

Математическая модель возникновения эпидемии коронавируса во Франции

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement
Отдел математического и компьютерного моделирования сложных систем
Les Cordeliers, Париж, Франция
nicolas.bacaer@ird.fr

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142>

резюме

Мы приспособляем модель эпидемии типа SEIR к данным эпидемии нового коронавируса во Франции в 2020 году. Если количество контактов уменьшается до нуля с определенной даты T ближе к началу эпидемии, окончательный размер эпидемии близок к тому, который получен путем умножения совокупного числа случаев $R(T)$ в эту дату по воспроизводимости \mathcal{R}_0 эпидемии. В целом, если контакты делятся со временем T по $q > 1$ так что $\mathcal{R}_0/q < 1$, то окончательный размер эпидемии близок к $R(T) \mathcal{R}_0 (1 - 1/q)/(1 - \mathcal{R}_0/q)$. По нашим оценкам, $\mathcal{R}_0 \simeq 2,3$ во Франции.

1. Модель

Рисунок 1^a показывает совокупное число обнаруженных случаев коронавируса во Франции в период с 25 февраля по 27 марта 2020 года. Мы должны различать дату 15 марта, с которой были приняты радикальные меры для внезапного прекращения эпидемии (закрытие школ, рестораны и т. д.). За эти три даты совокупное число дел увеличилось с 13 до 5 427 затем к 32 964. Рисунок 1^b показывает те же данные с логарифмическими координатами по ординате, а также линии линейной регрессии. Есть три периода: в первом, который длится до 6 марта, рост быстрый, но довольно неравномерный; во втором, который продлится до 15 марта, рост будет немного медленнее, но устойчивым; в третьем, с 16 марта, рост медленный и устойчивый. Если мы скорректируем линию по первым двум периодам, которые идут с 25 февраля по 15 марта, мы обнаружим, что число случаев увеличивается по мере $e^{\lambda t}$ с темпом роста $\lambda \simeq 0,31$ за день (справа красный). Время удвоения $\log(2)/\lambda \simeq 2,2$ дней. Если, с другой стороны, мы ограничимся вторым периодом с данными, которые особенно хорошо выровнены в логарифмическом масштабе, мы получим $\lambda \simeq 0,225$ в день и удвоение времени 3,1 дни (синий справа). Поскольку данные в начале эпидемии искажены большой долей новых завозных случаев, вероятно, это вторая оценка, которая является более надежной; это тот, который мы будем использовать ниже для этапа предварительного вмешательства. Что касается третьего периода, мы находим темп роста 0,146 в день и удвоение времени 4,7 дней.

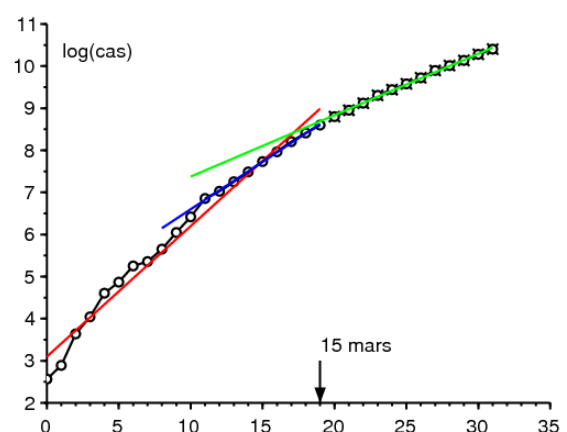
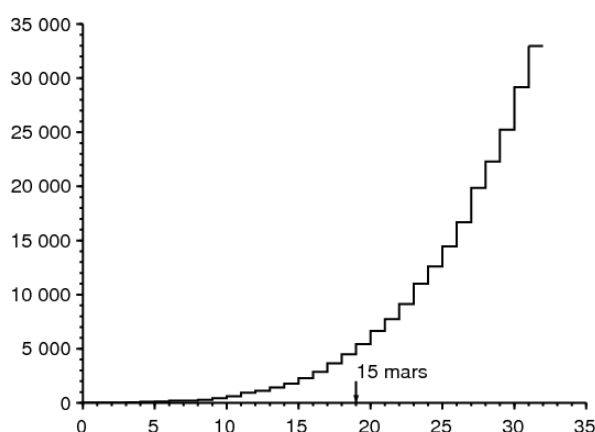


Рисунок 1. а) Совокупное количество случаев, выявленных во Франции в период с 25 февраля по 27 марта 2020 года, согласно данным Santé publique France. б) натуральный логарифм совокупного числа случаев и линий линейной регрессии.

Давайте предложим математическую модель для этой эпидемии. Давайте разделим французское население на четыре части в соответствии с классической моделью SEIR (см., Например, [3, с. 61]): вероятность заражения (S), заражен, но не заразен (E), заразный без защиты (I) и снят с приводной цепи (R). Это последнее отделение объединяет в себе тех, кто заражен, но ограничен, исцелён и умер. Очевидно, что мы можем усовершенствовать эту модель до бесконечности, чтобы сделать ее более реалистичной, но мы постарались максимально ограничить количество неизвестных параметров; мы также стремимся получить результат более теоретический, чем практический.

примечание N общая численность населения, a эффективная скорость контакта, b скорость, с которой зараженные люди становятся заразными и c скорость, с которой изолируются инфекционные люди:

$$\frac{dS}{dt} = -a S \frac{I}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = a S \frac{I}{N} - b E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = b E - c I \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = c I, \quad (4)$$

с $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, Чтобы сделать ссылку с данными, мы можем думать, что $R(t)$ соответствует совокупному числу известных на данный момент случаев t ,

В начале эпидемии число случаев остается очень небольшим по сравнению с общей численностью населения, поэтому $S(t) \simeq N$, что приводит к линеаризации

$$\frac{dE}{dt} \simeq a I - b E, \quad \frac{dI}{dt} \simeq b E - c I.$$

Таким образом, эпидемия имеет тенденцию к экспоненциальному росту $e^{\lambda t}$ где λ наибольшее собственное значение матрицы

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ b & -c \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Характеристический полином

$$\lambda^2 + (b + c)\lambda + b(c - a) = 0. \quad (6)$$

поэтому

$$\lambda = \frac{-(b + c) + \sqrt{(b + c)^2 - 4b(c - a)}}{2} = \frac{-(b + c) + \sqrt{(b - c)^2 + 4ab}}{2}. \quad (7)$$

Средняя продолжительность в купе E , который стоит $1/b$ который мы ассимилируем с инкубационным периодом, будет порядка 4 дней [4]. Поэтому возьмите $b = 0,25$ в день Средняя продолжительность в купе I перед изоляцией, которая стоит $1/c$, оценить сложнее, потому что это зависит не только от биологических характеристик вируса, но и от скорости, с которой случаи изолируются, что варьируется от страны к стране. Предположим, прошло около 1 дня с момента возникновения эпидемии во Франции, когда жители уже хорошо осведомлены о существовании пандемии; пациенты скоро изолированы. таким образом $c = 1$ в день Из формулы (7) выводим, что

$$a = \frac{(2\lambda + b + c)^2 - (b - c)^2}{4b} = (\lambda + c) \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right). \quad (8)$$

что позволило бы рассчитать эффективную скорость контакта численно a от наблюдаемой скорости роста λ ,

Представьте себе, что меры общественного здравоохранения могут разделить эффективную частоту контактов на число k который больше 1. Сколько должно стоять хотя бы k остановить эпидемию? Это значение k , традиционно отмечается \mathcal{R}_0 вслед за Лоткой и назвал им «воспроизводимость» [6, с. 102], получается просто заметив, что когда a заменяется $a' = a/\mathcal{R}_0$, новый темп роста эпидемии λ' должен быть равен нулю, что в соответствии с уравнением (6) приводит к $c - a'/\mathcal{R}_0 = 0$ и к

$$\mathcal{R}_0 = \frac{a}{c} = \left(1 + \frac{\lambda}{b}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{c}\right) \simeq 2,33$$

если мы используем числовое значение ($\lambda \simeq 0,225$ в день), предложенный эпидемической кривой на рисунке 1. Виды неопределенности параметров b и c , это может быть только приблизительное значение.

Более технически (см., Например, [7]) можно было бы заметить, что \mathcal{R}_0 был также спектральный радиус матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ -b & c \end{pmatrix}^{-1}.$$

Вернемся к модели SEIR (1) - (4). Давайте вспомним, как определить окончательный размер эпидемии при полном отсутствии вмешательства; это простая адаптация метода, используемого для модели SIR (см., например, [5, с. 76]). Уравнение (1) показывает, что

$$\frac{d}{dt} \log S = -\frac{a}{N} I(t).$$

Таким образом, путем интегриации $t = 0$ в $t = +\infty$,

$$\log S(\infty) - \log S(0) = -\frac{a}{N} \int_0^{\infty} I(t) dt. \quad (9)$$

В начале эпидемии никого не было в купе R поэтому $R(0) = 0$, Уравнение (4) показывает, что

$$R(\infty) = c \int_0^{\infty} I(t) dt, \quad (10)$$

где $R(\infty)$ обозначает предел, когда $t \rightarrow +\infty$ функции $R(t)$, который увеличивается и увеличивается на N , Кроме того, у нас всегда $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N$, когда $t \rightarrow +\infty$ эпидемия в конечном итоге останавливается так, что $E(t)$ и $I(t)$ поэтому стремятся к 0. На пределе, следовательно, только люди, которые избежали эпидемии и те, кто был инфицирован, но которые прошли через отсек R :

$$S(\infty) + R(\infty) = N. \quad (11)$$

Объединяя (9), (10) и (11), мы видим, что

$$N - R(\infty) = S(0) \exp\left(-\frac{a}{c} \frac{R(\infty)}{N}\right).$$

В начале эпидемии среди населения было всего несколько инфицированных, поэтому $S(0) \simeq N$, Уравнение для окончательного размера эпидемии можно записать в виде

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\mathcal{R}_0 \frac{R(\infty)}{N}\right), \quad (12)$$

которая имеет ту же форму, что и для модели SIR [5]. $c\mathcal{R}_0 \simeq 2,33$ мы находим в цифровом виде $R(\infty)/N \simeq 87\%$,

2. Второй этап с резким вмешательством

Представьте себе, что на определенную дату T , принимаются радикальные меры, чтобы новая эффективная скорость контакта была снижена до 0, пока $R(T)$ кумулятивные случаи. Например, по состоянию на 15 марта насчитывалось 5427 совокупных случаев, когда вступили в силу меры, касающиеся школ и общественных мест. Можем ли мы тогда предсказать, каким будет новый конечный размер эпидемии при этих предположениях?

К концу экспоненциальной фазы, где $t \leq T$ и где общее число случаев все еще представляет крошечную часть общей численности населения, мы имеем

$$E(t) \simeq u e^{\lambda t}, \quad I(t) \simeq v e^{\lambda t}, \quad R(t) \simeq w e^{\lambda t},$$

где (u, v) является собственным вектором, связанным с наибольшим собственным значением λ матрицы (5). Таким образом, $-b u + a v = \lambda u$, С помощью уравнения (8) находим, что

$$u = \frac{a v}{\lambda + b} = \frac{\lambda + c}{b} v.$$

в качестве $dR/dt \simeq \lambda R$ для $t < T$ когда t не слишком близко к 0, мы имеем

$$I(T) = \frac{1}{c} \frac{dR}{dt}(T) \simeq \frac{\lambda}{c} R(T).$$

но $I(T) \simeq v e^{\lambda T}$ поэтому

$$E(T) \simeq u e^{\lambda T} = \frac{\lambda + c}{b} v e^{\lambda T} \simeq \frac{\lambda + c}{b} I(T) \simeq \left(\frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b}\right) R(T).$$

Контакты должны быть сведены к нулю, мы имеем для $t > T$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{dE}{dt} = -bE, \quad \frac{dI}{dt} = bE - cI, \quad \frac{dR}{dt} = cI. \quad (13)$$

Без необходимости решать эту систему, ясно, что окончательный размер эпидемии будет $R(\infty) = R(T) + E(T) + I(T)$, поскольку есть $E(T) + I(T)$ инфицированные лица, которых еще нет в купе R в то время T , таким образом

$$R(\infty) \simeq R(T) \left(1 + \frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b} + \frac{\lambda}{c} \right) = R(T) \left(1 + \frac{\lambda}{b} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{c} \right) = \mathcal{R}_0 R(T).$$

Таким образом, если контакты уменьшаются до нуля с определенной даты, близкой к началу эпидемии (достаточно близко, чтобы линейное приближение оставалось действительным, но не слишком близко, чтобы линеаризованная система успела сходиться по направлению к собственному вектору, связанному с первым собственным значением), то окончательный размер эпидемии близок к тому, который получен путем умножения совокупного числа случаев на эту дату на воспроизводимость \mathcal{R}_0 эпидемии. Аналогичный результат получается аналогичным образом для модели SIR. В приложении мы отмечаем, однако, что это больше не \mathcal{R}_0 кто определяет соотношение $R(\infty)/R(T)$ в моделях с инфекционным периодом, который не распределен по экспоненте, но более сложное выражение.

Отметим попутно аналогию с понятием «потенциал роста» населения в демографии [8, с. 176]. Это соотношение между конечной стационарной популяцией и населением в определенный момент, если рождаемость внезапно делится в этот момент на воспроизводимость \mathcal{R}_0 , так что население остается с асимптотической скоростью нулевого роста. Как и в наших расчетах, именно в предположении, что начальная популяция является «стабильной» в смысле Лотки (то есть, заданной первым собственным вектором), Кейфитц получил относительно простую формулу для потенциала увеличения, формула, которая также включает в себя \mathcal{R}_0 хотя и более сложным способом, чем для нашей модели SEIR [8, с. 179].

Отметим также, что оценка $R(T) + E(T) + I(T)$ из данных $R(T)$ только одна из них аналогична проблеме, возникшей в начале эпидемии ВИЧ, для оценки числа ВИЧ-инфицированных людей из числа зарегистрированных случаев СПИДа.

Давайте вернемся к нашей модели. $cR(T) = 5427$ и $\mathcal{R}_0 \simeq 2,33$, это дает $R(\infty) \simeq 12600$, Опять же, выделите неопределенность вокруг параметров b и c , что отражается на стоимости $R(\infty)$,

Рисунок 2^а иллюстрирует эту двухфазную модель. Мы взяли $N = 65 \times 10^6$ (население Франции), $S(0) = N - 1$, $E(0) = 1$, $I(0) = 0$ и $R(0) = 0$, Параметра a дается формулой (8) с $\lambda = 0,225$ в день Мы взяли $T = 40,1$ дни так $R(T) \simeq 5415$ быть очень близко к данным 542715 марта Продолжая моделирование немного дольше, чем на рисунке, мы находим численно, что $R(\infty)/R(T) \simeq 2,33 \simeq \mathcal{R}_0$,

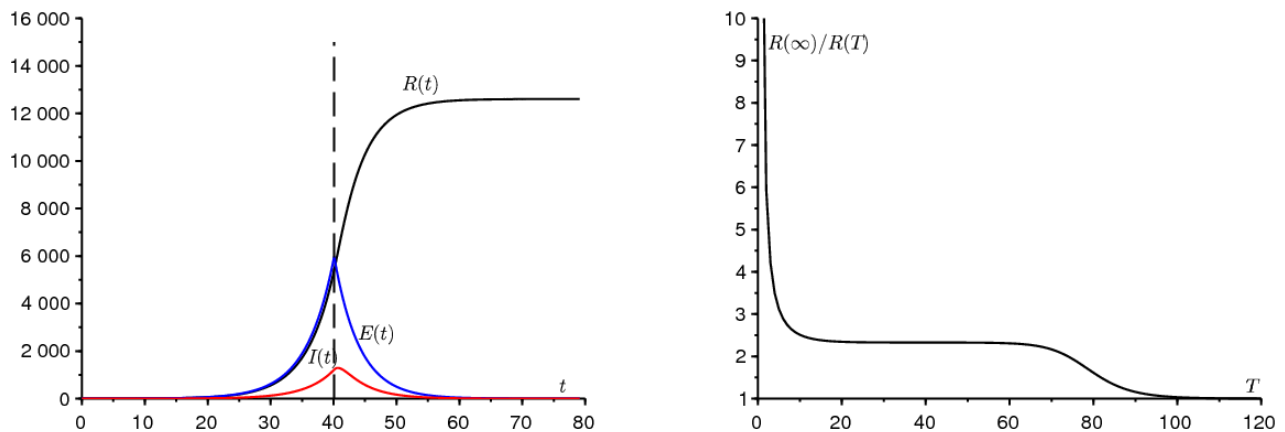


Рисунок 2. а) Пример моделирования двухфазной модели. б) отчет $R(\infty)/R(T)$ в зависимости от T ,

Рисунок 2^б показывает, как отчет $R(\infty)/R(T)$ варьируется в зависимости от времени T где скорость контакта снижается до нуля. Мы можем четко наблюдать плато, где это соотношение близко к \mathcal{R}_0 , когда $T \rightarrow 0$ у нас есть $R(T) \rightarrow 0$ и $R(\infty) \rightarrow E(0) + I(0) = 1$ так отчет $R(\infty)/R(T)$ стремится к бесконечности. Отчет становится ближе к \mathcal{R}_0 когда T имеет порядок, обратный разности между двумя собственными значениями матрицы (5). Когда наоборот $T \rightarrow \infty$ тогда вмешательство приходит слишком поздно; эпидемия уже прошла и $R(\infty)/R(T) \rightarrow 1$, Ожидается, что ширина полки где $R(\infty)/R(T)$ близко к \mathcal{R}_0 растет как постоянная, умноженная на $\log(N)$ когда $N \rightarrow +\infty$ Так как это, например, поведение времени до пика эпидемии в модели SIR с постоянными коэффициентами [2].

Если мы хотим знать, когда наступит пик новых случаев, что может быть важно для проблем с перегрузкой в больницах, мы должны решить эту систему (13). Мы находим $E(t) = E(T) e^{-b(t-T)}$ и

$$I(t) = I(T) e^{-c(t-T)} + bE(T) \frac{e^{-b(t-T)} - e^{-c(t-T)}}{c - b}.$$

С числовыми значениями рисунка 2^а у нас есть $E(T) \simeq 5970$, $I(T) \simeq 1218$ и производная от $I(t)$ отменяется через 0,6 дня после того, как скорость контакта была уменьшена до 0. Для ненулевой скорости контакта задержка, очевидно, будет больше.

3. Обобщение

На самом деле эффективная скорость контакта, конечно, не совсем равна нулю для $t > T$. Значение, полученное за $R(\infty)$ тем не менее, можно рассматривать как нижнюю границу реального значения, поскольку несомненно, что окончательный размер эпидемии будет больше с ненулевыми контактами, чем с нулевыми контактами для $t > T$. По этому вопросу следует напомнить, что эпидемические модели типа SIR или SEIR с переменной частотой контактов не являются «монотонными», в том смысле, что снижение частоты контактов может иногда приводить к большему конечному размеру эпидемии. [1].

Теперь рассмотрим случай, когда скорость контакта не уменьшается до 0, а просто делится на число $q > 1$ так что $\mathcal{R}_0/q < 1$ в то время как $\mathcal{R}_0 > 1$. Снижение до 0 соответствует пограничному случаю, когда q стремится к бесконечности. В этом случае мы имеем для $t > T$,

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{a}{q} S \frac{I}{N}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{a}{q} S \frac{I}{N} - bE, \quad \frac{dI}{dt} = bE - cI, \quad \frac{dR}{dt} = cI.$$

По тем же соображениям, что и в разделе 1, мы имеем для $t > T$

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -\frac{a}{q c N} \frac{dR}{dt}.$$

Путем интегрирования между $t = T$ и $t = +\infty$ мы выводим, что

$$\log \frac{S(\infty)}{S(T)} = -\frac{\mathcal{R}_0}{q N} (R(\infty) - R(T)).$$

Предположим, что в разделе 2 это время T не является ни слишком маленьким, ни слишком большим, то есть в лотке на рисунке 2^b, в качестве $S(\infty) = N - R(\infty)$ и

$$S(T) = N - E(T) - I(T) - R(T) \simeq N - \mathcal{R}_0 R(T),$$

у нас есть

$$N - R(\infty) \simeq [N - \mathcal{R}_0 R(T)] \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q N} (R(\infty) - R(T))\right).$$

в качестве $R(T)/N$ должен быть маленьким, у нас есть $\exp\left(\frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{q N}\right) \simeq 1 + \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{q N}$ и

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \left[1 - \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{N} + \frac{\mathcal{R}_0 R(T)}{q N}\right] \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty)}{N}\right).$$

золото $\mathcal{R}_0/q < 1$ по гипотезе. Итак, решение $R(\infty)/N$ этого уравнения будет мало перед 1, согласно классическому графическому аргументу [5]. Используя это $\exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty)}{N}\right) \simeq 1 - \frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty)}{N}$ мы наконец получаем

$$R(\infty) \simeq R(T) \mathcal{R}_0 \frac{1 - 1/q}{1 - \mathcal{R}_0/q}. \quad (14)$$

когда $q \rightarrow +\infty$ мы находим, что $R(\infty) \simeq R(T) \mathcal{R}_0$. Мы также заметили, что $(1 - 1/q)/(1 - \mathcal{R}_0/q) > 1$ так и должно быть.

Рисунок 3 сравнивает, для T зафиксировано как на рисунке 2^a и для разных значений параметра q , окончательный размер эпидемии в логарифмическом масштабе $\log(R(\infty)/N)$ получено численным моделированием по формуле (14) для $q > \mathcal{R}_0$ и со строго положительным решением уравнения

$$1 - \frac{R(\infty)}{N} \simeq \exp\left(-\frac{\mathcal{R}_0}{q} \frac{R(\infty)}{N}\right) \quad (15)$$

для $q < \mathcal{R}_0$. Действительно, в последнем случае наблюдается крупная эпидемия, и достаточно адаптировать уравнение (12), которое более или менее не зависит от исходной зараженной фракции. $1 - S(T)/N \simeq \mathcal{R}_0 R(T)/N$ до тех пор, пока это мало, что мы предположили. Мы видим, что эти два приближения перестают быть действительными в окрестности $q = \mathcal{R}_0$.

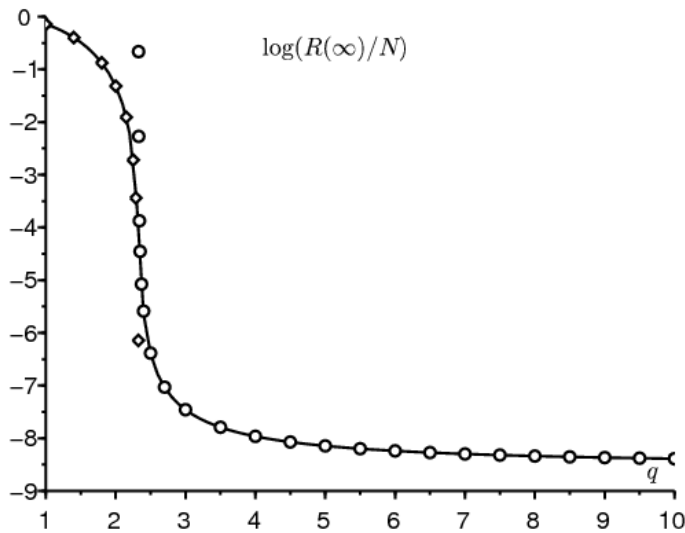


Рисунок 3 $\log(R(\infty)/N)$ в зависимости от q (сплошная линия), по сравнению с формулой (14) (маленькие кружки), действительной для $q > \mathcal{R}_0$ и с решением уравнения (15) (мелкие бриллианты) справедливо для $q < \mathcal{R}_0$,

Обратите внимание, что окончательный размер эпидемии изменяется на несколько порядков, когда q близко к \mathcal{R}_0 . Поскольку количественно определить очень сложно q Предсказание окончательного размера эпидемии также затруднено в этой области. Есть только если q значительно выше, чем \mathcal{R}_0 что прогноз по формуле (14) становится менее чувствительным к значению q .

4. Попытка оценить q

Вернемся к рисунку 1. Давайте попробуем оценить q путем подгонки симуляции модели к данным после 15 марта. Для этого начнем с данных $R(T) = 5427$. Поскольку данные за предыдущие 8 дней особенно хорошо выровнены, мы начинаем моделирование нашей модели с $R(T - \tau) = e^{-\lambda\tau} R(T)$ где $\lambda = 0,225$ в день и $\tau = 8$ дней, и с соответствующими оценками $I(T - \tau) \simeq \frac{\lambda}{c} R(T - \tau)$, $E(T - \tau) \simeq (\frac{\lambda^2}{bc} + \frac{\lambda}{b}) R(T - \tau)$ и $S(T - \tau) = N - E(T - \tau) - I(T - \tau) - R(T - \tau)$, для $t > T$ эффективная скорость контакта a/q и мы пытаемся настроить $R(t)$ к данным до 27 марта. Лучше всего подходит между $q = 1,5$ и $q = 2$ вокруг $q = 1,7$. Поскольку это значение меньше \mathcal{R}_0 Похоже, что меры сдерживания все еще недостаточны.

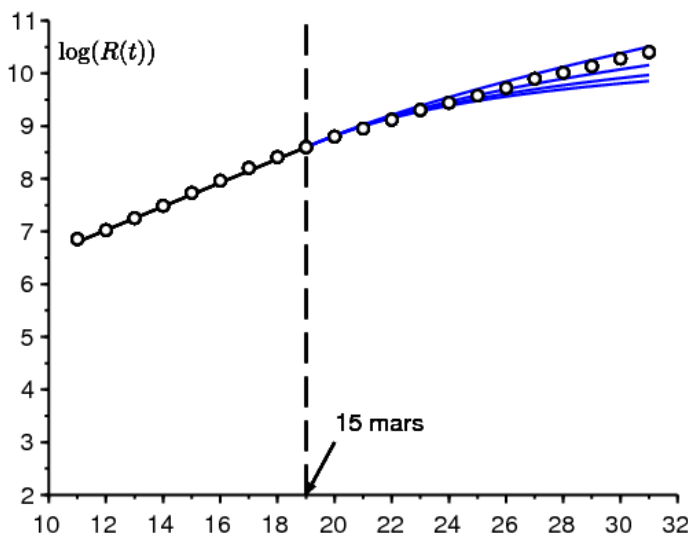


Рисунок 4. Натуральный логарифм числа случаев между 7 и 27 марта (маленькие кружки) и $\log(R(t))$ как функция времени t в 4 симуляциях сверху вниз $q \in \{1,5; 2; 2,5; 3\}$,

В заключение мы исследовали двухэтапный сценарий, в котором скорость контакта снижается с определенной даты. Мы нашли простую приблизительную формулу для окончательного размера эпидемии, основанную на количестве случаев, выявленных во время сокращения. Тем не менее, остается утверждать и демонстрировать этот результат более строго, вероятно, делая его асимптотическим результатом, когда $N \rightarrow +\infty$. Что касается практического вопроса по состоянию на

27 марта, модель, возможно, слишком упрощена, чтобы делать из него выводы. В частности, ожидается, что неэкспоненциальное распределение времени, проведенного в разных отсеках, будет влиять на оценку параметра q .

спасибо

Мы благодарим Hisashi Inaba, Ali Moussaoui и Frédéric Hamelin за их комментарии к рукописи.

приложение

Рассмотрим модель SIR с инфекционным периодом, который не обязательно распределен экспоненциально. Пусть $I(t, x)$ плотность людей, зараженных с x единицы времени к времени t , пусть $a(x)$ эффективная скорость контакта и $b(x)$ скорость, с которой зараженные люди прекращают распространение инфекции. У нас в начале эпидемии

$$\begin{aligned} I(t, 0) &\simeq \int_0^\infty a(x) I(t, x) dx \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} &= -b(x) I(t, x) \\ \frac{dR}{dt} &= \int_0^\infty b(x) I(t, x) dx \end{aligned}$$

Как и в теории устойчивого населения Лотки [6], мы выводим, что

$$I(t, x) \simeq k e^{\lambda t} e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy}$$

где k постоянная и скорость роста λ является единственным решением уравнения

$$1 = \int_0^\infty a(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx.$$

Если мы спросим $I(t) = \int_0^\infty I(t, x) dx$ проблема состоит в том, чтобы оценить $I(T) + R(T)$ от $R(T)$, золото

$$\lambda R(T) \simeq \frac{dR}{dt}(T) = \int_0^\infty b(x) I(T, x) dx \simeq \int_0^\infty b(x) k e^{\lambda T} e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx.$$

Мы выводим, что

$$k \simeq \frac{\lambda R(T) e^{-\lambda T}}{\int_0^\infty b(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dx}.$$

наконец,

$$\frac{I(T) + R(T)}{R(T)} \simeq \frac{\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dy}{\int_0^\infty b(x) e^{-\lambda x - \int_0^x b(y) dy} dy} + 1.$$

Мы видим, что у члена справа нет особых причин совпадать с $\mathcal{R}_0 = \int_0^\infty a(x) e^{-\int_0^x b(y) dy} dx$, В особом случае, когда ставки постоянны, с $a(x) \equiv a$ и $b(x) \equiv b$ Однако $\lambda = a - b$ и, следовательно, $(I(T) + R(T))/R(T) \simeq \frac{\lambda}{b} + 1 = \frac{a}{b} = \mathcal{R}_0$,

ССЫЛКИ

1. Bacaër N., Gomes M. G. M. (2009) Sur la taille finale des épidémies avec saisonnalité. Bull. Math. Biol. 71 : 1954 – 1966. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01299608>
2. Bacaër N. (2020) Sur le pic épidémique dans un modèle S – I – R, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02518993>
3. Corlosquet – Habart M., Janssen J., Manca R. (2012) Modélisation stochastique du risque de pandémie : stratégies de couverture et d'assurance. Lavoisier, Cachan.
4. Guan W. J. et coll. (2020) Clinical characteristics of 2019 novel coronavirus infection in China. New England Journal of Medicine, doi : 10.1056/NEJMoa2002032
5. A. Hillion (1986) Les Théories mathématiques des populations. Presses Universitaires de France, Paris.
6. Lotka A. J. (1939) Théorie analytique des associations biologiques, 2e partie. Hermann, Paris.
7. Nkague Nkamba L. (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle. Thèse, Université de Lorraine et Université Gaston Berger.
8. Pressat R. (1995) Éléments de démographie mathématique. AIDELF, Paris.