



**HAL**  
open science

# L'enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives ?

Lalina Coulange

► **To cite this version:**

Lalina Coulange. L'enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives ?. De la linguistique à l'épistémographie., 2019. hal-02514474

**HAL Id: hal-02514474**

**<https://hal.science/hal-02514474>**

Submitted on 22 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## L'enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives ?

*Lalina Coulange*

Jean-Philippe Drouhard et moi avons eu l'occasion (qui me paraît aujourd'hui encore douloureusement récente) de travailler ensemble en tant que rédacteurs invités par Jean-Luc Dorier et Aline Robert de l'ouvrage collectif – (Coulange, Drouhard, Dorier et Robert 2012). Je garde un souvenir particulièrement ému de cette collaboration avec Jean-Philippe, qui nous avait donné l'envie de recréer de nouvelles occasions de retravailler ensemble et de faire dialoguer nos entrées complémentaires en didactique de l'algèbre élémentaire...

Cet ouvrage recouvrait pour nous un véritable enjeu : celui de constituer un bilan d'étape des travaux conduits dans ce champ – constitué autour de collectifs d'auteurs et d'une variété d'entrées théoriques possibles dans ce domaine de recherche en didactique des mathématiques. En cela, Jean-Philippe était un interlocuteur idéal, du fait de son intelligence « en mouvement », qui favorisait plus que d'autres, les rencontres de points de vue ou d'approches didactiques, les collectifs de pensée et de travail scientifique... Ma relecture personnelle et actualisée de cet ouvrage est particulière. Plus que le bilan que l'œuvre est censée constituer, j'entrevois de nombreuses perspectives ouvertes pour de nouvelles recherches en didactique de l'algèbre, et plus particulièrement – celles liées aux petits cailloux du chemin de *Hansel* ou du *Petit Poucet* (Drouhard et Panizza 2012) ou à l'approche épistémographique de Drouhard (2012). Ma contribution vise à en partager quelques-unes – comme des exemples possibles – en lien avec les différentes approches représentées dans cet ouvrage de référence.

### Programme de calcul et Sens en didactique de l'algèbre ?

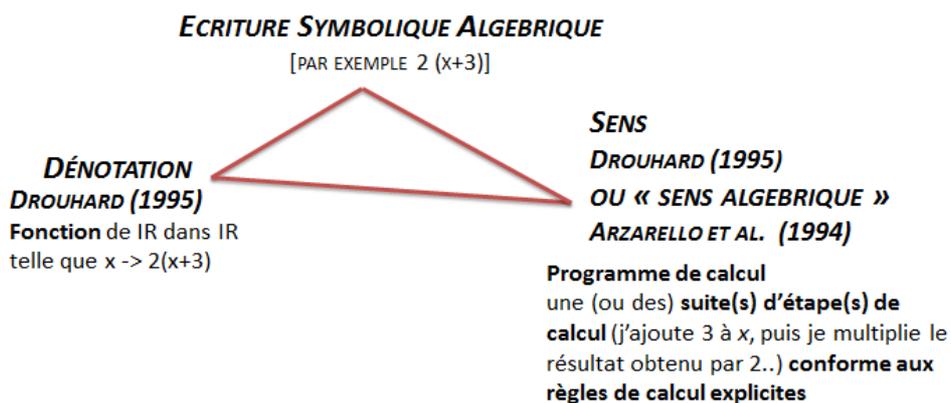
*Les Programmes de Calcul* (que nous désignerons PC par la suite) prennent une place particulièrement centrale dans les travaux conduits dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique – et ils figurent dès lors largement dans les contributions de plusieurs auteurs dans l'ouvrage collectif (Chevallard & Bosch 2012 ; Assude, Coppé et Pressiat 2012, Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch, & Gascón, 2012). Les chercheurs en didactique des mathématiques (dont les auteurs cités auparavant) situent l'origine des PC dans les travaux de Drouhard (1995). Vu l'importance que les PC ont pris dans certains travaux en didactique de l'algèbre, on est à même de s'étonner que l'objet en question n'apparaisse pas comme fondamental dans l'article concerné : les programmes de calcul apparaissent tout juste dans une note de bas de page du texte cité !

### *Sens d'une Expression Symbolique Algébrique*

Resituons brièvement le contexte de cette apparition. C'est en lien avec le triptyque emprunté à Frege (1881/1971, 1892) – repris par de nombreux auteurs (Arzarello, Bazzini & Chiappini 2012 ; Drouhard et Panizza 2012 ; Bardini 2012) en parlant du sens (*sinn*) d'une *Expression Symbolique Algébrique* (que nous désignerons ESA par la suite) c'est-à-dire au mode de donation de cette ESA que Drouhard (1995) parle de PC :

Nous avons ici [s'agissant du sens d'une ESA] un point de contact avec l'écriture considérée comme un « programme de calcul », au travers de la théorie des *expressions* qui prolonge les travaux de Frege. (op. cité, p. 38)

Cette acception du sens par Frege qui conduit Drouhard (1995) à parler pour la première fois de Programme de Calcul, se rapproche de ce que Arzarello et al. (1994) appellent le « sens algébrique » d'une ESA, c'est-à-dire « *the very way which the denoted is obtained by the means of computational rules* » (op. cite, p. 111).



*Figure 1. Sens d'une ESA et PC*

Ces chercheurs ont davantage centré leurs travaux sur d'autres aspects sémantiques des ESA : relativement à la dénotation, aux sens contextualisés (Arzarello et al. 1994) ou aux interprétations dans des cadres mathématiques (Drouhard et Panizza 2012) ainsi qu'aux connotations (Drouhard 1995). Ainsi Drouhard et Panizza (2012) mettent-ils d'ailleurs le lecteur en garde contre une réduction potentielle du sémantique (et même du sens !) au seul PC.

Le sens tel que Frege le définit présente des analogies avec un *programme de calcul* (Drouhard 1995, 1999) : « pour obtenir 13, ajouter 1 à 5 puis 7 » ; pour obtenir le faux ajouter 1 à 5 et l'égaliser à 7 ». Il nous semble toutefois qu'il faut se garder d'assimiler le sens au seul programme de calcul, car cela reviendrait à réduire toute la complexité de l'acte cognitif de « donner du sens » à un simple calcul, autrement dit réduirait l'élève à une sorte de machine à calculer. À plus forte raison, réduire toute la richesse de la sémantique de l'algèbre (dénotation, connotation et interprétations incluses) aux seuls programmes de calcul nous semble un réductionnisme un peu brutal. (Drouhard et Panizza 2012, p. 218).

### *Programme de Calcul*

Chevallard et Bosch (2012) en citant Drouhard (1995) affirment qu'une expression algébrique « exprime » une entité, qui n'est autre qu'un PC.

[...] une « expression algébrique » est un énoncé symbolique qui exprime un certain programme de calcul. L'expression algébrique  $E(x) = 15x - 3(x+1)$  exprime un programme de calcul  $\Pi$  dont une expression « rhétorique » est la suivante : « multiplier le nombre donné par quinze puis retrancher au nombre obtenu, le triple du successeur du nombre donné. » (op. cité, p. 28)

La définition ainsi donnée se réfère aux travaux de Drouhard, mais me paraît porteuse de plusieurs différences.

D'une part, suivant Assude et al. (2012), Chevallard (2007) parle d'un couple Expression Algébrique et Programme de Calcul et non d'un triplet ESA-Dénotation-Sens (PC), comme les auteurs cités auparavant, en référence aux travaux de Frege.

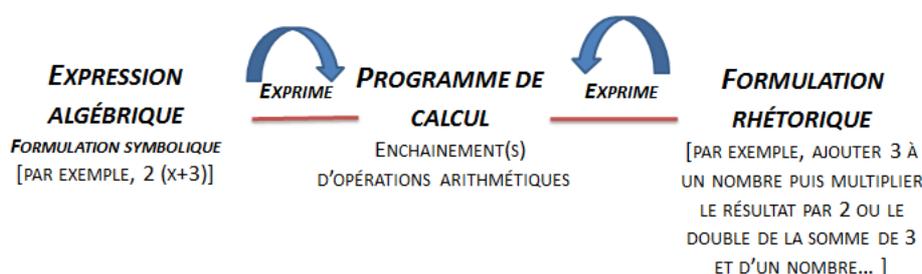


Figure 2. PC – Expression algébrique et Expression rhétorique

D'autre part, toujours d'après Assude et al. (2012), Chevallard (ibid.) parle d'une « expression rhétorique » de l'objet PC, sans pour autant le réduire à cette seule expression. Dans cette acception, le PC recouvre plus que des problèmes rhétoriques du type « *choisis un nombre, multiplie le par 5, puis ajoute 4 au résultat obtenu* » (op. cité, p. 46). Ces auteurs précisent les relations entre l'objet PC et le champ des « *problèmes arithmétiques scolaires* », un PC arithmétique étant une « *chaîne structurée et hiérarchisée, permettant de résoudre tous les problèmes d'un même type* » (Assude et al. 2012 citant Chevallard 2007, p. 46) – ce qui inscrit les PC dans la perspective de modélisation algébrique ouverte par la Théorie Anthropologique du Didactique.

### *Sens d'une ESA et PC ?*

Le Programme de Calcul ne remplit pas les mêmes fonctions, ni n'occupe pas la même place au sein de la théorie anthropologique du didactique et de l'approche sémio-linguistique ou épistémographique.

Toutefois, d'après l'ensemble des auteurs cités auparavant, il existe bien une entité théorique correspondant au *sens* (algébrique) d'une ESA ou *exprimée* par elle. D'autre part, cette entité théorique ne se résume pas à des formulations rhétoriques du type « on prend un nombre, etc. ». Notons d'ailleurs que d'autres auteurs comme Bardini (2012) et Douek et Morselli (2012) parlent de situation ou de problèmes type « pense à un nombre » (que Bardini rapproche du volet algorithmique de la traduction des écritures symboliques de Widmann) - et non de programmes de calcul.

Et si finalement – tout comme Drouhard et Panizza (2012) nous le signalent en positionnant la question des registres de représentation sémiotique au cœur d'une approche épistémographique (Drouhard 2012), la clé réside précisément dans le fait de s'intéresser aux spécificités de l'expression rhétorique d'un PC ou autrement dit, au registre discursif de représentation sémiotique d'une ESA – aux propriétés de ce registre de représentation ?

### *Un type de registre discursif ou rhétorique en algèbre*

On peut effectivement considérer le registre discursif associé aux problèmes ou aux situations « pense à un nombre... » comme un type de registre discursif de représentation sémiotique au sens de Duval (1993), ou comme une représentation au sens de Brousseau (2004) – repris par Mercier (2012), c'est-à-dire comme un registre de pratiques en lien avec des situations didactiques.

Ce type de registres a sans nul doute des potentialités particulières du fait de sa proximité avec le sens d'une ESA et aussi en ce qu'il constitue un premier pas (nécessaire ?) vers la dénotation, ce que la théorie anthropologique permet d'appréhender d'une autre façon - avec la question de l'équivalence de formulation rhétoriques de programmes de calcul (Assude et al. 2012 ; Ruiz-Munzon et al. 2012).

Toutefois il a aussi ses limites signalées entre autres, par Bardini (2012) – comme la primauté de l'inconnue imposée dans la lecture séquentielle imposée par ce type de registre discursif.

Mais ce sont aussi ces limites qui permettent de contribuer à faire émerger et à donner du sens à la représentation et/ou au registre de représentation algébrique. La contribution à l'ouvrage de Douek et Morselli (2012) – se situant dans un autre cadre (à partir des travaux

sur la rationalité d'Habermas 2001) montre précisément comment les fonctionnalités du langage algébrique (Boero 2011) apparaissent en prise d'appui sur l'expression des limites du registre discursif. En cela, ce travail, comme d'autres, illustre d'ailleurs bien cette remarque conclusive de Drouhard et Panizza (2012) que « l'articulation des registres est le problème, mais c'est aussi la solution ; la mise en œuvre des conversions amène en effet à identifier et expliciter ce qui est implicite. »

Comme le montrent Douek et Morselli (2012) ou Mercier (2012) dans un autre exemple, ce type de situations « en prise d'appui sur le registre discursif », nécessitent toutefois d'élargir le cadre de l'activité algébrique afin de prendre en charge la rationalité épistémique de certains élèves, qui peut paraître *a priori* éloignée des savoirs algébriques « classiques » – mais qui s'avère pourtant propice à dévoiler d'autres potentialités de ces savoirs<sup>18</sup>.

Ce point me conduit à formuler, toujours en appui sur ma relecture personnelle de l'œuvre collective – une remarque d'un niveau bien plus général, en lien avec une tension qui m'apparaît comme particulièrement heuristique dans les travaux de didactique de l'algèbre élémentaire – et particulièrement présente dans l'approche épistémographique développée par Drouhard (2012).

## Entre objectivation et subjectivation et/ou contextualisation

Il me semble en effet qu'en filigrane de l'œuvre collective (et particulièrement dans les exemples donnés dans les deux contributions qui viennent d'être citées) apparaissent des tensions entre l'objectivation et la subjectivation (par rapport au sujet) ou la contextualisation (par rapport à un cadre, un domaine, une (ou des) situation(s) ...) des connaissances et des savoirs algébriques. Bardini (2012) signale d'ailleurs sur cette tension, dans sa réaction à l'issue du deuxième volet de l'ouvrage en revenant sur la référence à Frege (1881/1971) :

Sous le prisme de la subjectivité, nous pouvons envisager une certaine hiérarchie entre ces trois composantes. À une extrémité du spectre se situe la représentation d'un signe, laquelle est entièrement subjective ; elle est inhérente et datée. C'est l'« image » que le sujet se fait à propos du signe en question [...]. La dénotation est au contraire entièrement objective car c'est l'objet même désigné par ce signe. Entre les deux se situe le sens du signe qui n'a pas un caractère subjectif et qui n'est pas non plus l'objet lui-même. (op. cité p. 336).

Cette tension heuristique entre ce qui permet d'*objectiver* les savoirs, ou les objets algébriques à travers des dimensions à la fois sémantiques et syntaxiques – ce qui permet de les *contextualiser* (*via* des interprétations, des représentations ou des « sens contextualisés »...) – et ce qui permet de les *subjectiver* (*via* la connotation, différents types

---

<sup>18</sup> Notons qu'il y aurait d'ailleurs de ce point de vue un rapprochement intéressant à faire entre ces deux contributions de ce point de vue : entre la proposition de l'élève surnommé Tor (Douek et Morselli 2012) et celle des élèves qui réécrivent  $x + 5y$  en  $x + y + 4y$  pour pouvoir substituer une valeur numérique à  $x + y$  (Mercier 2012). Des pratiques rationnelles d'élèves ainsi données à voir semblent apparentées à une pratique algébrique – au rôle méconnu : la substitution (voir à ce sujet la contribution de Constantin dans ce même ouvrage).

de rationalités, la reconnaissance de labels...) me semble au cœur des travaux de didactique de l'algèbre élémentaire d'une part – mais aussi et c'est en cela qu'il était précurseur – de Drouhard (1995).

J'aime ainsi à penser que Jean-Philippe aurait aimé discuter et échanger avec moi à partir de mon schéma « brouillon du jour » à l'issue de ma relecture de l'ouvrage (à voir comme un outil pour cheminer et non comme une figure synthétique d'une quelconque pensée organisée et définitive...) :

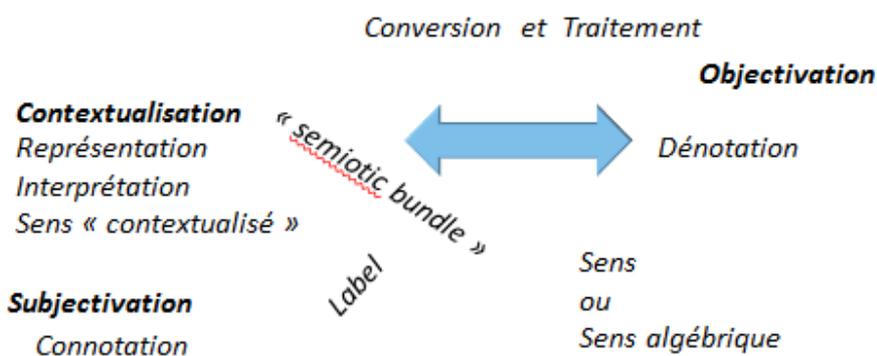
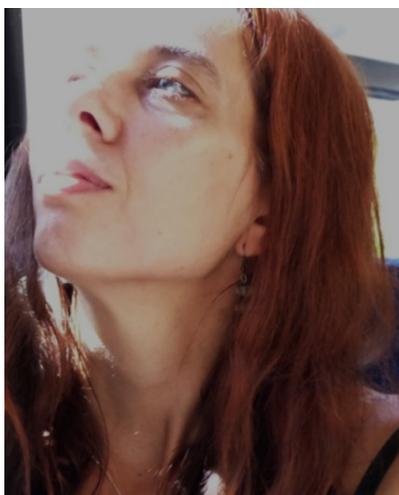


Figure 3. Un schéma « brouillon » - tension entre objectivation et subjectivation / contextualisation

## Et bien d'autres petits cailloux ... à suivre

A défaut de conclure – j'aime à penser que nous saurons collectivement, suivre les petits cailloux de Hansel ou du Petit Poucet, laissés par Jean-Philippe – pour aider les élèves à mieux identifier et expliciter ce qui est implicite, en algèbre...



## Bibliographie

- Assude T., Coppé S., Pressiat A. (2012) Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques* H-S RDM, 41–62.
- Arzarello F., Bazzini, L., Chiappini G.P. (1994) Intensional Semantics as a Tool to Analyze Algebraic thinking. In Arzarello F., Gallo E. (Eds), *Proceedings of the International Workshop on Algebraic Learning*, 105-125.
- Arzarello F., Bazzini, L., Chiappini G.P. (2012) A theoretical model to analyze Algebraic Thinking and its application in school activities, In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques* H-S RDM, 193–207.
- Bardini C. (2012) Décoder, accompagner et favoriser la construction de concepts algébriques et leurs représentations, In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques* H-S RDM, 327–346.
- Boero P. (2011) Les domaines d'expérience dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques : lier le travail scolaire à l'expérience des élèves. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P., Vandebrouck F., Wozniak F. (Eds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la XV<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques*. 109-148.
- Chevallard Y. (2007) Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007.  
[http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id\\_article=141](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=141)
- Chevallard Y., Bosch M. (2012) L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques* H-S RDM, 9–40.
- Brousseau G. (2004) Les représentations, étude en théorie des situations didactiques, *Revue des sciences de l'éducation* 30(2) 241–277.  
<http://www.erudit.org/revue/rse/2004/v30/n2/012669ar.html>
- Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (2012) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques*, H-S, RDM.
- Douek N. Morselli M. (2012), Preuve et algèbre au collège : de la conception d'une séquence d'apprentissage à l'évolution du cadre théorique de référence In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques* H-S RDM, 284–304.
- Drouhard J-P. (1995) Algèbre, calcul symbolique et didactique. In Noirfalise R., Perrin-Glorian M-J. (Eds), *Actes de la 8<sup>ème</sup> école d'été de la didactique des mathématiques*, 325-344.
- Drouhard J-P. (2012) L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. In Abboud-Blanchard M., Flückiger M. (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques – année 2011*, 129-133.
- Drouhard J-P., Panizza M. (2012) Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques* H-S RDM, 209-235.
- Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Mercier A. (2012) Vous avez dit « algèbre » ? In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 163–180.

Ruiz-Munzon N., Matheron Y., Bosch M., Gascon J. (2012) Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrique-fonctionnelle. In Coulange L., Drouhard JP., Dorier JL., Robert A. (Eds) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques H-S RDM*, 87 –106.