

フランスにおけるコロナウイルス流行の始まりの数学的モデル

Math. Model. Nat. Phenom. 15 (2020) 29

<https://doi.org/10.1051/mmnp/2020015>
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
複雑なシステムの数学およびコンピュータモデリングユニット
Les Cordeliers、パリ、フランス
nicolas.bacaer@ird.fr

概要

現在のコロナウイルスの流行に触発された、2フェーズのSEIR数学モデルを研究しています。伝染病の開始時に特定の日付 T から連絡先がゼロに減少した場合、伝染病の最終的なサイズは、累積症例数 $R(T)$ に再現性を掛けたものに近くなります。 \mathcal{R}_0 流行の。より一般的には、連絡先が時間 T で数値 q で除算される場合、 $\mathcal{R}_0/q < 1$ 、その後、流行の最終的なサイズは $R(T) \mathcal{R}_0 (1 - 1/q)/(1 - \mathcal{R}_0/q)$ 。モデルのパラメータは、フランスのコロナウイルスに関連するデータにほぼ調整されています。

1.モデル

図1^aに、2020年2月25日から3月29日までのフランスで確認されたコロナウイルスの累積症例数を示します。これらのデータには、市立研究所と入院患者の両方が含まれます[10]。流行を止めるために劇的な対策が講じられた3月15日（学校、レストランなどの閉鎖）を区別する必要があります。これらの3つの日付では、確認された症例の累積数は13から5,423に増加し、次に40,174に増加しました。^bは、同じデータを対数座標と線形回帰直線で示しています。3つの期間があります。3月6日まで実行される最初のものでは、成長は急速ですがかなり不規則です。3月15日まで実行される2番目の場合、成長は少し遅くなりますが安定しています。3番目の3月16日から、成長はゆっくりですがまだ安定しています。2月25日から3月15日までの最初の2つの期間すべてでラインを調整すると、ケースの数が1日あたり $\lambda \approx 0.31$ （赤字）の割合で指数関数的に増加することがわかります。倍加時間は $(\ln 2) / \lambda \approx 2.2$ です日々。一方、2番目の期間に限定すると、データが対数スケールで特によく整合している場合、1日あたり $\lambda \approx 0.225$ で、倍加時間は3.1日（青色）になります。流行開始時のデータは、新たに輸入された症例の大部分と確率的影響によって乱されているため、2番目の推定値がおそらく最も信頼できます。3期目は、抜本的な対策を実施した後、倍増時間は4.9日となる。

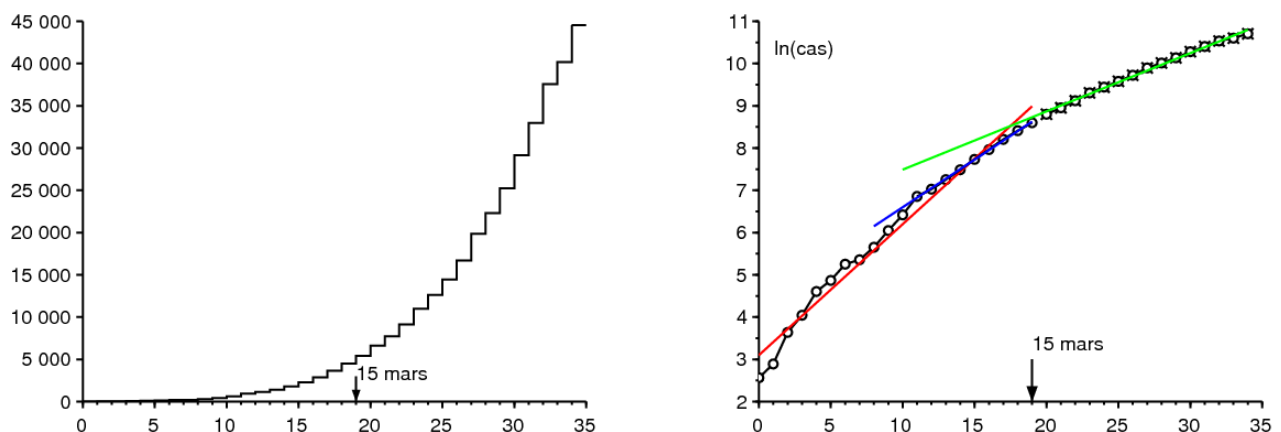


図1.a) 2020年2月25日から3月29日までのフランスで確認された症例の累計 Santé publique France および [11]。b) この数の自然対数と線形回帰直線。

この流行に触発された数学モデルを研究します。古典的なSEIRモデルのバリエーションに従って、フランスの人口を5つの区画に分割してみましょう（例[3, p. 61]を参照）：

- S : 健康な人
- E : 潜在的に感染した人々、言い換えれば、まだ感染していない
- I : 保護されていない感染者
- R_1 : 伝染の連鎖から外され、確認された症例に数えられた人々
- R_2 : 伝送チェーンから削除されましたが、カウントされていません。

したがって、これらの最後の2つのコンパートメントにはそれぞれ、感染性はあるが隔離されている人と、回復または死亡したため感染性がなくなった人の両方が含まれます。一部の患者は軽度の症状を示し、検査を受けずに自宅にとどまります。他の患者は老人ホームに住んでおり、合併症や死亡さえあったとしても検査を受けていません。これらはコンパートメントにあるカテゴリです R_2 。このモデルを無限に改良してより現実的にすることは明らかですが、不明なパラメーターの数をできるだけ制限するようにしています。主な目的は、流行の最終的なサイズに関する理論的な結果を得ることです。

いくつかの表記法を紹介しましょう：

- N : 総人口（大きいと想定）であるため、 $N = S(t) + E(t) + I(t) + R_1(t) + R_2(t)$
- a : 実効接触率
- b : 潜伏感染者が感染力を持つ率
- c : 感染者が隔離され、したがって伝染の連鎖から排除される平均率
- f : 隔離時に確認された症例に含まれる感染者の割合 ($0 \leq f \leq 1$)。この割合は時間とともに変化する可能性があります、簡単にするために一定であると仮定します。

私たちは

$$\frac{dS}{dt} = -a S \frac{I}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = a S \frac{I}{N} - b E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = b E - c I \quad (3)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = f c I, \quad (4)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = (1 - f) c I. \quad (5)$$

図1のデータにリンクするには $R_1(t)$ 現在確認されている累積症例数に対応 t 。私たちは定義します $R(t) = R_1(t) + R_2(t)$ 。私たちは

$$\frac{dR}{dt} = c I. \quad (6)$$

から推定 $R_1(0) = R_2(0) = 0$

$$R_1(t) = f R(t), \quad R_2(t) = (1 - f) R(t), \quad \forall t \geq 0.$$

流行が始まった当初、症例数は総人口に比べて非常に少ないため、 $S(t) \simeq N$ 、線形化につながります

$$\frac{dE}{dt} \simeq a I - b E, \quad \frac{dI}{dt} = b E - c I.$$

数字 $E(t)$ そして $I(t)$ 数字も $R_1(t)$ そして $R_2(t)$ したがって、指数関数的に成長する傾向があります $e^{\lambda t}$ 。 λ は行列の最大固有値です

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ b & -c \end{pmatrix}. \quad (7)$$

特性多項式は

$$\lambda^2 + (b+c)\lambda + b(c-a) = 0. \quad (8)$$

だから私たちは

$$\lambda = \frac{-(b+c) + \sqrt{(b+c)^2 - 4b(c-a)}}{2} = \frac{-(b+c) + \sqrt{(b-c)^2 + 4ab}}{2}. \quad (9)$$

[9]は、潜伏期間、つまり症状が発現する前の期間が5~6日であることを示しています。症状が現れる前に感染する可能性があるため、潜伏期間は少し短いかもしれませんが。潜伏期の平均期間は4日間に固定されています。これは1/b。だから私たちは取る $b = 0,25$ 1日あたり。

隔離前の感染性区画の平均時間、つまり $1/c$ は、多くの要因に依存するため、推定がより困難です。それはウイルスの生物学的特性、年齢などの人々の特性に依存しますが、国ごとに異なるケースの分離の迅速さにも依存します。フランスでの流行は、住民がすでにパンデミックの存在を十分に認識している間に起こります。患者はすぐに孤立しました。一部の人々は全く感染性ではありません。他の人々は隔離される数日前に感染します。平均が1日程度であるとします。モデルの形式は、分布が指数関数であることを意味します。この平均は、感染の80%が0日間感染性を維持し、感染の20%が分離する前に5日間感染性を維持する場合、より洗練されたモデルで得られます。まとめると、 $c = 1$ 1日あたり。

式 (9) から、

$$a = \frac{(2\lambda + b + c)^2 - (b - c)^2}{4b} = (\lambda + c) \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right). \quad (10)$$

これにより、観測された成長率 λ から有効接触率を数値で計算できます。

公衆衛生対策は、番号で有効接触率を分割することができることを想像 k よう $k > 1$ 。この数は、流行を止めるために少なくともどれだけの価値があるのでしょうか？この最小値は伝統的に注記されています R_0 それを「再現性」と呼んだ口トカに続いて [6, p. 102]。と $a' = a/R_0$ 、流行の新しい成長率 λ' ゼロでなければなりません。式 (8) によれば、これは $c - a/R_0 = 0$ そして

$$R_0 = \frac{a}{c} = \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{c}\right) \simeq 2,33$$

数値 ($\lambda \simeq 0,225$ 1日あたり) 図1の流行曲線で示唆されています。パラメーター b および c の不確実性を考えると、これは概算値にすぎません。

より技術的には (例 [7] を参照)、そのことに気づくでしょう。 R_0 マトリックスのスペクトル半径も

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -b & c \end{pmatrix}^{-1}.$$

非線形SEIRモデル (1) - (6) に戻ります。介入がまったくない場合の流行の最終的な大きさを決定する方法を思い出しましょう。これは簡単で、SIRモデルに使用される方法のよく知られている適応に加えて (たとえば、[4, p. 76] を参照)。式 (1) で、

$$\frac{d}{dt} \ln S = -\frac{a}{N} I(t).$$

したがって、 $t = 0$ そして $t = +\infty$ 、

$$\ln S(\infty) - \ln S(0) = -\frac{a}{N} \int_0^{\infty} I(t) dt. \quad (11)$$

$S(\infty)$ 制限を指定する場合 $t \rightarrow +\infty$ 機能の $S(t)$ 。この関数は減少して正です。と $R(0) = 0$ と方程式 (6)、

$$R(\infty) = c \int_0^{\infty} I(t) dt. \quad (12)$$

また、常に持っています $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$ 。流行はやがて止まります：

$$E(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \quad I(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

だから私たちは

$$S(\infty) + R(\infty) = N. \quad (13)$$

(11)、(12)、(13)を組み合わせることにより、

$$N - R(\infty) = S(0) \exp\left(-\frac{a}{c} \frac{R(\infty)}{N}\right).$$

流行が始まった当初、感染した人々はわずかでした。 $S(0) \simeq N$ 。伝染病の最終的な大きさの陰的方程式は、

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\mathcal{R}_0 \frac{R(\infty)}{N}\right), \quad (14)$$

これはたまたまSIRモデルと同じ形をしています[4]。と $\mathcal{R}_0 \simeq 2,33$ 、我々は気づく $R(\infty)/N \simeq 87\%$ 。これらのケースのほんのりが確認されています。

2.大幅な介入を伴う第2フェーズ

ある特定の日付 T で、新しい実効接触率が0に減少するように大幅な対策が講じられたとします。この時点で、 $R_1(T)$ 。たとえば、学校や公共の場所に関する措置が施行された3月15日の累積件数は5,423件でした。次に、これらの仮定の下で流行の新しい最終的なサイズ、または少なくとも確認されたものを予測できますか？

指数関数フェーズの終わりに向かって $t \leq T$ ケースの総数が依然として総人口のごく一部を占めている場合、

$$E(t) \simeq u e^{\lambda t}, \quad I(t) \simeq v e^{\lambda t}, \quad R(t) \simeq w e^{\lambda t}.$$

(u, v) は、行列 (7) の最大固有値に関連付けられた固有ベクトルです。 λ 。そう、

$$-b u + a v = \lambda u.$$

式 (10) を使用すると、

$$u = \frac{a v}{\lambda + b} = \frac{\lambda + c}{b} v.$$

だが $dR/dt \simeq \lambda R$ もし $t < T$ そして t が0に近すぎない場合。

$$I(T) = \frac{1}{c} \frac{dR}{dt}(T) \simeq \frac{\lambda}{c} R(T).$$

と $I(T) \simeq v e^{\lambda T}$ 、我々は持っています

$$E(T) \simeq u e^{\lambda T} = \frac{\lambda + c}{b} v e^{\lambda T} \simeq \frac{\lambda + c}{b} I(T) \simeq \left(\frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b}\right) R(T).$$

接点はゼロになっていると想定されています。私たちは $t > T$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = -b E, \quad (15)$$

他の式 (3)、(4)、(5) は同じままです。このシステムを解決する必要がない場合、流行の最終的なサイズは $R(\infty) = R(T) + E(T) + I(T)$ 。確かにあります $E(T) + I(T)$ 時間 t で コンパートメント R にまだ入っていない感染者。このように

$$R(\infty) \simeq R(T) \left(1 + \frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b} + \frac{\lambda}{c}\right) = R(T) \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{c}\right) = \mathcal{R}_0 R(T).$$

と $R_1(t) = f R(t)$ 、だから私たちは持っています

$$R_1(\infty) \simeq \mathcal{R}_0 R_1(T).$$

したがって、連絡先が特定の日付からゼロに減少した場合

- 流行が始まった直後、線形近似はまだ有効です
- 線形化されたシステムが最初の固有値に関連付けられた固有ベクトルに向かって収束するのに十分な時間をとるのに十分な大きさ

その後、流行の最終的なサイズ（確認済みまたは合計）は、この日付の累積的なケース数（確認済みまたは合計）に流行の再現性を掛けることによって得られるサイズに近くなります。SIRモデルについても、同様の結果が得られます。付録では、商を決定するのはもはや再現性ではないことに注意してください $R(\infty)/R(T)$ 指数関数的に分布するのではなく、より複雑な表現を持つ感染期間を持つモデルで。

と $R_1(T) = 5423$ そして $R_0 \simeq 2,33$ 、これは与える $R(\infty) \simeq 12600$ 。この結果に見られるパラメータ b と c の不確実性をもう一度強調しましょう。

人口集団の「成長の可能性」の概念との類似性があります[8, p. 176]。これは、最終的な定常人口と特定の瞬間の人口との間の比率です。この瞬間に出生率が再現性によって突然分割され、人口の成長率は漸近率ゼロになります。私たちの計算と同様に、キーフィッツは、初期人口がロトカの意味で「安定」している（つまり、最初の固有ベクトルによって与えられる）と仮定することで、「成長ポテンシャル」の比較的単純な式を取得しました。この式には再現性も含まれますが、SEIRモデルよりも複雑です[8, p. 179]。

また、 $R(T) + E(T) + I(T)$ 単一のデータから $R(T)$ 報告されているAIDS症例数からHIVと共に生きる人々の数を推定するために、HIV流行の初期段階で生じた問題に類似しています。

図2^a は、この2フェーズモデルを示しています。私たちは取った $N = 65 \times 10^6$ （フランスの人口）と初期条件

$$S(0) = N - 1, \quad E(0) = 1, \quad I(0) = 0, \quad R(0) = 0. \quad (16)$$

パラメータ a 式 (10) によって $\lambda = 0,225$ 図1のように、1日あたり。パラメータ f に関する情報はほとんどありません。振り返ってみると、老人ホームでのウイルスによる多数の死亡は、流行の開始時に確認された症例に数えられなかったことがわかります。たとえば、図では $f = 0.5$ を選択します。私たちは取った $T = 43,2$ 数日 $R_1(T) \simeq 5438$ 3月15日のデータ5423に近い。図より少し長くシミュレーションを続けると、数値的に $R_1(\infty)/R_1(T) \simeq 2,33 \simeq R_0$ 。

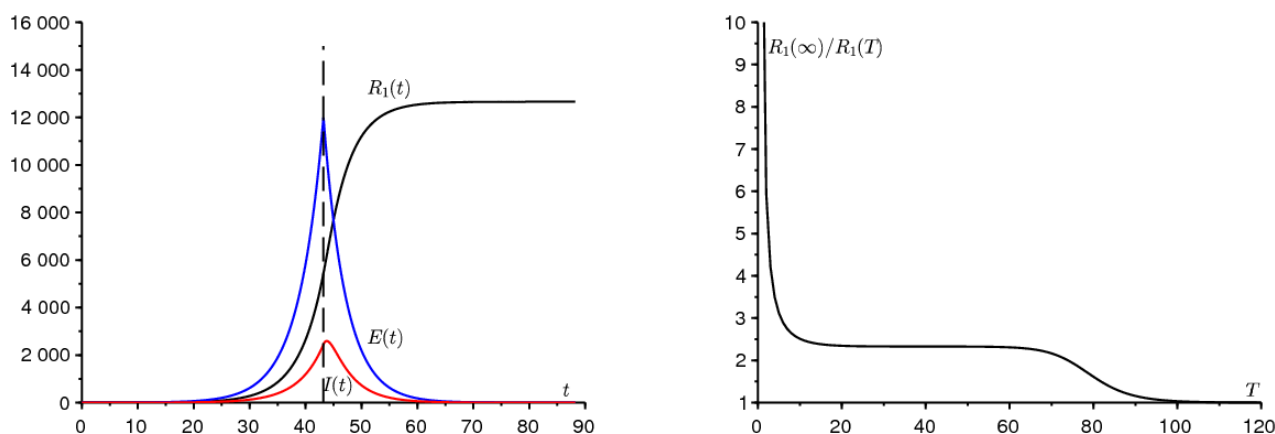


図2. a) 2相モデルのシミュレーションの例。b) 商 $R_1(\infty)/R_1(T)$ の面では T 。

図2^b 商がどのように $R_1(\infty)/R_1(T)$ 接触率がゼロに減少すると、時間 T の関数として変化します。この商が近い高原を実際に観察します R_0 。その場合 $T \rightarrow 0$ 、我々は持っています $R_1(T) \rightarrow 0$ そして $R_1(\infty) \rightarrow f(E(0) + I(0)) > 0$ 。だから私たちは $R_1(\infty)/R_1(T) \rightarrow +\infty$ 。商が近づく R_0 もし T は行列 (7) 二固有値の差の逆数のオーダーです。逆の場合 $T \rightarrow \infty$ 、その後、介入は遅すぎます。流行はすでに過ぎており、 $R_1(\infty)/R_1(T) \rightarrow 1$ 。と $N \rightarrow +\infty$ 、プレート幅、ここで $R_1(\infty)/R_1(T)$ に近い R_0 、おそらく成長する $(\ln N)/\lambda$ これは、たとえば、一定の係数を使用したSIRモデルの流行ピークまでの時間の振る舞いであるためです ([2]または[5, p. 12]を参照)。

3.汎化

実際には、有効接触率は確かに完全にゼロではありません $t > T$ 。取得した値 $R(\infty)$ それにもかかわらず、実際の値の下限と見なすことができます。なぜなら、流行の最終的なサイズは、ゼロではないコンタクトの場合よりも、ゼロではないコンタクトの場合の方が大きくなるからです。この問題については、接触率が変動するSIRまたはSEIRタイプの流行モデルは「単調」ではないことを思い出してください。 [1]。

接触率が0に減らされず、数値 q ($q > 1$)。0への削減は、境界線の場合に対応します。 $q \rightarrow +\infty$ 。私たちは $t > T$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{a}{q} S \frac{I}{N}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{a}{q} S \frac{I}{N} - bE, \quad (17)$$

式 (3)、(4)、(5) は同じままです。セクション1と同じ推論により、 $t > T$

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -\frac{a}{qcN} \frac{dR}{dt}.$$

$t = T$ と $t = +\infty$ の間で積分することにより、

$$\ln \frac{S(\infty)}{S(T)} = -\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty) - R(T)}{N},$$

と $\mathcal{R}_0 = a/c > 1$ そして $S(\infty) = N - R(\infty)$ 。だから私たちは

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} = \frac{S(T)}{N} \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty) - R(T)}{N}\right). \quad (18)$$

セクション2のように、時間 T が小さすぎず、長すぎない、つまり図2のプラトーにあると仮定します。^b。最初の近似として、 $S(T) \simeq N$ そして $R(T)$ に比べて小さい N 。次に、2つのケースが発生します。

その場合 $1 < q < \mathcal{R}_0$ 、古典的なグラフィカル引数[4]と同様に、方程式 (18) の左と右のメンバーを $R(\infty)/N$ 。ソリューションが $R(\infty)/N$ は無限小ではないが、方程式の厳密に正の解に近い

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty)}{N}\right). \quad (19)$$

逆の場合 $q > \mathcal{R}_0$ 、次に解決策 $R(\infty)/N$ 式 (18) の式は小さいです。と

$$S(T) = N - E(T) - I(T) - R(T), \quad E(T) + I(T) + R(T) \simeq \mathcal{R}_0 R(T),$$

式 (18) の指数の次数1への近似により、

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \left[1 - \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{N}\right] \left[1 - \frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty) - R(T)}{N}\right].$$

無視することによって $1/N^2$ 、我々は持っています

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq 1 - \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{N} - \frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty) - R(T)}{N}.$$

最終的に、

$$R(\infty) \simeq R(T) \mathcal{R}_0 \frac{1 - 1/q}{1 - \mathcal{R}_0/q}. \quad (20)$$

と $q \rightarrow +\infty$ 我々は持っています $R(\infty) \simeq R(T) \mathcal{R}_0$ 。また、 $(1 - 1/q)/(1 - \mathcal{R}_0/q) > 1$ 、それがあべきように。 (20) と同じ数式がバインドします $R_1(\infty)$ そして $R_1(T)$ 。

図3は、パラメータ q に応じて、伝染病の最終的なサイズを対数スケールで実線で示しています。システム (1) - (6) は、初期条件 (16) で $t < T$ について数値的にシミュレーションされました。システムは $t > T$ に対して数値的にシミュレーションされました (17)。図2のように^a、総人口は $N = 65 \times 10^6$ とパラメータ a 式 (10) によって $\lambda = 0,225$ 1日あたり。また撮りました $f = 0,5$ そして $T = 43,2$ 数日 $R_1(T) \simeq 5438$ 。図はまた、小さな円で、式 (20)

の値を示しています $q > \mathcal{R}_0$ 。最後に、小さなダイヤモンドでは、方程式 (19) の厳密に正の解が $q < \mathcal{R}_0$ 。2つの近似値がしきい値近くで有効でなくなることがわかります ($q = \mathcal{R}_0$)。

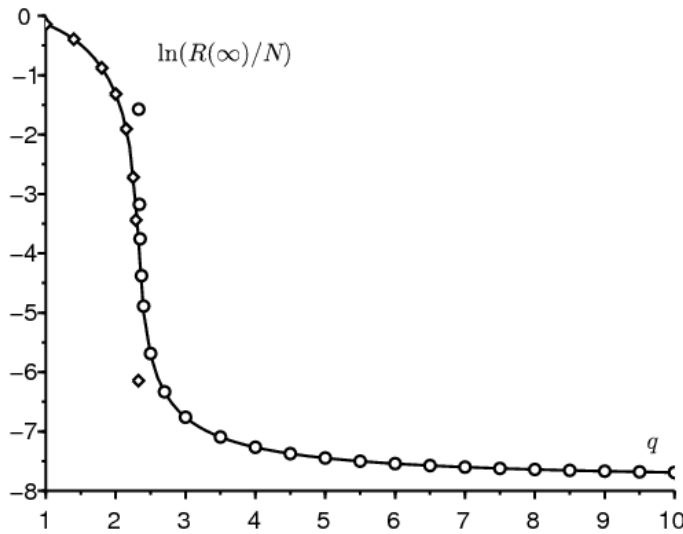


図3。 $\ln(R(\infty)/N)$ の面では q (実線)、有効な式 (20) (小さな円) と比較 $q > \mathcal{R}_0$ 方程式 (19) の解 (小さなひし形) は、 $q < \mathcal{R}_0$ 。

流行の最終的なサイズは、次の場合に数術異なることに注意してください $q \simeq \mathcal{R}_0$ 。定量化が難しいため、この領域では、流行の最終的なサイズを予測することも困難です。式 (20) を使用した予測が q の値の影響を受けにくくなるのは、パラメータ q が再現性よりも大幅に高い場合のみです。

4. パラメータ q の推定

図1に示されていない4月15日までのデータを含め、3月15日以降のデータにモデルのシミュレーションを当てはめて、パラメータ q を推定してみましょう。COVID-19の兆候がある患者が生物学的検査によって体系的に確認されなくなったことを考えると、フランスはもはや流行のダイナミクスを十分に反映していません。

データから始める $R_1(T) = 5423$ と関係

$$R(T) = R_1(T)/f, \quad R_2(T) = (1-f)R(T).$$

過去8日間のデータは特に適切に調整されているため、モデルのシミュレーションを

$$R(T-\tau) = e^{-\lambda\tau} R(T)$$

と $\lambda = 0,225$ 1日あたり $\tau = 8$ 日、および対応する見積もり

$$I(T-\tau) \simeq \frac{\lambda}{c} R(T-\tau), \quad E(T-\tau) \simeq \left(\frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b} \right) R(T-\tau), \quad S(T-\tau) = N - E(T-\tau) - I(T-\tau) - R(T-\tau).$$

実効接触率は a/q もし $t > T$ 。4月15日まで、確認済みの症例数をデータに合わせるようにしています。最適なフィット感 $q = 1,7$ 。この値はしきい値を下回っています \mathcal{R}_0 。封じ込め措置はまだ不十分であるようです。しかし、図の最後の点は、モデルとのギャップが実際の流行の減速の方向に拡大していることを示しています。選択された f の値は、適切でない場合や、流行時に変動した場合があります。あるいは、モデルが少し単純すぎるかもしれません。特に、異なるコンパートメントで費やされた時間の非指数関数的な分布が、曲線が曲がり始める瞬間に影響を与えることが予想されます。

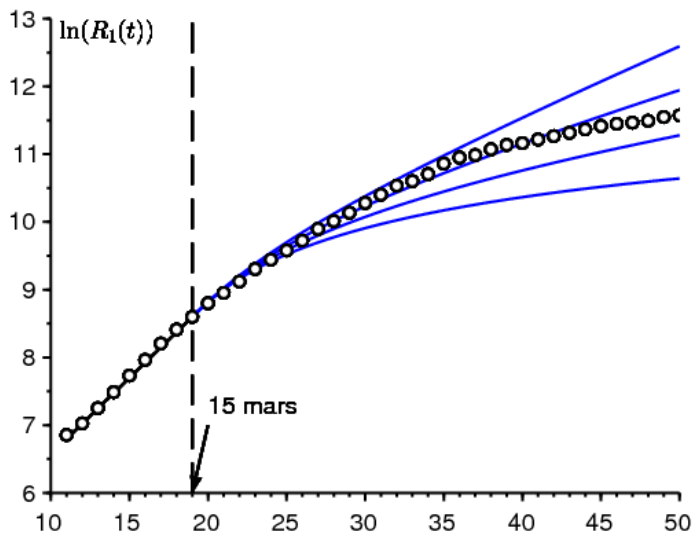


図4. 3月7日から4月15日までに確認された症例数の自然対数（小さな円、Santé publique France [11]）および $\ln(R_1(t))$ 時間の関数として t 上から下への4つのシミュレーション $q \in \{1,5; 1,7; 2; 2,5\}$ 。

結論として、接触率が特定の日付から減少する2段階のシナリオを検討しました。減少時に検出された症例数に基づいて、流行の最終的なサイズの簡単な近似式を見つけました。ただし、この結果をさらに厳密に示し、実証する必要があります。おそらく、 $N \rightarrow +\infty$ 。

ありがとう

感謝します Hisashi Inaba、Ali Moussaoui そして Frédéric Hamelin 原稿へのコメントのため。

補助計算

記法を用いて、必ずしも指数関数的に分布するとは限らない感染期間をもつSIRモデルを考えます。

- $I(t, x)$: 時間 t の x 時間単位以降の感染者の密度
- $a(x)$: 実効接触率;
- $b(x)$: 感染した人々が感染の伝染を止める割合。

流行の始まりに

$$\begin{aligned} I(t, 0) &\simeq \int_0^\infty a(x) I(t, x) dx \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} &= -b(x) I(t, x) \\ \frac{dR}{dt} &= \int_0^\infty b(x) I(t, x) dx \end{aligned}$$

ロトカの安定人口理論[6]のように、

$$I(t, x) \simeq k e^{\lambda t} e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy}.$$

k は定数です。成長率 λ は、方程式の唯一の解です

$$1 = \int_0^\infty a(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx.$$

と $I(t) = \int_0^\infty I(t, x) dx$ 、問題は推定することです $I(T) + R(T)$ から $R(T)$ 。だが

$$\lambda R(T) \simeq \frac{dR}{dt}(T) = \int_0^\infty b(x) I(T, x) dx \simeq \int_0^\infty b(x) k e^{\lambda T} e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx.$$

私たちはそれを推測します

$$k \simeq \frac{\lambda R(T) e^{-\lambda T}}{\int_0^\infty b(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx}.$$

最終的に、

$$\frac{I(T) + R(T)}{R(T)} \simeq \frac{\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy}}{\int_0^\infty b(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy}} + 1.$$

この結果は、次の式と一致する特別な理由がないことがわかります

$$\mathcal{R}_0 = \int_0^\infty a(x) e^{-\int_0^x b(y) dy} dx.$$

レートが一定である特別なケースでは、 $a(x) \equiv a$ そして $b(x) \equiv b$ 、しかしながら、 $\lambda = a - b$ など

$$\frac{I(T) + R(T)}{R(T)} \simeq \frac{\lambda}{b} + 1 = \frac{a}{b} = \mathcal{R}_0.$$

参考文献

1. Bacaër N., Gomes M. G. M. (2009) Sur la taille finale des épidémies avec saisonnalité. Bull. Math. Biol. 71 : 1954 – 1966. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01299608>
2. Bacaër N. (2020) Sur le pic épidémique dans un modèle S – I – R, Quadrature 117 : 1 – 4. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02518993>
3. Corlosquet – Habart M., Janssen J., Manca R. (2012) Modélisation stochastique du risque de pandémie : stratégies de couverture et d'assurance. Lavoisier, Cachan.
4. Hillion A. (1986) Les Théories mathématiques des populations. Presses Universitaires de France, Paris.
5. Lauwerier H. A. (1984) Mathematical Models of Epidemics. Mathematisch Centrum, Amsterdam.
6. Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie. Hermann, Paris.
7. Nkague Nkamba L. (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine et Université Gaston Berger.
8. Pressat R. (1995) Éléments de démographie mathématique. AIDELF, Paris.
9. Sansonetti Ph. (2020) Covid – 19 ou la chronique d'une émergence annoncée. Exposé, Collège de France, 18 mars 2020.
10. Santé publique France (2020) Covid – 19, point épidémiologique hebdomadaire du 09 avril 2020. www.santepubliquefrance.fr
11. https://fr.wikipedia.org/wiki/Pand%C3%A9mie_de_Covid-19_en_France