

نموذج رياضي لبيدات وباء الفيروس التاجي في فرنسا

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement

وحدة النمذجة الرياضية والحاسوبية للأظمة المعقدة

باريس ، فرنسا ، Les Cordeliers

nicolas.bacaer@ird.fr

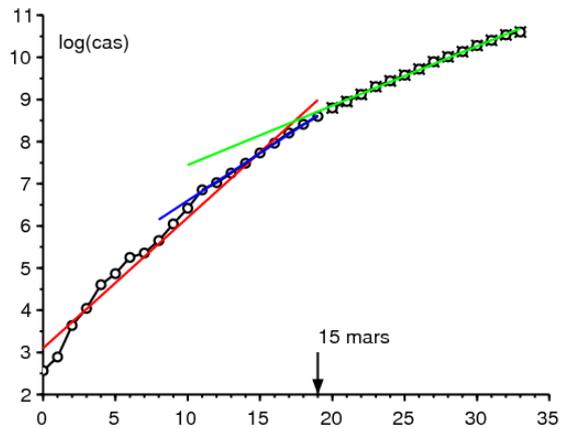
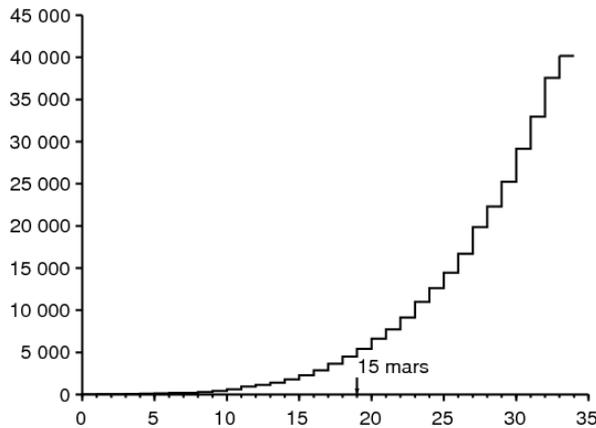
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>

المخلص

مع البيانات الوبائية للفيروس التاجي الجديد في فرنسا في عام 2020. إذا تم تخفيض جهات الاتصال إلى صفر من تاريخ معين $SEIR T$ نحن نلائم نموذج الوباء من نوع قريب من بداية الوباء ، الحجم النهائي للوباء قريب من ذلك الذي تم الحصول عليه عن طريق ضرب العدد التراكمي للحالات $R(T)$ في هذا التاريخ عن طريق التكاثر \mathcal{R}_0 من الوباء. بشكل أعم ، إذا تم تقسيم جهات الاتصال بمرور الوقت T بواسطة $q > 1$ بحيث $\mathcal{R}_0/q < 1$ ، فإن الحجم النهائي للوباء قريب من \mathcal{R}_0 مع تقديرنا $R(T) \mathcal{R}_0 (1 - 1/q)/(1 - \mathcal{R}_0/q)$.

1. النموذج

الشكل 1⁹ يوضح العدد التراكمي لحالات الإصابة بالفيروس التاجي المكتشفة في فرنسا بين 25 فبراير و 29 مارس 2020. يجب أن نميز تاريخ 15 مارس الذي تم فيه اتخاذ تدابير صارمة فجأة لوقف الوباء (إغلاق المدارس ، مطاعم ، إلخ). في هذه التواريخ الثلاثة ، زاد العدد التراكمي للحالات من 13 إلى 5 427 ثم ل 40 174. الشكل 1^b يعرض نفس البيانات مع إحداثيات لوغاريتمية على الإحداثي ، بالإضافة إلى خطوط الانحدار الخطي. هناك ثلاث فترات: في المرحلة الأولى ، التي تستمر حتى 6 مارس ، يكون النمو سريعاً ولكنه غير منتظم إلى حد ما ؛ في الثانية ، التي تمتد حتى 15 مارس ، يكون النمو أبطأ قليلاً ولكنه ثابت ؛ في الثالث ، من 16 مارس ، النمو بطيء وثابت. إذا قمنا بتعديل خط خلال الفترتين الأوليين التي تبدأ من 25 فبراير إلى 15 مارس ، نجد أن عدد الحالات يزيد كما $e^{\lambda t}$ بمعدل نمو $\lambda \simeq 0,31$ في اليوم الواحد (الأحمر الأيمن). الوقت المضاعف هو $\log(2)/\lambda \simeq 2,2$ أيام. من ناحية أخرى ، إذا قصرنا أنفسنا على الفترة الثانية ، مع البيانات التي تتماشى بشكل جيد مع مقياس لوغاريتمي ، نحصل على $\lambda \simeq 0,225$ في اليوم ووقت مضاعف 3,1 أيام (أزرق يمين). وبما أن البيانات في بداية الوباء قد انزعجت بسبب حصة كبيرة من الحالات المستوردة الجديدة ، فمن المحتمل أن يكون التقدير الثاني هو الأكثر موثوقية ؛ هذا هو الذي سنستخدمه أدناه لمرحلة ما قبل التدخل. أما بالنسبة للفترة الثالثة نجد معدل نمو قدره 0,141 في اليوم ووقت مضاعف 4,9 أيام.



(ب) اللوغاريتم Santé publique France. الشكل 1. أ) العدد التراكمي للحالات التي تم اكتشافها في فرنسا بين 25 فبراير و 29 مارس 2020 ، وفقاً للطبيعي لعدد الحالات وخطوط الانحدار الخطي.

الكلاسيكي (انظر على سبيل المثال [3 ، ص 61]): من $SEIR$ دعونا نقترح نموذجاً رياضياً لهذا الوباء. دعونا نقسم السكان الفرنسيين إلى أربع حجيرات وفقاً لنموذج المحتمل أن يصابوا (S) ، مصاب ولكن ليس معدياً (E) ، معدى بدون حماية (I) وإزالتها من سلسلة محرك الأقراص (R). تجمع هذه المقصورة الأخيرة معاً أولئك الذين هم معديون ولكن محصورين ومتعافين ومتوفين. من الواضح أنه يمكننا تحسين هذا النموذج إلى ما لا نهاية لجعله أكثر واقعية ، لكننا حاولنا تحديد عدد المعلمات غير المعروفة قدر الإمكان ؛ نحن نهدف أيضاً إلى الحصول على نتيجة أكثر نظرياً من العملية.

ملاحظة N مجموع السكان ، a معدل الاتصال الفعال ، b معدل إصابة الأشخاص المصابين بالعدوى c المعدل الذي يتم فيه عزل الأشخاص المُعديين:

$$\frac{dS}{dt} = -a S \frac{I}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = a S \frac{I}{N} - b E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = b E - c I \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = c I, \quad (4)$$

t مع $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$. لإنشاء الارتباط بالبيانات ، يمكننا أن نعتقد ذلك $R(t)$ يتوافق مع العدد التراكمي للحالات المعروفة في الوقت الحالي

في بداية الوباء ، لا يزال عدد الحالات صغيرًا جدًا مقارنة بإجمالي عدد السكان N مما يؤدي إلى خطية

$$\frac{dE}{dt} \simeq aI - bE, \quad \frac{dI}{dt} \simeq bE - cI.$$

وبالتالي يميل الوباء إلى النمو بشكل كبير $e^{\lambda t}$ ، أين λ هي أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ b & -c \end{pmatrix}. \quad (5)$$

كثير الحدود المميز

$$\lambda^2 + (b+c)\lambda + b(c-a) = 0. \quad (6)$$

لذا

$$\lambda = \frac{-(b+c) + \sqrt{(b+c)^2 - 4b(c-a)}}{2} = \frac{-(b+c) + \sqrt{(b-c)^2 + 4ab}}{2}. \quad (7)$$

متوسط المدة في المقصورة E ، وهو يستحق $1/b$ والتي نستوعبها في فترة الحضانة ، ستكون من 4 أيام [4]. لذلك $b = 0,25$ يومياً. متوسط المدة في المقصورة I قبل العزلة ، وهو ما يستحق $1/c$ ، من الصعب تقديره لأنه لا يعتمد فقط على الخصائص البيولوجية للفيروس ولكن أيضاً على مدى سرعة عزل الحالات ، والتي تختلف من بلد إلى آخر. لنفترض أنه حوالي يوم واحد منذ حدوث الوباء في فرنسا عندما يدرك السكان جيداً وجود الوباء ؛ سيتم عزل المرضى قريباً. لذا $c = 1$ يومياً. نستنتج من الصيغة (7) ذلك

$$a = \frac{(2\lambda + b + c)^2 - (b - c)^2}{4b} = (\lambda + c) \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right). \quad (8)$$

λ مما يسمح بحساب معدل الاتصال الفعال عددياً a من معدل النمو الملحوظ

تخيل أن تدابير الصحة العامة يمكن أن تقسم معدل الاتصال الفعال على عدد k وهو أكبر من 1. كم يجب أن يكون يستحق على الأقل k لوقف الوباء؟ هذه القيمة k ، لوحظ تقليدياً \mathcal{R}_0 اتباع لوتكا ووصفه بأنه "استنساخ" [6 ، ص. 102] ، يتم الحصول عليه بمجرد ملاحظة أنه متى a تم استبداله بـ a/\mathcal{R}_0 ، معدل نمو الوباء الجديد λ' يجب أن يكون صفرًا ، وهو ما يؤدي إلى المعادلة (6) $c - a/\mathcal{R}_0 = 0$ وإلى

$$\mathcal{R}_0 = \frac{a}{c} = \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{c}\right) \simeq 2,33$$

إذا استخدمنا القيمة الرقمية ($\lambda \simeq 0,225$ في اليوم) الذي اقترحه منحني الوباء في الشكل 1. يرى عدم اليقين بشأن المعلمات b و c ، يمكن أن تكون هذه قيمة تقريبية فقط

بطريقة أكثر تقنية (انظر على سبيل المثال [7]) ، يمكن للمرء أن يلاحظ ذلك \mathcal{R}_0 كان أيضاً نصف القطر الطيفي للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -b & c \end{pmatrix}^{-1}.$$

انظر SIR دعونا نذكر كيفية تحديد الحجم النهائي للوباء في غياب التدخل الكامل ؛ إنه تكييف سهل للطريقة المستخدمة لنموذج (4) - (1) SEIR لنترجع إلى نموذج على سبيل المثال [5 ، ص 76]. تظهر المعادلة (1) ذلك

$$\frac{d}{dt} \log S = -\frac{a}{N} I(t).$$

، لذا عن طريق الدمج $t = 0$ إلى $t = +\infty$ ،

$$\log S(\infty) - \log S(0) = -\frac{a}{N} \int_0^{\infty} I(t) dt. \quad (9)$$

في بداية الوباء ، لم يكن هناك أحد في المقصورة R لذا $R(0) = 0$. تظهر المعادلة (4) ذلك

$$R(\infty) = c \int_0^{\infty} I(t) dt, \quad (10)$$

أين $R(\infty)$ يعين الحد عندما $t \rightarrow +\infty$ الوظيفة $R(t)$ الذي يزداد ويتزايد بمقدار N . بالإضافة إلى ذلك ، لدينا في جميع الأوقات $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$ متى $t \rightarrow +\infty$ ، يتوقف الوباء في نهاية المطاف بحيث $E(t)$ و $I(t)$ يميل نحو 0. عند الحد ، لذلك ، فقط الأشخاص الذين R هربوا من الوباء والذين أصيبوا ولكن الذين دخلوا إلى المقصورة

$$S(\infty) + R(\infty) = N. \quad (11)$$

من خلال الجمع بين (9) و (10) و (11) ، نرى ذلك

$$N - R(\infty) = S(0) \exp\left(-\frac{a}{c} \frac{R(\infty)}{N}\right).$$

في بداية الوباء ، لم يكن هناك سوى عدد قليل من المصابين في السكان ، لذلك $S(0) \simeq N$. يمكن كتابة معادلة الحجم النهائي للوباء كـ

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\mathcal{R}_0 \frac{R(\infty)}{N}\right), \quad (12)$$

مع $R(\infty)/N \simeq 87\%$ مع $\mathcal{R}_0 \simeq 2,33$ نجد رقمياً [5] SIR الذي يحدث أن يكون له نفس شكل نموذج

2. المرحلة الثانية مع تدخل جذري

تخيل ذلك في تاريخ معين T ، يتم اتخاذ تدابير جذرية بحيث يتم تخفيض معدل الاتصال الفعال الجديد إلى 0 أثناء وجوده $R(T)$ حالات تراكمية. على سبيل المثال ، كانت هناك 5,427 حالة تراكمية حتى 15 مارس ، وهو التاريخ الذي دخلت فيه التدابير المتعلقة بالمدارس والأماكن العامة حيز التنفيذ. هل يمكننا بعد ذلك أن نتنبأ بالحجم النهائي الجديد للوباء في ظل هذه الافتراضات؟

قرب نهاية المرحلة الأسية حيث $t \leq T$ وحيث لا يزال العدد الإجمالي للحالات يمثل جزءًا صغيرًا من إجمالي عدد السكان ، فلدينا

$$E(t) \simeq u e^{\lambda t}, \quad I(t) \simeq v e^{\lambda t}, \quad R(t) \simeq w e^{\lambda t},$$

أين (u, v) هو المتجه الذاتي المرتبط بأكبر قيمة ذاتية λ للمصفوفة (5). لذا $bu + av = \lambda u$ ، مع المعادلة (8) نجد ذلك

$$u = \frac{av}{\lambda + b} = \frac{\lambda + c}{b} v.$$

كما $dR/dt \simeq \lambda R$ لـ $t < T$ متى t ليس قريبًا جدًا من 0 ، لدينا

$$I(T) = \frac{1}{c} \frac{dR}{dt}(T) \simeq \frac{\lambda}{c} R(T).$$

لكن $I(T) \simeq v e^{\lambda T}$ لذا

$$E(T) \simeq u e^{\lambda T} = \frac{\lambda + c}{b} v e^{\lambda T} \simeq \frac{\lambda + c}{b} I(T) \simeq \left(\frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b}\right) R(T).$$

$t > T$ من المفترض أن يتم تخفيض جهات الاتصال إلى الصفر ، لدينا

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = -bE, \quad \frac{dI}{dt} = bE - cI, \quad \frac{dR}{dt} = cI. \quad (13)$$

دون الحاجة إلى حل هذا النظام ، من الواضح أن الحجم النهائي للوباء سيكون $R(\infty) = R(T) + E(T) + I(T)$ ، لأن هناك $E(T) + I(T)$ الأفراد المصابين الذين ليسوا في المقصورة بعد R في الوقت T . لذا

$$R(\infty) \simeq R(T) \left(1 + \frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b} + \frac{\lambda}{c}\right) = R(T) \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{c}\right) = \mathcal{R}_0 R(T).$$

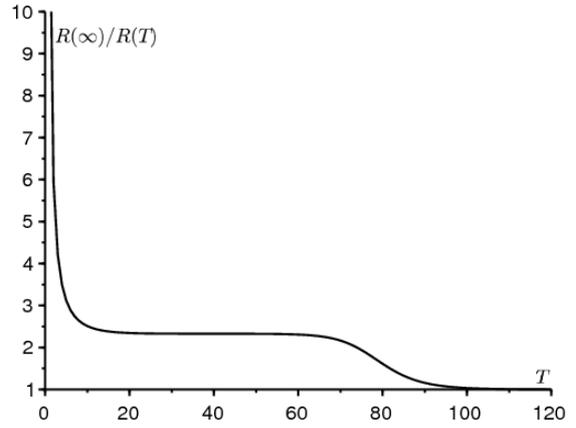
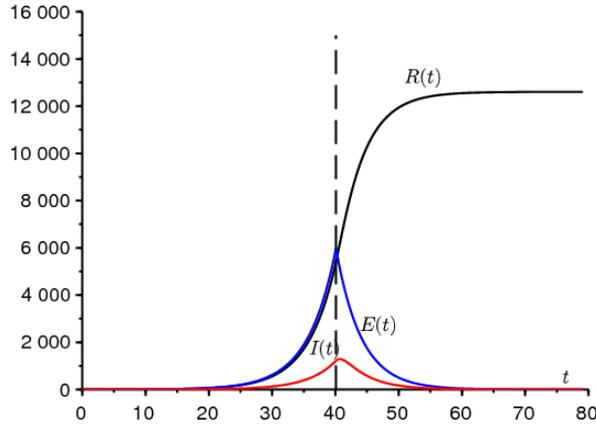
وبالتالي ، إذا تم تقليل جهات الاتصال إلى صفر من تاريخ معين قريب من بداية الوباء (قريب بما فيه الكفاية حتى يظل التقريب الخطي صالحًا ولكن ليس قريبًا جدًا حتى يكون لدى النظام الخطي الوقت للتلاقي نحو المتجه الذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية الأولى) ، ثم يكون الحجم النهائي للوباء قريبًا من ذلك الذي تم الحصول عليه عن طريق الملحق ، نلاحظ مع ذلك أن هذا SIR ضرب العدد التراكمي للحالات في هذا التاريخ في التكاثر \mathcal{R}_0 من الوباء. يتم الحصول على نتيجة مشابهة بنفس الطريقة لنموذج لم يعد \mathcal{R}_0 الذي يحدد النسبة $R(\infty)/R(T)$ في النماذج ذات الفترة المعدية التي لا يتم توزيعها بشكل كبير ، ولكن تعبير أكثر تعقيدًا

دعونا نلاحظ في تمرير القياس مع مفهوم "إمكانات النمو" للسكان في الديموغرافيا [8 ، ص. 176]. هي النسبة بين السكان النهائيين النهائيين والسكان في لحظة معينة إذا تم تقسيم الخصوبة فجأة في هذه اللحظة من خلال التكاثر \mathcal{R}_0 ، بحيث يتم ترك السكان مع معدل تقارب صفر النمو. كما هو الحال في حساباتنا ، فمن خلال افتراض أن على صيغة بسيطة نسبيًا لإمكانات زيادة ، وهي صيغة تتضمن أيضًا Keyfitz الأول) حصل $eigenvector$ السكان الأوليين "مستقرون" بمعنى لوتكا (أي معطى من قبل [الخاص بنا 8] ، ص. 179 SEIR \mathcal{R}_0 على الرغم بطريقة أكثر تعقيدًا من نموذج

نلاحظ أيضًا أن تقدير $R(T) + E(T) + I(T)$ من البيانات $R(T)$ واحد فقط يماثل المشكلة التي نشأت في بداية وباء فيروس نقص المناعة البشرية لتقدير عدد المصابين بفيروس نقص المناعة البشرية من عدد حالات الإيدز المبلغ عنها

دعنا نعود إلى نموذجنا. مع $R(T) = 5427$ و $\mathcal{R}_0 \simeq 2,33$ ، يعطي $R(\infty) \simeq 12600$. مرة أخرى ، تسليط الضوء على عدم اليقين حول المعلمات b و c وهو ما $R(\infty)$ ينعكس في قيمة

الشكل 2 يوضح هذا النموذج من مرحلتين. أخذنا $N = 65 \times 10^6$ (سكان فرنسا) ، $S(0) = N - 1$ ، $E(0) = 1$ ، $I(0) = 0$ و $R(0) = 0$. المعلمة a يعطى بالصيغة (8) مع $\lambda = 0,225$ يوميًا. أخذنا $T = 40$ أيام كذلك $R(T) \simeq 5415$ يكون قريبًا جدًا من البيانات 5427 مارس. من خلال مواصلة المحاكاة لفترة $R(\infty)/R(T) \simeq 2,33 \simeq \mathcal{R}_0$ أطول قليل مما في الشكل ، نجد ذلك عددًا



الشكل 2. أ) مثال لمحاكاة نموذج مرحلتين. ب) التقرير $R(\infty)/R(T)$ بالاعتماد على T .

الشكل b_2 يظهر كيف التقرير $R(\infty)/R(T)$ يختلف باختلاف الوقت T حيث يتم تخفيض معدل الاتصال إلى صفر. يمكننا أن نرى بوضوح هضبة حيث تقترب هذه النسبة \mathcal{R}_0 متى $T \rightarrow 0$ ، لدينا $R(T) \rightarrow 0$ و $R(\infty) \rightarrow E(0) + I(0) = 1$ ، لذلك التقرير $R(\infty)/R(T)$ يميل إلى اللانهاية. التقرير يقترب من \mathcal{R}_0 متى T هو ترتيب معكوس الفرق بين القيمتين الذاتيتين للمصفوفة (5). متى ، على العكس $T \rightarrow \infty$ ثم يأتي التدخل بعد فوات الأوان ؛ لقد مرت الوباء بالفعل و $R(\infty)/R(T) \rightarrow 1$. من المتوقع أن يكون عرض الرف فيها $R(\infty)/R(T)$ قريب من \mathcal{R}_0 ينمو باعتباره ثابت مضروباً في $\log(N)$ متى $N \rightarrow +\infty$ ، لأن هذا هو على سبيل المثال [مع معاملات ثابتة SIR 2] سلوك الوقت حتى ذروة الوباء في نموذج

إذا أردنا معرفة متى ستحدث ذروة الحالات الجديدة ، والتي قد تكون مهمة لمشاكل الازدحام في المستشفيات ، فعلينا حل النظام (13). نجد $E(t) = E(T) e^{-b(t-T)}$ و

$$I(t) = I(T) e^{-c(t-T)} + bE(T) \frac{e^{-b(t-T)} - e^{-c(t-T)}}{c - b} .$$

مع القيم العددية للشكل 2، لدينا $E(T) \simeq 5970$ ، $I(T) \simeq 1218$ ، ومشتقاته $I(t)$ يبلغ 0.6 يوماً بعد تخفيض معدل الاتصال إلى 0. بالنسبة لمعدل اتصال غير صفري ، من الواضح أن التأخير سيكون أطول

3. التعميم

في الواقع ، معدل الاتصال الفعال ليس بالتأكيد صفراً تماماً $t > T$. القيمة التي تم الحصول عليها $R(\infty)$ ومع ذلك ، يمكن اعتباره كحد أدنى للقيمة الحقيقية حيث أنه من المؤكد أن الحجم النهائي للوباء سيكون أكبر مع جهات الاتصال غير الصفريّة من جهات الاتصال الصفريّة $t > T$. حول هذا الموضوع ، يجب التذكير بأن النماذج مع معدل اتصال متغير ليست "رتيبة" ، بمعنى أن انخفاض معدل الاتصال يمكن أن يؤدي في بعض الأحيان إلى حجم نهائي أكبر للوباء. SEIR أو SIR الوبائية لنوع [1].

الآن ضع في اعتبارك الحالة التي لا يتم فيها تخفيض معدل الاتصال إلى 0 ولكن ببساطة مقسوماً على رقم $q > 1$ بحيث $\mathcal{R}_0/q < 1$ ، في حين أن $\mathcal{R}_0 > 1$ ، لدينا $t > T$ ؛ التخفيض إلى 0 يتوافق مع حالة الخط الحدودي حيث q يميل إلى اللانهاية. في هذه الحالة ، لدينا

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{a}{q} S \frac{I}{N}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{a}{q} S \frac{I}{N} - bE, \quad \frac{dI}{dt} = bE - cI, \quad \frac{dR}{dt} = cI.$$

لدينا $t > T$ بنفس المنطق كما في القسم 1 ، لدينا

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -\frac{a}{q c N} \frac{dR}{dt} .$$

من خلال الدمج بين $t = T$ و $t = +\infty$ ، نستنتج ذلك

$$\log \frac{S(\infty)}{S(T)} = -\frac{\mathcal{R}_0}{q N} (R(\infty) - R(T)).$$

افترض كما في القسم 2 ذلك الوقت T ليس صغيراً جداً ولا كبيراً جداً ، وهذا يعني في علبه الشكل b_2 . كما $S(\infty) = N - R(\infty)$ و

$$S(T) = N - E(T) - I(T) - R(T) \simeq N - \mathcal{R}_0 R(T),$$

لدينا

$$N - R(\infty) \simeq [N - \mathcal{R}_0 R(T)] \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q N} (R(\infty) - R(T))\right).$$

كما $R(T)/N$ من المفترض أن تكون صغيرة ، لدينا $\frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{q N} \simeq 1 + \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{q N}$ و $\exp\left(\frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{q N}\right) \simeq 1 + \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{q N}$

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \left[1 - \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{N} + \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{qN} \right] \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0 R(\infty)}{qN}\right).$$

ذهب $\mathcal{R}_0/q < 1$ عن طريق الفرضية. إذن الحل $R(\infty)/N$ ستكون هذه المعادلة صغيرة أمام 1 ، وفقاً للحجة الرسومية الكلاسيكية [5]. باستخدام ذلك $\exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0 R(\infty)}{qN}\right) \simeq 1 - \frac{\mathcal{R}_0 R(\infty)}{qN}$ وصلنا أخيراً

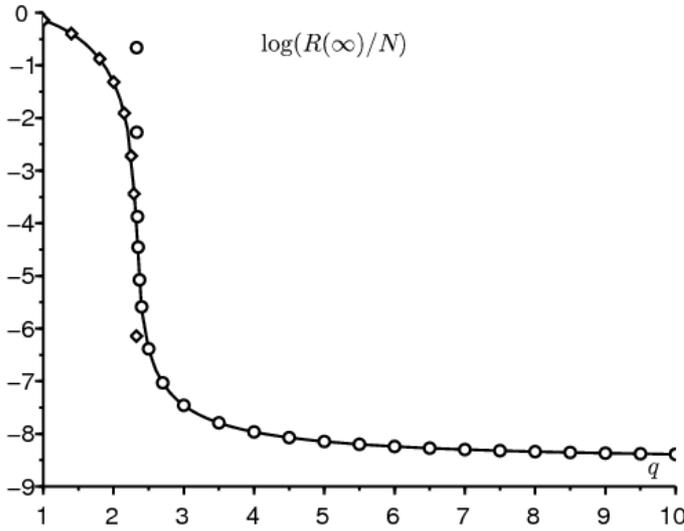
$$R(\infty) \simeq R(T) \mathcal{R}_0 \frac{1 - 1/q}{1 - \mathcal{R}_0/q}. \quad (14)$$

متى $q \rightarrow +\infty$ نجد ذلك $R(\infty) \simeq R(T) \mathcal{R}_0$. نلاحظ ذلك أيضاً $(1 - 1/q)/(1 - \mathcal{R}_0/q) > 1$ ، كما يجب

يقارن الشكل 3 ، ل T ثابتة كما في الشكل 2 وللقيم المختلفة للمعلمة q ، الحجم النهائي للوباء على مقياس لوغاريتمي $\log(R(\infty)/N)$ تم الحصول عليها عن طريق المحاكاة العددية بصيغة (14) ل $q > \mathcal{R}_0$ ومع الحل الإيجابي المطلق للمعادلة

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0 R(\infty)}{qN}\right) \quad (15)$$

ل $q < \mathcal{R}_0$. في الواقع ، في الحالة الأخيرة ، هناك وباء كبير ويكفي لتكثيف المعادلة (12) ، التي تكون إلى حد ما مستقلة عن الجزء المصاب الأولي $1 - S(T)/N \simeq \mathcal{R}_0 R(T)/Nq = \mathcal{R}_0$. نرى أن التقديرين لم يعدا صالحين في الجوار

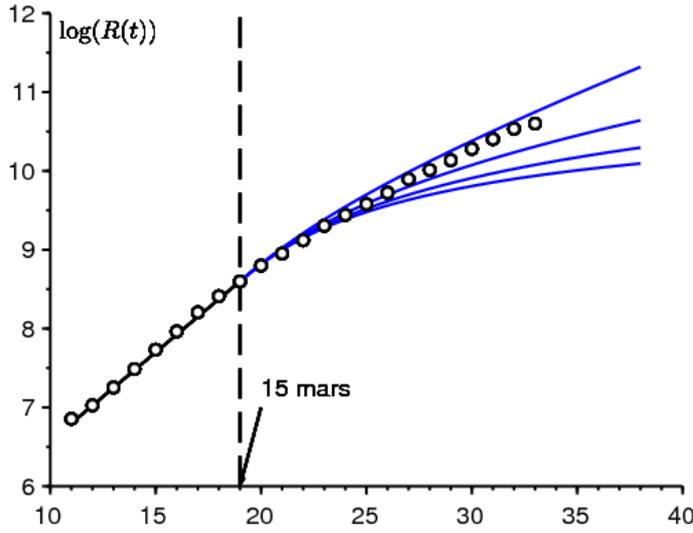


الشكل 3. $\log(R(\infty)/N)$ بالاعتماد على q (خط متصل) ، مقارنة بالصيغة (14) (دوائر صغيرة) صالحة لـ $q > \mathcal{R}_0$ ومع حل المعادلة (15) (الماس لـ $q < \mathcal{R}_0$ الصغیر) صالحة لل

لاحظ أن الحجم النهائي للوباء يختلف بعدة مرات من حيث الحجم q قريب من \mathcal{R}_0 . لأنه من الصعب جدا تحديد q والتنبؤ بالحجم النهائي للوباء صعب أيضا في هذا المجال. لا يوجد إلا إذا q أكبر بكثير من \mathcal{R}_0 أن التنبؤ بالصيغة (14) يصبح أقل حساسية لقيمة

4. محاولة تقدير q

دعنا نعود إلى الشكل 1. دعنا نحاول التقدير q من خلال تركيب محاكاة للنموذج على البيانات بعد 15 مارس. لهذا ، نبدأ من البيانات $R(T) = 5427$. نظراً لأن بيانات الأيام الثمانية السابقة محاذية بشكل جيد بشكل خاص ، فإننا نبدأ محاكاة نموذجنا باستخدام $R(T - \tau) = e^{-\lambda\tau} R(T)$ أين $\lambda = 0,225$ و $\tau = 8$ أيام ، ومع التقديرات المقابلة $I(T - \tau) \simeq \frac{\lambda}{c} R(T - \tau)$ ، $E(T - \tau) \simeq \left(\frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b}\right) R(T - \tau)$ و $S(T - \tau) = N - E(T - \tau) - I(T - \tau) - R(T - \tau)$. $t > TU$ ، معدل الاتصال الفعال هو a/q ونحاول التكيف $R(t)$ إلى البيانات حتى 29 مارس. الأنسب بين $q = 1,5$ و $q = 2$ حولها $q = 1,7$. لأن هذه القيمة أقل من \mathcal{R}_0 ، يبدو أن تدابير الاحتواء لا تزال غير كافية. أو ربما يكون النموذج بسيطاً جداً ؛ على وجه الخصوص ، من المتوقع أن يؤثر التوزيع غير الآسي للأوقات التي تقضيها في الأقسام المختلفة على اللحظة التي يبدأ فيها المنحنى في الانحناء



الشكل 4. اللوغاريتم الطبيعي لعدد الحالات بين 7 و 29 مارس (دوائر صغيرة) و $\log(R(t))$ كدالة للوقت t في 4 محاكاة من الأعلى إلى الأسفل $q \in \{1,5; 2; 2,5; 3\}$.

في الختام ، اكتشفنا سيناريو من مرحلتين حيث يتم تخفيض معدل الاتصال من تاريخ معين. وجدنا صيغة تقريبية بسيطة للحجم النهائي للوباء بناءً على عدد الحالات $N \rightarrow +\infty$ المكتشفة في وقت الاختزال. ومع ذلك ، يبقى لتوضيح وتوضيح هذه النتيجة بشكل أكثر صرامة ، ربما من خلال جعلها تظهر كنتيجة مقارنة عندما

شكر وتقدير

نشكر Ali Moussaoui ، Hisashi Inaba ، Frédéric Hamelin لتعليقاتهم على المخطوطة

الملحق

مع فترة معدية لا يتم توزيعها بالضرورة بشكل كبير. إما $I(t, x)$ كثافة الأشخاص المصابين منذ ذلك الحين x وحدات الوقت إلى الوقت t . إما $a(x)$ SIR فكر في نموذج معدل الاتصال الفعال و $b(x)$ المعدل الذي يتوقف عنده المصابون عن انتشار العدوى. لدينا في بداية الوباء

$$\begin{aligned} I(t, 0) &\simeq \int_0^\infty a(x) I(t, x) dx \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} &= -b(x) I(t, x) \\ \frac{dR}{dt} &= \int_0^\infty b(x) I(t, x) dx \end{aligned}$$

نستنتج ، كما في نظرية سكان لوتكا المستقرة [6] ذلك

$$I(t, x) \simeq k e^{\lambda t} e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy}$$

أين k هو ثابت ومعدل النمو λ هو الحل الوحيد للمعادلة

$$1 = \int_0^\infty a(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx.$$

إذا طلبنا $I(t) = \int_0^\infty I(t, x) dx$ ، المشكلة تكمن في التقدير $I(T) + R(T)$ ابتداءً من $R(T)$. ذهب

$$\lambda R(T) \simeq \frac{dR}{dt}(T) = \int_0^\infty b(x) I(T, x) dx \simeq \int_0^\infty b(x) k e^{\lambda T} e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx.$$

نستنتج ذلك

$$k \simeq \frac{\lambda R(T) e^{-\lambda T}}{\int_0^\infty b(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx}.$$

، أخيرًا ،

$$\frac{I(T) + R(T)}{R(T)} \simeq \frac{\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dy}{\int_0^\infty b(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx} + 1.$$

نرى أن العضو على اليمين ليس لديه سبب معين يتزامن معه $\mathcal{R}_0 = \int_0^\infty a(x) e^{-\int_0^x b(y) dy} dx$ في الحالة الخاصة حيث تكون المعدلات ثابتة، مع $a(x) \equiv a$ و $b(x) \equiv b$ ومع ذلك، $\lambda = a - b$ وبالتالي $\lambda = a - b$ و $\mathcal{R}_0 = \frac{\lambda}{b} + 1 = \frac{a}{b} = \mathcal{R}_0$.

المراجع

1. Bacaër N. , Gomes M. G. M. (2009) Sur la taille finale des épidémies avec saisonnalité. Bull. Math. Biol. 71 : 1954 – 1966. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01299608>
2. Bacaër N. (2020) Sur le pic épidémique dans un modèle S – I – R, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02518993>
3. Corlosquet – Habart M. , Janssen J. , Manca R. (2012) Modélisation stochastique du risque de pandémie : stratégies de couverture et d'assurance. Lavoisier, Cachan.
4. Guan W. J. et coll. (2020) Clinical characteristics of 2019 novel coronavirus infection in China. New England Journal of Medicine, doi : 10.1056/NEJMoa2002032
5. A. Hillion (1986) Les Théories mathématiques des populations. Presses Universitaires de France, Paris.
6. Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie. Hermann, Paris.
7. Nkague Nkamba L. (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine et Université Gaston Berger.
8. Pressat R. (1995) Éléments de démographie mathématique. AIDELF, Paris.