



**HAL**  
open science

## Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux - potentialités

Christine Chambris, Lalina Coulange, Anne-Marie Rinaldi, Grégory Train<sup>2</sup>

### ► To cite this version:

Christine Chambris, Lalina Coulange, Anne-Marie Rinaldi, Grégory Train<sup>2</sup>. Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux - potentialités. Hamid Chaachoua; Annie Bessot; Berta Barquero; Lalina Coulange; Gisèle Cirade; Pierre Job; Anne-Cécile Mathé; André Pressiat; Maggy Schneider; Fabrice Vandebrouck. Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure., 2, La pensée sauvage, pp.373-395, 2021, ISBN 978 2 859 193485. hal-02514378

**HAL Id: hal-02514378**

**<https://hal.science/hal-02514378>**

Submitted on 7 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Christine Chambris, Lalina Coulange, Anne-Marie Rinaldi, Grégory Train. (2021) Unités (relatives) pour les nombres et le calcul à l'école. Vers un état des lieux - potentialités. Hamid Chaachoua, Annie Bessot, Berta Barquero, Lalina Coulange, Gisèle Cirade, Pierre Job, Anne-Cécile Mathé, André Pressiat, Maggy Schneider, Fabrice Vandebrouck (éds.). *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure.*, 2, La pensée sauvage, pp.373-395, 2021, ISBN 978 2 859 193485.

## UNITÉS (RELATIVES) POUR LES NOMBRES ET LE CALCUL À L'ÉCOLE : VERS UN ÉTAT DES LIEUX - POTENTIALITÉS

Christine Chambris<sup>\*</sup>, Lalina Coulange<sup>\*\*</sup>, Anne-Marie Rinaldi<sup>\*\*\*</sup>, Grégory Train<sup>\*\*\*\*</sup>

### RÉSUMÉ

En articulation étroite avec le cours de Christine Chambris, ce texte présente trois études complémentaires dans le champ de l'enseignement-apprentissage des nombres et du calcul à l'école. La première porte sur les difficultés rencontrées dans la mise en œuvre d'un projet d'enseignement d'une technique de calcul soustractif par troncature et sur les raisons de ces difficultés, en relation avec la technologie de cette technique concernant la numération et les unités de ce domaine. La deuxième porte sur l'analyse de la mise en œuvre d'un projet d'enseignement qui se propose d'articuler numération et système métrique en introduisant un tableau mixte de numération et de conversion. La troisième étude, qui a un caractère plus prospectif, porte sur des savoirs qui interviennent dans l'enseignement ou l'apprentissage de la multiplication et qui sont mal mis en évidence. Ces trois études révèlent l'importance d'un objet commun : les unités *relatives*. Dans chacune des études, on étudie des potentialités de ces unités, du double point de vue praxéologique et écologique, ainsi que les conditions dans lesquelles ces unités relatives vivent effectivement dans l'institution.

Mots clefs : calcul additif, champ multiplicatif, grandeurs, unités, unités relatives.

### ABSTRACT

In close articulation with Christine Chambris' course, this text presents three complementary studies in the field of the teaching-learning of numbers and arithmetic at school. The first deals with the difficulties encountered in the implementation of a project to teach a technique of subtractive calculation by truncation and the reasons for these difficulties, in relation to the technology of this technique concerning the numeration and the units of this domain. The second is an analysis of the implementation of a teaching project that aims to articulate numeration and the metric system by introducing a mixed table of numeration and conversion. The third study, which is more prospective in nature, deals with poorly highlighted knowledge involved in the teaching or learning of multiplication. These three studies reveal the importance of a common object: relative units. In each of the studies, the potentialities of these units are studied, from both praxeological and ecological points of view, as well as the conditions in which these relative units actually live in the institution.

Key words: additive calculation, multiplicative field, quantities, relative units, units.

## INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Le cours (Chambris, 2021) a mis en évidence, dans certaines institutions d'enseignement, des unités d'un type particulier, les *unités relatives*. En effet, si on considère une grandeur  $G$ , toute valeur de grandeur de  $G$  peut être une unité. Soit  $u$  une valeur de grandeur de  $G$  qu'on choisit comme unité. Nous l'appelons l'unité simple. Soit  $n$  un entier supérieur à 1, soit  $v$  la valeur de grandeur telle que  $v = nu$ . On considère  $v$  comme une nouvelle unité, on dira que  $v$  est une unité relative à  $u$ . De même, si  $G$  est divisible, soit  $w$  la valeur de grandeur telle que  $nw = u$ . La valeur de grandeur  $w$  décrit une autre famille d'unités relatives à  $u$ , les  $n$  quantième de  $u$ . Enfin, la définition de la multiplication a fait apparaître une nouvelle famille d'unités relatives à  $u$  : soit  $a/b$  une fraction,  $w$  telle que  $w = a/b u$ ,  $w$  est une unité relative à  $u$ . De ces définitions, il s'ensuit qu'unité simple et unité qui lui est relative sont de la même espèce.

Des potentialités des unités relatives dans plusieurs domaines de savoir et leur utilisation effective dans certaines institutions (parfois uniquement de recherche) ont été présentées dans le cours : pour définir les unités en numération avant la réforme des mathématiques modernes

---

<sup>\*</sup> CY Cergy Paris Université, Laboratoire de didactique André Revuz (UA, UPD, UPEC, URN) EA4434

<sup>\*\*</sup> Université de Bordeaux, Laboratoire Épistémologie et Didactiques des Disciplines EA7441

<sup>\*\*\*</sup> Université Paul Valéry Montpellier 3, Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation EA 3749

<sup>\*\*\*\*</sup> Université de Bordeaux, Laboratoire Épistémologie et Didactiques des Disciplines EA7441

(Chambris, 2008, 2018), comme objet intermédiaire pour introduire les fractions (Cortina et al., 2014), pour définir la multiplication en Chine (Ma & Kessel, 2018).

Par la suite, dans ce texte, l'institution de référence est l'école élémentaire en France, aujourd'hui. Les travaux de Chambris (2008, 2010, 2018, 2021) ont montré que les grandeurs ont disparu de la composante théorique des praxéologies de l'arithmétique de l'école dans le curriculum réformé de 1970 pour les nombres et les quatre opérations. Toutefois, les unités de numération semblent avoir continué à vivre de 1970 jusqu'à la modification du savoir de référence pour la numération dans les années 1980.

En effet, les praxéologies qui impliquent les différents ordres d'unités sont pour partie conservées et l'habitat numération et calcul est potentiellement suffisamment important pour qu'elles puissent y vivre isolément. Les différents ordres d'unités pour la numération qui survivent dans le programme de 1970 disparaissent à leur tour au moment de la contre-réforme (1977-1980).

Quoi qu'il en soit, des *traces* des unités qui relèvent de l'ensemble vaste des unités relatives apportées par les grandeurs sont visibles dans les programmes qui se sont succédé depuis 1970 : les *unités* du système métrique ; le « tableau de numération » qui comporte une colonne des *unités*, des *dizaines*, des *centaines*, etc. et différentes *classes*, la classe des *unités simples*, la classe des *milliers*, etc. ; et la troncature (cf. cours) associée ou non à l'utilisation de ce tableau.

Ce texte comporte trois parties qui reprennent globalement l'organisation de l'atelier. Son but est d'étudier les traces de ces unités relatives dans l'enseignement actuel (à l'école élémentaire ou au début du collège), tant au plan de leur écologie que des praxéologies qu'elles embarquent potentiellement ou effectivement.

Les deux premières parties présentent des études de cas sur les unités de numération à l'école élémentaire. La première est en lien avec l'enseignement-apprentissage du calcul mental soustractif sur les entiers ; le questionnement praxéologique permet de mieux comprendre l'écologie des unités. La seconde se situe dans le champ des décimaux en lien avec l'enseignement-apprentissage des unités métriques, avec un regard particulier sur les praxéologies qui se développent dans la classe eu égard à cet objet. L'étude de cas présentée dans la troisième partie permet d'aborder les unités dans le champ multiplicatif pour les nombres entiers et non entiers. Cette troisième partie a également une dimension écologique mais la réflexion praxéologique qui est amorcée est plus prospective que dans les deux parties précédentes.

### UNITÉS EN NUMÉRATION DES ENTIERS ET CALCUL SOUSTRACTIF

Dans cette partie, pour étudier comment les unités relatives vivent en numération dans l'institution scolaire, nous nous intéressons à la troncature. Par exemple, la troncature à la centaine de 34 567 est 345 centaines. Cette troncature a pour propriété principale de fournir une décomposition du nombre,  $34\,567 = 345 \text{ centaines } 67 \text{ unités}$ , en unités relatives (dans le système d'unités, centaines, unités simples). Nous appelons cette propriété principale, propriété de la troncature.

Au sein de l'institution de recherche, nous pouvons définir des potentialités de la troncature et caractériser les composantes de la ou des praxéologies ponctuelles que nous lui attachons :

- Un discours technologico-théorique justifiant la troncature et sa propriété est proposé dans le cours.
- Des habitats potentiels pour la troncature sont : le dénombrement, le calcul additif et soustractif, l'ordre de grandeur, l'encadrement entre deux nombres d'unités

consécutifs, la multiplication et la division exacte ou euclidienne par les puissances de dix.

Malgré ces potentialités, des travaux antérieurs ont montré que cette propriété est peu maîtrisée par les élèves en fin de primaire. Par exemple, en fin de CM2 (élèves de 10-11 ans), sur un échantillon de 251 élèves, 21 % complètent correctement la phrase suivante : « Le nombre de centaines de 8 734 est... » ; 46 % la complètent avec le nombre 7 et 23 % avec 700 ou 734. Pour le problème contextualisé, « Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8 564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ? », sur un échantillon de 273 élèves, les réponses 85, 85,64 ou 86 paquets représentent 42 % de l'ensemble. Toutefois, seulement 22 % des élèves semblent tirer cette réponse de la troncature de 8 564 à la centaine et 1,5 % interprètent les centaines dans 8 m et 5 c. En revanche, 17 % de ces réponses semblent provenir de la division posée de 8 564 par 100 (voir Chambris, 2008, pp. 321-330).

Comment interpréter ces résultats ? Tendent-ils à montrer que la troncature et / ou sa propriété ne sont pas enseignées ou bien que cet enseignement pose problème ? Dans quelle mesure les potentialités évoquées sont-elles exploitées dans les classes ? Une hypothèse est que l'écologie de la troncature est dépendante de l'écologie des unités de numération : notamment dans l'hypothèse où les unités désignent des places, il y a peu d'expression des relations entre unités (par exemple  $1\text{ c} = 10\text{ d}$ ) et des nombres dans le registre des unités. L'enquête qui suit vise à éclairer ces questions, à travers deux études complémentaires, l'une relative à l'enseignement du calcul soustractif et l'autre relative à l'enseignement de la numération.

Le choix de nous intéresser à l'enseignement du calcul pour étudier le rapport institutionnel à la troncature remonte à des travaux antérieurs (Rinaldi & Chambris, 2019). Nous avons montré que, dans un dispositif d'enseignement du calcul soustractif en CE2, à la fin d'une séquence consacrée à « soustraire un multiple de dix » pour effectuer par exemple un calcul comme  $137 - 50$ , les élèves les plus fragiles n'utilisent pas la technique de calcul par troncature ( $13\text{ d} - 5\text{ d} = 8\text{ d}$ ) ; dans la phase de restitution, cette technique n'apparaît pas et l'enseignant met en avant un décomptage de 10 en 10 en appui sur la comptine numérique. Ce résultat constituait la première mise en évidence de l'effet de l'affaiblissement des unités de numération sur les praxéologies du calcul mental. Nous allons poursuivre l'investigation en revenant sur le déroulement de la première séance de cette séquence consacrée à soustraire des multiples de dix et analyser comment la propriété de la troncature vit côté élève et côté enseignant.

### *1. La propriété de la troncature pour effectuer un calcul soustractif (étude de cas)*

#### *Présentation du projet de recherche (Rinaldi, 2016)*

Dans le dispositif conçu par la chercheuse (Rinaldi, 2016) et expérimenté dans deux classes de CE2, les objectifs sont d'associer à un travail d'effectuation de calculs, un travail sur la réécriture de calculs qui va permettre de limiter, voire de mettre en défaut l'utilisation d'une technique basée sur le comptage ainsi que de décrire, expliquer et justifier la mise en œuvre de chaque technique au moyen des ostensifs suivants : droite numérique vide (DNV), écritures chiffrées (EC) et unités de numération (UN). La première séquence (trois séances) a pour objet de soustraire un nombre inférieur à dix. Elle a permis d'instituer deux techniques basées sur une décomposition du nombre duquel on soustrait ( $\tau_{1010}$ ) et ( $\tau_{1010}$ )' et une technique

séquentielle basée sur une décomposition du nombre que l'on soustrait ( $\tau_{A10}$ )<sup>1</sup>. Ces techniques et leurs notations sont présentées dans la thèse de Rinaldi (2016, p. 58, p. 100).

La seconde séquence, qui nous intéresse plus particulièrement, a pour objet de soustraire un multiple de dix. Ce type de tâches mobilise éventuellement les trois techniques précédentes et une technique supplémentaire ( $\tau_{CONV}$  : *ibid.*, p. 265) basée sur la propriété de la troncature, que nous appellerons technique de calcul par troncature. Les modalités de mise en œuvre de cette séquence sont identiques à celles expérimentées lors de la première séquence. Pour chaque séance, trois séries de quatre calculs sont données à chercher individuellement. Entre deux séries, un temps de restitution face au groupe classe est programmé. Pour chaque série, la consigne donnée aux élèves doit les amener à trouver le résultat du calcul et à décrire la technique qu'ils choisissent de mettre en œuvre.

Afin d'avoir une vision globale du déroulement de la première séance de la deuxième séquence, qui sert d'appui pour interroger la manière dont vivent la technique de calcul par troncature et sa technologie, nous recensons dans le tableau 1 les calculs donnés oralement pour chaque série et nous indiquons pour chacun d'entre eux le nombre de fois où la troncature a été utilisée, en précisant le nombre d'élèves interrogés au moment de la restitution correspondant au calcul.

1 <sup>re</sup> série donnée oralement	50 – 10	100 – 10	310 – 10	240 – 10
	troncature / total 1 / 6	troncature / total 0 / 1	troncature / total 1 / 3	troncature / total 1 / 2
2 <sup>e</sup> série donnée oralement	520 – 20	70 – 50	180 – 50	130 – 40
	troncature / total 1 / 3	troncature / total 0 / 1	troncature / total 1 / 1	troncature / total 1 / 2
3 <sup>e</sup> série donnée oralement	210 – 60	740 – 50	350 – 70	500 – 70
	troncature / total 0 / 2	troncature / total 0 / 1	troncature / total 0 / 1	troncature / total 0 / 1

**Tableau 1.** – Présence de la procédure par troncature dans les phases de restitution.

Le tableau 1 permet de voir que la technique de calcul par troncature est présente sur les deux premières séries de calculs alors que cette technique disparaît entièrement au niveau de la troisième série, au profit d'autres techniques de calculs<sup>2</sup>. Cette absence est peut-être due à un effet de circonstance au regard du peu d'élèves interrogés en fin de séance. Elle questionne cependant sur le rapport de l'enseignant à l'objet « troncature ». Pour attraper quelques éléments de réponse nous revenons chronologiquement sur les discours produits pendant la phase de restitution de la première série de calcul.

#### *À propos du calcul de cinquante moins dix (puis de deux-cent-quarante moins dix)*

Élève : J'ai enlevé une dizaine et ça fait quarante.

Enseignant : Tu savais que cinquante c'est cinq dizaines, moins une dizaine, cela fait quatre dizaines.

<sup>1</sup> Exemples de calcul : avec ( $\tau_{1010}$ )  $37 - 5 = 30 + 7 - 5 = 32$ , avec ( $\tau_{1010}$ )'  $32 - 7 = 20 + 12 - 7 = 25$ , avec ( $\tau_{A10}$ )  $32 - 7 = 32 - 2 - 5 = 25$ .

<sup>2</sup> Les élèves reprennent les techniques de calculs instituées dans la séquence précédente. Ils s'appuient souvent sur un schéma avec comme support la droite numérique vide. Par exemple, pour  $210 - 60$ , certains « partent » du nombre 210 et « marquent » un premier bond de 10 qui leur permet d'« arriver » à 200 puis un second bond qui leur permet d'arriver à 150. D'autres vont choisir également de « partir » de 210 mais « marquent » un premier bond de 30 pour arriver à 180 puis un second bond de 30 à partir de 180 pour « arriver » à 150. Une autre technique basée sur la compensation est également présente et donne les calculs suivants :  $350 - 70 = 350 - 100 + 30$ . Les élèves soustraient 100 au lieu de 70 au nombre 350 et compensent le manque.

Le discours de l'élève permet d'identifier que celui-ci sait que soustraire dix, c'est soustraire une dizaine. En revanche le discours de l'enseignant sous-entend que l'élève a réellement effectué la troncature de cinquante à la dizaine pour conduire son calcul sur un nombre de dizaines. Dans un calcul ultérieur, *deux-cent-quarante moins dix*, une technique proposée par un autre élève consiste à « faire vingt-quatre moins un. Cela fait vingt-trois et j'ai ajouté un zéro ». Ce discours montre que l'élève calcule « avec la partie gauche des nombres ». Interpellé par l'enseignant, « vingt-quatre moins une banane », il formule ce qui est peut-être une autre technique « vingt-quatre dizaines moins une dizaine, ça fait vingt-trois dizaines et j'ai ajouté un zéro ».

#### *À propos du calcul de cent moins dix (puis de cinq-cents moins soixante-dix)*

Le fait que la propriété de la troncature ne soit pas explicitée dans le cas où le nombre auquel on soustrait est un nombre de centaines entières ( $100 - 10$  ;  $500 - 70$ ), alors que ce cas serait favorable pour expliciter  $1c = 10d$ , constitue un indice pour penser que la technique de l'enseignant n'est pas dotée d'une technologie qui intègre cet ingrédient. Pour le calcul (additif ou soustractif), la troncature n'est pas une fin en soi, l'enjeu est que les élèves disposent de décompositions variées afin d'envisager une adaptation de leur technique aux nombres. Sans cette propriété, produire des décompositions variées semble difficile. Une technologie, en appui sur les relations entre dizaines et centaines, n'est pas apportée par l'enseignant. Quelques bons élèves semblent en revanche s'appuyer sur les relations multiplicatives et additives qu'ils repèrent éventuellement dans la désignation verbale d'un nombre. C'est le cas de Léa qui produit un discours efficace pour réaliser le calcul  $180 - 50$ .

#### *À propos du calcul de cent-quatre-vingts moins cinquante*

Léa : J'ai fait huit dizaines moins cinq dizaines plus cent, c'est cent-trente.

Enseignant : Léa a converti cent-quatre-vingts en dix-huit dizaines et comme dix-huit dizaines égalent dix dizaines plus huit dizaines, elle calcule huit moins cinq. Elle trouve cent-trente.

La stratégie de Léa s'appuie probablement :

- sur une décomposition de cent-quatre-vingts en cent et 8 dizaines,
- puis sur un calcul sur une partie du nombre, à savoir 8 dizaines auxquelles elle retranche 5 dizaines ce qui donne 3 dizaines qu'elle convertit en trente,
- puis sur une recomposition du nombre avec cent et trente.

L'enseignant, volontairement ou non, fait comme si Léa avait utilisé la troncature. Il reproduit le même type de discours que précédemment sans justifier pourquoi cent-quatre-vingts est égal à 18 dizaines. Plusieurs « explications » peuvent co-exister dans la classe :

- (1) « le nombre de dizaines de 180 c'est ce qu'on obtient quand on coupe le nombre 180 au rang des dizaines » ;
- (2) faire référence au fait que cent c'est dix dizaines et quatre-vingts c'est huit dizaines, donc cent-quatre-vingts c'est dix plus huit dizaines soit dix-huit dizaines ;
- ou encore (3) en appui sur l'écriture chiffrée  $180 = 1c + 8d = 10d + 8d$ .

Contrairement aux deux dernières, la première explication prend appui sur l'écriture chiffrée du nombre. C'est une technique qui n'engage pas (de façon explicite, au moins) les relations entre les unités.

## *2. Praxéologie et écologie de la troncature en numération*

Des études de programmes et de manuels scolaires (Chambris, 2008, 2012) ont par ailleurs montré que, dans les années 1980, se constituent deux types de tâches : « quel est le chiffre des dizaines, des centaines, dans un nombre donné ? » et « quel est le nombre de dizaines, de centaines, dans un nombre donné ? ». Le premier intervient alors dans la technique du second

(ce qui n'est pas le cas dans (2) ci-dessus). Les programmes de 1980 mentionnent : « des questions du type : “combien de dizaines, de centaines, dans un nombre donné ?” Exemple : dans 7 024, il y a 70 centaines car  $7\,024 = (70 \times 100) + 24$  » (Ministère de l'Éducation nationale, 1980, p. 44). Avec la transposition de la théorie savante, l'écriture chiffrée découle de la multiplication des nombres, de même la propriété de la troncature se déduit du calcul d'une multiplication par les puissances de dix. Une conséquence est que les unités décrivent principalement les rangs de l'écriture chiffrée. Pour connaître le nombre de dizaines, la technique consiste à repérer le chiffre des dizaines, puis à couper le nombre au rang des dizaines en ne conservant que la partie de l'écriture du nombre qui est à gauche. Pour repérer le chiffre des dizaines, la technique consiste à énumérer les chiffres de façon synchrone avec la récitation des « colonnes du tableau » ou des « noms des chiffres » (unité, dizaine, centaine).

Ce que serait une technologie pour la propriété de la troncature ne va pas de soi du fait de la disparition des unités au niveau de la théorie de référence et il semble bien que dans certains cas il n'y en ait pas (cf. l'enseignant partie 1). Le manuel *Tous en maths* (Duquesne-Belfais & Girodet, 2014) (annexe 1) décrit l'enjeu de l'apprentissage comme suit :

Ce que les élèves doivent avoir construit en fin d'apprentissage  
 [...] L'enjeu le plus crucial est d'acquérir la compétence de différencier *chiffre des* et *nombre de*.  
 Ce que les élèves doivent surmonter comme difficultés  
 [...] La notion de *chiffre des* est liée à une compétence de repérage (position d'un chiffre dans un nombre). La notion de *nombre de* est liée à la compétence de donner l'ordre de grandeur d'un nombre. (*Ibid.* p. 67)

On le voit, « le chiffre des » n'est pas considéré comme ayant une contribution quantitative, ce qui est conforme à la signification des mots dizaines, centaines, etc. comme rang de l'écriture chiffrée. Signalons aussi que cette section du manuel (pp. 40-43) introduit le nombre « un million ». Il apparaît comme le suivant de 999 999, ce qui justifie la nécessité d'un chiffre supplémentaire. Comme c'est souvent le cas dans les manuels à partir des années 1980 (Chambris, 2008, 2012), les relations entre unités (ici entre millier et million et entre centaine de milliers et million) ne sont pas mentionnées. Deux types de tâches sont travaillés successivement et des mises en œuvre proposées. Dans un premier temps, il s'agit d'écrire en chiffres, dans un tableau de numération, des nombres dictés « en numération orale » (c'est implicite dans le manuel). Les élèves de la classe écrivent le nombre sur leur ardoise (tâche non problématique) à l'exception de six élèves (pour les nombres jusqu'à 999 999), puis de neuf (pour les nombres jusqu'à 999 999 999), debout, côte à côte et visibles de tous (annexe 1). Ces derniers n'écrivent qu'un chiffre du nombre (u, d, c, unité de mille, dizaine de mille, etc.). Les autres valident alors le résultat. On peut penser que cette tâche permet de lier chaque position de chiffre (et son « nom ») à une partie du nom du nombre. Il pourrait en résulter par exemple pour 542 367 981 que le 4, inscrit dans le segment cinq-cent-quarante-deux-millions, « correspond à » quarante millions et s'écrit 4 dans la colonne des dizaines de millions. Dans un second temps, les tâches « chiffre des » et « nombre de » sont introduites, comme suit.

[...] poser maintenant des questions telles que : *Quel est le chiffre de... ? Quel est le nombre de... ?*

Exemple : Quel est le chiffre des dizaines de mille ? Demander à l'élève concerné d'avancer d'un pas. Poser maintenant la question : *Quel est le nombre de dizaines de mille ?* Demander à tous les élèves à sa droite d'avancer d'un pas. (Duquesne-Belfais & Girodet, 2014, p. 67)

Si les techniques reposent sur des arguments de repérage dans « l'espace constitué par l'écriture du nombre en chiffres », le travail préliminaire devrait permettre de lier le « nombre de dizaines de millions », à savoir pour l'exemple précédent 54 dizaines de millions au « plan spatial » à cinq-cent-millions et quarante-millions, soit cinq-cent-quarante-millions, 540 000 000 constituant alors « l'ordre de grandeur » (et la troncature) « à la dizaine de



millions » de 542 367 981. Cet ordre de grandeur s'exprime en unités simples (540 000 000 est un nombre d'unités simples), la « dizaine de millions » indique une position.

Il nous semble possible de tirer deux conclusions de cette brève étude : d'une part, la propriété de la troncature semble être considérée comme importante dans l'étude de la numération ; d'autre part, son enseignement ne s'appuie pas sur les relations entre les unités de la numération. Dans ce manuel, elle s'appuie sur la numération orale. Le fait que les mots unités, dizaines, centaines, etc. désignent des positions nous semble par ailleurs faire obstacle à l'utilisation de la troncature pour le calcul. Des positions ne se retranchent ni s'ajoutent.

Dans la section suivante, nous étudions les éléments technologiques observés dans une classe dont l'enseignante participe à un projet de recherche-action sur la numération.

### 3. Une technologie pour le nombre de... dans une séance de numération (étude de cas)

L'enseignante propose aux élèves des tâches de dénombrement. Le matériel (des bonbons) est représenté : des bonbons, des sachets dans lesquels sont réunis dix bonbons, des boîtes dans lesquelles sont réunies dix sachets, des caisses dans lesquelles sont réunies dix boîtes. La tâche des élèves est la suivante : « Vous allez avoir les nombres représentés par le matériel et à chaque fois la consigne c'est "quel est ce nombre ?" [...] et j'installe le tableau de numération ». Plus précisément, au tableau de la classe sont affichés (figure 1) :

- des *petites cartes* qui représentent le bonbon *pour représenter l'unité*, le sachet *pour représenter la dizaine*, la boîte *pour représenter la centaine*, la caisse *pour représenter le millier*. Les mots unité, dizaine, centaine, millier sont écrits sous la représentation du contenant correspondant ;
- un tableau de numération dont les colonnes sont numérotées de 1 à 6 (de droite à gauche) et désignées par les mots unités, dizaines, etc. ;
- la représentation du nombre à écrire en chiffres (successivement, problèmes 1 à 5).

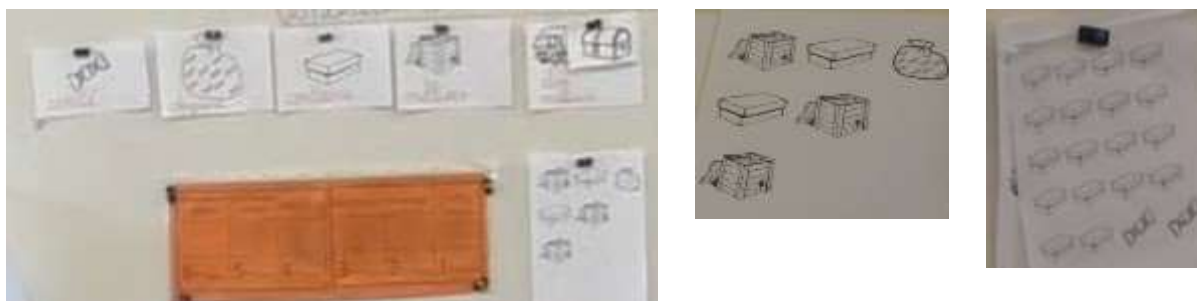


Figure 1. – Le tableau de la classe et les représentations des nombres à déterminer dans les problèmes 1 et 3.

Le premier problème permet de *commencer gentiment* comme le dit l'enseignante. En effet, pour réussir, il suffit de compter les dessins de chaque sorte et de reporter ces nombres dans le tableau de numération. Le nombre est ensuite lu : 3 dans les milliers se lit « trois mille », 2 dans les centaines se lit « deux cents », puis « dix ». Le troisième problème est plus complexe puisqu'il y a 18 boîtes de cent. La caméra a filmé un groupe d'élèves qui a déjà écrit 1 802.

Ran a compté des boîtes. Elle considère que leur nombre doit être indiqué dans la colonne qui correspond aux boîtes et qui s'appelle centaines. Dans l'échange qui suit (5 minutes), Gal propose quatre explications à Ran. Il mobilise différentes connaissances qui permettent chacune de trouver le nombre de bonbons : 1) Gal compte les boîtes (dix) et en déduit qu'il y a mille bonbons (dix fois cent, calcul en unités simples dont on peut supposer qu'il les convertit en 1 millier), 2) il exprime que dix centaines ça fait un millier (conversion entre unités relatives) ; 3) Gal compte de cent en cent des bonbons dans les boîtes (comptine en unités simples de cent en cent) ; 4) Gal accomplit cette dernière étape en étayant Ran : il

pointe, elle égrène la comptine ; arrivée à mille, elle poursuit avec mille un, Ran corrige : mille cent.

(Gal compte les boîtes de cent.)

Gal : là y'en a mille.

Ran : on n'est pas dans les milliers on est dans les centaines.

Gal : mille huit cents.

Ran : on est dans les centaines.

Gal : je sais mais des centaines y'en a dans les milliers ++ dix centaines ça fait un millier.

Ran : là t'es dans les boîtes de centaines + t'es pas dans les milliers.

Gal : regarde + (Gal pointe la première boîte.)

Ran (et Gal énumère les boîtes.) : 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1 000 + 1 001 + mille.

Gal : mille cent.

E : ben oui.

Ran : mais non + on n'est pas dans les milliers + on n'est pas + dans les cents.

Gal : on peut quand même mettre des centaines +.

Ran redit donc que « on n'est pas dans les milliers » mais « dans les cents ». Un élève du groupe fait alors appel à l'enseignante, qui arrive (tableau 2) :

Gal : elle disait que dans les milliers on pouvait pas mettre de centaines.

P : tu as combien de centaines [...]

Ran : 18 ++ [...]

P. : bon + tu as 18 + centaines ++ est-ce que tu as u' + des dizaines + pardon.

Ran : non.

P : est-ce que tu as des unités.

Ran : oui.

P : combien.

Ran : 2.

P. : est-ce que tu as des milliers.

Ran : non.

E : si.

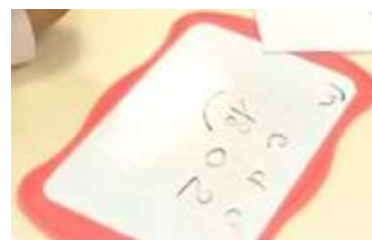
P : quand on fait des additions avec le système d'échange et de retenues + est-ce qu'on a le droit d'avoir (P souligne 18).

Ran : non + xx droit d'avoir + un chez les milliers.

P : dix centaines c'est pareil que ++ dix unités une dizaine ++ dix dizaines une centaine + dix centaines.

Ran : un millier (P. écrit 1 dans colonne des milliers et barre le 1 des centaines et s'en va).

P complète l'ardoise de Ran au fur et à mesure.



**Tableau 2.** – Technologie pour 18 centaines 2 unités = 1 802 proposée par l'enseignante.

La technique consiste à « déplacer le chiffre de gauche dans la colonne d'à côté » (cf. les ardoises du tableau 2). Le raisonnement de Gal (voir notamment le point 2) page précédente) pourrait fournir une technologie pertinente mais ce n'est pas ce qui est visé par l'enseignante. La justification visée est rappelée dans le temps collectif qui suit. Elle comporte plusieurs ingrédients : 1) « en fait y'a deux chiffres et qu'on n'a pas le droit » (18 boîtes / centaines) (un seul chiffre par colonne), 2) il s'appuie sur une « règle d'échange » qui s'exprime dans une formule « dix centaines c'est pareil que un millier » (10 boîtes → une caisse), 3) le chiffre qui « fait retenue » est barré et est écrit dans la colonne d'à côté. Tout se passe comme si la technique opératoire de l'addition posée (via « le système d'échange et de retenue ») fournissait la technologie pour élaborer la technique pour traiter la tâche (voir aussi Chambris, 2018). Si ce « système » produit effectivement l'écriture chiffrée attendue, à savoir celle du nombre représenté par le matériel, les chiffres obtenus ne constituent pas des nombres d'unités relatives mais des nombres d'unités simples (nombres de sachets et autres contenants). En effet, d'une part, dans le discours de l'enseignante, « 18 centaines » (18

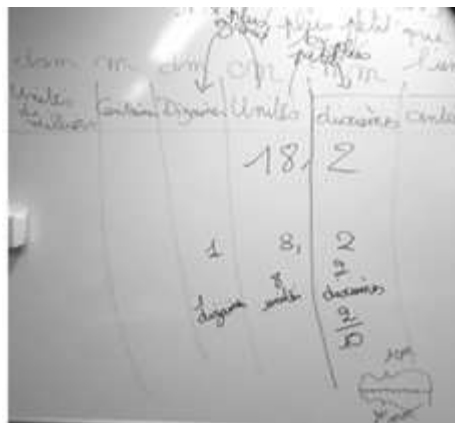
boites) (qui deviennent 1 millier / 1 caisse et 8 centaines / 8 boites) nous semblent désigner des nombres d'unités simples ; d'autre part, la décomposition, sous-tendant notamment le discours de Gal, de 18 centaines en 10 centaines et 8 centaines puis en 1 millier et 8 centaines en appui sur la relation « 10 centaines = 1 millier » n'est pas explicitée. Pour ce qui concerne les élèves, alors que les centaines évoquées par Ran désignent les boites donc des unités simples, celles évoquées par Gal – contrairement au discours de l'enseignante – désignent un nombre de bonbons donc des unités relatives.

Il nous semble donc que dans cette séance de numération, l'enseignante n'apporte pas (ou ne met pas en évidence) les savoirs sur les unités relatives et les unités simples susceptibles de conduire à une technologie pour la propriété de la troncature.

### UNITÉS DE NUMÉRATION ET UNITÉS MÉTRIQUES : CE QUE RÉVÈLE L'INTRODUCTION ET L'USAGE D'UN TABLEAU « MIXTE »

À l'école, unités de numération et unités du système métrique paraissent coexister. Pour autant, le contour de leur rencontre et de leur inscription au sein d'un espace commun ne semble pas précisément tracé. Viser un rapprochement entre unités de numération et unités du système métrique dans une intention de mise en cohérence grâce à un espace commun ancre cette problématique dans une perspective écologique : quelle mise en cohérence possible ? sous quelles conditions ?

Un rapprochement quelque peu inédit entre unités de numération liées aux nombres décimaux (dixièmes, centièmes) et unités de mesure de longueurs du système métrique (dm, cm, mm) a été proposé par une enseignante dans le contexte d'une étude collaborative sur l'enseignement et l'apprentissage de la numération décimale (au sein du LéA école Carle Vernet<sup>3</sup>). Le lieu de la rencontre proposée par l'enseignante est celui d'un tableau « mixte » de numération et de mesure (figure 2), construit avec des élèves de CM1 (9-10 ans). Une telle construction, dans le projet d'enseignement de l'enseignante, trouve sa motivation dans l'apparition, que nous pourrions qualifier de « spontanée », d'écritures décimales<sup>4</sup> dans des tâches liées aux mesures de longueurs avant même que l'écriture décimale n'ait été objet d'une étude en classe (*i.e.* un élève propose l'écriture 18,2 cm pour désigner une longueur égale à 18 cm 2 mm, ou encore 1 dm 8 cm 2 mm).



*Figure 2. – Le tableau « mixte » proposé par l'enseignante.*

<sup>3</sup> Voir <http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/ecole-carle-vernet>.

<sup>4</sup> Introduites par les élèves alors qu'elles n'avaient pas fait l'objet d'un enseignement préalable.

L'architecture globale du projet d'enseignement vise la construction du sens de l'écriture à virgule des nombres décimaux<sup>5</sup> en prenant appui sur la mise en relation entre les unités de numération et les unités de mesures. La figure 2 illustre, à partir de l'apparition « fortuite » de l'écriture 18,2 cm, une telle mise en relation, dixièmes et centièmes étant à ce stade de l'étude liés au partage de l'unité et attachés uniquement à leur écriture fractionnaire (et non décimale). Dans un tel projet, le rôle assigné au tableau « mixte » et à sa construction est davantage celui d'un objet d'étude motivant un questionnement sur les deux systèmes d'unités (de mesure, de numération liée aux décimaux) et leurs mises en relation, qu'un outil systématique de conversions impliquant ces deux systèmes d'unités.

Une variété de tâches envisagée par l'enseignante convoquant ce tableau « mixte » a été proposée en classe : tracer un segment de longueur 5,6 cm, puis de 1,2 dm, puis de 2,35 dm, puis de 23,5 cm ; tracer un segment de longueur  $(3 + \frac{5}{10})$  cm, puis de  $(1 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100})$  dm, puis de  $\frac{7}{10}$  m. Nous retenons certaines d'entre elles afin d'être en mesure de problématiser la question des conditions écologiques d'un rapprochement entre *unités* de numération et *unités* de mesure et en proposons l'étude ci-après à partir de transcriptions d'épisodes de classe.

### Épisode n° 1 : Tracer un segment de longueur 1,2 dm

Après que le tableau « mixte » a été installé en classe, des tâches de construction de segments de longueurs données (5,6 cm ; 1,2 dm ; 2,35 dm ; 23,5 cm) ont été mises à l'étude. L'une d'elles (tracé d'un segment de longueur 1,2 dm) apparaît résistante, donnant lieu à différentes constructions erronées (segments de longueur 1,2 cm ou encore 10,2 cm). Si les tâches précédemment réalisées (18,2 cm ; 5,6 cm) centrées sur l'unité *centimètre* sont susceptibles d'expliquer de telles erreurs, l'usage même de la règle graduée – et le rôle privilégié que cet instrument confère aux unités « cm », « mm » – est à même de les renforcer. L'interprétation de la virgule dans l'écriture décimale « a,a' dm » apparaît ainsi comme séparateur d'unités, en lien avec un couple de nombres d'unités de mesure : occasionnant une confusion avec le couple « a cm ; a' mm » (par analogie avec les tâches précédentes) ou avec le couple « (a × 10) cm ; a' cm ».

Au regard des difficultés, un retour sur le fonctionnement du tableau « mixte » est organisé par l'enseignante : positionner l'unité de « 1,2 dm », le « 1 », dans la colonne unités, puis renseigner l'unité de système métrique correspondante, « dm », puis positionner le « 2 » dans la colonne de droite. L'occasion de poser un double regard sur ce « 2 » est alors offerte : comme lié à l'unité « cm » du système métrique, déclarée comme 10 fois plus petite que le « dm », et comme lié à l'unité de numération « dixième » de l'unité. Ceci ouvre la voie à l'interprétation du « cm » comme l'*unité* du système métrique qui correspond à *un dixième de « dm »* :

P : c'est un virgule deux quoi ? Un quoi ?

E : un centimètre virgule deux.

P : non. On vous a demandé quoi ?

E : décimètre.

P : décimètre. Là l'unité est exprimée en décimètres.

[P écrit au tableau « dm » en tête de colonne, là où figure « Unités », et note « 1 » en dessous.]

P : non là on a des quoi, c'est dix fois plus petit que les décimètres. [...]

P : oui ou non. Ici l'unité est-ce que je l'ai exprimée en centimètres ? Je l'ai exprimée en quoi l'unité ? ELI ?

ELI : en décimètre.

P : en décimètre. L'unité est le décimètre. Oui ? SOU ?

P : donc le deux ça va être des quoi, après la virgule, si c'est des dixièmes. Dix fois plus petit ?

E : des millimètres.

<sup>5</sup> Qui n'a pas, rappelons-le, encore fait l'objet d'une étude spécifique.

- P : dix fois plus petit qu'un décimètre ?  
 E : euh...  
 P : deux dixièmes de décimètre, c'est égal à quoi ? À deux ? [...]  
 E : à deux centimètres.  
 P : deux dixièmes de décimètres, dix fois plus petit que le décimètre... ce sont des...  
 E : centimètres.  
 P : sûr ou pas, dix fois plus petit que le décimètre, c'est le centimètre ?  
 E : ben oui...  
 P : donc mes dixièmes de centimètre... de décimètre ce sont des...  
 E : des dixièmes...  
 P : des centimètres.

Le fonctionnement du tableau « mixte » repose sur un positionnement relatif (ou dynamique) des unités de mesure de longueurs *versus* un positionnement absolu (ou statique) des unités de numération. C'est ce qui semble précisément en jeu dans cet épisode, les élèves ayant initialement figé les relations entre unités de numération et unités du système métrique (« *unité* – cm » et « *dixième* – mm »). Remarquons que le projet de l'enseignante recouvre une forme de complexité liée à la réinterprétation d'écritures décimales introduites par les élèves eux-mêmes. Il ne faudrait pas confondre ce projet avec un projet d'enseignement reposant sur une introduction des décimaux strictement en prise d'appui sur le seul système métrique, cette réinterprétation prenant d'ailleurs appui sur les fractions décimales, la notion de fraction ayant été préalablement introduite<sup>6</sup>.

Les échanges orchestrés par l'enseignante dans cet épisode correctif visent à rapprocher deux façons de qualifier les relations entre unités du système métrique, l'une multiplicative : « le cm comme dix fois plus petit que le dm » qui réfère à des locutions rencontrées dans le monde des grandeurs et des mesures, l'autre liée au fractionnement d'une unité<sup>7</sup> qui réfère cette fois à des locutions rencontrées dans le monde de la numération et des fractions (dixième et dixième). Cette deuxième façon de qualifier des relations entre unités est ici directement remise en lien avec la grandeur longueur et sa mesure : « le cm comme le dixième du dm ». Si ce rapprochement entre les deux types de qualifications ne semble pas poser difficulté ici, il n'en est pas de même dans l'épisode suivant.

### *Épisode n°2 : Tracer un segment de longueur 2,35 dm*

L'épisode de classe décrit ici est relatif à la production d'un segment de longueur « 2,35 dm ». Alors que les élèves ont d'ores et déjà produit de tels segments, l'enseignante recentre les échanges sur la production d'un discours justificatif de la construction en lien avec l'usage du tableau « mixte ». La transcription ci-dessous rend compte de ces échanges avec la classe et révèle des négociations nécessaires dans des rapprochements de relations multiplicatives entre unités (dix fois plus petit, cent fois plus petit...). Comme évoqué ci-dessus de telles relations multiplicatives semblent davantage associées aux unités de mesure de longueurs qu'aux unités de numération d'où la nécessité de telles négociations.

- P : est-ce que tu peux le prouver dans le tableau ? Deux virgule trente-cinq décimètres.  
 P : l'unité était le quoi ?  
 GALI : le décimètre.

<sup>6</sup> Notons d'ailleurs que si la littérature documente largement les obstacles liés à une approche des décimaux en prise d'appui stricte sur le système métrique (Brousseau, 1998), cette apparition spontanée des écritures décimales et sa potentielle récupération en classe de CM1 a été prise en compte et documentée par N. Brousseau avec la collaboration de G. Brousseau (1987) dans le même temps que l'ingénierie liée à rationnels et décimaux était développée en classe de CM2. On trouve d'ailleurs trace d'écritures décimales dans des travaux d'élèves liées à la fameuse situation inaugurale de « l'épaisseur des feuilles de papier », consultable dans le fond Brousseau du CRDM : <http://www.imac.uji.es/CRDM/>.

<sup>7</sup> Le partage en parts égales d'une unité a été utilisé pour introduire les fractions. Ce type d'introduction des fractions sera désigné par « fractionnement d'une unité ».

P : l'unité décimètre, on va plutôt l'écrire ici [dans la colonne « Unités »] peut-être. Vas-y.  
 P : la virgule elle doit être... l'unité, tu te souviens. Regarde. L'unité... Donc... Voilà.  
 P : est-ce que c'est bon ? Est-ce que si mon unité est le décimètre, le dixième c'est bien le ?  
 E : le centimètre [...]  
 P : et cent fois plus petit que le dm, c'est le ?  
 E : millimètre.  
 P : donc on a bien trois dixièmes, ça fait trois centimètres et cinq millièmes, cinq millimètres... cinq centièmes pardon, cinq millimètres. [...]  
 E : vingt-trois centimètres... Donc deux décimètres, trois centimètres et cinq millimètres.  
 P : pourquoi n'es-tu toujours pas d'accord ?  
 P : le dixième là [montrant le 2 de 1,2 dm], c'était bien des centimètres ? Le dixième là [montrant le 3 de 2,35 dm], c'est bien des ?  
 E : des millimètres.  
 P : voilà. Regarde là [montrant le 5 de 2,35 dm], ça c'est un centième, ce n'est pas un dixième, c'est encore plus petit, encore dix fois plus petit. Encore dix fois plus petit que le centimètre, ça va être des....

Dans cette tâche, le regard à poser sur le chiffre « 5 » de « 2,35 dm » gagne en complexité, recouvrant plusieurs facettes : chiffre des centièmes associé à l'écriture chiffrée « 2,35 », centième de l'unité métrique de référence (le « dm »), mais également référence à l'unité métrique, le « mm », laquelle est 10 fois plus petite que l'unité métrique directement adjacente (le « cm ») si on la considère en continuité des relations multiplicatives apparemment établies en amont entre unités de mesure (un « dm » 10 fois plus petit qu'un « m », un « cm » 10 fois plus petit qu'un « dm », etc.).

C'est précisément le rapprochement de ces deux types de relations, multiplicatives d'une part et liées au fractionnement d'autre part, qui semble faire difficulté. Si le « mm » est qualifié de « 10 fois plus petit que le "cm" » et que le « cm » est qualifié de « 10 fois plus petit que le "dm" », réussir à qualifier le « mm » comme « 100 fois plus petit que le "dm" » pour établir sa mise en relation avec les centièmes dans l'écriture 2,35 nécessiterait *a priori* de penser que « dix fois plus petit que dix fois plus petit que le décimètre » correspond à « cent fois plus petit que le décimètre ». Ce rapprochement correspondant à une composition de relations multiplicatives entre unités de mesure du système métrique apparaît particulièrement délicat. Ceci interroge en retour ce qui sous-tend les aspects technologico-théoriques en jeu dans l'usage de telles relations multiplicatives auxquels nous n'avons pas véritablement accès ici : autrement dit, à quoi renvoie exactement ce « 10 fois plus petit » ou ce « 100 fois plus petit » pour les élèves ? Mais aussi sous quelles conditions écologiques de telles relations multiplicatives et leur composition sont-elles ou pourraient-elles être mises à l'étude ? Enfin sous quelles conditions le rapprochement entre ces relations multiplicatives entre unités métriques et des relations liées aux fractionnements des unités de numération peut-il s'opérer ? Dans quelle mesure l'appréhension des relations liées au fractionnement des unités de numération, ancrées dans ce domaine d'étude de la numération décimale (« le dixième d'une unité comme une unité partagée en dix » mais aussi « le dixième du dixième d'une unité appréhendé comme le centième d'une unité »), peut-elle s'ériger en potentiel levier ou obstacle de tels rapprochements avec des relations multiplicatives entre unités métriques ?

### Conclusions

L'analyse de ces épisodes de classe met au jour des difficultés liées à une tentative de rapprochement de deux systèmes d'unités, les unités de mesure de longueur du système métrique et les unités de numération décimale (en lien avec les décimaux), *via* le tableau « mixte » introduit par l'enseignante. Toutefois ce n'est pas tant dans la construction ou l'usage même de ce tableau que ces difficultés résident selon nous. En effet, ce serait plutôt dans des conditions écologiques qui régissent plus globalement l'environnement technologico-théorique constitué autour de ces deux systèmes d'unités (de mesure pour l'un et

de numération pour l'autre) et conditionnent leur mise en cohérence. Ainsi le rôle de la virgule peut-il être réinterrogé au regard du choix fait ici par la maîtresse, relatif par rapport aux unités de mesure de longueur (car référé à une unité de mesure qui peut varier), absolu par rapport aux unités de numération (car directement mis en lien avec le principe positionnel). Ce choix pourrait conduire à réinterroger des tâches inexistantes dans l'institution française comme par exemple : écrire en chiffres 3,5 dizaines et 6,25 dixièmes ; convertir 35,8 centièmes en dizaines, 2,35 dixièmes de cm en m, au regard des techniques qu'il serait possible de déployer pour y répondre et des besoins technologico-théoriques que de telles techniques supposeraient.

Ce n'est pas sans lien avec un autre phénomène révélé par cette étude, lié aux relations exprimées entre les unités et à leurs horizons technologico-théoriques associés d'une part à la comparaison multiplicative (10 fois plus petit / plus grand), d'autre part à un fractionnement d'unité (partagé en 10 parts égales). Les difficultés de rapprochement des deux points de vue ou celles rencontrées quand il s'agit de composer des relations multiplicatives (10 fois plus petit que 10 fois plus petit comme 100 fois plus petit) renvoient à une nécessité plus globale, celle de construire une théorie sur la multiplication qui prenne en considération les grandeurs ou les unités, à même d'éclairer et d'unifier les discours technologiques et les techniques liés aux systèmes d'unités de numération ou du système métrique. C'est en partie l'objet de la partie suivante.

#### VERS LA NÉCESSITÉ D'UNE THÉORIE DE LA MULTIPLICATION QUI S'APPUIE SUR LES UNITÉS ET LES GRANDEURS

Il est un constat à partager, celui, dans nombre de manuels scolaires étudiés pour la circonstance, d'un manque de mise en cohérence des environnements technologico-théoriques attachés au produit d'un nombre décimal par une puissance de dix. Deux types de trajectoires (empruntées par l'un et l'autre des manuels donnés en annexe 2), convoquant des ingrédients technologiques distincts, apparaissent en concurrence. Dans l'une, la justification de la multiplication d'un entier  $n$  par 10, 100... tient à l'obtention de  $n$  dizaines,  $n$  centaines... On trouve ainsi des égalités du type :  $23 \times 10 = 23$  fois 1 *dizaine* = 23 *dizaines* = 230. La question de l'extension aux décimaux<sup>8</sup> d'un tel discours justificatif se pose et avec elle le coût écologique d'une telle extension : comment justifier le fait que 2,35 *dizaines*, c'est le nombre écrit « 23,5 » ? L'absence d'une telle extension semble la règle dans les manuels étudiés.

Pour l'autre trajectoire, la justification de la multiplication d'un nombre entier  $n$  renvoie à un discours du type : multiplier un entier  $n$  par 10, 100... c'est considérer que l'on prend 10 fois cet entier et que ce faisant, on obtient 10, 100 ... fois plus de chaque unité :  $23 \times 10 = (2 \text{ dizaines} + 3 \text{ unités}) \times 10 = 20 \text{ dizaines} + 30 \text{ unités} = 2 \text{ centaines} + 3 \text{ dizaines} = 230$ . Si son extension aux décimaux semble plus facile d'accès, de tels ingrédients technologico-théoriques ne sont pas sans poser question, notamment au regard du double point de vue à poser sur 10, 100... : considérés tantôt comme privés d'unités (10 fois un nombre d'unités de numération) et tantôt comme des nombres d'unités (10 unités soit 1 dizaine). Unifier ces deux trajectoires d'étude du produit d'un entier / décimal par une puissance de 10 pose plus globalement la question de la commutativité de la multiplication en lien avec des unités relatives :  $23 \times 10 = 23$  fois (1 dizaine) = 10 fois (2 dizaines + 3 unités). Le cours associé à ces TD (Chambris, 2021) montre qu'établir la propriété de commutativité de la multiplication dans le champ des grandeurs (et dès lors dans le champ de l'arithmétique en prise d'appui sur les grandeurs) fait potentiellement difficulté, notamment dans la nécessaire distinction à opérer entre multiplicande (nombre donné d'unités) et multiplicateur (nombre de fois, sans unité).

---

<sup>8</sup> En écriture décimale.

Dans la suite de cette section, nous cherchons à mieux circonscrire cette problématique de la commutativité du produit où un des facteurs est un nombre d'unités relatives. Si les propos précédents ont montré qu'une telle problématique est déjà en germe dans la multiplication d'un nombre décimal par une puissance de 10, il y a d'autres habitats où elle prend forme. Celui que nous investissons ici, à partir de transcriptions d'un épisode de classe recueilli au sein d'une classe de CM2 (élèves de 10-11 ans) de l'école Carle Vernet, concerne une tâche liée à la comparaison de fractions :  $9/21$  et  $3/7$  sont-elles égales ? Cette tâche mise à l'étude en classe fait très rapidement émerger la stratégie d'une élève qui apparaît comme inédite à plusieurs égards. Les échanges qui s'ensuivent en classe soulignent la difficulté de formuler et diffuser une telle procédure à l'ensemble des élèves. L'examen des transcriptions de ces échanges que nous menons ci-dessous vise à éclairer ces difficultés du point de vue des relations multiplicatives entre grandeurs et donc de la question de la commutativité de la multiplication lorsque des unités relatives sont impliquées, question sur laquelle nous revenons plus longuement par la suite.

CLEM : là c'est trois fois plus petit et là on met trois fois plus. C'est pareil.

P : tu penses que c'est égal, d'accord.

CLEM (en s'adressant à STOR) : t'es d'accord ?

STOR : oui... si tu le dis.

CLEM : je veux que tu sois d'accord... pas que tu le fasses comme ça... donc...

STOR : oui, parce que tu rajoutes et puis...

CLEM : oui... oui...

Dans ce premier épisode, une élève (CLEM) semble mettre en œuvre le raisonnement suivant, associé à la production de deux bandes rectangulaires, l'une partagée en 7 et l'autre en 21 (au moins dans l'idée) : les 21<sup>es</sup> sont trois fois plus petits que les 7<sup>es</sup>, mais comme il y en a trois fois plus que des 7<sup>es</sup>, c'est pareil. Jointe à ce raisonnement, une écriture symbolique est produite par cette même élève, écriture d'ailleurs classiquement rencontrée dans l'institution scolaire française indiquant que l'on multiplie par 3 le numérateur et le dénominateur de la fraction  $3/7$  pour produire la fraction égale :  $9/21$ . Ce raisonnement ne semble ici pas compris par le second élève. Une première tentative de communication à la classe d'un tel raisonnement est alors conduite par l'enseignante :

P : la même surface à l'air d'être occupée en fait...

P : c'est ça ? Pour ça, on va avoir une explication qui est celle de CLEM.

P : on t'écoute CLEM.

CLEM [inaudible]

P : regardez...

CLEM : avec STOR, on s'est dit que 3 fois 3 c'est égal à 9 et que 7 fois 3 c'est égal à 21 et du coup qu'il faut 3 fois de plus... enfin, il faut enlever...

CLEM : à 21 il faut trois fois moins pour arriver à 7 et à 9 il faut 3 fois plus alors...

Devant la difficulté, un long échange orchestré par l'enseignante s'engage pour tenter de justifier la stratégie mise en œuvre par le binôme (tableau 3).

P : elle a une explication que je vais reformuler après si c'est nécessaire, mais elle a une explication intéressante.

P : elle nous dit 3 fois 3, ça fait 9, et 7 fois 3 ça fait 21. Alors vas-y essaie de nous expliquer.

CLEM : ben, nous déjà, on a commencé par faire un schéma... en faisant...

P : oui, mais ton histoire de « fois 3 » Tu es en train de nous expliquer... Si je résume que les parts sont trois fois plus petites...

CLEM : les parts qui sont 3 fois plus grandes, donc ça veut dire que...

P : est-ce tout le monde est d'accord...

P : là ça va vraiment mal se terminer...



L'enseignante montre à la classe la production du binôme.



P : est-ce que tout le monde est d'accord pour dire que des 21<sup>es</sup> c'est trois fois plus petits que des 7<sup>es</sup>.

E : oui.

E : non.

P : si je découpe en 21, ça va être trois fois plus petit que si je découpe en 7. 7 fois 3, 21.

P : oui ou non ?

E : oui...

E : oui... mais...

P : est-ce je peux terminer avant « je ne suis pas trop d'accord » ?

P : Sauf que, elle prend, je prends trois fois plus de parts. J'ai fait des parts plus petites, trois fois plus petites mais j'en prends trois fois plus.

E : mais où on voit trois fois plus petit ?

P : regarde, les 21<sup>es</sup> sont trois fois plus petits que les 7<sup>es</sup>.

P : oui ou non ?

E : oui... mais...

P : mais justement, elle en prend trois fois plus. Elle en prend 3 fois 3, 9.

P : est-ce qu'on peut dire que du coup, c'est bien égal parce que je prends trois fois plus de parts trois fois plus petites ?

E : mais 21 c'est plus grand que 7...

P : oui mais, si je découpe en 21, est-ce que je n'ai pas beaucoup plus de petites parts que si je découpe en 7 ?

E : si.

P : j'en ai combien de fois plus ?

CLEM : maîtresse, c'est comme si on faisait...

P : parce que je découpe en trois fois plus de parts, ça va me faire des parts trois fois plus petites.

P : sauf que tu en prends trois fois plus.

P : c'est ce que nous montre le schéma de MAR.

P : elle prend des parts trois fois plus petites mais elle en prend trois fois plus.

P : si je réécris... Je prends 3 septièmes, est-ce que tout le monde est d'accord ?

P : maintenant, elle nous dit, c'est trois fois plus petits les 21<sup>es</sup>.

P : elle me dit, c'est trois fois plus petit... Tout le monde les yeux au tableau. Tout le monde les yeux au tableau.

P : je découpe trois fois plus petit pour faire des 21<sup>es</sup>.

P : je redécoupe tout en trois.

P : un, deux, trois...vingt et un (en énumérant chacune des 21 parts obtenues).

P : ça marche. Tout le monde est d'accord ?

NOA : oui, ça marche.

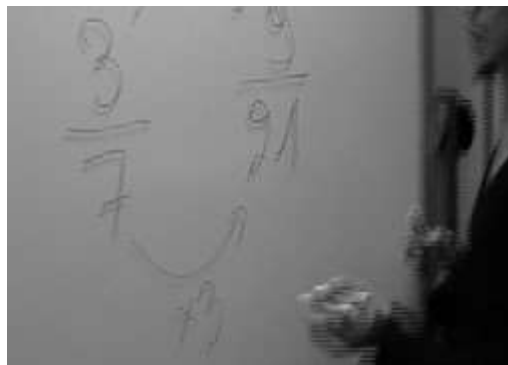
P : est-ce que j'ai neuf 21<sup>es</sup> ?

P : un, deux, trois... neuf (en énumérant chacune des 9 parts).

NOA : ah, elle est bien ta technique...

P : j'ai pris trois fois plus de parts, trois fois plus petites, ça fait exactement...

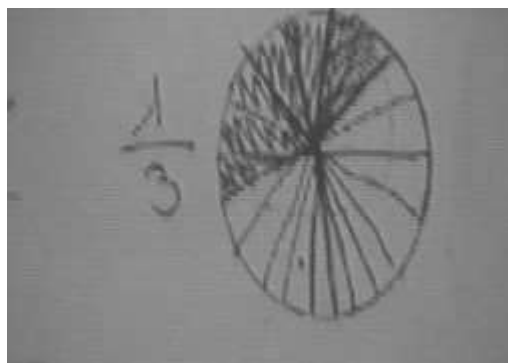
E : la même chose.



L'enseignante écrit au tableau des rapports multiplicatifs entre les numérateurs et les dénominateurs des deux fractions.



L'enseignante écrit au tableau : « Les parts sont 3 fois plus petites ».



L'enseignante vidéo-projette le schéma produit par MAR au tableau.



L'enseignante représente 3/7 au tableau.

NOA : oui, mais enfin, pour moi, ce n'est pas pareil.  
 P : on ne vient pas de prouver que c'était égal ?  
 P : regarde, j'avais pris trois septièmes, quand je les partage en 21<sup>es</sup>, ça m'en fait bien 9 21<sup>es</sup>.

**Tableau 3.** – *Tentative de justification de la stratégie mise en œuvre par le binôme.*

Le raisonnement produit par l'élève nommée CLEM apparaît clairement difficile d'appropriation par les autres élèves, y compris par ceux qui auront réussi par ailleurs la tâche. En premier lieu, des éléments liés à l'orchestration de la communication d'une telle stratégie interfèrent possiblement dans cette tentative de diffusion : l'usage d'une disposition fléchée «  $\times 3$  », en vigueur dans nombre de manuels et dans un discours enseignant parfois elliptique « fois trois en haut, fois trois en bas » entretient le doute sur une multiplication par trois qui opérerait conjointement sur les nombres figurant au numérateur et au dénominateur, geste parfaitement orthogonal au raisonnement qui tente d'être ici installé et renvoyant à une relation multiplicative entre 21<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> : « les 21<sup>es</sup> comme 3 fois plus petits que les 7<sup>es</sup> ». En second lieu, le raisonnement produit par CLEM n'apparaît pas de même nature que celui investi par les autres élèves même si leurs schémas paraissent similaires (comme celui produit par MAR). De ce point de vue, l'intervention de l'enseignante en fin d'épisode apparaît rabattre le raisonnement de CLEM sur un autre type de raisonnement. L'intervention d'un autre élève (NOA) à la fin de cet épisode de classe révèle que cet élève semble percevoir et vouloir exprimer la différence entre les deux types de procédures à l'œuvre. Le raisonnement de CLEM prend appui sur des ingrédients technologiques liés à des relations de comparaison multiplicative entre unités : on considère des unités  $b$  fois plus petites que les unités  $a$  et on a alors  $b$  fois plus d'unités pour égaler un nombre donné d'unités  $a$ . Le raisonnement convoqué en fin d'épisode par l'enseignante et d'autres élèves s'appuie sur des ingrédients technologico-théoriques relevant du dénombrement lié à une unité  $a$ , contenant elle-même un nombre d'unités  $b$  : on considère  $a$  fois  $b$  unités et on étend ce dénombrement à une addition réitérée liée aux « groupes égaux de  $b$  unités » ainsi considérés ( $b$  unités +  $b$  unités... +  $b$  unités,  $a$  fois). Ces différences peuvent renvoyer à ce que Van de Walle et Lovin (2008) mettent en avant comme deux façons d'appréhender le champ multiplicatif dans la résolution de problèmes liés aux grandeurs, certains problèmes relevant de la « comparaison multiplicative » quand d'autres renvoient à des « groupes égaux » (p. 79). Des formulations complètes de ces deux types de raisonnements sont illustrées dans le tableau 4.

Dénombrement / addition itérée	Relations multiplicatives
<p>1/7 est le nom de chaque morceau obtenu par un partage de l'unité en 7, 1/21 est le nom de chaque morceau obtenu par un partage de l'unité en 21, ce qui revient à partager chaque 1/7 en 3.</p> <p>Il y a donc 3 vingt-et-unièmes dans un septième.</p> <p>Donc, il y a 3 fois 3 (comme 3 ensembles de 3) vingt-et-unièmes dans 3 septièmes, soit 9 vingt-et-unièmes.</p>	<p>1/7 est la taille d'une part obtenue par un partage de l'unité en 7, 1/21 est la taille d'une part obtenue par un partage de l'unité en 21. Comme on a partagé l'unité en 3 fois plus de parts égales pour obtenir 1/21, 1/21 est 3 fois plus petit que 1/7.</p> <p>Donc pour avoir la même « valeur » que 3 septièmes, il faut prendre 3 fois plus de vingt-et-unièmes (comme 3 fois plus que 3), soit 9 vingt-et-unièmes.</p>

**Tableau 4.** – *Groupes égaux versus comparaison multiplicative.*

Ainsi, si l'on cherche à approfondir ce qui pourrait fonder la signification des relations de comparaison multiplicative, il semble déjà que les deux ingrédients technologiques suivants soient essentiels :

1. Considérons l'énoncé de problème : « Ana a 4 pommes et Bob a 3 fois plus de pommes qu'Ana. Combien Bob a-t-il de pommes ? » Du fait de la présence de la relation multiplicative, la tâche introduit *implicitement* deux quantités : la *quantité de pommes d'Ana* (ce qui est différent des *pommes d'Ana*) et la *quantité de pommes de Bob* (ce qui est différent des *pommes de Bob*). La traiter nécessite donc implicitement de constituer « les pommes d'Ana » et « les pommes de Bob » en deux valeurs de grandeur pour la grandeur discrète<sup>9</sup> « les quantités de pommes » ; il s'agit alors d'envisager les classes d'équivalence attachées « aux ensembles de pommes ». La quantité « de A » est donc l'unité avec laquelle la quantité « de B » mesure 3. Pour insister sur la nécessité de décontextualiser ces quantités vis-à-vis des ensembles de pommes (autrement dit la nécessité de considérer les classes d'équivalence), nous notons  $u$  cette unité. Ainsi, penser la grandeur *de B* (notée  $\underline{B}$ ) comme 3 fois plus grande que la grandeur *de A* (notée  $\underline{A}$ ), c'est penser que  $\underline{A} = 1 u$  et  $\underline{B} = 3 u$ . (Ajoutons que *mesurer 3  $\underline{A}$ , être grand comme 3 fois  $\underline{A}$ , 3 fois grand comme  $\underline{A}$ , 3 fois plus grand que  $\underline{A}$*  sont des expressions congruentes dont les significations pourraient être rapprochées.)
2. Inverser la relation de comparaison : si la grandeur *de B* est 3 fois plus grande que la grandeur *de A*, alors la grandeur *de A* est trois fois plus petite que la grandeur *de B*. (On perd la congruence mais on gagne une expression de  $\underline{A}$  en fonction de  $\underline{B}$ .)

Ces comparaisons multiplicatives sont à distinguer<sup>10</sup> des relations liées aux « groupes égaux » (Van de Walle & Lovin, 2008) « 3 A dans B » : « Pierre a 3 sacs de 4 pommes. Combien a-t-il de pommes ? » Ces relations liées aux groupes égaux sont dites d'inclusion par ces auteurs. Elles portent sur des ensembles d'objets qui sont réunis, d'où l'expression 3 A dans B. Nous ajoutons qu'elles ne portent pas sur les quantités (autrement dit, pas sur des classes d'équivalence ou des grandeurs), même si considérer les quantités permet aussi de traiter le problème.

En arrière-plan de la procédure associée aux relations de comparaison multiplicative, une propriété mathématique plus générale, que nous appelons « théorème de compensation », en lien avec les unités relatives est à l'œuvre (dans le cas à l'étude ici, les vingt-et-unièmes et les septièmes de l'unité) de la manière suivante :  $n$  fois plus que  $p$  unités (chacune  $n$  fois plus petites que  $u$ ) =  $p$  unités  $u$ , ce qui peut se formaliser par l'égalité  $n \left[ p \left( \frac{1}{n} u \right) \right] = p u$ . Une telle propriété renvoie d'une part à la signification des relations de comparaison multiplicative ( $n$  fois plus petit,  $n$  fois plus grand...) et à la distinction ou à l'articulation à opérer entre ces relations et d'autres types de relations conduisant à des raisonnements liés au dénombrement de « groupes égaux » d'unités.

Le raisonnement en appui sur les relations multiplicatives pourrait se formuler ainsi :  $1/7$  c'est l'unité relative qu'il faut prendre 7 fois pour égaler l'unité simple,  $1/21$  c'est l'unité relative qu'il faut prendre 21 fois pour égaler l'unité simple. Comme 21 c'est 3 fois plus grand que 7, alors 21 vingt-et-unièmes (i.e. l'unité simple) c'est 3 fois plus grand que 7 vingt-

<sup>9</sup> Bien que l'exemple soit pris dans le discret, le propos est plus général. Ce qui importe est le passage implicite mais nécessaire des objets aux grandeurs dans ce type de problèmes de comparaisons multiplicatives.

<sup>10</sup> Cette distinction peut paraître subtile et délicate mais elle est considérée comme fondamentale par les chercheurs du champ en termes d'avancée dans la conceptualisation des relations entre les grandeurs. En termes d'ingénierie, dans (Cortina et al., 2014), étant donnée une unité de référence, à partir d'un bâton de longueur inférieure à cette référence, les élèves doivent fabriquer une unité plus petite, un « *small of 2* », telle que l'unité de référence mesure 2 quand on prend le *small of 2* comme unité (ils fabriquent ensuite des *smalls of 3, 4, etc.*). Thompson, Carlson, Byerley et Hatfield (2014) considèrent qu'un point crucial est la capacité à penser une unité commune pour les grandeurs  $A$  et  $B$  et d'exprimer chacune des grandeurs  $A$  et  $B$  à l'aide de cette unité. Par exemple, si  $A = 7/3 B$ , considérer comme unité commune une fraction de la grandeur  $A$  :  $1/7 A$  et une fraction de la grandeur  $B$  :  $1/3 B$  ( $1 u = 1/7 A = 1/3 B$ ) permet de déterminer une telle relation et d'inverser un tel rapport : si  $A$  est grand comme 7 fois  $1/3$  de  $B$ , alors  $B$  est grand comme 3 fois  $1/7$  de  $A$ .

et-unièmes. Donc 1 septième, c'est 3 fois plus grand que 1 vingt-et-unième. Donc  $n$  parts de taille 1 septième c'est 3 fois plus grand que  $n$  parts de taille 1 vingt-et-unième.

Un tel théorème permet de revisiter les points de vue qu'il serait possible de poser sur le produit de deux nombres, à différents niveaux. En particulier, ce théorème peut se reformuler en «  $n$  fois plus que  $p$  "unités", c'est pareil que  $p$  unités chacune  $n$  fois plus grande ». Cette formulation exprime que  $(p \times n) u = p (n u)$ . Mais  $p (n u)$  c'est aussi la grandeur  $n u \times p$ . Ce théorème exprime une propriété de la multiplication sur les nombres concrets qui embarque une sorte d'associativité et commutativité.

Concernant le champ des entiers, parce que le produit de  $a$  unités par  $b$ , soit  $a u \times b$ , c'est à la fois  $b$  fois plus que «  $a$  unités » et  $a$  « unités  $b$  fois plus grandes que l'unité  $u$  », alors  $a$  unités est  $b$  fois plus petit que le produit tout comme  $b$  unités est  $a$  fois plus petit que ce même produit. Le tableau 5 illustre des apports potentiels de la version multiplicative du théorème en lien avec différents cas d'unités (de numération, métrique, arbitraire).

<p>Multiplier 23 (c'est-à-dire 23 unités qui valent chacune 1) par 10, c'est prendre : 10 fois plus que 23 « unités » ou 23 « unités 10 fois plus grandes que 1 ».</p> <p><math>(23 u) \times 10</math> c'est <math>(23 \times 10) u</math> ou <math>(10 u) \times 23 = 23 d</math>.</p>	<p>Multiplier 18 cm par 100, c'est prendre : 100 fois plus que 18 « unités qui sont chacune 1 cm » ou 18 « unités 100 fois plus grandes que 1 cm ».</p> <p><math>18 \text{ cm} \times 100</math> c'est <math>(18 \times 100) \text{ cm}</math> ou <math>(100 \text{ cm}) \times 18 = 18 \text{ m}</math>.</p>	<p>J'ai 5 sacs de farine de 6 kg chacun. Pour disposer de 7 fois plus de farine, je peux disposer de 7 fois plus de sacs (chacun de 6 kg) ou le même nombre de sacs chacun 7 fois plus lourds.</p> <p><math>(6 \text{ kg} \times 5) \times 7</math> c'est <math>6 \text{ kg} \times (5 \times 7)</math> ou <math>(6 \text{ kg} \times 7) \times 5</math>.</p>
--	---	---

*Tableau 5. – Théorème de compensation – version multiplicative - avec plusieurs cas d'unités relatives et potentialités.*

Ces éléments ouvrent la voie à voir dans  $4 \times 5$  non pas uniquement 20 mais plus volontiers 4 unités de taille 5 (5 unités de taille 4) ou 4 comme ce qu'il faut prendre 5 fois pour avoir ce produit (5 comme ce qu'il faut prendre 4 fois pour avoir le produit) ou encore 4 comme cinq fois plus petit que ce produit (5 comme quatre fois plus petit que ce produit) ou encore 4 comme le cinquième du produit (5 comme le quart du produit). On peut aussi envisager des notations telles que : 5 (4) pour 5 unités de taille 4, d'où  $5 (4) = 20$  dont la proximité avec l'algèbre pourrait être fructueuse.

Une autre perspective s'ouvre également dans le cas du produit d'un rationnel par un entier. Parce que multiplier  $3/4$  d'unité par 7, c'est à la fois prendre 7 fois plus que 3 fois  $1/4$  d'unité mais aussi prendre 3 fois « des unités 7 fois plus grandes que  $1/4$  d'unité », on aura établi l'égalité  $3/4 \times 7 = 7/4 \times 3$  et de façon générale  $a/b \times c = c/b \times a$ .

Ce même raisonnement s'étend alors au produit de deux rationnels : multiplier  $3/4 u$  par  $7/5$ , c'est obtenir un nombre 7 fois plus grand que le produit de  $3/4 u$  par  $1/5$ . Concernant alors ce dernier produit, il est à la fois 5 fois plus petit que 3 ( $1/4 u$ ) et 3 « unités 5 fois plus petites que  $1/4 u$  » (il y en a 5 fois plus dans l'unité, soit  $4 \times 5$ ), c'est à dire  $3/20$  d'unité.

À travers cette première enquête écologique exploratoire, il nous semble que les savoirs mis en avant sur les relations de comparaison multiplicative et sur la commutativité avec le point de vue des unités relatives pourraient (re)fonder une théorie de la multiplication dans le domaine des grandeurs et de l'arithmétique. Il reste toutefois à penser l'élémentation de tels savoirs, les exemples développés montrant d'ailleurs bien comment il reste à conduire une réflexion à la fois sur leur écologie et leur économie pour la classe de mathématiques. Nous explorons actuellement des nouvelles pistes à ce sujet en expérimentant des tâches dans l'institution française sur les fractions de grandeurs mais aussi en lien avec la commensuration telle que décrite par Nadine Brousseau et Guy Brousseau (1987). Nous

disons en guise d'ouverture quelques mots sur ce travail exploratoire dont la visée est d'explorer des dimensions économiques dans la construction de propriétés liées à la commutativité en lien avec les unités relatives et notamment le théorème « de compensation ». Dans un contexte différent de celui proposé par N. Brousseau et G. Brousseau, celui des automates, la commensuration prend la forme suivante :  $a/b$  est la longueur du saut d'un robot qui atteint  $a$  unités en  $b$  sauts. Acter qu'un robot qui ferait des sauts  $n$  fois plus petits qu'un robot donné devrait faire  $n$  fois plus de sauts pour parcourir la même distance, c'est, en contexte, construire que «  $n$  fois plus que “ $a$  unités chacune  $n$  fois plus petites” =  $a$  unités »...

## CONCLUSION

À l'issue de cette triple étude, il nous semble possible de noter des éléments récurrents. Tout d'abord, les unités relatives, au moins dans l'institution de recherche, présentent des potentialités sur deux plans (au moins) :

- Un premier plan est le plan technologique. On les trouve avec le calcul soustractif, les unités de numération permettent de calculer avec les grands nombres « comme avec les petits nombres » ce qui représente une grande économie de moyens. Plus précisément, pour soustraire un multiple de dix à un multiple de dix si la technique est peut-être disponible en calculant « sans les zéros » (par exemple, pour calculer  $130 - 50$ , on calcule  $13 - 5$ ), voire « avec les chiffres de gauche », la propriété de la troncature permet de justifier la technique. Nous ne l'avons pas évoqué mais, sans les unités, justifier ces techniques de calcul est possible à condition de développer un formalisme arithmétique avancé. Les unités relatives réduisent les besoins trophiques. On trouve d'autres potentialités technologiques des unités relatives avec le théorème de compensation, notamment sa version multiplicative. Sa formulation, avec les unités, embarque commutativité et associativité de la multiplication). Il permet de satisfaire des besoins identifiés et d'autres qui ne l'étaient pas nécessairement.
- Sur un deuxième plan, d'autres potentialités apparaissent avec des possibilités d'élémentation des savoirs en appui sur les unités. En effet, la mise en évidence de savoirs liés à ces unités rend visibles des savoirs qui ne sont pas identifiés par les institutions d'enseignement (on le voit par exemple avec le jeu non maîtrisé sur les unités de numération en lien avec la multiplication par dix). Ces savoirs, une fois identifiés, pourraient constituer des ressources pour les élèves et leurs enseignants. En l'état actuel, ils risquent d'être source de malentendus dans la classe. Comment l'enseignant peut-il gérer un savoir qui émerge, qui semble vrai et qui n'est reconnu dans aucun texte ? En termes de potentialités, ces unités pourraient constituer des ressources pour l'élémentation de certains savoirs aujourd'hui non identifiés – et par suite potentiellement sources d'inégalités – sur les nombres ou le calcul.
- Par ailleurs, ces unités pourraient avoir des potentialités en termes de « number sense ». On le voit avec l'apparition d'un théorème sur la commutativité / associativité de la multiplication qui renouvelle les points de vue sur la multiplication et donc enrichit les significations de cette opération, nous semble-t-il. La propriété de la troncature est aussi un moyen d'obtenir des ordres de grandeur de nombres (ou de fournir des approximations à une précision donnée).

Une autre intention de ce texte était de contribuer à l'état des lieux des unités relatives (au plan de l'enseignement et de l'apprentissage des nombres et du calcul). Dans chacune des sous-études, des indices semblent montrer que ces unités posent problème quand elles s'invitent dans les classes. Nous considérons que les phénomènes observés ne sont pas surprenants dans la mesure où ils ne font que refléter l'absence d'unités relatives dans les

savoirs de référence. Dans les différentes situations, on observe que ces unités sont identifiées comme des objets pertinents pour faire avancer la classe par quelques sujets (élèves ou professeurs) mais que leurs potentialités ne sont en général pas exploitées au mieux. Il y a un risque, possiblement de glissement métacognitif ou de déstabilisation du système d'enseignement, à tenter d'enseigner des praxéologies qui impliquent ces unités alors que de telles praxéologies (et les objets qui en font le cœur) ne font pas partie des pratiques de l'institution et donc peuvent ne pas être comprises du tout. Le paradoxe est que ces unités sont peut-être aux racines épistémologiques des mathématiques, par suite elles émergent inévitablement à l'occasion de certaines tâches même s'il n'y a pas d'intention de les enseigner (comme en témoigne l'épisode de classe étudié sur les fractions). Se pose donc, quand même, au moins à titre prospectif, la question de praxéologies mathématiques et didactiques qui permettraient de pointer les savoirs liés à ces unités et de les faire apprendre de façon structurée.

#### RÉFÉRENCES

- BROUSSEAU, N. & BROUSSEAU, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire : comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence : document pour les enseignants et pour les formateurs*. Bordeaux : Université Bordeaux 1.
- CHAMBRIS, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20<sup>e</sup> siècle. Connaissances des élèves actuels*. (Thèse de doctorat). Téléchargeable à <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/>
- CHAMBRIS, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20<sup>e</sup> siècle : théories et écologie. *Recherches en didactique des mathématiques*, 30(3), 317-366.
- CHAMBRIS, C. (2012). Évolution des organisations mathématiques sur la numération au vingtième siècle en France. In M.-J. Perrin-Glorian (Éd.), *Éclairages sur l'enseignement des nombres et de la numération à l'école primaire* (pp. 51-72). Cahier du laboratoire de didactique André Revuz, n°4, novembre 2012. <http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS12003.pdf>
- CHAMBRIS, C. (2018). The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: a case study of whole numbers in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 97(2), 185-207.
- CHAMBRIS, C. (2021). Raisons d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. In H. Chaachoua et al. (Éds), *Perspectives en didactique des mathématiques : point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures* (pp. xx-yy). Grenoble : La pensée sauvage.
- COLLARS, C., LEE, N. G., KOAY, P. L., TAN, C. S. & KRITTER, C. (2019). *Méthode Singapour - manuel de l'élève CMI*. Paris : La librairie des écoles.
- CORTINA, J. L., VIŠŇOVSKÁ, J. & ZÚNIGA, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal*, 26(1), 79-99.
- DUQUESNE-BELFAIS, F. & GIRODET, M.-A. (2014). *Guide pédagogique et manuel élève « Tous en maths » CMI*. Paris : Nathan.
- KRITTER, C., CAIRA, S., CERQUETTI-ABERKANE, F., HOUKARI, M., RITTAUD, B., COLLARS, C., LEE, N. G., KOAY, P. L., TAN, C. S. & ONG, B. L. (2019). *Méthode Singapour - manuel de l'élève CM2*. Paris : La librairie des écoles.
- LE DANTEC, O., GIAUFFRET, L., PEINDARIES, P., PLANTIVEAU, A., SATRE, N., WALKOWIAK, A. & MALAVAL, J. (2016). *Graine de maths CM2*. Paris : Nathan.
- MA, L. & KESSEL, C. (2018). The Theory of School Arithmetic: Whole Numbers. In M. Bartolini-Bussi & X. Sun (Éd.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades* (pp. 439-463). Cham, Suisse : Springer.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. (1980). *Contenus de formation à l'école élémentaire, cycle moyen*. Paris : CNDP.
- RINALDI, A.-M. (2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie* (Thèse de doctorat). Université Sorbonne Paris Cité & Université Paris Diderot. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01470473v1>
- RINALDI, A.-M. & CHAMBRIS, C. (2019). De l'analyse d'un dispositif d'enseignement du calcul soustractif en CE2 à l'analyse des connaissances requises en numération. In M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines* (pp. 1048-1055). Paris : IREM. [http://emf.unige.ch/files/9615/7503/8320/GT9\\_RINALDI\\_actes\\_EMF\\_2018.pdf](http://emf.unige.ch/files/9615/7503/8320/GT9_RINALDI_actes_EMF_2018.pdf)
- THOMPSON, P. W., CARLSON, M. P., BYERLEY, C. & HATFIELD, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: An hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. In K. C. Moore, L. P. Steffe & L. L. Hatfield (Éds), *Epistemic algebra students: Emerging models of students' algebraic knowing*, WISDOM<sup>e</sup> Monographs (Vol. 4, pp. 1-24). Laramie, WY : University of Wyoming. <http://bit.ly/1aNquwz>
- VAN DE WALLE, J. A. & LOVIN, L. H. (2008). *L'enseignement des mathématiques (tome 2). L'élève au centre de son apprentissage*. Montréal, Canada : Pearson ERPI.

## ANNEXE 1

**Cherchons ensemble**

**1. Jouons à la Numération vivante**

**But du jeu** Construire un tableau de numération et découvrir le million.

**Matériel** Ardoises.

**Règle du JEU** 9 élèves sont devant le tableau. L'enseignant dit un nombre. Chacun tient une ardoise et y écrit un chiffre. Les élèves de la classe doivent lire le nombre et répondre aux questions.

**2. Expliquons notre raisonnement.**

Combien de dizaines de millions ?



a. Lola explique sa réponse : « Je lis 1 dans la colonne des dizaines de millions. Donc 1 est le chiffre des dizaines de millions. Pour savoir combien il y a de dizaines de millions, je lis le nombre sur les ardoises des enfants qui ont avancé. C'est 51. »

b. Écrivons le nombre cent-trente-quatre-millions-six-cent-cinquante-deux-mille-neuf-soixante-dix-huit. Justifions notre réponse comme Lola. Quel est le chiffre des unités de millions ? Quel est le nombre de millions ?

## Les nombres jusqu'au milliard

Extrait de *Tous en maths, CMI* (Duquesne-Belfais & Girodet, 2014, p. 40)

## ANNEXE 2

## • Lorsqu'on multiplie un nombre entier :

– par 10, son chiffre des unités devient le chiffre des dizaines.

$$23 \times 10 = 23 \text{ dizaines}$$

$$23 \times 10 = 230$$

m	c	d	u
		2	3
	2	3	0

– par 100, son chiffre des unités devient le chiffre des centaines.

$$49 \times 100 = 49 \text{ centaines}$$

$$49 \times 100 = 4\,900$$

m	c	d	u
		4	9
4	9	0	0

– par 1 000, son chiffre des unités devient le chiffre des milliers.

$$5 \times 1\,000 = 5 \text{ milliers}$$

$$5 \times 1\,000 = 5\,000$$

m	c	d	u
			5
5	0	0	0

• Quand on multiplie un nombre décimal :

- par 10, son chiffre des unités devient le chiffre des **dizaines**.
- par 100, son chiffre des unités devient le chiffre des **centaines**.
- par 1 000, son chiffre des unités devient le chiffre des **milliers**.

$3,56 \times 10 = 35,6$

d	u	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
	3	5	6
3	5	6	

$4,25 \times 100 = 425$

c	d	u	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
		4	2	5
4	2	5		

$8,17 \times 1\,000 = 8\,170$

m	c	d	u	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
			8	1	7
8	1	7	0		

On a dû compléter par un zéro.

Extraits du manuel *Graine de maths CM2* (Le Dantec et al., 2016, p. 62 et p. 80)

$(2 \text{ dizaines} + 3 \text{ unités}) \times 10 = 23 \times 10$       2 centaines et 3 dizaines = 230

$23 \times 10 = 230$

Extrait du manuel *Méthode Singapour - manuel de l'élève CMI* (Collars et al., 2019, p. 56)

$0,01 \times 10 = 0,1$

$3 \text{ centièmes} \times 10 = 30 \text{ centièmes} = 3 \text{ dixièmes}$

$0,03 \times 10 = 0,3$

10 centièmes = 1 dixième

Unités	Dixièmes	Centièmes
0	0	3
0	3	

Extrait du manuel *Méthode Singapour - manuel de l'élève CM2* (Kritter et al., 2019, p. 210)