = \{\gamma(t), \gamma \in A\}$ pour tout $t \in [0, 1]$ sont relativement compacts.

Nous pouvons donc appliquer le théorème d'Ascoli et en conclure que A est relativement compact dans $(C([0, 1], \mathbb{R}^d), d_\infty)$ et donc dans $(L^{d,M}, d_\infty)$ (du fait que $(L^{d,M}, d_\infty)$ soit fermé dans $(C([0, 1], \mathbb{R}^d), d_\infty)$).

□

Lemme B-7. *Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction définie par $\pi_t : (L^{d,M}, d_\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ est 1-lipschitzienne, et donc borélienne.*

Preuve : Immédiate par définition de d_∞ : pour tout $t \in [0, 1]$, et pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in L^{d,M}$, on a

$$|\pi_t(\gamma_2) - \pi_t(\gamma_1)| = |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| \leq \sup_{s \in [0, 1]} |\gamma_2(s) - \gamma_1(s)| = \|\gamma_2 - \gamma_1\|_\infty = d_\infty(\gamma_1, \gamma_2).$$

□

B.2 Définitions et résultats pour la preuve de la proposition 3-1

Nous rappelons l'énoncé des théorème de Fubini-Tonelli et de Radon-Nikodym :

Théorème B-2 (Théorème de Fubini-Tonelli [32]). *Soient (X, \mathcal{A}, μ) et (Y, \mathcal{B}, ν) deux espaces mesurés σ -finis. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $X \times Y$, et mesurable relativement à $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.*

- Pour tout $x \in X$, on définit sur Y la fonction $y \mapsto f_x(y) = f(x, y)$.
- Pour tout $y \in Y$, on définit sur X la fonction $x \mapsto f^y(x) = f(x, y)$.

Les assertions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $x \in X$, f_x est mesurable relativement à \mathcal{B} et, pour tout $x \in X$, f^y est mesurable relativement à \mathcal{A} .
2. Si $0 \leq f \leq +\infty$, alors, en posant pour tous $x \in X$ et $y \in Y$,

$$\Phi(x) = \int_Y f_x d\nu, \quad \text{et} \quad \Psi(y) = \int_X f^y d\mu, \tag{B-7}$$

la fonction Φ est mesurable relativement à \mathcal{A} et la fonction Ψ est mesurable relativement à \mathcal{B} . De plus

$$\int_X \Phi d\mu = \int_{X \times Y} f (d\mu \otimes d\nu) = \int_Y \Psi d\nu. \tag{B-8}$$

3. Si f est une fonction à valeurs complexes et si l'on a

$$\int_X \Phi^* d\mu < +\infty \quad \text{avec} \quad \Phi^*(x) = \int_Y |f_x| d\nu \quad \text{pour tout } x \in X,$$

ou bien

$$\int_Y \Psi^* d\nu < +\infty \quad \text{avec} \quad \Psi^*(y) = \int_X |f^y| d\mu \quad \text{pour tout } y \in Y,$$

alors $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$.

4. Si $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$, alors $f_x \in L^1(\nu)$ pour presque tout $x \in X$ et $f^y \in L^1(\mu)$ pour presque tout $y \in Y$. De plus, si l'on définit Φ et Ψ comme dans les relations (B-7) (définies donc ici seulement pour, respectivement presque tout $x \in X$ et presque tout $y \in Y$), alors Φ et Ψ appartiennent respectivement à $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$. De plus, la relation (B-8) est toujours vérifiée par Φ et Ψ .

Définition B-4. *Soit (X, \mathcal{T}) un espace mesurable, et soient ν et μ deux mesures positives sur (X, \mathcal{T}) . On dit que la mesure μ est **absolument continue** par rapport à la mesure ν (ce que l'on notera $\mu \ll \nu$) si pour tout $A \in \mathcal{T}$ tel que $\nu(A) = 0$, on a également $\mu(A) = 0$.*

Théorème B-3 (Théorème de Radon-Nikodym (version restreinte) [32]). *Soit (X, \mathcal{T}) un espace mesurable, et soit ν une mesure positive σ -finie sur \mathcal{T} . Alors pour toute mesure positive μ sur (X, \mathcal{T}) absolument continue par rapport à ν , il existe une unique (à égalité ν -presque partout près) fonction $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ positive et mesurable sur (X, \mathcal{T}) telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mu(A) = \int_A h d\nu. \tag{B-9}$$

On peut étendre ce résultat aux mesures signées^a : si μ est une mesure signée sur (X, \mathcal{T}) , il existe une unique (à égalité ν -presque partout près) fonction $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable telle que la relation (B-9) soit vérifiée. En passant aux classes d'équivalence par quotient de la relation d'égalité ν -presque partout, on peut donc tout simplement dire que $h \in L^1(X, \mathcal{T}, \nu)$.

Définition : On dit alors que h représente la **densité** de la mesure μ par rapport à la mesure ν .

a. Et même aux mesures complexes ou vectorielles.

B.2.1 Résultats de concentrations

Lemme B-8. Soit une mesure positive borélienne μ , non nulle, sur un espace métrique séparable (X, d) , et soit U un ouvert de X . Si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ et $\mu(B(x, r)) = 0$, alors $\mu(U) = 0$.

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense de X (séparable par hypothèse) : la famille d'ouverts $(B(x_n, 2^{-k}))_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est alors une base de voisinage dénombrable de X .

Soit $x \in U$: sous l'hypothèse de l'énoncé, il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ et $\mu(B(x, r)) = 0$. On peut donc choisir $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-k} < r/2$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B(x_n, 2^{-k})$ par densité de la suite $(x_n)_n$ dans X : d'où $B(x_n, 2^{-k}) \subset B(x, r)$, avec donc également $0 = \mu(B(x, r)) \geq \mu(B(x_n, 2^{-k})) \geq 0$, d'où $\mu(B(x_n, 2^{-k})) = 0$.

On a donc $U \subset \bigcup_{(n,k) \in J} B(x_n, 2^{-k})$, où

$$J = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \exists (x, r) \in X \times \mathbb{R}_{++} \mid r \in \text{RadVan}(x) \text{ et } B(x_n, 2^{-k}) \subset B(x, r)\},$$

où on définit $\text{RadVan}(x) = \{r > 0, B(x, r) \subset U \text{ et } \mu(B(x, r)) = 0\}$ pour tout $x \in X$. Par définition, on a donc $\mu(B(x_n, 2^{-k})) = 0$ pour tout $(n, k) \in J$. Ainsi

$$\mu(U) \leq \mu\left(\bigcup_{(n,k) \in J} B(x_n, 2^{-k})\right) \leq \sum_{(n,k) \in J} \mu(B(x_n, 2^{-k})) = 0$$

(par σ -additivité de la mesure). D'où $\mu(U) = 0$.

□

Définition B-5. Soit $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$ un espace topologique non vide, et soit μ une mesure borélienne (et positive) sur $(X, \mathcal{T}_{op}(X))$. On définit $\text{Supp}(\mu)$, le **support de la mesure** μ , comme le complémentaire de la réunion de tous les ouverts dont la mesure par μ est nulle. Autrement dit

$$\text{Supp}(\mu) = X \setminus \left[\bigcup_{U \in \mathcal{T}_{op}^0(X)} U \right],$$

où $\mathcal{T}_{op}^0(X) = \{U \in \mathcal{T}_{op}(X), \mu(U) = 0\}$.

Lemme B-9. Soit une mesure positive borélienne μ , non nulle, sur un espace métrique séparable (X, d) . Alors il existe $x \in X$ tel que, pour tout $r > 0$, on ait $\mu(B(x, r)) > 0$.

Plus précisément :

$$X \setminus \text{Supp}(\mu) = \{x \in X, \exists r > 0, \mu(B(x, r)) = 0\},$$

i.e. pour tout $x \in \text{Supp}(\mu)$, on a $\mu(B(x, r)) > 0$ pour tout $r > 0$.

De plus $\mu(X \setminus \text{Supp}(\mu)) = 0$.

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense de X (séparable par hypothèse) : la famille d'ouverts $(B(x_n, 2^{-k}))_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est alors une base de voisinage dénombrable de X .

Soit $\mathcal{T}_{op}^0(X)$ l'ensemble des ouverts U de (X, d) pour lesquels on a $\mu(U) = 0$. Montrons tout d'abord que $X \setminus \text{Supp}(\mu) \in \mathcal{T}_{op}^0(X)$.

Par définition de $\text{Supp}(\mu)$, on a

$$X \setminus \text{Supp}(\mu) = \bigcup_{U \in \mathcal{T}_{op}^0(X)} U.$$

Soit $x \in X \setminus \text{Supp}(\mu)$ (si $X \setminus \text{Supp}(\mu) \neq \emptyset$) : il existe donc $U \in \mathcal{T}_{op}^0(X)$ tel que $x \in U$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ (d'où $0 \leq \mu(B(x, r)) \leq \mu(U) = 0$, i.e. $X \setminus \text{Supp}(\mu) \subset \{x \in X, \exists r > 0, \mu(B(x, r)) = 0\}$).

On peut donc choisir $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-k} < r/2$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B(x_n, 2^{-k})$ par densité de la suite $(x_n)_n$ dans X : d'où $B(x_n, 2^{-k}) \subset B(x, r)$, avec donc également $0 = \mu(U) \geq \mu(B(x, r)) \geq \mu(B(x_n, 2^{-k})) \geq 0$, d'où $\mu(B(x_n, 2^{-k})) = 0$, et ceci pour tout $x \in X \setminus \text{Supp}(\mu)$.

On a donc $X \setminus \text{Supp}(\mu) \subset \bigcup_{(n,k) \in J} B(x_n, 2^{-k})$, où

$$J = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \exists U \in \mathcal{T}_{op}^0(X), B(x_n, 2^{-k}) \subset U\}.$$

Du fait que $\mu(B(x_n, 2^{-k})) = 0$ pour tout $(n, k) \in J$, on a ainsi :

$$\mu(X \setminus \text{Supp}(\mu)) \leq \mu \left(\bigcup_{(n,k) \in J} B(x_n, 2^{-k}) \right) \leq \sum_{(n,k) \in J} \mu(B(x_n, 2^{-k})) = 0$$

(par σ -additivité de la mesure). D'où $\mu(X \setminus \text{Supp}(\mu)) = 0$ et ainsi $X \setminus \text{Supp}(\mu) \in \mathcal{T}_{op}^0(X)$.

Pour finir, si $x \in X$ est tel qu'il existe un rayon $r > 0$ pour lequel $\mu(B(x, r)) = 0$, on a alors $B(x, r) \in \mathcal{T}_{op}^0(X)$ et ainsi $B(x, r) \subset X \setminus \text{Supp}(\mu)$, d'où $\{x \in X, \exists r > 0, \mu(B(x, r)) = 0\} \subset X \setminus \text{Supp}(\mu)$ i.e. $\{x \in X, \exists r > 0, \mu(B(x, r)) = 0\} = X \setminus \text{Supp}(\mu)$.

Par contraposée, on a donc bien $\mu(B(x, r)) > 0$ pour tout $x \in \text{Supp}(\mu)$ et pour tout $r > 0$.

□

B.2.2 Changement de variable polaire

Définition B-6. On définit \mathcal{L}_S^{d-1} la décomposition sphérique de la mesure de Lebesgue sur la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} munie de sa tribu de la borélienne trace $\mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}_S^{d-1}$ (où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ désigne la tribu borélienne sur \mathbb{R}^d), c'est à dire la tribu borélienne sur \mathbb{S}^{d-1} munie de la topologie trace $\mathcal{T}(\mathbb{S}^{d-1}) = \mathcal{T}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}_S^{d-1}$, où $\mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ désigne la topologie euclidienne sur \mathbb{R}^d .

Plus précisément, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$, on a

$$\mathcal{L}_S^{d-1}(A) = d\mathcal{L}^d(\varphi^{-1}(A) \cap \overline{B(0,1)}),$$

où φ est définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par $\varphi(x) = \frac{x}{|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Formulé autrement : $\mathcal{L}_S^{d-1} = \varphi\#(d\mathbb{1}_{\overline{B(0,1)}}\mathcal{L}^d)$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$.

Remarque B-3. Remarquons que comme \mathbb{S}^{d-1} muni de la métrique euclidienne induite de \mathbb{R}^d est un espace métrique propre (et même compact), donc séparé et localement compact, on peut considérer via le théorème B-1 (théorème de Riesz) que \mathcal{L}_S^{d-1} est une mesure de Radon sur $(\mathbb{S}^{d-1}, \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1}))$.

En effet, la forme linéaire

$$f \mapsto d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x) d[\varphi\#(d\mathbb{1}_{\overline{B(0,1)}})] = \int_{\overline{B(0,1)}} f\left(\frac{y}{|y|}\right) dy$$

est bien définie et positive sur $C_c(\mathbb{S}^{d-1})$. De plus, comme $\mathcal{L}_S^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) = \mathcal{L}^d(\overline{B(0,1)}) < +\infty$, \mathcal{L}_S^{d-1} est une mesure finie sur $(\mathbb{S}^{d-1}, \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1}))$.

Lemme B-10 (Changement de variable polaire). En notant $t^{d-1}\mathcal{L}$ la mesure sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ (où $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ désigne la tribu borélienne canonique de \mathbb{R}_+) résultant du produit de la fonction $t \mapsto t^{d-1}$ et de la mesure de Lebesgue \mathcal{L} (sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$), et en définissant la fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec $\psi(t, \theta) = t\theta$, on a $\mathcal{L}^d = \psi\#[(t^{d-1}\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}_S^{d-1}]$.

Remarque B-4. Si l'on reformule le lemme B-10, d'après la proposition B-1 et les théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}} f(t\theta) d[(t^{d-1}\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}_S^{d-1}](t, \theta) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} t^{d-1} f(t\theta) d\mathcal{L}_S^{d-1}(\theta) dt \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}_+} t^{d-1} f(t\theta) dt d\mathcal{L}_S^{d-1}(\theta), \end{aligned}$$

que ce soit pour une fonction f borélienne positive sur \mathbb{R}^d ou continue à support compact sur \mathbb{R}^d .

Preuve du lemme B-10 : Définissons la mesure $\mu = \psi\#[(t^{d-1}\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}_S^{d-1}]$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (tribu borélienne de \mathbb{R}^d) et montrons que $\mu = \mathcal{L}^d$.

Nous pouvons considérer que μ est une mesure de Radon d'après le théorème B-1 (théorème de Riesz) : en effet, la forme linéaire

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f d[\psi\#[(t^{d-1}\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}_S^{d-1}]] = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}} f(t\theta) d[(t^{d-1}\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}_S^{d-1}](t, \theta)$$

est bien définie et positive sur $C_c(\mathbb{R}^d)$, et donc peut prendre pour μ la mesure de Radon (et extérieurement régulière) donnée par ce théorème.

Rappelons que la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par $\varphi(x) = \frac{x}{|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, pour tout $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(x) &= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}} f(\psi(t, \theta)) d[(t^{d-1} \mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}_S^{d-1}](t, \theta) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{d-1}} t^{d-1} f(t\theta) d\mathcal{L}_S^{d-1}(\theta)}_{= d \int_{\overline{B(0,1)}} t^{d-1} f(t\varphi(y)) dy} dt \quad \leftarrow \text{(Fubini-Tonelli)} \\
&= d \int_{\overline{B(0,1)}} \int_{\mathbb{R}_+} t^{d-1} f\left(\frac{ty}{|y|}\right) dy dt \\
&= d \int_{\overline{B(0,1)}} \int_{\mathbb{R}_+} |y| (s|y|)^{d-1} f\left(\frac{(s|y|)y}{|y|}\right) ds dy \quad \leftarrow \text{(Fubini-Tonelli + changement de variable } t \leftarrow s|y|) \\
&= d \int_{\overline{B(0,1)}} \int_{\mathbb{R}_+} |y|^d s^{d-1} f(sy) ds dy \\
&= d \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\overline{B(0,1)}}(y) |y|^d s^{d-1} f(sy) dy ds \quad \leftarrow \text{(Fubini-Tonelli)} \\
&= d \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{s^d} \mathbb{1}_{\overline{B(0,1)}}\left(\frac{z}{s}\right) \left|\frac{z}{s}\right|^d s^{d-1} f\left(s \frac{z}{s}\right) dz ds \quad \leftarrow \text{(Changement de variable } y \leftarrow z/s) \\
&= d \int_{\mathbb{R}^d} |z|^d f(z) \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\overline{B(0,1)}}\left(\frac{z}{s}\right) \frac{1}{s^{d+1}} ds dz.
\end{aligned}$$

Pour tout $s > 0$ et tout $z \in \mathbb{R}^d$, on a $\mathbb{1}_{\overline{B(0,1)}}\left(\frac{z}{s}\right) = \mathbb{1}_{[|z|, +\infty[}(s)$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \underbrace{\mathbb{1}_{\overline{B(0,1)}}\left(\frac{z}{s}\right)}_{= \mathbb{1}_{[|z|, +\infty[}(s)} \frac{1}{s^{d+1}} ds = \int_{|z|}^{+\infty} \frac{1}{s^{d+1}} ds = -\frac{1}{d} \left[\frac{1}{s^d}\right]_{|z|}^{+\infty} = \frac{1}{d|z|^d}.$$

On peut donc conclure que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu(x) = d \int_{\mathbb{R}^d} |z|^d f(z) \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\overline{B(0,1)}}\left(\frac{z}{s}\right) \frac{1}{s^{d+1}} ds}_{= \frac{1}{d|z|^d}} dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) dz,$$

et ceci pour tout $f \in C_c^+(\mathbb{R}^d)$, d'où $\mu = \mathcal{L}^d$ a

□

B.2.3 Résultats de concentration sur les cônes

Lemme B-11. Soit une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, avec $a < b$ vérifiant, pour tout $t \in [a, b[$:

$$\liminf_{s \rightarrow t^-} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \leq 0.$$

Alors f est décroissante sur $[a, b]$.

Preuve : Raisonnons par l'absurde, et supposons que f ne soit pas décroissante : autrement dit, supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in [a, b]$, tels que $t_1 < t_2$ et tels que $f(t_1) < f(t_2)$. On définit la fonction continue $g : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour

a. En effet, sur un espace topologique X non-vide, séparé, localement compact et σ -compact, une mesure de Radon signée μ est nulle si et seulement si on a $\int_X f d\mu \geq 0$ pour toute fonction $f \in C_c^+(X)$. On peut trouver une preuve de ce résultat dans notre synthèse de cours plusieurs fois évoquée : <https://amubox.univ-amu.fr/s/w9pc6xJdXafYPic>

tout $t \in [a, b[$ par $g(t) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}(t_2 - t) - (f(t_2) - f(t))$. On a alors bien sûr $g(t_1) = g(t_2) = 0$.

On a alors $g \leq 0$: en effet, si l'on avait $\max g > 0$ (g étant continue sa borne supérieure serait atteinte sur $]t_1, t_2[$), il existerait $t_0 \in]t_1, t_2[$ tel que $g(t_0) = \max g > 0$. Ainsi, pour tout $t \in]t_1, t_0[$, on aurait $g(t_0) \geq g(t)$ et donc

$$0 \leq \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = -\frac{1}{t - t_0} \left(\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}(t - t_0) + (f(t) - f(t_0)) \right) = -\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} + \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

D'où $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ pour tout $t \in]t_1, t_0[$, et donc

$$\liminf_{s \rightarrow t_0^-} \frac{f(s) - f(t_0)}{s - t_0} \geq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} > 0,$$

ce qui contredirait l'hypothèse de l'énoncé du lemme qui affirme que $\liminf_{s \rightarrow t_0^-} \frac{f(s) - f(t_0)}{s - t_0} \leq 0$.

Ainsi, on a $g(t) \leq 0$ pour tout $t \in [t_1, t_2[$, et donc $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{f(t_2) - f(t)}{t_2 - t}$, pour tout $t \in [t_1, t_2[$. Par conséquent, on a

$$0 < \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \liminf_{s \rightarrow t_2^-} \frac{f(t_2) - f(s)}{t_2 - s} \leq 0,$$

ce qui est de nouveau contradictoire. □

Définition B-7. Soit f une fonction borélienne sur \mathbb{R}^d . On appelle "point de Lebesgue" de f tout point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pour lequel on a :

$$\frac{1}{\mathcal{L}^d(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} |f(x_0) - f(x)| d\mathcal{L}^d(x) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0.$$

Remarque B-5. Sous les hypothèses de la définition B-7, si x_0 est un point de Lebesgue de f , alors

$$\left| f(x_0) - \frac{1}{\mathcal{L}^d(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} f(x) d\mathcal{L}^d(x) \right| \leq \frac{1}{\mathcal{L}^d(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} |f(x_0) - f(x)| d\mathcal{L}^d(x) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0.$$

$$i.e. f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^d(B(x_0, r))} \int_{B(x_0, r)} f(x) d\mathcal{L}^d(x).$$

Théorème B-4 (Théorème de différentiation de Lebesgue [31]). Soit f une fonction borélienne et intégrable sur \mathbb{R}^d . Alors \mathcal{L}^d -presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$ est un point de Lebesgue de f .

Autrement dit, il existe un borélien E vérifiant :

- $\mathcal{L}^d(E) = 0$.
- Tous les points de $\mathbb{R}^d \setminus E$ sont des points de Lebesgue de f .

Lemme B-12. Soit f une fonction borélienne, positive et intégrable sur \mathbb{R}^d . Alors, pour \mathcal{L}_S^{d-1} -presque tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ et \mathcal{L} -presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t\theta$ est un point de Lebesgue de la fonction f , i.e.

$$f(t\theta) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^d(B(t\theta, r))} \int_{B(t\theta, r)} f(x) d\mathcal{L}^d(x).$$

Preuve : On sait d'après le théorème B-4 qu'il existe un borélien E vérifiant $\mathcal{L}^d(E) = 0$ et tel que tous les points de $\mathbb{R}^d \setminus E$ soient des points de Lebesgue de f .

La fonction $(t, \theta) \mapsto t\theta$ étant continue sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ (pour la topologie induite) et la fonction $\mathbb{1}_E$ étant par définition borélienne sur \mathbb{R}^d , la fonction $(t, \theta) \mapsto t^{d-1} \mathbb{1}_E(t\theta)$ est donc également borélienne sur $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$. Ainsi, d'après le théorème de Fubini-Tonelli, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ la fonction $t \mapsto t^{d-1} \mathbb{1}_E(t\theta)$ est borélienne sur \mathbb{R}_+ , et pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $\theta \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_E(t\theta) dt$ est borélienne sur \mathbb{S}^{d-1} . De plus, le lemme B-10 de changement de variable polaire, et plus précisément la remarque B-4, nous donnent la relation suivante :

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}_+} t^{d-1} \mathbb{1}_E(t\theta) dt d\mathcal{L}_S^{d-1}(\theta) = \int_{\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+} t^{d-1} \mathbb{1}_E(t\theta) d[\mathcal{L}_S^{d-1} \otimes \mathcal{L}](\theta, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_E(x) dx = \mathcal{L}^d(E) = 0.$$

Ainsi, pour \mathcal{L}_S^{d-1} -presque tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a $\int_{\mathbb{R}_+} t^{d-1} \mathbb{1}_E(t\theta) d\mathcal{L}(t) = 0$, c'est à dire que pour un tel θ , on a $t^{d-1} \mathbb{1}_E(t\theta) = 0$ pour \mathcal{L} -presque tout $t \in \mathbb{R}_{++}$, i.e. $\mathbb{1}_E(t\theta) = 0$, i.e. $t\theta \notin E$.

En d'autres termes, \mathcal{L}_S^{d-1} -presque tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, et pour \mathcal{L} -presque tout $t \in \mathbb{R}_{++}$, $t\theta$ est un point de Lebesgue de f . □

Lemme B-13. *Soit $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{L})$ une fonction positive telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_{++}$ il existe $r_t \in]0, t[$ tel que f soit \mathcal{L} -presque partout nulle sur $[t - r_t, t]$. Alors f est \mathcal{L} -presque partout nulle sur \mathbb{R}_+ .*

Preuve : Considérons la fonction positive continue $F : t \mapsto \int_0^t f(s) ds$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_{++}$, et pour tout $s \in]t - r_t, t$, on a $\frac{F(s) - F(t)}{s - t} = 0$ et donc $\liminf_{s \rightarrow t^-} \frac{F(s) - F(t)}{s - t} = 0$. D'après le lemme B-11, la fonction F est décroissante sur \mathbb{R}_+ . De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_{++}$, et pour tout $s \in]0, t]$, on a $F(s) \geq F(t)$, d'où $0 = \lim_{s \rightarrow 0^+} F(s) \geq F(t) \geq 0$, i.e. la fonction F est uniformément nulle sur \mathbb{R}_+ , i.e. f est \mathcal{L} -presque partout nulle sur \mathbb{R}_+ . □

Définition B-8. *Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $r > 0$ et $0 < \lambda < 1$: on définit $CT(v, \lambda, x, r)$ le cône tronqué ouvert de la façon suivante :*

$$CT(v, \lambda, x, r) = B(x, r) \cap \{y \in \mathbb{R}^d, \langle v, y - x \rangle > \lambda |v| \cdot |y - x|\}.$$

Lemme B-14 (Concentration de masse au sommet d'un cône orienté^a). *Soit une mesure positive borélienne μ non nulle et finie sur \mathbb{R}^d telle que $\mu \ll \mathcal{L}^d$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et soit $0 < \lambda < 1$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$ tel que, pour tout $r > 0$, on ait $\mu(CT(x_0 - x, \lambda, x, r)) > 0$.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $r > 0$ tels que $\mu(CT(x_0 - x, \lambda, x, r)) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{x_0\}$, on définit l'ensemble $\text{RadTronVan}(x)$ (non vide par hypothèse) de la façon suivante :

$$\text{RadTronVan}(x) = \{r \in \mathbb{R}_{++}, \mu(CT(x_0 - x, \lambda, x, r)) = 0\}.$$

Remarquons que pour tout $r \in \text{RadTronVan}(x)$ et pour tout $0 < r' \leq r$, on a également $r' \in \text{RadTronVan}(x)$. On définit $r(x) = \min\{1, (1/2) \sup \text{RadTronVan}(x)\}$. On a bien sûr $r_x \in \text{RadTronVan}(x)$.

Soit h un \mathcal{L}^d -représentant (positif) de la densité de la mesure μ par rapport à la mesure de Lebesgue donné par le théorème B-3 de Radon-Nikodym (h est intégrable du fait que μ est finie). D'après le lemme B-12, pour \mathcal{L}_S^{d-1} -presque tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, le point $t\theta$ est un point de Lebesgue de $h(x_0 + \cdot)$ pour \mathcal{L} -presque tout $t \in \mathbb{R}_{++}$. Considérons un tel $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$: pour tout $t \in \mathbb{R}_{++}$ et pour \mathcal{L} -presque tout $s \in]t - r(x_0 + t\theta), t]$, $x_0 + s\theta$ est un point de Lebesgue de h .

Remarquons que pour tout $r > 0$, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $]x_0 + (t-r)\theta, x_0 + t\theta[\subset CT(x_0 - x, \lambda, x_0 + t\theta, r)$. Ainsi, pour presque tout $s \in]t - r(x_0 + t\theta), t]$, on a $x_0 + s\theta \in CT(-t\theta, \lambda, x_0 + t\theta, r(x_0 + t\theta))$, il existe $r' > 0$ tel que $B(x_0 + s\theta, r') \subset CT(-t\theta, \lambda, x_0 + t\theta, r(x_0 + t\theta))$, d'où $\mu(B(x_0 + s\theta, r')) = 0$. Ainsi, pour \mathcal{L}_S^{d-1} -presque tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_{++}$, et pour \mathcal{L} -presque tout $s \in]t - r(x_0 + t\theta), t]$, le point $x_0 + s\theta$ est un point de Lebesgue de h et donc

$$h(x_0 + s\theta) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^d(B(x_0 + t\theta, r))} \int_{B(x_0 + t\theta, r)} h(x) dx = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B(x_0 + t\theta, r))}{\mathcal{L}^d(B(x_0 + t\theta, r))} = 0.$$

Ainsi, pour \mathcal{L}_S^{d-1} -presque tout $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, la fonction $h_\theta : t \mapsto t^{d-1} h(x_0 + t\theta)$ est borélienne sur \mathbb{R}_+ (d'après le théorème de Fubini-Tonelli) et vérifie les conditions du lemme B-13, à savoir que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ il existe $r_t > 0$ (en choisissant $r_t = r(x_0 + t\theta)$) tel que f soit \mathcal{L} -presque partout nulle sur $[t - r_t, t]$. Ainsi, h_θ est \mathcal{L} -presque partout nulle sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème de Fubini-Tonelli, la fonction positive $\theta \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} h_\theta(t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} t^{d-1} h(x_0 + t\theta) dt$ est borélienne sur \mathbb{S}^{d-1} (elle est donc \mathcal{L}_S^{d-1} -presque partout nulle sur \mathbb{S}^{d-1}). D'après le théorème de Fubini-Tonelli, le lemme B-10 et la remarque B-4 sur le changement de variable polaire, on a

$$\mu(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} h(x_0 + y) dy = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} t^{d-1} h(x_0 + t\theta) dt}_{=0 \text{ } \mathcal{L}_S^{d-1}\text{-p.p.}} d\mathcal{L}_S^{d-1}(\theta) = 0.$$

Ceci contredit l'hypothèse que la mesure μ est non nulle. Le raisonnement par l'absurde nous amène donc à confirmer le résultat de l'énoncé. □

a. Remerciements à Antonin Monteil du LAMA (UPEC) pour m'avoir débloqué la preuve de ce résultat !

B.2.4 Autres

Lemme B-15. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^d tel que $\mathcal{L}^d(\Omega) > 0$. On définit alors l'ensemble $\Omega' = \text{Supp}(\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d)$ (borélien car fermé).

Alors $\Omega' \subset \Omega$, $\Omega' = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d)$ et $\mathcal{L}^d(\Omega') = \mathcal{L}^d(\Omega)$.

Preuve : Le support $\text{Supp}(\mu)$ d'une mesure μ borélienne positive sur \mathbb{R}^d correspond à l'intersection de tous les fermés F tels que $\mu(\mathbb{R}^d \setminus F) = 0$, et tel que $\text{Supp}(\mu)$ vérifie lui-même $\mu(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mu)) = 0$.

Ici, on a bien sûr $(\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d \setminus \Omega) = 0$, d'où $\Omega' = \text{Supp}(\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d) \subset \Omega$. De même, on a $\text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d) \subset \Omega' \subset \Omega$. On a donc :

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d)) &= \mathcal{L}^d(\Omega \setminus \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d)) \\ &= \underbrace{\mathcal{L}^d(\Omega \setminus \Omega')}_{(\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d \setminus \Omega')} + \underbrace{\mathcal{L}^d(\Omega' \setminus \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d))}_{(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d))} \\ &= \underbrace{(\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d \setminus \Omega')}_{(\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d))=0} + \underbrace{(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d))}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\Omega' = \text{Supp}(\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d) \subset \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d)$, d'où $\Omega' = \text{Supp}(\mathbb{1}_{\Omega'} \mathcal{L}^d)$.

De plus, comme $\mathcal{L}^d(\Omega \setminus \Omega') = (\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d \setminus \Omega') = (\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d \setminus \text{Supp}(\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}^d)) = 0$, on a donc

$$\mathcal{L}^d(\Omega) = \underbrace{\mathcal{L}^d(\Omega \setminus \Omega')}_{=0} + \mathcal{L}^d(\Omega') = \mathcal{L}^d(\Omega').$$

□

Remarque B-6. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d est régulière, et donc en particulier intérieurement régulière : pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d$ non vide vérifiant $\mathcal{L}^d(A) < +\infty$, on a

$$\mathcal{L}^d(A) = \sup\{\mathcal{L}^d(K), K \subset A, K \text{ compact}\}.$$

Ainsi, si $\mathcal{L}^d(A) > 0$, il existe un compact $K \subset A$ tel que $\mathcal{L}^d(K) > 0$.

Définition B-9. Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré. On définit sur \mathcal{T} la relation $\overset{\mu}{\approx}$ suivante : pour $A, B \in \mathcal{T}$,

$$A \overset{\mu}{\approx} B \iff \mu(A \setminus B) = 0 \text{ et } \mu(B \setminus A) = 0.$$

La relation $\overset{\mu}{\approx}$ est une relation d'équivalence sur \mathcal{T} .

Preuve : La réversibilité et la symétrie sont évidentes. Montrons la transitivité de la relation $\overset{\mu}{\approx}$: supposons $A, B, C \in \mathcal{T}$ tels que $A \overset{\mu}{\approx} B$ et $B \overset{\mu}{\approx} C$, montrons qu'alors $A \overset{\mu}{\approx} C$. On a

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A \cap (X \setminus C)) = \underbrace{\mu((A \setminus B) \cap (X \setminus C))}_{\leq \mu(A \setminus B)} + \mu(A \cap B \cap (X \setminus C)) \leq \underbrace{\mu(A \setminus B)}_{=0} + \mu(A \cap B \cap (X \setminus C)) = \mu(A \cap B \cap (X \setminus C)),$$

et

$$\mu(B \setminus C) = \mu(B \cap (X \setminus C)) = \underbrace{\mu((B \setminus A) \cap (X \setminus C))}_{\leq \mu(B \setminus A)} + \mu(B \cap A \cap (X \setminus C)) \leq \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{=0} + \mu(B \cap A \cap (X \setminus C)) = \mu(A \cap B \cap (X \setminus C)).$$

D'où $\mu(A \setminus C) = \mu(A \cap B \cap (X \setminus C)) = \mu(B \setminus C) = 0$. On peut montrer de même que $\mu(C \setminus A) = 0$, et donc que $A \overset{\mu}{\approx} C$.

□

Définition B-10. Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré muni de la relation d'équivalence $\overset{\mu}{\approx}$. On définit sur \mathcal{T} la relation $\overset{\mu}{\prec}$ suivante : pour $A, B \in \mathcal{T}$,

$$A \overset{\mu}{\prec} B \iff \mu(A \setminus B) = 0.$$

La relation $\overset{\mu}{\prec}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble \mathcal{T}_μ , c'est à dire l'espace \mathcal{T} quotienté par les classes d'équivalences de $\overset{\mu}{\approx}$.

Preuve : La réversibilité est évidente, de même que l'anti-symétrie dans \mathcal{T}_μ^μ : si $A \stackrel{\mu}{\prec} B$ et $B \stackrel{\mu}{\prec} A$, on a par définition $A \stackrel{\mu}{\approx} B$. Pour ce qui est de la transitivité, de même que dans la définition précédente : si l'on suppose $A, B, C \in \mathcal{T}$ tels que $A \stackrel{\mu}{\prec} B$ et $B \stackrel{\mu}{\prec} C$, i.e. $\mu(A \setminus B) = 0$ et $\mu(B \setminus C) = 0$, alors

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A \cap (X \setminus C)) = \underbrace{\mu((A \setminus B) \cap (X \setminus C))}_{\leq \mu(A \setminus B)} + \underbrace{\mu(A \cap B \cap (X \setminus C))}_{\leq \mu(B \cap (X \setminus C))} \leq \underbrace{\mu(A \setminus B)}_{=0} + \underbrace{\mu(B \cap (X \setminus C))}_{=\mu(B \setminus C)} = \mu(B \setminus C) = 0,$$

d'où $\mu(A \setminus C) = 0$, i.e. $A \stackrel{\mu}{\prec} C$. □

Lemme B-16. Soit (X, \mathcal{T}) un espace mesurable, et soient μ et ν deux mesures positives sur (X, \mathcal{T}) telles que $\nu \ll \mu$. Alors, pour tous ensembles $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $A \stackrel{\mu}{\approx} B$, on a $A \stackrel{\nu}{\approx} B$.

Preuve : Bien sûr, sachant que $\nu \ll \mu$, si $\mu(A \cap B) = 0$, alors $\nu(A \cap B) = 0$, et si $\mu(B \cap A) = 0$, alors $\nu(B \cap A) = 0$. □

Lemme B-17. Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré (μ étant une mesure positive), et soient $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $A \stackrel{\mu}{\approx} B$. Alors pour tout $C \in \mathcal{T}$, on a $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$ (en particulier $\mu(A) = \mu(B)$).

Preuve : Pour de tels ensembles A, B et C , on a

$$\mu(A \cap C) = \mu(A \cap C \setminus B) + \mu(A \cap C \cap B) = \mu(A \cap C \setminus B) - \mu(B \cap C \setminus A) + \mu(B \cap C),$$

sachant que $0 \leq \mu(A \cap C \setminus B) \leq \mu(A \setminus B) = 0$ et $0 \leq \mu(B \cap C \setminus A) \leq \mu(B \setminus A) = 0$, d'où $\mu(A \cap C \setminus B) = \mu(B \cap C \setminus A) = 0$, et donc $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$. □

Lemme B-18. Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré (μ étant une mesure positive), et soient $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $A \stackrel{\mu}{\prec} B$. Alors pour tout $C \in \mathcal{T}$, on a $\mu(A \cap C) \leq \mu(B \cap C)$ (en particulier $\mu(A) \leq \mu(B)$).

Preuve : Pour de tels ensembles A, B et C , on a

$$\mu(A \cap C) = \underbrace{\mu(A \cap C \setminus B)}_{\leq \mu(A \setminus B)} + \underbrace{\mu(A \cap C \cap B)}_{\leq \mu(B \cap C)} \leq \underbrace{\mu(A \setminus B)}_{=0} + \mu(B \cap C) = \mu(B \cap C).$$

□

Lemme B-19. Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré (μ étant une mesure positive), et soient $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $A \stackrel{\mu}{\prec} B$. Alors $\mu(A) = \mu(A \cap B)$.

Preuve : Pour de tels ensembles A et B on a $\mu(A) = \underbrace{\mu(A \setminus B)}_{=0} + \mu(A \cap B) = \mu(A \cap B)$. □

C Formulation eulérienne du problème : preuve formelle

Cette petite annexe a pour objectif de montrer de façon quelque peu formelle l'équivalence entre la version lagrangienne du transport optimal dissipatif traité dans ce rapport et sa version eulérienne telle qu'introduite de façon succincte dans la section d'introduction ((1-2) et 1-1), et un peu plus précisément en 5-6 dans la section des conclusions et perspectives (sous-sous-section 5.2.1). Elle n'a donc pas pour objectif de poser des bases rigoureuses pour cette formulation et cette équivalence.

Comme dans la sous-sous-section 5.2.1, on suppose que :

- La fonction ζ est une fonction de classe C^1 , strictement convexe telle que $\zeta(0) = 0$.
- On a choisi $a \in \mathbb{R}^d$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Supp}(\mu_0) \cup \text{Supp}(\mu_1) \subset B(a, M/2)$.
- On a choisi les mesures de Radon (positives) μ_0 et μ_1 telles que $\text{supp}(\mu_0) \cap \text{supp}(\mu_1) = \emptyset$ et que $\mu_0 \ll \mathcal{L}^d$.

Soit $\omega \in \mathcal{M}_+(L^{d,M})$. Supposons qu'il existe un champ de vitesse borélien intégrable v sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^d$ tel que pour ω -presque tout $\gamma \in L^{d,M}$, on ait $\gamma'(t) = v(t, \gamma(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$.

On note μ la mesure borélienne sur $]0, 1[\times \mathbb{R}^d$, définie par $\mu_\omega(A) = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(t, x) d\mu_\omega^t(x) \right) dt$ pour tout borélien A de $[0, 1] \times \mathbb{R}^d$. On rappelle que d'après le théorème de Fubini-Tonelli (voir [32]), l'application $x \mapsto \mathbb{1}_A(t, x)$ est borélienne pour tout $t \in [0, 1]$.

Le couple (v, μ_ω) vérifie alors au sens des distributions la contrainte de dissipation suivante :

$$\partial_t \mu_\omega + \operatorname{div}_x (v \mu_\omega) = -\zeta(|v|) \mu_\omega.$$

En effet, pour toute fonction test $\varphi \in C_c^1([0, 1] \times \mathbb{R}^d)$, on a (en se basant notamment sur la proposition B-1 et le théorème de Fubini) :

$$\begin{aligned} & - \langle \partial_t \mu_\omega + \operatorname{div}_x (v \mu_\omega) + \zeta(|v|) \mu_\omega, \varphi \rangle \\ &= \int_{]0, 1[\times \mathbb{R}^d} [\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi - \zeta(|v|) \varphi] d\mu_\omega \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} [\partial_t \varphi(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla_x \varphi(t, x) - \zeta(|v(t, x)|) \varphi(t, x)] d\mu_\omega^t(x) dt \\ &= \int_0^1 \int_{L^{d,M}} [\partial_t \varphi(t, \gamma(t)) + v(t, \gamma(t)) \cdot \nabla_x \varphi(t, \gamma(t)) - \zeta(|v(t, \gamma(t))|) \varphi(t, \gamma(t))] e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) dt \\ &= \int_0^1 \int_{L^{d,M}} [\partial_t \varphi(t, \gamma(t)) + \gamma'(t) \cdot \nabla_x \varphi(t, \gamma(t)) - \zeta(|\gamma'(t)|) \varphi(t, \gamma(t))] e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) dt \\ &= \int_0^1 \int_{L^{d,M}} \left[\frac{d}{dt} [\varphi(t, \gamma(t))] - \zeta(|\gamma'(t)|) \varphi(t, \gamma(t)) \right] e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) dt \\ &= \int_0^1 \int_{L^{d,M}} \frac{d}{dt} [\varphi(t, \gamma(t)) e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds}] d\omega(\gamma) dt \\ &= \int_{L^{d,M}} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} [\varphi(t, \gamma(t)) e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds}] dt \right) d\omega(\gamma) \quad (\text{Fubini}) \\ &= \int_{L^{d,M}} \varphi(1, \gamma(1)) e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) - \int_{L^{d,M}} \varphi(0, \gamma(0)) d\omega(\gamma) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\varphi(1, x)}_{=0} d\mu_\omega^1(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\varphi(0, x)}_{=0} d\mu_\omega^0(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\omega) &= \int_{L^{d,M}} \left(1 - e^{-\int_0^1 \zeta(|\gamma'(s)|) ds}\right) d\omega(\gamma) = - \int_{L^{d,M}} \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} \right] dt d\omega(\gamma) \\
&= \int_{L^{d,M}} \int_0^1 \zeta(|\gamma'(t)|) e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} dt d\omega(\gamma) \\
&= \int_{L^{d,M}} \int_0^1 \zeta(|v(t, \gamma(t))|) e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} dt d\omega(\gamma) \\
&= \int_0^1 \int_{L^{d,M}} \zeta(|v(t, \gamma(t))|) e^{-\int_0^t \zeta(|\gamma'(s)|) ds} d\omega(\gamma) dt \quad (\text{Fubini}) \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(|v(t, x)|) d\mu_\omega^t(x) dt \\
&= \int_{]0,1[\times \mathbb{R}^d} \zeta(|v|) d\mu_\omega.
\end{aligned} \tag{C-1}$$