

Математическая модель возникновения эпидемии коронавируса во Франции

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
Отдел математического и компьютерного моделирования сложных систем
Les Cordeliers, Париж, Франция
nicolas.bacaer@ird.fr

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>

резюме

Мы изучаем двухфазную математическую модель SEIR, основанную на эпидемии коронавируса. Если контакты уменьшаются до нуля с определенной даты T , близкой к началу эпидемии, конечный размер эпидемии близок к тому, который получается путем умножения числа $R(T)$ совокупных случаев в эту дату по воспроизводимости \mathcal{R}_0 эпидемии. В более общем случае, если контакты делятся на число q в момент времени T , чтобы $\mathcal{R}_0/q < 1$, то окончательный размер эпидемии близок к $R(T) \mathcal{R}_0 (1 - 1/q)/(1 - \mathcal{R}_0/q)$. Параметры модели приблизительно соответствуют данным, касающимся коронавируса во Франции.

1. Модель

Рисунок 1^a показывает совокупное число подтвержденных случаев коронавируса во Франции в период с 25 февраля по 29 марта 2020 года; эти данные включают как городские медико-биологические лаборатории, так и госпитализированных пациентов [10]. Мы должны отличить дату 15 марта, от которой внезапно были приняты решительные меры для прекращения эпидемии (закрытие школ, ресторанов и т. Д.). За эти три даты совокупное число подтвержденных случаев увеличилось с 13 до 423 затем к 40 174, Рисунок 1^b показывает те же данные в логарифмических координатах, а также линии линейной регрессии. Есть три периода: в первом, который длится до 6 марта, рост быстрый, но довольно неравномерный; во втором, который продлится до 15 марта, рост будет немного медленнее, но устойчивым; в третьем, с 16 марта, рост медленный, но все еще устойчивый. Если мы скорректируем линию по всем первым двум периодам, которая идет с 25 февраля по 15 марта, мы обнаружим, что число случаев увеличивается по мере $e^{\lambda t}$ со скоростью $\lambda \simeq 0,31$ в день (красным). Время удвоения $(\ln 2)/\lambda \simeq 2,2$ дней. Если, с другой стороны, мы ограничимся вторым периодом с данными, которые особенно хорошо выровнены в логарифмическом масштабе, мы получим $\lambda \simeq 0,225$ в день и удвоение времени 3,1 дни (синим цветом). Поскольку данные в начале эпидемии искажены большой долей новых завозных случаев и стохастическими эффектами, вторая оценка, вероятно, является наиболее достоверной. На третий период, после принятия решительных мер, время удвоения переходит к 4,9 дней.

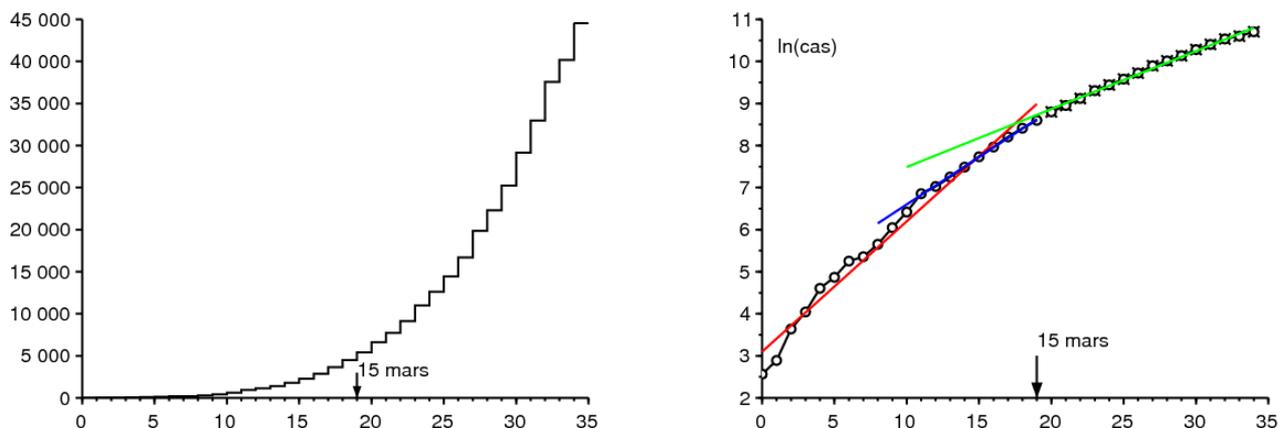


Рисунок 1. а) Совокупное количество подтвержденных случаев заболевания во Франции в период с 25 февраля по 29 марта 2020 года, согласно публикации Santé publique France и [11]. б) натуральный логарифм этого числа и линии линейной регрессии.

Мы собираемся изучить математическую модель, вдохновленную этой эпидемией. Давайте разделим французское население на пять частей в соответствии с вариантом классической модели SEIR (см., Например, [3, с. 61]): вероятность заражения (S), инфицированных в латентной фазе, другими словами, еще не заразных (E), заразных без защиты (I) и исключен из цепи передачи путем включения в число подтвержденных случаев (R_1) или не будучи (R_2). Таким образом, каждый из этих двух последних отсеков включает как тех, кто все еще заразен, но изолирован, так и тех, кто больше не

заразен, потому что выздоровел или умер. У некоторых пациентов наблюдаются легкие симптомы, и они остаются дома без обследования, другие живут в домах престарелых и не прошли обследования, несмотря на осложнения или даже смерть; эти категории находятся в купе R_2 . Очевидно, что мы можем усовершенствовать эту модель до бесконечности, чтобы сделать ее более реалистичной, но мы постарались максимально ограничить количество неизвестных параметров; Основная цель также заключается в получении теоретического результата, касающегося окончательного размера эпидемии.

Давайте введем некоторые обозначения:

- N : общая численность населения (считается большой), так что $N = S(t) + E(t) + I(t) + R_1(t) + R_2(t)$;
- a эффективная скорость контакта;
- b : скорость, с которой скрытые инфицированные люди становятся заразными;
- c : средняя скорость, с которой инфекционные люди изолированы и, следовательно, удалены от цепи передачи;
- f : доля инфекционных людей, которые включены в число случаев, подтвержденных во время изоляции ($0 \leq f \leq 1$); эта доля может меняться со временем, но для простоты будем считать, что она постоянна.

то

$$\frac{dS}{dt} = -a S \frac{I}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = a S \frac{I}{N} - b E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = b E - c I \quad (3)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = f c I, \quad (4)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = (1 - f) c I. \quad (5)$$

Для ссылки на данные на рисунке 1, $R_1(t)$ соответствует совокупному числу подтвержденных случаев на данный момент t , Если мы заметим $R(t) = R_1(t) + R_2(t)$ мы заметили, что

$$\frac{dR}{dt} = c I. \quad (6)$$

Мы выводим из $R_1(0) = R_2(0) = 0$ что $R_1(t) = f R(t)$ и $R_2(t) = (1 - f)R(t)$ для всего $t \geq 0$,

В начале эпидемии число случаев остается очень небольшим по сравнению с общей численностью населения, поэтому $S(t) \simeq N$, что приводит к линеаризации

$$\frac{dE}{dt} \simeq a I - b E, \quad \frac{dI}{dt} = b E - c I.$$

номера $E(t)$ и $I(t)$ но и цифры $R_1(t)$ и $R_2(t)$ поэтому имеют тенденцию расти в геометрической прогрессии как $e^{\lambda t}$ где λ наибольшее собственное значение матрицы

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ b & -c \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Характеристический полином

$$\lambda^2 + (b + c)\lambda + b(c - a) = 0. \quad (8)$$

поэтому

$$\lambda = \frac{-(b + c) + \sqrt{(b + c)^2 - 4b(c - a)}}{2} = \frac{-(b + c) + \sqrt{(b - c)^2 + 4ab}}{2}. \quad (9)$$

[9] указывает, что инкубационный период, то есть период до появления симптомов, составляет от 5 до 6 дней. Латентный период может быть немного короче, так как человек может заразиться до появления симптомов. Средняя продолжительность в латентной фазе составляет 4 дня. Это $1/b$, поэтому $b = 0,25$ в день

Среднее время в инфекционном отделении до изоляции, которое составляет $1/c$, сложнее оценить, потому что это зависит от многих факторов. Это зависит от биологических характеристик вируса, от характеристик людей, таких как их возраст, а также от скорости, с которой изолируются случаи заболевания, которая варьируется от страны к стране. Эпидемия во Франции происходит, когда жители уже хорошо осведомлены о существовании пандемии; пациенты не долго изолированы. Некоторые не будут заразными вообще, другие будут за несколько дней до изоляции. Предположим, что среднее значение составляет порядка 1 дня, форма модели подразумевает, что распределение является экспоненциальным. Это среднее было бы получено в более точной модели, если бы 80% зараженных оставались заразными в течение 0 дней и

если 20% зараженных оставались заразными в течение 5 дней, прежде чем быть изолированными. В итоге мы выбрали $c = 1$ в день

Из формулы (9) выводим, что

$$a = \frac{(2\lambda + b + c)^2 - (b - c)^2}{4b} = (\lambda + c) \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right). \quad (10)$$

что позволило бы рассчитать эффективную скорость контакта численно a от наблюдаемой скорости роста λ ,

Представьте себе, что меры общественного здравоохранения могут разделить эффективную частоту контактов на число k , так что $k > 1$. Сколько должно стоить это число, чтобы хотя бы остановить эпидемию? Это минимальное значение, традиционно отмечаемое \mathcal{R}_0 вслед за Лоткой и назвал им «воспроизводимость» [6, с. 102], получается просто заметив, что когда a заменяется $a' = a/\mathcal{R}_0$, новый темп роста эпидемии λ' должен быть ноль. Согласно уравнению (8) это приводит к $c - a/\mathcal{R}_0 = 0$ и к

$$\mathcal{R}_0 = \frac{a}{c} = \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{c}\right) \simeq 2,33$$

если мы используем числовое значение ($\lambda \simeq 0,225$ в день), предложенный эпидемической кривой на рисунке 1. Виды неопределенности параметров b и c , это может быть только приблизительное значение.

Более технически (см., Например, [7]) можно было бы заметить, что \mathcal{R}_0 был также спектральный радиус матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -b & c \end{pmatrix}^{-1}.$$

Вернемся к нелинейной модели SEIR (1) - (6). Давайте вспомним, как определить окончательный размер эпидемии при полном отсутствии вмешательства; это простая и, кроме того, хорошо известная адаптация метода, используемого для модели SIR (см., например, [4, с. 76]). Уравнение (1) показывает, что

$$\frac{d}{dt} \ln S = -\frac{a}{N} I(t).$$

Таким образом, путем интеграции $t = 0$ в $t = +\infty$,

$$\ln S(\infty) - \ln S(0) = -\frac{a}{N} \int_0^{\infty} I(t) dt, \quad (11)$$

где $S(\infty)$ обозначает предел, когда $t \rightarrow +\infty$ функции $S(t)$ который уменьшается и положительный. $cR(0) = 0$ уравнение (6) показывает, что

$$R(\infty) = c \int_0^{\infty} I(t) dt. \quad (12)$$

Кроме того, у нас всегда $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$, если $t \rightarrow +\infty$ тогда эпидемия заканчивается в конце концов: $E(t) \rightarrow 0$ и $I(t) \rightarrow 0$, поэтому

$$S(\infty) + R(\infty) = N. \quad (13)$$

Объединяя (11), (12) и (13), мы видим, что

$$N - R(\infty) = S(0) \exp\left(-\frac{a}{c} \frac{R(\infty)}{N}\right).$$

В начале эпидемии среди населения было всего несколько инфицированных, поэтому $S(0) \simeq N$, неявное уравнение для окончательного размера эпидемии можно записать в виде

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\mathcal{R}_0 \frac{R(\infty)}{N}\right), \quad (14)$$

которая имеет ту же форму, что и для модели SIR [4]. $c\mathcal{R}_0 \simeq 2,33$ мы находим $R(\infty)/N \simeq 87\%$, Только часть f из этих случаев подтверждается.

2. Второй этап с резким вмешательством

Представьте себе, что в определенную дату T принимаются радикальные меры, чтобы новая эффективная скорость контакта была снижена до 0. Предположим, что в этот момент имеется совокупное число подтвержденных случаев, равное $R_1(T)$, Например, были 5 423 кумулятивные дела 15 марта, когда вступили в силу меры, касающиеся школ и общественных

мест. Можем ли мы тогда предсказать, каким будет новый конечный размер эпидемии при этих предположениях? $R(\infty)$ или хотя бы один подтвержденный $R_1(\infty)$?

К концу экспоненциальной фазы, где $t \leq T$ и где общее число случаев все еще представляет крошечную часть общей численности населения, мы имеем

$$E(t) \simeq u e^{\lambda t}, \quad I(t) \simeq v e^{\lambda t}, \quad R(t) \simeq w e^{\lambda t},$$

где (u, v) является собственным вектором, связанным с наибольшим собственным значением матрицы (7), т.е. λ . Таким образом, $-bu + av = \lambda u$. С помощью уравнения (10) находим, что

$$u = \frac{av}{\lambda + b} = \frac{\lambda + c}{b} v.$$

но $dR/dt \simeq \lambda R$ для $t < T$ если t не слишком близко к 0. Так

$$I(T) = \frac{1}{c} \frac{dR}{dt}(T) \simeq \frac{\lambda}{c} R(T).$$

с $I(T) \simeq v e^{\lambda T}$ у нас есть

$$E(T) \simeq u e^{\lambda T} = \frac{\lambda + c}{b} v e^{\lambda T} \simeq \frac{\lambda + c}{b} I(T) \simeq \left(\frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b} \right) R(T).$$

Контакты должны быть сведены к нулю, мы имеем для $t > T$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = -bE, \quad (15)$$

в то время как другие уравнения (3), (4) и (5) остаются идентичными. Без необходимости решать эту систему, ясно, что окончательный размер эпидемии будет $R(\infty) = R(T) + E(T) + I(T)$, поскольку есть $E(T) + I(T)$ инфицированные лица, которые еще не в момент времени T в отсеках R . таким образом

$$R(\infty) \simeq R(T) \left(1 + \frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b} + \frac{\lambda}{c} \right) = R(T) \left(1 + \frac{\lambda}{b} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{c} \right) = \mathcal{R}_0 R(T).$$

Так как во все времена $R_1(t) = f R(t)$ мы также выводим, что

$$R_1(\infty) \simeq \mathcal{R}_0 R_1(T).$$

Таким образом, если контакты уменьшаются до нуля с определенной даты, близкой к началу эпидемии, - достаточно близко, чтобы линейное приближение оставалось действительным, но не слишком близко, чтобы линеаризованная система успела сходить к собственному вектору, связанному с первым собственным значением - тогда окончательный размер (подтвержденный или общий) эпидемии близок к тому, который получен путем умножения совокупного числа случаев (подтвержденных или общих) на эту дату на репродуктивная \mathcal{R}_0 эпидемии. Аналогичный результат получается аналогичным образом для модели SIR. В приложении мы отмечаем, однако, что это больше не \mathcal{R}_0 который определяет частное $R(\infty)/R(T)$ в моделях с инфекционным периодом, который не распределен по экспоненте, но более сложное выражение.

с $R_1(T) = 5423$ и $\mathcal{R}_0 \simeq 2,33$, это дает $R(\infty) \simeq 12600$, Опять же, выделите неопределенность вокруг параметров b и c , что отражается на стоимости $R_1(\infty)$,

Отметим попутно аналогию с понятием «потенциал роста» населения в демографии [8, с. 176]. Это соотношение между конечной стационарной популяцией и населением в определенный момент, если рождаемость внезапно делится в этот момент на воспроизводимость \mathcal{R}_0 , так что население остается с асимптотической скоростью нулевого роста. Как и в наших расчетах, именно в предположении, что начальная популяция является «стабильной» в смысле Лотки (то есть заданной первым собственным вектором), Кейфитц получил относительно простую формулу для потенциала увеличения, формула, которая также включает в себя \mathcal{R}_0 хотя и более сложным способом, чем для нашей модели SEIR [8, с. 179].

Отметим также, что оценка $R(T) + E(T) + I(T)$ из данных $R(T)$ только одна из них аналогична проблеме, возникшей в начале эпидемии ВИЧ, для оценки числа ВИЧ-инфицированных людей из числа зарегистрированных случаев СПИДа.

Рисунок 2^a иллюстрирует эту двухфазную модель. Мы взяли $N = 65 \times 10^6$ (население Франции) и начальные условия

$$S(0) = N - 1, \quad E(0) = 1, \quad I(0) = 0, \quad R(0) = 0. \quad (16)$$

Параметр a дается формулой (10) с $\lambda = 0,225$ в день, как на рисунке 1. Имеется мало информации о параметре f , за исключением того, что в ретроспективе большое количество смертей от вируса в домах престарелых не учитывалось случаи, подтвержденные в начале эпидемии; давайте исправим например $f = 0,5$ для иллюстрации. Мы взяли $T = 43,2$ дни

так $R_1(T) \simeq 5438$ быть близко к данным 542315 марта. Продолжая моделирование немного дольше, чем на рисунке, мы находим численно, что $R_1(\infty)/R_1(T) \simeq 2,33 \simeq \mathcal{R}_0$,

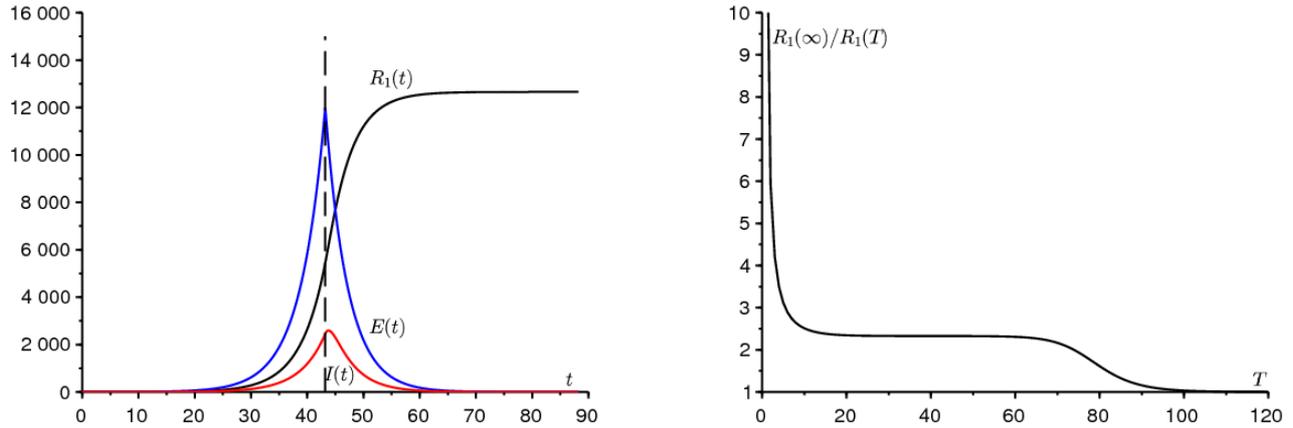


Рисунок 2. а) Пример моделирования двухфазной модели. б) частное $R_1(\infty)/R_1(T)$ в зависимости от T ,

Рисунок 2^b показывает, как частное $R_1(\infty)/R_1(T)$ варьируется в зависимости от времени T где скорость контакта снижается до нуля. На самом деле мы наблюдаем плато, где этот коэффициент близок к \mathcal{R}_0 , если $T \rightarrow 0$ то $R_1(T) \rightarrow 0$ и $R_1(\infty) \rightarrow f(E(0) + I(0)) > 0$, поэтому $R_1(\infty)/R_1(T) \rightarrow +\infty$. Факторные подходы \mathcal{R}_0 если T имеет порядок, обратный разности между двумя собственными значениями матрицы (7). Если наоборот $T \rightarrow \infty$ тогда вмешательство приходит слишком поздно; эпидемия уже прошла и $R_1(\infty)/R_1(T) \rightarrow 1$, если $N \rightarrow +\infty$ тогда ширина лотка, где $R_1(\infty)/R_1(T)$ близко к \mathcal{R}_0 , вероятно, растет как $(\ln N)/\lambda$ так как это, например, поведение времени до пика эпидемии в модели SIR с постоянными коэффициентами (см. [2] или [5, с. 12]).

3. Обобщение

На самом деле эффективная скорость контакта, конечно, не совсем равна нулю для $t > T$. Значение, полученное за $R(\infty)$ тем не менее может рассматриваться как нижний предел реальной стоимости. Потому что несомненно, что окончательный размер эпидемии будет больше с контактами, которые не равны нулю, чем с контактами, которые равны нулю. По этому вопросу следует напомнить, что эпидемические модели типа SIR или SEIR с переменной частотой контактов не являются «монотонными», в том смысле, что снижение частоты контактов может иногда приводить к большему конечному размеру эпидемии. [1].

Теперь рассмотрим случай, когда скорость контакта не уменьшается до 0, а делится на число q ($q > 1$). Снижение до 0 соответствует пограничному случаю, когда $q \rightarrow +\infty$, у нас есть для $t > T$,

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{a}{q} S \frac{I}{N}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{a}{q} S \frac{I}{N} - bE, \quad (17)$$

в то время как уравнения (3), (4) и (5) остаются неизменными. По тем же соображениям, что и в разделе 1, мы имеем для $t > T$

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -\frac{a}{q c N} \frac{dR}{dt}.$$

Путем интегрирования между $t = T$ и $t = +\infty$ мы выводим, что

$$\ln \frac{S(\infty)}{S(T)} = -\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty) - R(T)}{N},$$

где $\mathcal{R}_0 = a/c > 1$, с $S(\infty) = N - R(\infty)$ у нас есть

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} = \frac{S(T)}{N} \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty) - R(T)}{N}\right). \quad (18)$$

Как и в разделе 2, предположим, что время T не является ни слишком маленьким, ни слишком большим, то есть на плато на фиг. 2^b. В первом приближении $S(T) \simeq N$ и $R(T)$ маленький по сравнению с N . Тогда возникают два случая.

если $1 < q < \mathcal{R}_0$, тогда классический графический аргумент [4], который состоит в том, чтобы нарисовать левый и правый члены уравнения (18) как функцию $R(\infty)/N$ показывает, что решение $R(\infty)/N$ не бесконечно мала, но близка к строго положительному решению уравнения

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty)}{N}\right). \quad (19)$$

Если наоборот $q > \mathcal{R}_0$ тогда решение $R(\infty)/N$ уравнения (18) мало. с $S(T) = N - E(T) - I(T) - R(T)$ и $E(T) + I(T) + R(T) \simeq \mathcal{R}_0 R(T)$ аппроксимация порядка 1 экспоненты в уравнении (18) приводит к

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \left[1 - \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{N}\right] \left[1 - \frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty) - R(T)}{N}\right].$$

Пренебрегая $1/N^2$ мы находим, что

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq 1 - \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{N} - \frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty) - R(T)}{N}.$$

наконец,

$$R(\infty) \simeq R(T) \mathcal{R}_0 \frac{1 - 1/q}{1 - \mathcal{R}_0/q}. \quad (20)$$

если $q \rightarrow +\infty$ таким образом, мы находим, что $R(\infty) \simeq R(T) \mathcal{R}_0$. Мы также заметили, что $(1 - 1/q)/(1 - \mathcal{R}_0/q) > 1$ так и должно быть. Формула, идентичная (20), связывает $R_1(\infty)$ и $R_1(T)$,

Рисунок 3 показан сплошной линией в зависимости от параметра q окончательный размер эпидемии в логарифмическом масштабе, $\ln(R(\infty)/N)$, полученные путем численного моделирования системы (1) - (6) для $t < T$ с начальными (16) и системными (17) условиями для $t > T$. Как на рисунке 2^a, общая численность населения $N = 65 \times 10^6$ и параметр a дается формулой (10) с $\lambda = 0,225$ в день; мы снова взяли $f = 0,5$ и $T = 43,2$ дни так $R_1(T) \simeq 5\,438$. На рисунке также показаны маленькими кружками, что формула (20) дает для $q > \mathcal{R}_0$. Наконец, с маленькими бриллиантами показано строго положительное решение уравнения (19) для $q < \mathcal{R}_0$. Мы видим, что два приближения перестают быть действительными вблизи порога ($q = \mathcal{R}_0$).

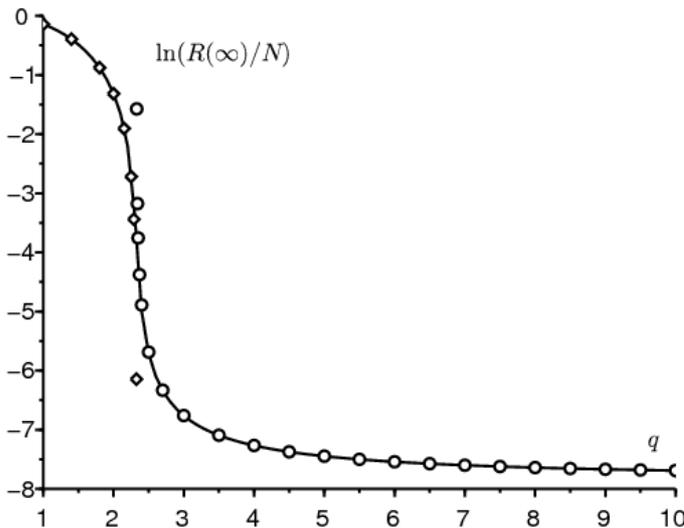


Рисунок 3 $\ln(R(\infty)/N)$ в зависимости от q (сплошная линия), по сравнению с формулой (20) (маленькие кружки), действительной для $q > \mathcal{R}_0$ и с решением уравнения (19) (мелкие бриллианты) справедливо для $q < \mathcal{R}_0$,

Обратите внимание, что окончательный размер эпидемии изменяется на несколько порядков, когда параметр q близок к \mathcal{R}_0 . Поскольку количественно определить сложно, прогнозировать окончательный размер эпидемии также сложно в этой области. Только если параметр q значительно больше, чем \mathcal{R}_0 что прогноз с формулой (20) становится менее чувствительным к значению q .

4. Оценка параметра q

Попробуем оценить параметр q , подгоняя имитацию модели к данным после 15 марта, включая данные до 15 апреля, которые не были показаны на рисунке 1. [10] тем не менее предупреждает, что «число случаев, подтвержденных в Франция более не удовлетворительно отражает динамику эпидемии», учитывая, что «пациенты с признаками COVID-19 более не систематически подтверждаются биологическим тестом».

Начнем с данных $R_1(T) = 5423$ и отношения $R(T) = R_1(T)/f$ и $R_2(T) = (1 - f)R(T)$, Поскольку данные за предыдущие 8 дней особенно хорошо выровнены, мы начинаем моделирование нашей модели с $R(T - \tau) = e^{-\lambda\tau} R(T)$ где $\lambda = 0,225$ в день и $\tau = 8$ дней, и с соответствующими оценками $I(T - \tau) \simeq \frac{\lambda}{c} R(T - \tau)$, $E(T - \tau) \simeq (\frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b}) R(T - \tau)$ и $S(T - \tau) = N - E(T - \tau) - I(T - \tau) - R(T - \tau)$,

для $t > T$ эффективная скорость контакта a/q , Мы пытаемся приспособить количество подтвержденных случаев к данным до 15 апреля. Лучше всего подходит вокруг $q = 1,7$, Поскольку это значение ниже порога \mathcal{R}_0 Похоже, что меры сдерживания все еще недостаточны. Но самые последние точки на рисунке показывают, что разрыв с моделью растет в направлении замедления реальной эпидемии. Значение f выбранный не подходит или изменился в течение эпидемии Или, может быть, модель слишком упрощенная; в частности, ожидается, что неэкспоненциальное распределение времени, проведенного в разных отсеках, будет влиять на момент, когда кривая начнет изгибаться.

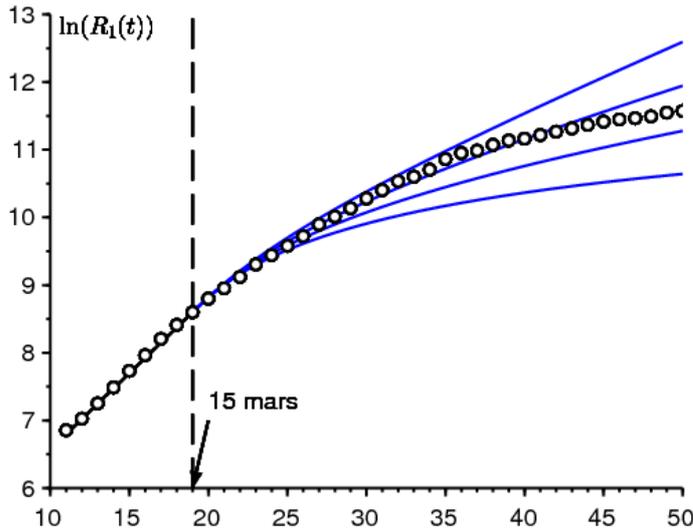


Рисунок 4. Натуральный логарифм числа подтвержденных случаев в период с 7 марта по 15 апреля (маленькие кружки, данные из Santé publique France [11]) и $\ln(R_1(t))$ как функция времени t в 4 симуляциях сверху вниз $q \in \{1,5; 1,7; 2; 2,5\}$,

В заключение мы исследовали двухэтапный сценарий, в котором скорость контакта снижается с определенной даты. Мы нашли простую приближительную формулу для окончательного размера эпидемии, основанную на количестве случаев, выявленных во время сокращения. Тем не менее, остается утверждать и демонстрировать этот результат более строго, вероятно, делая его асимптотическим результатом, когда $N \rightarrow +\infty$,

спасибо

Мы благодарим Hisashi Inaba, Ali Moussaoui и Frédéric Hamelin за их комментарии к рукописи.

приложение

Рассмотрим модель SIR с инфекционным периодом, который не обязательно распределен экспоненциально, с обозначениями

- $I(t, x)$: плотность людей, зараженных от x единиц времени до времени t ;
- $a(x)$ эффективная скорость контакта;
- $b(x)$: скорость, с которой зараженные люди прекращают передачу инфекции.

У нас в начале эпидемии

$$I(t, 0) \simeq \int_0^\infty a(x) I(t, x) dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} = -b(x) I(t, x)$$

$$\frac{dR}{dt} = \int_0^\infty b(x) I(t, x) dx$$

Как и в теории устойчивого населения Лотки [6], мы выводим, что

$$I(t, x) \simeq k e^{\lambda t} e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy}$$

где k постоянная и скорость роста λ является единственным решением уравнения

$$1 = \int_0^{\infty} a(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx.$$

если $I(t) = \int_0^{\infty} I(t, x) dx$ проблема состоит в том, чтобы оценить $I(T) + R(T)$ от $R(T)$, золото

$$\lambda R(T) \simeq \frac{dR}{dt}(T) = \int_0^{\infty} b(x) I(T, x) dx \simeq \int_0^{\infty} b(x) k e^{\lambda T} e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx.$$

Мы выводим, что

$$k \simeq \frac{\lambda R(T) e^{-\lambda T}}{\int_0^{\infty} b(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx}.$$

наконец,

$$\frac{I(T) + R(T)}{R(T)} \simeq \frac{\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx}{\int_0^{\infty} b(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx} + 1.$$

Мы видим, что этот результат не имеет особых причин совпадать с $\mathcal{R}_0 = \int_0^{\infty} a(x) e^{-\int_0^x b(y) dy} dx$, В особом случае, когда ставки постоянны, с $a(x) \equiv a$ и $b(x) \equiv b$ Однако $\lambda = a - b$ и, следовательно, $(I(T) + R(T))/R(T) \simeq \frac{\lambda}{b} + 1 = \frac{a}{b} = \mathcal{R}_0$,

ССЫЛКИ

1. Bacaër N. , Gomes M. G. M. (2009) Sur la taille finale des épidémies avec saisonnalité. Bull. Math. Biol. 71 : 1954 – 1966. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01299608>
2. Bacaër N. (2020) Sur le pic épidémique dans un modèle S – I – R, Quadrature 117 : 1 – 4. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02518993>
3. Corlosquet – Habart M. , Janssen J. , Manca R. (2012) Modélisation stochastique du risque de pandémie : stratégies de couverture et d'assurance. Lavoisier, Cachan.
4. Hillion A. (1986) Les Théories mathématiques des populations. Presses Universitaires de France, Paris.
5. Lauwerier H. A. (1984) Mathematical Models of Epidemics. Mathematisch Centrum, Amsterdam.
6. Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie. Hermann, Paris.
7. Nkague Nkamba L. (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine et Université Gaston Berger.
8. Pressat R. (1995) Éléments de démographie mathématique. AIDELF, Paris.
9. Sansonetti Ph. (2020) Covid – 19 ou la chronique d'une émergence annoncée. Exposé, Collège de France, 18 mars 2020.
10. Santé publique France (2020) Covid – 19, point épidémiologique hebdomadaire du 09 avril 2020. www.santepubliquefrance.fr
11. https://fr.wikipedia.org/wiki/Pand%C3%A9mie_de_Covid-19_en_France