



HAL
open science

Trois constantes adimensionnelles clés en physique

Denis Bernardin

► **To cite this version:**

| Denis Bernardin. Trois constantes adimensionnelles clés en physique. 2020. hal-02505805

HAL Id: hal-02505805

<https://hal.science/hal-02505805v1>

Preprint submitted on 11 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Trois constantes adimensionnelles
clés en physique*

Denis Bernardin

SOMMAIRE

1	INTRODUCTION	5
1.1	OBJET	5
1.2	RAPPELS.....	5
2	UN SYSTEME NON ANTHROPOCENTRIQUE.....	7
2.1	SYSTEME D'UNITES DE PLANCK	7
2.2	QUELQUES CONSEQUENCES ET UNITES DERIVEES	10
2.3	LA CONSTANTE DE STRUCTURE FINE.....	10
2.4	CHOIX D'UN SYSTEME D'UNITES NON ANTHROPOCENTRIQUE : LE SYSTEME SP_B	10
3	EXPRESSION DES CONSTANTES FONDAMENTALES DANS LE SYSTEME SP_B	11
3.1	EXPRESSION DES CONSTANTES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE SYSTEME SP_B	11
3.1.1	<i>Expression de e, k_C, ϵ_0 et μ_0.....</i>	<i>11</i>
3.1.2	<i>Expression des différentes constantes électromagnétiques</i>	<i>11</i>
3.2	EXPRESSION DU MAGNETON DE BOHR ET DU MAGNETON NUCLEAIRE EN SP_B	12
3.3	LES CONSTANTES ADIMENSIONNELLES α , β ET δ	13
3.4	EXPRESSION DES CONSTANTES ATOMIQUES ET NUCLEAIRES EN SP_B	13
4	LES FORCES DE LA NATURE ET LE ROLE DE LA CONSTANTE β	15
4.1	RAPPEL SUR LES INTERACTIONS FONDAMENTALES	15
4.2	COMPARAISON DE LA FORCE GRAVITATIONNELLE ET DE LA FORCE ELECTROMAGNETIQUE	15
4.3	LES CONSTANTES DE COUPLAGE GRAVITATIONNELLE ET ELECTROMAGNETIQUE	16
5	SYNTHESE DES CONSTANTES ETUDIEES ET ESPACE SCHEDO-VECTORIEL	18
5.1	STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES VALEURS PHYSIQUES : L'ESPACE SCHEDO-VECTORIEL.....	19
5.1.1	<i>Définition d'un espace schedo-vectoriel.....</i>	<i>19</i>
5.1.2	<i>L'ensemble des « valeurs physiques » comme espace schedo-vectoriel complet.....</i>	<i>20</i>
5.2	CHANGEMENT DE BASE DANS UN ESPACE SCHEDO-VECTORIEL COMPLET	23
5.3	REDUCTION DIMENSIONNELLE D'UN ESPACE SCHEDO-VECTORIEL	26
5.4	PARALLELE ENTRE LA REDEFINITION DES CONCEPTS DE CHARGE ET DE MASSE	26
5.5	EQUATIONS SCHEDO-VECTORIELLES.....	27
5.6	ECLAIRAGE PARTICULIER SUR LE SI ET SES EVOLUTIONS EN 2019	27
6	LES CONSTANTES PHYSICO-CHIMIQUES.....	28
6.1	LE NOMBRE D'AVOGADRO ET LA MOLE EN SP_B	28
6.2	LES CONSTANTES PHYSICO-CHIMIQUES EN SP_B	28
7	LE SYSTEME SP_B ET QUATRE EXCEPTIONS CHEZ LES CONSTANTES	30
8	« CONSTANTES » COSMOLOGIQUES ET GRANDS NOMBRES DE DIRAC.....	32
8.1	CONSTANTE DE HUBBLE, TEMPS DE HUBBLE ET AGE DE L'UNIVERS	32
8.2	QUELQUES AUTRES PARAMETRES COSMOLOGIQUES	33
8.3	L'HYPOTHESE DES GRANDS NOMBRES DE DIRAC	34
8.3.1	<i>Rapports dépendant de la constante de Hubble.....</i>	<i>35</i>
8.3.2	<i>Rapports indépendants de la constante de Hubble.....</i>	<i>35</i>
8.3.3	<i>Ossature des grands nombres de Dirac : β^2.....</i>	<i>35</i>
9	PROBLEMES OUVERTS ET CONCLUSION PROVISoire	36
9.1	MASSE LINEIQUE DE PLANCK.....	36
9.2	RAYON DE SCHWARZSCHILD ET MASSE LINEIQUE.....	36
9.3	LE RAYON DE CHARGE DU PROTON r_{cp}	37
9.4	CONCLUSION PROVISoire.....	38

10	ANNEXES	39
10.1	DEMONSTRATION DES EQUIVALENCES ET PROPOSITIONS DU § 5.1.1	39
10.1.1	<i>Démonstration de l'équivalence de définitions d'une partie libre</i>	39
10.1.2	<i>Démonstration Proposition 1</i>	39
10.2	ANNEXE 2 : SOUS-ESPACES SCHEDO-VECTORIELS	41
10.3	ANNEXE 3 : DEMONSTRATION DE $\{l_p, \mu_0, c, e\}$ BASE DE F	42
10.4	ANNEXE 4 : CONSTANTES FONDAMENTALES EXPRIMEES SELON DIFFERENTES BASES.....	43
10.5	ANNEXE 5 : CONSTANTES PHYSICO-CHIMIQUES DEPENDANT DE CONDITIONS INITIALES	47
10.6	ANNEXE 6 : LA CONSTANTE DE FERMI	49
10.6.1	<i>Etude de tableaux afférents à la constante de Fermi</i>	49
10.6.2	<i>Les systèmes de Planck et les systèmes d'unités naturelles</i>	50
10.6.3	<i>Comparaison des tableaux relatifs à la constante de Fermi</i>	53

Abstract : This study highlights the fundamental role of **three key dimensionless constants** in physics. Two are already well known, they are: α , fine structure constant, and δ , ratio between the mass of the proton and that of the electron. The dimensionless constant, highlighted in this article, is the constant β whose order of magnitude is $2,39 \times 10^{22}$ and which plays for gravitation a role similar to that of the fine structure constant for electromagnetism. This study also aims for define rigorously the mathematical structure of space containing any physical value whatever the units of measurement used and to express in this space, from the three dimensionless constants mentioned above, most of the constants of physics in a non-anthropocentric system of units.

Résumé : Cette étude met en lumière le rôle essentiel de **trois constantes adimensionnelles** clés en physique. Deux sont déjà bien connues, ce sont : α , constante de structure fine, et δ , rapport entre la masse du proton et celle de l'électron. La constante adimensionnelle, mise en lumière dans cet article, est la constante β dont l'ordre de grandeur est de $2,39 \times 10^{22}$ et qui joue pour la gravitation un rôle analogue à celui de la constante de structure fine pour l'électromagnétisme. Cette étude a également pour objectif de définir rigoureusement **la structure mathématique de l'espace contenant toute valeur physique quelles que soient les unités de mesure utilisées** et d'exprimer dans cet espace, à partir des trois constantes adimensionnelles citées plus haut la plupart des constantes de la physique dans un **système d'unités non anthropocentrique**.

1 INTRODUCTION

1.1 Objet

L'objet de cette étude est de mettre en évidence un plus petit ensemble de **constantes adimensionnelles** permettant d'exprimer l'essentiel des constantes de la physique, et ce dans un **système d'unités non anthropocentrique**. L'objet de cette étude est également de mettre en lumière toute l'importance, dans ses différentes utilisations, d'une constante adimensionnelle β qui en est un élément prépondérant.

L'idée qui a mené à cette étude est la suivante : pour mieux comprendre l'univers, il semble bon de parler son langage. Mais que veut dire parler son langage ? En premier lieu, c'est utiliser des unités de mesure qui ne soient pas fixées arbitrairement par l'homme même si les unités actuelles du système international (SI) ont permis des progrès phénoménaux, et des avancées réelles vers l'universel. Il suffit pour s'en convaincre de visiter le musée du mètre à Paris et de suivre son évolution jusqu'à aujourd'hui. Pour autant, n'est-il pas possible de pénétrer une réalité plus cachée qui se dévoilerait en utilisant des unités de mesure non anthropocentriques ? Les nombres figurant devant des unités de mesure, comme le nombre « 299 792 458 » devant « m/s » ne peuvent rien nous apprendre. Combien faut-il épuiser de nombres réels devant les unités de mesure qui constituent le SI ? Pratiquement un par constante. Combien de nombres réels sont-ils nécessaires avec un système d'unités non anthropocentrique, c'est-à-dire dégagé de tout arbitraire ?

En répondant à cette question, nous montrerons entre autres qu'il existe **trois constantes adimensionnelles fondamentales**, à partir desquelles l'essentiel des constantes de la physique peuvent être exprimées dans un système d'unités non anthropocentrique.

1.2 Rappels

Avant de mettre en évidence le système d'unités non anthropocentrique que nous avons choisi, rappelons ce que sont les unités de mesure de base du système international (SI) :

Grandeurs physiques de base	Nom de l'unité de mesure SI	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Intensité électrique	Ampère	A
Température	Kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

Tableau 1

Notons deux unités dérivées supplémentaires pour les angles :

Angle	radian	rad
Angle solide	stéradian	sr

Rappelons également quelques autres unités dérivées par rapport aux unités de base.

Grandeurs physiques dérivées	Nom de l'unité de mesure SI	Symbole	Unités de base SI
Force	Newton	N	m.kg.s^{-2}
Énergie	Joule	J	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-2}$
Puissance	Watt	W	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-3}$
Pression	Pascal	Pa	$\text{m}^{-1}.\text{kg.s}^{-2}$
Charge électrique	Coulomb	C	s.A
Capacité électrique	Farad	F	$\text{m}^{-2}.\text{kg}^{-1}.\text{s}^4.\text{A}^2$
Conductance électrique	Siemens	S	$\text{m}^{-2}.\text{kg}^{-1}.\text{s}^3.\text{A}^2$
Inductance	Henry	H	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-2}.\text{A}^{-2}$
Flux magnétique	Weber	Wb	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}$
Potentiel électrique	Volt	V	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-3}.\text{A}^{-1}$
Résistance électrique	Ohm	Ω	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-3}.\text{A}^{-2}$
Induction magnétique	Tesla	T	$\text{kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}$
Fréquence	Hertz	Hz	s^{-1}

Tableau 2

Un tel système est bien entendu totalement anthropocentrique.

Le mètre, même s'il a constitué une avancée considérable vers « l'universalité » et malgré ses évolutions, n'en est pas moins comme toutes les autres unités du SI, une unité de mesure anthropocentrique.

Rappelons également quelles sont les constantes fondamentales du SI.

(Source : CODATA recommended 2014 values of the fundamental physical constants)

Constantes fondamentales du SI

Nom	Symbole	Valeur	Unité SI
Vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458	m.s^{-1}
Constante de Planck	h	$6,626\ 070\ 040(81) \times 10^{-34}$	$\text{m}^2.\text{kg.s}^{-1}$
Constante gravitationnelle	G	$6,674\ 08(31) \times 10^{-11}$	$\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
Charge élémentaire	e	$1,602\ 176\ 6208(98) \times 10^{-19}$	C
Constante de permittivité du vide	ϵ_0	$8,854\ 187\ 817... \times 10^{-12}$	F.m^{-1}
Constante de Boltzmann	k_B	$1,380\ 648\ 52(79) \times 10^{-23}$	J.K^{-1}
Nombre d'Avogadro	N_A	$6,022\ 140\ 857(74) \times 10^{23}$	mol^{-1}

Tableau 3

2 UN SYSTEME NON ANTHROPOCENTRIQUE

2.1 Système d'unités de Planck

Le premier¹ système d'unités de mesure présenté comme non anthropocentrique fut le système d'unités de Planck. Lorsque Planck définit pour la première fois ses unités dans un article en 1899, il n'avait pas encore découvert la théorie du corps noir qu'il allait exposer un an plus tard, ni la constante h portant aujourd'hui son nom.

Aussi aborderons-nous le problème de la façon suivante : est-il possible de trouver cinq unités de mesure l_p, t_p, m_p, q_p, T_p — le « p » en indice faisant référence à Planck — remplaçant respectivement les unités de longueur m , de temps s , de masse kg , de charge C et de température K , afin de mettre à 1 dans les nouvelles unités les constantes les plus fondamentales², c'est-à-dire celles vérifiant les équations :

$$\bullet \quad c = 1 l_p \cdot t_p^{-1} \quad (2-1)$$

$$\bullet \quad \hbar = h/2\pi = 1 l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \quad (2-2)$$

$$\bullet \quad G = 1 l_p^3 \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^{-2} \quad (2-3)$$

$$\bullet \quad k_C = 1 l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot q_p^{-2} \quad (k_C = 1/4\pi\epsilon_0 \text{ étant la constante de Coulomb}) \quad (2-4)$$

$$\bullet \quad k_B = 1 l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot T_p^{-1} \quad (2-5)$$

L'énorme intérêt d'un tel système d'unités de mesure est de ne privilégier aucune de ces constantes fondamentales l'une par rapport à l'autre et d'utiliser des unités de mesure par définition non anthropocentriques.

Deux remarques doivent être faites par rapport à ces équations.

Première remarque : dans les équations ci-dessus, il a été choisi de mettre à 1, dans un premier temps, non pas la constante de permittivité du vide ϵ_0 , mais la constante de Coulomb, constante fondamentale de l'électromagnétisme, qui joue pour les charges le même rôle que la constante de gravitation pour les masses.

Seconde remarque : nous utiliserons systématiquement par la suite les unités de mesure relatives à la charge électrique, et non celles correspondant à l'intensité électrique. En effet, la charge élémentaire est un concept fondamental donné par l'univers, ce qui n'est pas le cas de l'intensité électrique. Aussi, ferons-nous une entorse au SI en privilégiant systématiquement le Coulomb à l'Ampère et en remplaçant systématiquement A par $C \cdot s^{-1}$; ce qui permet en outre de faciliter le passage du SI à un système d'unités non anthropocentrique.

Si l'on regarde les trois premières équations ci-dessus, on s'aperçoit que l'on est en présence d'un système de trois équations à trois inconnues.

De (2-3), on déduit $m_p = G^{-1} \cdot l_p^3 \cdot t_p^{-2}$, d'où en remplaçant m_p dans (2-2), on obtient :

$$\hbar = G^{-1} \cdot l_p^5 \cdot t_p^{-3} \quad (2-6)$$

De (2-1) on déduit $t_p = c^{-1} \cdot l_p$, d'où en remplaçant t_p dans (2-6), on obtient $\hbar = G^{-1} \cdot c^3 \cdot l_p^2$

$$\text{D'où} \quad l_p = (\hbar \cdot G \cdot c^{-3})^{1/2}$$

$$\text{En remplaçant } l_p \text{ dans (2-1), on obtient} \quad t_p = (\hbar \cdot G \cdot c^{-5})^{1/2}$$

¹ En fait le second. Planck avait eu un précurseur en la personne de George Stoney (cf. § 9.4)

² La constante \hbar a été préférée à h pour des raisons de facilité d'écriture.

De même en remplaçant l_p et t_p dans (2-2), on déduit $\hbar = (\hbar \cdot G \cdot c^{-3}) \cdot (\hbar \cdot G \cdot c^{-5})^{-1/2} \cdot m_p$,
d'où

$$m_p = (\hbar \cdot c \cdot G^{-1})^{1/2}$$

De la même manière, on déduit de (2-4) :

$$q_p^2 = k_C^{-1} \cdot l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} = 4\pi\epsilon_0 \cdot (\hbar \cdot G \cdot c^{-3})^{3/2} \cdot (\hbar \cdot c \cdot G^{-1})^{1/2} \cdot (\hbar \cdot G \cdot c^{-5})^{-1} = 4\pi\epsilon_0 \hbar c$$

D'où

$$q_p = (4\pi\epsilon_0 \hbar c)^{1/2}$$

Et pour finir, de (2-5), on déduit : $T_p = k_B^{-1} \cdot l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} = k_B^{-1} \cdot c^2 \cdot m_p = k_B^{-1} \cdot c^2 \cdot (\hbar \cdot c \cdot G^{-1})^{1/2}$

D'où

$$T_p = k_B^{-1} \cdot (\hbar \cdot c^5 \cdot G^{-1})^{1/2}$$

En résumé on a donc :

- $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,616\ 229(38) \times 10^{-35} \text{ m}$
- $t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5,391\ 16(13) \times 10^{-44} \text{ s}$
- $m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,176\ 470(51) \times 10^{-8} \text{ kg}$
- $q_p = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 1,875\ 546\ 023(13) \times 10^{-18} \text{ C}$
- $T_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = 1,416\ 808(33) \times 10^{32} \text{ K}$

Ce système d'unités porte le nom de système d'unités de Planck. Pour être plus précis, il existe un autre système de Planck avec une unité de charge q_p qui est celle du système de Heaviside-Lorentz, basée non sur $1/4\pi\epsilon_0 = 1 \cdot l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot q_p^{-2}$ mais sur $\epsilon_0 = 1 \cdot l_p^{-3} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^2 \cdot q_p^2$.

On pourrait objecter que l'on ne dit pas dans quel espace est résolu ce système d'équations et qu'alors la démonstration n'est pas rigoureuse.

En effet, une équation comme $x^2 - 2 = 0$ n'a aucune solution dans l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} , mais a deux solutions dans l'ensemble des nombres réels, ou encore l'équation $x^2 + 2 = 0$ n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres réels, mais en a deux dans l'ensemble des nombres complexes.

Pour lever cette objection nous aurons à décrire la structure mathématique **de l'espace contenant toute valeur physique quelles que soient les unités de mesure utilisées. C'est** à ce problème que sera notamment consacré le chapitre 5.

Notons seulement dans un premier temps que les valeurs numériques x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , en unités SI, de respectivement l_p, m_p, t_p, q_p, T_p :

- $x_1 = 1,616\ 229(38) \times 10^{-35}$; $x_2 = 5,391\ 16(13) \times 10^{-44}$; $x_3 = 2,176\ 470(51) \times 10^{-8}$
- $x_4 = 1,875\ 546\ 023(13) \times 10^{-18}$; $x_5 = 1,416\ 808(33) \times 10^{32}$

qui sont les facteurs de conversion entre le système de Planck et le SI, ne sont pas des nombres *intéressants* dans le cadre de cette démarche, car même si le système de Planck n'est pas anthropocentrique, le SI est lui par nature anthropocentrique.

Précisons toutefois, afin d'éviter toute confusion, que le SI n'est en aucun cas remplaçable par un système d'unités non anthropocentrique car indispensable pour son côté pratique nécessaire à toute expérience, il reste **seul capable d'assurer la cohérence entre théorie et expérience**. C'est pourquoi il est abondamment utilisé, y compris dans cette étude basée sur un système non anthropocentrique. Le caractère anthropocentrique du SI ne s'oppose par ailleurs en rien à son caractère universel et profondément humaniste, hérité du système métrique : « **A tous les temps, à tous les peuples** ».

2.2 Quelques conséquences et unités dérivées

Quelques conséquences

$$\text{De (2-1) et (2-2), on déduit : } l_p \cdot m_p = \hbar \cdot c^{-1} \quad (2-7)$$

$$\text{De (2-1) et (2-3), on déduit : } l_p \cdot m_p^{-1} = G \cdot c^{-2} \quad (2-8)$$

Quelques unités dérivées

Par définition, on pose : $F_p = l_p \cdot m_p \cdot t_p^{-2}$; $E_p = F_p \cdot l_p$; $P_p = E_p \cdot t_p^{-1}$; $Pr_p = F_p / l_p^2$. On en déduit :

$$\text{Force de Planck} \quad : F_p = c^4 / G$$

$$\text{Energie de Planck} \quad : E_p = m_p \cdot c^2$$

$$\text{Puissance de Planck} \quad : P_p = c^5 / G$$

$$\text{Pression de Planck} \quad : Pr_p = c^7 / (\hbar \cdot G^2)$$

2.3 La constante de structure fine

Cette fameuse constante adimensionnelle qu'est la constante de structure fine a fait dire à Feynman : « C'est l'un des plus grands mystères de la physique : un nombre magique donné à l'homme sans qu'il y comprenne quoi que ce soit ». Elle s'exprime de la manière suivante : $\alpha = e^2 / (4\pi\epsilon_0 \hbar c) = 7,297\ 352\ 5664(17) \times 10^{-3} = 1/137,035\ 999\ 138(32)$

2.4 Choix d'un système d'unités non anthropocentrique : le système SP_B

Le principe vers lequel nous voulons tendre est celui de l'universalité. Se rapprocher le plus possible dans nos choix de ce qui est « universel ».

En ce sens les unités de Planck constituent une remarquable base de départ car elles ont pour avantage de ne privilégier, en les mettant toutes à 1, aucune des constantes fondamentales que sont c , \hbar , G , k_C et k_B .

Le système que nous choisissons reprend donc les unités de Planck, mais à une exception près : dans ce nouveau système d'unités que nous baptiserons SP_B (système de Planck B), l'unité de charge électrique de Planck, q_p , sera remplacée par la charge élémentaire e .

Pourquoi ? Parce que cette dernière apporte un caractère d'universalité supplémentaire. La charge électrique de l'électron est $-e$; la charge électrique du proton est $+e$. Et quoi de plus universel dans cet univers que l'électron et le proton ? Quoi de plus universel que ce qui est fourni par l'univers, lui-même ?

Mais alors, pourquoi ne pas prendre comme unité de masse par exemple la masse de l'électron, en lieu et place de la masse de Planck ? La réponse est : parce qu'alors dans un tel système la constante de gravitation G ne serait plus à 1. Et qui plus est, pourquoi choisir la masse de l'électron plutôt que celle du proton ?

Il existe une symétrie concernant la charge électrique entre proton et électron, justifiant pleinement le choix de la charge élémentaire, symétrie, qui n'existe pas quant aux masses.

Toutefois, la constante de Coulomb k_C qui est l'équivalent pour l'électromagnétisme de G pour la gravitation, n'est plus à 1. Certes, mais elle prend dans ce système d'unités une valeur universelle, essentielle, à savoir α .

D'après l'expression de la constante de structure fine, $\alpha = e^2 / (4\pi\epsilon_0 \hbar c)$, on peut déduire :

$$e^2 = \alpha q_p^2 \quad (2-9)$$

Nous reviendrons par la suite sur l'importance considérable de cette constante adimensionnelle qu'est α .

3 Expression des constantes fondamentales dans le système SP_B

3.1 Expression des constantes électromagnétiques dans le système SP_B

Dans ce chapitre, nous développerons les formules des constantes électromagnétiques en unités SP_B et nous verrons que, les nombres réels¹ π et α sont essentiels à leur expression. Lors du développement en SP_B des deux dernières constantes électromagnétiques, nous verrons apparaître les deux constantes adimensionnelles supplémentaires qui permettront alors d'exprimer toutes les autres constantes fondamentales en unités SP_B .

3.1.1 Expression de e , k_C , ϵ_0 et μ_0

- **Charge élémentaire e**

Il s'agit de l'unité de charge de notre système SP_B : $e = 1 e$

- **Constante de Coulomb k_C**

$k_C = 1/4\pi\epsilon_0 = 1 l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot q_p^{-2}$; de (2-9) on déduit $1/4\pi\epsilon_0 = \alpha l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot e^{-2}$

- **Permittivité du vide ϵ_0**

De $1/4\pi\epsilon_0 = \alpha l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot e^{-2}$, on tire : $\epsilon_0 = (4\pi\alpha)^{-1} l_p^{-3} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^2 \cdot e^2$

- **Perméabilité du vide μ_0**

La permittivité du vide ϵ_0 et la perméabilité du vide sont liées à la vitesse de la lumière dans le vide par l'équation : $\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$

On déduit : $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 \cdot c^2) = 4\pi\alpha l_p \cdot m_p \cdot e^{-2}$ (car $c = 1 l_p \cdot t_p^{-1}$)

3.1.2 Expression des différentes constantes électromagnétiques

- **Impédance caractéristique du vide : Z_0**

$$Z_0 = \mu_0 \cdot c = 4\pi\alpha l_p \cdot m_p \cdot e^{-2} \cdot (1 l_p \cdot t_p^{-1})$$

$$= 4\pi\alpha l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot e^{-2}$$

- **Quantum de conductance : G_0**

$$G_0 = 2e^2/h = e^2/(\pi \hbar)$$

$$= \pi^{-1} e^2 \cdot (1 l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1})^{-1}$$

$$= \pi^{-1} l_p^{-2} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p \cdot e^2$$

(d'après (2-2))

- **Constante de Josephson : K_J**

$$K_J = 2e/h = G_0 \cdot e^{-1}$$

$$= \pi^{-1} l_p^{-2} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p \cdot e$$

- **Quantum de flux magnétique : Φ_0**

$$\Phi_0 = 1/K_J = \pi l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot e^{-1}$$

- **Constante de Von Klitzing : R_K**

$$R_K = h/e^2 = 2\pi \hbar/e^2$$

$$= 2\pi l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot e^{-2}$$

(d'après (2-2))

¹ Nous établirons la différence, § 5.1.2, entre le nombre réel α et la constante adimensionnelle α .

Notons que nous avons exprimé la plupart des constantes électromagnétiques dans le système d'unités SP_B à l'aide principalement des nombres réels : α et π . Il reste toutefois deux constantes électromagnétiques à étudier, à savoir le magnéton de Bohr μ_B et le magnéton nucléaire μ_N .

3.2 Expression du magnéton de Bohr et du magnéton nucléaire en SP_B

- **Magnéton de Bohr : μ_B**

$$\begin{aligned}\mu_B &= e \cdot \hbar / 2m_e \\ &= (1/2m_e) \cdot I_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot e \quad (\text{car } \hbar = 1 I_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1})\end{aligned}$$

Il y a dans l'expression de μ_B deux problèmes quant à l'objectif d'exprimer les constantes de la physique en unités SP_B . Le premier est celui de la présence dans l'expression de μ_B , de la masse de l'électron. Le second porte sur l'analyse dimensionnelle de μ_B .

Rappelons qu'il est possible d'exprimer la dimension de toutes les grandeurs physiques en fonction de sept dimensions de base : longueur L, masse M, temps T, intensité électrique I, température thermodynamique Θ , intensité lumineuse J, quantité de matière N. Le choix de notre système d'unités de mesure dans lequel la charge électrique remplace l'intensité électrique, nous amène à adapter l'analyse dimensionnelle en remplaçant la dimension de l'intensité électrique par celle de la charge électrique que nous noterons C.

Or, si l'on procède à l'analyse dimensionnelle de μ_B :

$[\mu_B] = [e][\hbar][1/2m_e] = C[L^2MT^{-1}]M^{-1} = L^2T^{-1}C$, on s'aperçoit que la masse n'apparaît pas dans les dimensions de μ_B . Il faut donc faire disparaître l'unité de masse de l'expression de μ_B . Ce qui est aisé en introduisant une seconde constante adimensionnelle :

$$\beta = m_p/m_e = 2,389\,262(56) \times 10^{22}$$

$$\begin{aligned}\text{Ce qui nous donne } \mu_B &= (1/2m_e) \cdot I_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot e \\ &= (m_p/2m_e) I_p^2 \cdot t_p^{-1} \cdot e \\ &= (\beta/2) I_p^2 \cdot t_p^{-1} \cdot e\end{aligned}$$

Ainsi se trouve mise en lumière **une constante adimensionnelle très grande**, qui permettra d'exprimer en unités SP_B pratiquement toutes les constantes de la physique que l'on ne pouvait exprimer uniquement à l'aide de α et π .

- **Magnéton nucléaire : μ_N**

Remarque : Nous noterons m_{pr} la masse du proton afin de ne pas confondre avec la masse de Planck m_P utilisée fréquemment dans cette étude.

$$\mu_N = e \cdot \hbar / 2m_{pr}$$

Nous avons de nouveau, à gérer l'utilisation d'une nouvelle constante, la masse du proton. Aussi devons-nous introduire une dernière constante adimensionnelle, bien connue celle-là, qui exprime le rapport entre la masse du proton et celle de l'électron :

$$\delta = m_{pr}/m_e = 1836,152\,673\,89(17)$$

$$\begin{aligned}\mu_N &= e \cdot \hbar / 2m_{pr} = \mu_B / \delta \\ &= (\beta/2\delta) I_p^2 \cdot t_p^{-1} \cdot e\end{aligned}$$

3.3 Les constantes adimensionnelles α , β et δ

Nous avons eu besoin pour exprimer l'ensemble des constantes électromagnétiques en SP_B outre des nombres **2** et π avec leurs puissances négatives ou positives, de trois constantes adimensionnelles : α , β et δ . Nous allons maintenant découvrir le rôle fondamental joué par β dans l'expression des constantes atomiques et nucléaires en unités SP_B , le rôle de δ étant important sans être aussi fondamental que le sont les rôles de α et β .

3.4 Expression des constantes atomiques et nucléaires en SP_B

- **Masse de l'électron : m_e**
 $m_e = \beta^{-1} m_p$ (d'après définition de β)
- **Masse du proton : m_{pr}**
 $m_{pr} = \beta^{-1} \delta m_p$ (car $m_{pr} = \delta m_e$)
- **Rayon de Bohr : a_0**
 $a_0 = \alpha^{-1} \hbar / m_e \cdot c$
 $= \alpha^{-1} l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} / [(\beta^{-1} m_p) \cdot (l_p \cdot t_p^{-1})]$
 $= \alpha^{-1} \beta l_p$
- **Rayon classique de l'électron : r_e**
 $r_e = e^2 / (4\pi \epsilon_0 \cdot m_e \cdot c^2)$
 $= e^2 \cdot (\alpha l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot e^{-2}) \cdot (\beta^{-1} m_p)^{-1} \cdot (l_p \cdot t_p^{-1})^{-2}$ (car $1/4\pi \epsilon_0 = \alpha l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot e^{-2}$ voir § 3.1.1)
 $= \alpha \beta l_p$ (3-1)
- **Constante de Rydberg : R_∞**
 $R_\infty = \alpha^2 m_e \cdot c / 2h$
 $= \alpha^2 (\beta^{-1} m_p) \cdot (l_p \cdot t_p^{-1}) / (4\pi l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1})$
 $= (\alpha^2 / 4\pi \beta) l_p^{-1}$
- **Energie de Hartree : E_H**
 $E_H = 2 R_\infty \cdot h \cdot c$
 $= (4\pi l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1}) \cdot R_\infty \cdot c$
 $= \alpha^2 \beta^{-1} l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2}$
- **Rayon de Compton¹ pour l'électron : R_C**
 $R_C = \hbar / m_e \cdot c$
 $= \alpha a_0$
 $= \beta l_p$
- **Longueur d'onde de Compton pour l'électron : λ_C**
 $\lambda_C = h / m_e \cdot c$
 $= 2\pi R_C$
 $= 2\pi \beta l_p$
- **Longueur d'onde de Compton pour le proton : λ_{Cpr}**
 $\lambda_{Cpr} = h / m_{pr} \cdot c$
 $= 2\pi \beta \delta^{-1} l_p$

¹ Le plus souvent appelée longueur d'onde de Compton réduite et notée $\tilde{\lambda}_C$

- **Quantum de circulation**

$$\begin{aligned} h/2m_e &= 2\pi \hbar/2m_e \\ &= \pi l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} / (\beta^{-1} m_p) \\ &= \pi \beta l_p^2 \cdot t_p^{-1} \end{aligned}$$

- **Section efficace de Thomson : T_{CS}**

$$\begin{aligned} T_{CS} &= (8\pi/3)r_e^2 \\ &= (8\pi/3)\alpha^2\beta^2 l_p^2 \end{aligned}$$

- **Première constante de rayonnement : c_{1R}**

$$\begin{aligned} c_{1R} &= 2\pi \hbar \cdot c^2 = 4\pi^2 \hbar \cdot c^2 \\ &= 4\pi^2 (l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1}) \cdot (l_p^2 \cdot t_p^{-2}) \\ &= 4\pi^2 l_p^4 \cdot m_p \cdot t_p^{-3} \end{aligned}$$

- **Première constante de rayonnement pour la radiance spectrale : c_{1L}**

$$\begin{aligned} c_{1L} &= c_{1R}/(\pi \text{ sr}) \\ &= 4\pi l_p^4 \cdot m_p \cdot t_p^{-3} \cdot \text{sr}^{-1} \end{aligned}$$

Remarque : les constantes c_{1R} et c_{1L} qui sont habituellement classées dans les constantes physico-chimiques étudiées chapitre 6, ont été étudiées dans ce paragraphe car utilisant les mêmes **grandeurs de base** : longueur, masse et durée.

Une dernière observation : bien que le modèle de Bohr n'ait pas survécu à la mécanique quantique, si l'on considère le rayon classique de l'électron et le rayon de Bohr, il est assez éblouissant de constater que ces longueurs : $r_e = \alpha\beta l_p$ et $a_0 = \alpha^{-1}\beta l_p$ sont obtenues à partir de seulement deux constantes adimensionnelles dont l'une β est le **rapport de deux masses** et l'autre α , le carré **du rapport de deux charges électriques**.

Il est tout aussi intéressant de regarder ce que le produit du rayon « classique » de l'électron par sa masse devient au regard de nos constantes α et β .

A partir de $r_e = \alpha\beta l_p$, on retrouve l'équation $r_e/a_0 = \alpha^2$; et en utilisant en plus l'équation $\beta = m_p/m_e$, on retrouve également $r_e \cdot m_e = \alpha l_p \cdot m_p$

Dans l'équation de Bohr :

$$E_n = - \left[\frac{m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \right] \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

on obtient en passant en SP_B : $E_n = - \left(\frac{\alpha^2}{2\beta} \right) \frac{1}{n^2} J_p$ (car $m_e = m_p/\beta$ et $e^2/(4\pi\epsilon_0) = \alpha \hbar \cdot c$)

$J_p = l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} = m_p \cdot c^2$ représente ici l'énergie de Planck afin de ne pas confondre avec les niveaux E_n d'énergie de l'équation.

Nous venons de constater le rôle essentiel de β dans l'expression des constantes atomiques et nucléaires lorsque ces dernières sont exprimées en unités de Planck ou en un système d'unités dérivé comme SP_B qui pour l'instant n'en diffère que par le seul remplacement de q_p par e . Mais cela ne s'arrête pas là, **le rôle prépondérant de β** va s'exprimer pleinement lors de l'expression de constantes adimensionnelles comme le rapport des forces gravitationnelles et électromagnétiques s'exerçant pour un même couple de particules ainsi que pour les constantes de couplage gravitationnel et électromagnétique.

4 Les forces de la nature et le rôle de la constante β

4.1 Rappel sur les interactions fondamentales

Il existe quatre interactions fondamentales gouvernant notre univers, chacune se manifestant sous forme d'une force dite fondamentale :

- L'interaction gravitationnelle
- L'interaction électromagnétique
- L'interaction faible
- L'interaction forte

Aujourd'hui, on dispose une théorie permettant d'unifier force électromagnétique et force faible en une force appelée force électrofaible ; le graal des physiciens étant de trouver une théorie unifiant l'ensemble de ces forces en une seule.

4.2 Comparaison de la force gravitationnelle et de la force électromagnétique

La structure de ces forces est très semblable. Si l'on regarde l'interaction gravitationnelle, son intensité pour deux particules de masses respectives m_1 et m_2 séparées par une distance d est donnée par la formule : $F_G = G.m_1.m_2/d^2$, alors que celle de l'interaction électromagnétique pour deux particules chargées de charge respectives q_1 et q_2 séparées par une distance d est donnée par la formule $F_{em} = k_C.q_1.q_2/d^2$.

Pour chacune de ces forces, l'intensité est :

- inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux particules,
- proportionnelle au produit des deux masses pour l'une, et des deux charges pour l'autre, avec $F_G = G.m_1.m_2/d^2$ et $F_{em} = k_C.q_1.q_2/d^2$

Comparons les intensités de ces forces pour deux électrons.

$$\begin{aligned} F_{em}/F_G &= k_C.e^2/G.m_e^2 \\ &= \alpha (l_p^3.m_p.t_p^{-2}.e^{-2}).e^2 / (1 l_p^3.m_p^{-1}.t_p^{-2}).m_e^2 \\ &= \alpha m_p^2/m_e^2 = \alpha (m_p/m_e)^2 = \alpha\beta^2 \quad (\text{cf. définition de } \beta, \text{ § 3.2}) \end{aligned}$$

On déduit que pour deux électrons : $F_{em}/F_G = k_C.e^2/G.m_e^2 = \alpha\beta^2$ (4-1)

Le rapport de l'intensité de la force électromagnétique sur l'intensité de la force gravitationnelle pour deux électrons est donc : $\alpha\beta^2 = 4,165\ 75(20) \times 10^{42}$

Lisa Randall pose la question suivante¹ : « À l'échelle des particules, la force gravitationnelle qui s'exerce entre deux électrons est, ainsi, 10^{42} fois moins importante que la force électrostatique ! Pourquoi une telle différence ? Les physiciens sont incapables de donner une justification à cet écart si important. Il leur apparaît comme un paramètre mystérieux, porteur d'un sens qui leur échappe, pour le moment. »

Richard Feynman dans son ouvrage « *The Feynman lectures physics* » posait le problème en ces termes :

¹ « La gravité se cache dans d'autres dimensions » - La recherche Novembre 2009

« L'attraction gravitationnelle relativement à la répulsion électrique de deux électrons est 1 divisé par $4,17 \times 10^{42}$. La question est : d'où provient un nombre aussi grand ?

Il n'est pas accidentel comme le rapport du volume de la terre au volume d'une puce. Nous avons considéré deux aspects de la même chose : un électron. Ce nombre fantastique est une constante naturelle, aussi contient-il quelque chose de très profond dans sa nature. D'où peut provenir un nombre aussi énorme ? »¹

Le « $4,17 \times 10^{42}$ » évoqué par Feynman, est en fait **le carré de la constante β multiplié par α** . La constante $\beta = 2,389\ 262(56) \times 10^{22}$, est ainsi une première réponse à la question qu'il posait ; réponse partielle que nous compléterons § 9.1. On peut, en outre, faire les constatations suivantes concernant α et β : la constante de structure fine α est le carré du rapport de deux charges $\alpha = (q_e/q_p)^2$ et β est le rapport de deux masses $\beta = m_p/m_e$. L'une fait intervenir la charge de l'électron et la charge de Planck, l'autre fait intervenir la masse de l'électron et la masse de Planck.

Déduisons maintenant de (4-1) et de $\delta = m_{pr}/m_e$, le rapport entre les intensités des forces électromagnétique et gravitationnelle pour :

$$\begin{aligned} \text{- deux protons :} \quad k_C \cdot e^2 / G \cdot (\delta m_e)^2 &= \alpha \beta^2 / \delta^2 \quad (4-2) \\ &= 1,235\ 592(58) \times 10^{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- un proton et un électron :} \quad k_C \cdot e^2 / (G \cdot \delta m_e \cdot m_e) &= \alpha \beta^2 / \delta \quad (4-3) \\ &= 2,268\ 74(11) \times 10^{39} \end{aligned}$$

4.3 Les constantes de couplage gravitationnelle et électromagnétique

L'objectif des constantes de couplage est de pouvoir comparer les interactions fondamentales citées § 4.1. Pour cela il est intéressant de calculer les intensités de chacune des forces correspondantes pour un même couple de particules (par exemple deux protons).

Si l'on procède à l'analyse dimensionnelle de $G \cdot m_1 \cdot m_2$, on obtient $[G \cdot m_1 \cdot m_2] = L^3 M T^{-2}$

De même, l'analyse dimensionnelle appliquée à l'intensité de la force électromagnétique nous donne : $[k_C \cdot q_1 \cdot q_2] = [\epsilon_0^{-1}] [q_1 \cdot q_2] = [m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^2 \cdot C^2]^{-1} [C]^2 = L^3 M T^{-2}$.

En divisant l'intensité de chacune des forces par $\hbar \cdot c$ qui a également pour dimension $L^3 M T^{-2}$, on obtient des constantes adimensionnelles, l'intérêt étant, outre de pouvoir comparer les constantes de couplage, d'avoir des résultats qui seront les mêmes quel que soit le système d'unités de mesure choisi.

Aussi, pose-t-on : $\alpha_G = G \cdot m_{pr}^2 / \hbar c$ et $\alpha_{em} = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot e^2 / \hbar c$

Développons ces écritures dans un même système d'unités de mesure, par exemple en SP_B :

$$\alpha_{em} = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot e^2 / \hbar c = (\alpha \cdot l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot e^{-2}) \cdot e^2 / (l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2}) = \alpha$$

$$\alpha_G = G \cdot m_{pr}^2 / \hbar c = (1 \cdot l_p^3 \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^{-2}) (\beta^{-1} \delta m_p)^2 / (1 \cdot l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2}) = (\beta^{-1} \delta)^2$$

On a donc

$$\alpha_{em} = \alpha \quad (4-4)$$

et

$$\alpha_G = (\beta^{-1} \delta)^2 \quad (4-5)$$

$$= 5,905\ 95(28) \times 10^{-39}$$

¹ La phrase citée est issue de : « Le cours de physique de Feynman Mécanique 1 »

² α_{em} donnée à énergie nulle ; à 100 GeV, on a $\alpha_{em} \approx 1/128$

Notons que le choix de coupler deux électrons plutôt que deux protons laisserait invariant α_{em} mais changerait le résultat de α_G . On aurait alors $\alpha_G = \beta^{-2}$. Les physiciens prennent souvent par convention le couplage de deux protons.

Il est intéressant d'examiner ce qui se passe si l'on couple pour la force gravitationnelle deux masses de Planck, et pour la force électromagnétique deux charges de Planck :

On déduit des équations (2-7) $l_p \cdot m_p = \hbar \cdot c^{-1}$ et (2-8) $l_p \cdot m_p^{-1} = G \cdot c^{-2}$, l'équation $m_p^2 = \hbar \cdot c \cdot G^{-1}$

D'où

$$\mathbf{G \cdot m_p^2 / \hbar \cdot c = 1 \quad (4-6)}$$

De même on déduit d'après (2-9), $(1/4\pi\epsilon_0) \cdot q_p^2 / \hbar c = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot e^2 / (\alpha \hbar c) = \alpha_{em} / \alpha = 1$

D'où

$$\mathbf{k_C \cdot q_p^2 / \hbar \cdot c = 1 \quad (4-7)}$$

Les constantes de couplage de deux masses de Planck pour la force gravitationnelle et de deux charges de Planck pour la force électromagnétique sont égales à 1.

De (4-3) et (4-4), on déduit également la double égalité :

$$\mathbf{G \cdot m_p^2 = \hbar c = k_C \cdot q_p^2}$$

5 Synthèse des constantes étudiées et espace schedo-vectorel

Tableau de synthèse des différentes constantes étudiées avec leur valeur en SP_B.

Nom	Symbole	Valeur (CODATA 2014)	Unités SI	Valeur	Unités SP _B
Vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458	m.s ⁻¹	1	l _p .t _p ⁻¹
Constante de Planck	h	6,626 070 040(81) × 10 ⁻³⁴	m ² .kg.s ⁻¹	2π	l _p ² .m _p .t _p ⁻¹
Constante gravitationnelle	G	6,674 08(31) × 10 ⁻¹¹	m ³ .kg ⁻¹ .s ⁻²	1	l _p ³ .m _p ⁻¹ .t _p ⁻²
Charge élémentaire	e	1,602 176 6208(98) × 10 ⁻¹⁹	C	1	e
Constante de permittivité du vide	ε ₀	8,854 187 817... × 10 ⁻¹²	m ⁻³ .kg ⁻¹ .s ² .C ²	(4πα) ⁻¹	l _p ⁻³ .m _p ⁻¹ .t _p ² .e ²
Constante de perméabilité du vide	μ ₀	4π × 10 ⁻⁷	m.kg.C ⁻²	4πα	l _p .m _p .e ⁻²
Constante de Coulomb	k _C = 1/(4πε ₀)	8,987 551 787... × 10 ⁹	m ³ .kg.s ⁻² .C ⁻²	α	l _p ³ .m _p .t _p ⁻² .e ⁻²
Impédance caractéristique du vide	Z ₀	376,730 313 461 ...	m ² .kg.s ⁻¹ .C ⁻²	4πα	l _p ² .m _p .t _p ⁻¹ .e ⁻²
Quantum de conductance	G ₀	7,748 091 7310(18) × 10 ⁻⁵	m ⁻² .kg ⁻¹ .s.C ²	π ⁻¹	l _p ⁻² .m _p ⁻¹ .t _p .e ²
Constante de Josephson	K _J	4,835 978 525(30) × 10 ¹⁴	m ⁻² .kg ⁻¹ .s.C	π ⁻¹	l _p ⁻² .m _p ⁻¹ .t _p .e
Quantum de flux magnétique	Φ ₀	2,067 833 831(13) × 10 ⁻¹⁵	m ² .kg.s ⁻¹ .C ⁻¹	π	l _p ² .m _p .t _p ⁻¹ .e ⁻¹
Constante de von Klitzing	R _K	2,581 280 745 55(59) × 10 ⁴	m ² .kg.s ⁻¹ .C ⁻²	2π	l _p ² .m _p .t _p ⁻¹ .e ⁻²
Magnéton de Bohr	μ _B	9,274 009 994(57) × 10 ⁻²⁴	m ² .s ⁻¹ .C	β/2	l _p ² .t _p ⁻¹ .e
Magnéton nucléaire	μ _N	5,050 783 699(31) × 10 ⁻²⁷	m ² .s ⁻¹ .C	β/2δ	l _p ² .t _p ⁻¹ .e
Rayon de Bohr	a ₀	5,291 772 1067(12) × 10 ⁻¹¹	m	α ⁻¹ β	l _p
Rayon classique de l'électron	r _e	2,817 940 3227(19) × 10 ⁻¹⁵	m	αβ	l _p
Masse de l'électron	m _e	9,109 383 56(11) × 10 ⁻³¹	kg	β ⁻¹	m _p
Masse du proton	m _{pr}	1,672 621 898(21) × 10 ⁻²⁷	kg	β ⁻¹ δ	m _p
Constante de Rydberg	R _∞	1,097 373 156 8508(65) × 10 ⁷	m ⁻¹	α ² /4πβ	l _p ⁻¹
Energie de Hartree	E _H	4,359 744 650(54) × 10 ⁻¹⁸	m ² .kg.s ⁻²	α ² β ⁻¹	l _p ² .m _p .t _p ⁻²
Rayon de Compton de l'électron	R _C	3,861 592 6764(18) × 10 ⁻¹³	m	β	l _p
Longueur d'onde de Compton pour l'électron	λ _C	2,426 310 2367(11) × 10 ⁻¹²	m	2πβ	l _p
Longueur d'onde de Compton pour le proton	λ _{C,pr}	1,321 409 853 96(61) × 10 ⁻¹⁵	m	2πβδ ⁻¹	l _p
Quantum de circulation	h/2m _e	3,636 947 5486(17) × 10 ⁻⁴	m ² .s ⁻¹	πβ	l _p ² .t _p ⁻¹
Section efficace de Thomson	T _{CS}	6,652 458 7158(91) × 10 ⁻²⁹	m ²	(8π/3)α ² β ²	l _p ²
Première constante de rayonnement	c _{1R}	3,741 771 790(46) × 10 ⁻¹⁶	m ⁴ .kg.s ⁻³	4π ²	l _p ⁴ .m _p .t _p ⁻³
Première constante de rayonnement pour radiançe spectrale	c _{1L}	1,191 042 953(15) × 10 ⁻¹⁶	m ⁴ .kg.s ⁻³ .sr ⁻¹	4π	l _p ⁴ .m _p .t _p ⁻³ .sr ⁻¹
Constante de couplage de la force électromagnétique	α _{em} = k _C .e ² /hc	7,297 352 5664(17) × 10 ⁻³	Sans dimension	α	Sans dimension
Constante de couplage de la force de gravitation	α _G = G.m _p ² /hc	5,905 95(28) × 10 ⁻³⁹	Sans dimension	(β ⁻¹ δ) ²	Sans dimension
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 protons)	α _{em} /α _G = k _C .e ² /G.m _p ²	1,235 592(58) × 10 ³⁶	Sans dimension	αβ ² /δ ²	Sans dimension
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 électrons)	k _C .e ² /G.m _e ²	4,165 75(20) × 10 ⁴²	Sans dimension	αβ ²	Sans dimension
Attraction électrique / Attraction gravitationnelle (un proton, un électron)	k _C .e ² /G.m _e .m _{pr}	2,268 74(11) × 10 ³⁹	Sans dimension	αβ ² /δ	Sans dimension

Tableau 4

5.1 Structure de l'ensemble des valeurs physiques : l'espace schedo-vectoriel

Dans le tableau précédent est utilisée une **notation à plat**, dans laquelle sont déployées en unités de mesure fondamentales, les différentes constantes. Par exemple, l'unité de mesure qu'est l'Ohm pour la constante de von Klitzing, est remplacée par sa notation à plat $\Omega = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-2}$; de même en SP_B où nous aurions pu définir un Ω de Planck, nous avons donné sa traduction en unités de mesure fondamentales SP_B .

On sent bien, à voir ce tableau, qu'il serait aisé de simplifier les écritures des unités SP_B , ne serait-ce qu'en remplaçant chaque fois qu'elle apparaît dans les unités de mesure l'expression $l_p \cdot t_p^{-1}$ par c . Mais quelle en est la signification profonde ?

5.1.1 Définition d'un espace schedo-vectoriel

Nous avons jusqu'à présent utilisé nombres et unités de mesure, pour former des constantes – dimensionnées ou non – mais sans définir la structure mathématique à laquelle elles appartiennent. Nous allons clarifier la situation en définissant de manière rigoureuse cette structure et les lois leur permettant de se combiner entre elles ainsi qu'à des nombres.

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne qui à tout couple (λ, μ) de $G \times G$ fait correspondre l'élément $\lambda \mu$, faisant de G un groupe commutatif.

Nous appellerons **espace schedo-vectoriel**, tout ensemble E muni :

- d'une loi de composition interne notée « . » lui conférant une structure de groupe commutatif,
- d'une loi de composition externe, ici notée « * », admettant le groupe G comme domaine d'opérateurs, c'est-à-dire une application de $G \times E$ dans E , qui associe à tout couple (λ, u) un élément $\lambda * u$ de E avec les propriétés suivantes :
 - 1) Pour tout $\lambda \in G$, pour tout $u \in E$, pour tout $v \in E$, $\lambda * (u \cdot v) = (\lambda * u) \cdot v = u \cdot (\lambda * v)$
 - 2) Pour tout $\lambda \in G$, pour tout $\mu \in G$, pour tout $u \in E$, $\lambda * (\mu * u) = (\lambda \mu) * u = \mu * (\lambda * u)$
 - 3) Pour tout $u \in E$, $1 * u = u$

La structure ainsi définie ressemble à une structure d'espace vectoriel, à la différence près que la loi de composition externe, définie sur E , admet **un groupe commutatif comme ensemble d'opérateurs et non un corps**.

Une seconde différence dérivant de la première, fait que la loi de composition externe ne possède que trois propriétés et non quatre.

Le terme *schedo* issu du grec *schedon* signifiant *presque* paraît donc quelque peu abusif.

Mais le **presque** s'attache, avant tout, aux propriétés concernant les notions de partie génératrice, de partie libre, de base, et de dimension d'un espace schedo-vectoriel, propriétés qui là, pour le coup, sont semblables à celles d'un espace vectoriel avec toutefois une définition un peu plus complexe pour le concept de partie libre.

Une partie $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'un espace schedo-vectoriel E ¹, d'élément neutre $\mathbb{1}$, est une partie libre de E si :

a) Pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans R^* et q_1, \dots, q_n dans Q , $(\lambda_1 e_1^{q_1}) \cdot \dots \cdot (\lambda_n e_n^{q_n}) = \mathbb{1}$ implique $q_1 = \dots = q_n = 0$ et $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 1$, **ce qui équivaut à :** **b)** Pour tout λ dans R^* et tous q_1, \dots, q_n dans Q , $\lambda e_1^{q_1} \cdot \dots \cdot e_n^{q_n} = \mathbb{1}$ implique $q_1 = \dots = q_n = 0$ et $\lambda = 1$

¹ Nous étudions à partir d'ici **uniquement les espaces schedo-vectoriels réels, c'est à dire ayant comme groupe d'opérateurs R^* muni de la multiplication**. E sera muni d'une multiplication interne notée « . » et d'une loi de composition externe notée par un simple **espace** entre un élément de R^* et un élément de E . Enfin, le **produit de deux éléments λ et μ de R^*** , est noté en accolant ces deux éléments : $\lambda \mu$.

La démonstration de l'équivalence des conditions a) et b), est donnée en [Annexe 1 \(§ 10.1.1\)](#)

Conséquence : Quel que soit α dans \mathbb{R}^* , $\alpha \mathbb{1}$ n'appartient à aucune partie libre de E.

Démonstration : En effet, pour tout λ dans \mathbb{R}^* et $u = \alpha \mathbb{1}$ avec α dans \mathbb{R}^* , $\lambda u^q = \mathbb{1} \Leftrightarrow \lambda (\alpha \mathbb{1})^q = \mathbb{1} \Leftrightarrow \lambda \alpha^q \mathbb{1}^q = \mathbb{1}$. Mais $\mathbb{1}^q = \mathbb{1}$ n'entraîne nullement $q = 0$.

Une partie $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'un espace schedo-vectoriel E est une partie génératrice de E si :

a) Pour tout u dans E, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans \mathbb{R}^* et q_1, \dots, q_n dans Q tels que $u = (\lambda_1 e_1^{q_1}) \dots (\lambda_n e_n^{q_n})$, **ce qui équivaut à :**

b) Pour tout u dans E, **il existe λ dans \mathbb{R}^* et q_1, \dots, q_n dans Q, tels que $u = \lambda e_1^{q_1} \dots e_n^{q_n}$.**

Démonstration¹ : Montrons a) \Rightarrow b) : il suffit de prendre $\lambda = \prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i$, les q_i restant inchangés.

Montrons b) \Rightarrow a) : il suffit de prendre $\lambda_1 = \lambda$ et pour tout $i \neq 1$, $\lambda_i = 1$, les q_i étant inchangés.

Une base d'un espace schedo-vectoriel E, est définie comme pour un espace vectoriel comme étant une partie de E qui est à la fois une partie libre et une partie génératrice de E.

La **dimension** d'un espace schedo-vectoriel E, est définie comme pour un espace vectoriel comme étant le cardinal commun à chacune de ses bases.

Proposition 1 : Soit E un espace schedo-vectoriel, « $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E » équivaut à « Tout élément u de E s'écrit de manière unique $u = \lambda e_1^{q_1} \dots e_n^{q_n}$ avec λ dans \mathbb{R}^* et q_1, \dots, q_n dans Q ».

La démonstration de cette proposition se trouve en [Annexe 1 \(§ 10.1.2\)](#)

Une dernière définition sera très utile.

Un espace schedo-vectoriel E sur \mathbb{R}^* est dit **complet**, s'il possède la propriété suivante :

Pour tout élément e_i d'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E, et pour tout m dans \mathbb{N}^* , il existe e'_i dans E tel que $e'_i{}^m = e_i$.

Corollaire : Si e_i est un élément d'une base d'un espace schedo-vectoriel complet E, alors $-e_i$ n'appartient à **aucune** base de E.

Démonstration : En effet, il ne peut exister aucun élément e'_i de E tel que $e'_i{}^2 = -e_i = (-1) e_i$, car $(-1)^{1/2}$ n'existe pas dans \mathbb{R}^* .

L'intérêt premier de la notion d'espace schedo-vectoriel **complet** est d'assurer que **tout élément** d'une base admet une racine n^{ième} dans \mathbb{R}^* .

5.1.2 L'ensemble des « valeurs physiques » comme espace schedo-vectoriel complet

On ne peut pas additionner des choux et des carottes, entend-on dire couramment, et de même on ne peut pas additionner des mètres et des secondes. Par contre on peut multiplier mètre et seconde ou mètre et inverse de la seconde, ce qui dans ce dernier cas, donnera une unité de vitesse. Ce sont ces principes qui sont à l'origine de la structure mathématique d'espace schedo-vectoriel définie ci-dessus.

Toute « valeur d'une grandeur physique » ou « valeur physique », s'exprime comme le **produit d'un nombre réel par une unité** (de base ou dérivée) ; le nombre réel et l'unité pouvant tous deux être traités par les règles ordinaires de l'algèbre.

¹ Les démonstrations sont renvoyées en annexe sauf, lorsqu'elles sont très courtes, comme c'est ici le cas, ou lorsqu'elles sont particulièrement importantes.

L'ensemble **V** des « valeurs physiques », muni d'une multiplication notée « . », a une structure de **groupe commutatif** dont l'**élément neutre sera noté $\mathbb{1}$** .

V peut aussi être doté d'une loi de composition externe admettant le groupe multiplicatif \mathbb{R}^* comme domaine d'opérateurs, c'est-à-dire doté d'une application de $\mathbb{R}^* \times V$ dans V, associant à tout couple (λ, u) , un élément λu de V et possédant les propriétés suivantes :

- 1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, pour tout $u \in V$, pour tout $v \in V$, $\lambda (u.v) = (\lambda u).v = u.(\lambda v)$
- 2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}^*$, pour tout $u \in V$, $\lambda (\mu u) = (\lambda\mu) u = \mu (\lambda u)$
- 3) Pour tout $u \in V$, $\mathbb{1} u = u$

Postulat : V muni de ces deux lois de composition est un espace schedo-vectorel complet.

Le terme valeur physique recouvre également les unités de mesure, puisque la propriété 3 de la loi de composition externe permet d'écrire, par exemple pour une unité de longueur comme le mètre : $m = 1 m$, ou encore pour une unité de vitesse : $l_p.t_p^{-1} = 1 l_p.t_p^{-1}$. De par cette propriété, toute unité de mesure est une valeur physique.

Les puissances pour les schedo-vecteurs de V, sont définies et notées de la même manière que pour les nombres réels.

Notation : La loi de composition externe est notée par un simple **espace** placé entre un élément de \mathbb{R}^* et un élément de V, et ce afin de faciliter la lecture **en retrouvant ainsi des écritures conventionnelles** comme **5 m** ou **10 kg** ou encore $2\pi l_p$.

Il ressort de ces définitions, que lorsqu'on écrit $\beta = m_p.m_e^{-1}$, il s'agit d'un abus de langage, l'écriture correcte étant : $\beta \mathbb{1} = m_p.m_e^{-1}$. Un nombre réel n'est pas un élément des valeurs physiques ; il peut seulement être une valeur numérique associée à une ou plusieurs valeurs physiques. Le nombre 6,5 peut, par exemple, être associé comme valeur numérique aux valeurs physiques suivantes : 6,5 m ; 6,5 kg ; 6,5 m_p ou encore $6,5 \mathbb{1}^{-1}$.

Cet abus de langage se doit toutefois d'être conservé pour ne pas alourdir l'écriture.

Précisons ce qu'est V : c'est l'espace schedo-vectorel des « valeurs physiques », mais au sens large, c'est à dire que tout u dans V peut être exprimé sous la forme d'un réel non nul suivi de (multipliant) un produit d'unités de mesure, chacune élevée à une puissance appartenant à **Q**. **Toute unité de mesure de la physique**, toute **constante de la physique** appartient à V, espace schedo-vectorel aujourd'hui de dimension 7 dont une des bases est donnée par les unités fondamentales du SI : {m, kg, s, A, K, mol, cd}. Une autre base étant celle du système d'unités SP_B : $\{l_p, m_p, t_p, e, T_p, mol, cd\}^2$. Ceci avant d'obtenir, après une **redéfinition de la mole**, faisant de cette dernière **une unité dérivée** (cf. § 6.1), un espace schedo-vectorel **de dimension 6**, la mole unité dérivée étant ainsi exclue de toute base.

Le fait que l'on puisse utiliser les notions de « base » et de « dimension » pour les espaces schedo-vectorels, permet de ne pas se cantonner à des bases composées uniquement d'unités de mesure classiques. Considérons le sous-espace schedo-vectorel (cf. **Annexe 2**) F de V, engendré par {m, kg, s, C}. C'est un sous-espace de dimension 4, qui est évidemment le même que le sous-espace engendré par la base $\{l_p, m_p, t_p, e\}$. Mais des schedo-vecteurs comme $c = l_p.t_p^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi\alpha l_p.m_p.e^{-2}$, pris comme unité de vitesse et unité de perméabilité peuvent eux aussi être des éléments d'une base de F comme $\{l_p, \mu_0, c, e\}$ (cf. **Annexe 3**).

¹ Un cas particulier des valeurs physiques étant celui des constantes adimensionnelles qui sont sous la forme $\lambda \mathbb{1}$ avec λ dans \mathbb{R}^* ; $\mathbb{1}$ étant si l'on peut dire, l'unité de mesure des constantes adimensionnelles.

² Nous n'avons pas, dans cette étude, travaillé sur la candela qui, de par sa définition, fait intervenir la sensibilité de l'œil humain selon la fréquence du rayon lumineux et ne peut donc se prêter à une redéfinition non anthropocentrique.

Tableau des constantes étudiées, exprimées dans la base $\{l_p, \mu_0, c, e\}$

Nom	Symbole	Valeur (CODATA 2014)	Unités SI	Valeur	Base $\{l_p; \mu_0; c; e\}$
Vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458	$m.s^{-1}$	1	c
Constante de Planck	h	$6,626\ 070\ 040(81) \times 10^{-34}$	$m^2.kg.s^{-1}$	$1/2\alpha$	$\mu_0.c.e^2$
Constante gravitationnelle	G	$6,674\ 08(31) \times 10^{-11}$	$m^3.kg^{-1}.s^{-2}$	$4\pi\alpha$	$l_p^2.\mu_0^{-1}.c^2.e^{-2}$
Charge élémentaire	e	$1,602\ 176\ 6208(98) \times 10^{-19}$	C	1	e
Constante de permittivité du vide	ϵ_0	$8,854\ 187\ 817... \times 10^{-12}$	$m^{-3}.kg^{-1}.s^2.C^2$	1	$\mu_0^{-1}.c^{-2}$
Constante de perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	$m.kg.C^{-2}$	1	μ_0
Constante de Coulomb	$k_C = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8,987\ 551\ 787... \times 10^9$	$m^3.kg.s^{-2}.C^{-2}$	$1/4\pi$	$\mu_0.c^2$
Impédance caractéristique du vide	Z_0	376,730 313 461 ...	$m^2.kg.s^{-1}.C^{-2}$	1	$\mu_0.c$
Quantum de conductance	G_0	$7,748\ 091\ 7310(18) \times 10^{-5}$	$m^{-2}.kg^{-1}.s.C^2$	4α	$\mu_0^{-1}.c^{-1}$
Constante de Josephson	K_J	$4,835\ 978\ 525(30) \times 10^{14}$	$m^{-2}.kg^{-1}.s.C$	4α	$\mu_0^{-1}.c^{-1}.e^{-1}$
Quantum de flux magnétique	Φ_0	$2,067\ 833\ 831(13) \times 10^{-15}$	$m^2.kg.s^{-1}.C^{-1}$	$1/4\alpha$	$\mu_0.c.e$
Constante de von Klitzing	R_K	$2,581\ 280\ 745\ 55(59) \times 10^4$	$m^2.kg.s^{-1}.C^{-2}$	$1/2\alpha$	$\mu_0.c$
Magnéton de Bohr	μ_B	$9,274\ 009\ 994(57) \times 10^{-24}$	$m^2.s^{-1}.C$	$\beta/2$	$l_p.c.e$
Magnéton nucléaire	μ_N	$5,050\ 783\ 699(31) \times 10^{-27}$	$m^2.s^{-1}.C$	$\beta/2\delta$	$l_p.c.e$
Rayon de Bohr	a_0	$5,291\ 772\ 1067(12) \times 10^{-11}$	m	$\alpha^{-1}\beta$	l_p
Rayon classique de l'électron	r_e	$2,817\ 940\ 3227(19) \times 10^{-15}$	m	$\alpha\beta$	l_p
Masse de l'électron	m_e	$9,109\ 383\ 56(11) \times 10^{-31}$	kg	$(4\pi\alpha\beta)^{-1}$	$l_p^{-1}.\mu_0.e^2$
Masse du proton	m_{pr}	$1,672\ 621\ 898(21) \times 10^{-27}$	kg	$(4\pi\alpha\beta)^{-1}\delta$	$l_p^{-1}.\mu_0.e^2$
Constante de Rydberg	R_∞	$1,097\ 373\ 156\ 8508(65) \times 10^7$	m^{-1}	$\alpha^2/4\pi\beta$	l_p^{-1}
Energie de Hartree	E_H	$4,359\ 744\ 650(54) \times 10^{-18}$	$m^2.kg.s^{-2}$	$\alpha/4\pi\beta$	$l_p^{-1}.\mu_0.c^2.e^2$
Rayon de Compton de l'électron	R_C	$3,861\ 592\ 6764(18) \times 10^{-13}$	m	β	l_p
Longueur d'onde de Compton pour l'électron	λ_C	$2,426\ 310\ 2367(11) \times 10^{-12}$	m	$2\pi\beta$	l_p
Longueur d'onde de Compton pour le proton	λ_{Cpr}	$1,321\ 409\ 853\ 96(61) \times 10^{-15}$	m	$2\pi\beta\delta^{-1}$	l_p
Quantum de circulation	$h/2m_e$	$3,636\ 947\ 5486(17) \times 10^{-4}$	$m^2.s^{-1}$	$\pi\beta$	$l_p.c$
Section efficace de Thomson	T_{CS}	$6,652\ 458\ 7158(91) \times 10^{-29}$	m^2	$(8\pi/3)\alpha^2\beta^2$	l_p^2
Première constante de rayonnement	c_{1R}	$3,741\ 771\ 790(46) \times 10^{-16}$	$m^4.kg.s^{-3}$	π/α	$\mu_0.c^3.e^2$
Constante de couplage de la force électromagnétique	$\alpha_{em} = k_C.e^2/\hbar c$	$7,297\ 352\ 5664(17) \times 10^{-3}$	1	α	1
Constante de couplage de la force de gravitation	$\alpha_G = G.m_{pr}^2/\hbar c$	$5,905\ 95(28) \times 10^{-39}$	1	$(\beta^{-1}\delta)^2$	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 protons)	$\alpha_{em}/\alpha_G = k_C.e^2/G.m_{pr}^2$	$1,235\ 592(58) \times 10^{36}$	1	$\alpha\beta^2/\delta^2$	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 électrons)	$k_C.e^2/G.m_e^2$	$4,165\ 75(20) \times 10^{42}$	1	$\alpha\beta^2$	1
Attraction électrique / Attraction gravitationnelle (un proton, un électron)	$k_C.e^2/G.m_e.m_{pr}$	$2,268\ 74(11) \times 10^{39}$	1	$\alpha\beta^2/\delta$	1

Tableau 5

Il importe de noter que dans la base $\{l_p, \mu_0, c, e\}$ ainsi que dans toutes les bases qui seront utilisées par la suite, la simplification des écritures invite à remplacer l'unité de temps par la vitesse de la lumière. **Le temps disparaît, laissant sa place à la vitesse de la lumière.**

5.2 Changement de base dans un espace schedo-vectoriel complet

Proposition 2 : Soit E un espace schedo-vectoriel complet de dimension n avec une base $\{e_1, \dots, e_n\}$, alors pour tous v_1, \dots, v_n dans \mathbb{R}^{*+} et tous q_1, \dots, q_n dans \mathbb{Q}^* , $\{v_1 e_1^{q_1}, \dots, v_n e_n^{q_n}\}$ est une base de E .

Démonstration : E étant un espace schedo-vectoriel **complet**, $e_i^{q_i}$ est toujours défini.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ étant une base de E , pour tout u appartenant à E , il existe λ unique dans \mathbb{R}^* et (r_1, \dots, r_n) unique dans \mathbb{Q}^n tels que $u = \lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{r_i}$ (cf. proposition 1). On en déduit qu'il existe

$\mu = \lambda / \prod_{i=1}^{i=n} v_i^{r_i/q_i}$ unique dans \mathbb{R}^* et $(q'_1, \dots, q'_n) = (r_1/q_1, \dots, r_n/q_n)$ unique dans \mathbb{Q}^n tels que

$u = \mu \prod_{i=1}^{i=n} (v_i e_i^{q_i})^{q'_i}$, d'où $\{v_1 e_1^{q_1}, \dots, v_n e_n^{q_n}\}$ base de E (cf. proposition 1).

Exemple 1 : Soit F le sous-espace schedo-vectoriel des valeurs physiques avec pour base $\{m, kg, s, C\}$, alors $\{l_p, m_p, t_p, e\}$ est une base de F (cf. § 2.1 : $l_p = x_1 m$, $t_p = x_2 s$, ...).

Exemple 2 : Si $\{\hbar, G, c, k_C\}$ est une base de F alors $\{\hbar, G, c, \epsilon_0\}$ est également une base de F ($\hbar = 2\pi \hbar$ et $\epsilon_0 = (1/4\pi) k_C^{-1}$)

Proposition 3 : Soit E un espace schedo-vectoriel complet de dimension n avec une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ et un schedo-vecteur u de E , $u = \lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{r_i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $r_i \in \mathbb{Q}$, alors

quel que soit k dans $\{1, \dots, n\}$, **tel que $r_k \neq 0$** , si l'on remplace e_k par u dans $\{e_1, \dots, e_n\}$, le nouvel ensemble $\{u, e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_k\}$ est une base de E .

Démonstration : E étant un espace schedo-vectoriel **complet**, $e_i^{q_i}$ est toujours défini.

Il suffit de montrer (cf. proposition 1), que pour tout v dans E , il existe μ' unique dans \mathbb{R}^* et (q'_1, \dots, q'_n) unique dans \mathbb{Q}^n tels que $v = \mu' (u^{q'_k} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n} e_i^{q'_i})$.

De $u = \lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{r_i}$ on déduit : $e_k = (\lambda^{-1} u \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n} e_i^{-r_i})^{1/r_k}$. Or pour tout v dans E , il existe μ unique

dans \mathbb{R}^* et (q_1, \dots, q_n) unique dans \mathbb{Q}^n tels que $v = \mu \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i}$, c'est-à-dire tels que

$$\begin{aligned} v &= \left(\mu \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n} e_i^{q_i} \right) \cdot e_k^{q_k} = \left(\mu \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n} e_i^{q_i} \right) \cdot (\lambda^{-1} u \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n} e_i^{-r_i})^{q_k/r_k} = \mu \lambda^{-q_k/r_k} u^{q_k/r_k} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n} e_i^{q_i} \cdot \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n} e_i^{-r_i} \right)^{q_k/r_k} \\ &= \mu \lambda^{-q_k/r_k} u^{q_k/r_k} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n} e_i^{q_i - (r_i q_k / r_k)} \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $v = \mu \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i}$ dans E , il existe $\mu' = \mu \lambda^{q_k/r_k}$ unique dans R^* et (q'_1, \dots, q'_n) unique dans Q^n avec $q'_k = q_k/r_k$ et pour tout i dans $\{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$, $q'_i = q_i - (r_i q_k / r_k)$, tels que $v = \mu' (u^{q'_k} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n} e_i^{q'_i})$; $\{u, e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_k\}$ est donc (cf. proposition 1) une base de E .

Quelques exemples illustrant la proposition 3

Dans la base $\{l_p, m_p, t_p, e\}$, le remplacement de t_p par $c = l_p \cdot t_p^{-1}$, implique $\{l_p, m_p, c, e\}$ base de F (cf. proposition 3). Dans la base ainsi obtenue, le remplacement de l_p par $h = 2\pi l_p \cdot m_p \cdot c$, implique $\{h, m_p, c, e\}$ base de F (cf. proposition 3) et enfin dans cette dernière, le remplacement de m_p par $m_e = \beta^{-1} m_p$ (cf. proposition 2), implique $\{h, m_e, c, e\}$ base de F . L'écriture des constantes dans cette base est donnée en Annexe 4 **Tableau 7**. Il est bien sûr possible de trouver d'autres bases, comme $\{r_e, m_e, c, e\}$ (cf. Annexe 4 **Tableau 8**), base qui comporte trois constantes liées à l'électron, et ce à partir de la base $\{l_p, m_p, c, e\}$ dans laquelle on remplace l_p par r_e et m_p par m_e (cf. proposition 2) ou encore la base $\{R_C, Z_0, c, e\}$ (cf. Annexe 4 **Tableau 9**), qui donne une formulation particulièrement élégante des constantes électromagnétiques et nucléaires. Cette dernière base se décline à partir de la base $\{l_p, \mu_0, c, e\}$ dans laquelle on remplace l_p par $R_C = \beta l_p$ (cf. proposition 2), puis dans laquelle on applique la proposition 3 en remplaçant μ_0 par $Z_0 = \mu_0 \cdot c$.

Mais plutôt que de chercher des bases de F sans aucune ligne directrice, posons la question suivante : en choisissant parmi les six constantes h, c, G, k_C, e, m_e , quatre d'entre elles, combien de bases de F peut-on former ?

Le choix de ces six constantes ne doit rien au hasard. Elles sont **suffisantes** pour déterminer les deux constantes adimensionnelles que sont α et β .

$$\alpha = k_C \cdot e^2 / (h \cdot c)$$

$$\beta = m_p / m_e = (h \cdot c / G)^{1/2} \cdot m_e^{-1}$$

Proposition 4 : Tout ensemble composé de quatre des six constantes suivantes : h, G, c, k_C, e, m_e de l'espace schedo-vectorel F de dimension 4 engendré par $\{m, kg, s, C\}$ (ou encore par $\{l_p, m_p, t_p, e\}$), est une base de F , hormis **trois** ensembles – parmi $C_6^4 = 15$ ensembles possibles – : $\{h, c, k_C, e\}$; $\{h, c, G, m_e\}$; $\{k_C, e, G, m_e\}$.

Démonstration : L'équation $\alpha = e^2 \cdot k_C / (h \cdot c)$ équivaut à : $\alpha^{-1} k_C \cdot e^2 / (h \cdot c) = 1$ (5-1)

$\{h, c, k_C, e\}$ n'est donc pas une partie libre de F et n'est donc pas une base de F .

L'équation $\beta = m_p / m_e$ équivaut à : $\beta m_e = (h \cdot c / G)^{1/2}$. D'où $\beta^2 G \cdot m_e^2 \cdot h^{-1} \cdot c^{-1} = 1$ (5-2)

$\{h, m_e, c, G\}$ n'est donc pas une base de F .

De (5-1) et (5-2), on tire $\alpha^{-1} k_C \cdot e^2 = \beta^2 G \cdot m_e^2$. D'où $\alpha \beta^2 G \cdot m_e^2 \cdot k_C^{-1} \cdot e^{-2} = 1$ (5-3)

$\{G, m_e, k_C, e\}$ n'est donc pas une base de F .

Trois ensembles sont donc éliminés parmi $C_6^4 = 15$ possibles. Il reste donc 12 bases possibles. Nous avons déjà montré (2^{ème} exemple illustrant la proposition 3) que $\{h, m_e, c, e\}$ est une base de F , il en est donc de même pour $\{h, m_e, c, e\}$ (cf. proposition 2).

De (5-1), on déduit $k_C = \alpha h \cdot c \cdot e^{-2}$; le remplacement dans $\{h, m_e, c, e\}$, de h, c , ou e , par k_C , implique respectivement $\{k_C, m_e, c, e\}$, $\{h, m_e, k_C, e\}$, $\{h, m_e, c, k_C\}$, base de F (cf. proposition 3).

De (5-2), on déduit $G = \beta^{-2} \hbar \cdot c \cdot m_e^{-2}$; le remplacement toujours dans $\{\hbar, m_e, c, e\}$, de \hbar, m_e , ou c , par G , implique respectivement $\{G, m_e, c, e\}$, $\{\hbar, G, c, e\}$, $\{\hbar, m_e, G, e\}$ base de F (cf. proposition 3).

De même, en utilisant encore $k_C = \alpha \hbar \cdot c \cdot e^{-2}$, le remplacement dans $\{\hbar, G, c, e\}$, de \hbar, c , ou e , par k_C , implique respectivement $\{k_C, G, c, e\}$, $\{\hbar, G, k_C, e\}$, $\{\hbar, G, c, k_C\}$ base de F (cf. proposition 3).

Finalement, en utilisant à nouveau $G = \beta^{-2} \hbar \cdot c \cdot m_e^{-2}$, le remplacement dans $\{\hbar, m_e, c, k_C\}$, de \hbar ou c par G implique respectivement $\{G, m_e, c, k_C\}$, $\{\hbar, m_e, G, k_C\}$ base de F.

On peut donc former 12 bases différentes de F à partir des six constantes : \hbar, c, G, k_C, e, m_e .

Les équations (5-1), (5-2) et (5-3) se résument par la **double égalité** (triple par transitivité) :

$$\alpha^{-1} k_C \cdot e^2 = \hbar \cdot c = \beta^2 G \cdot m_e^2 \quad (5-4)$$

Et pour chaque constante, on obtient deux expressions directement issues de (5-4) :

$$\hbar = \alpha^{-1} c^{-1} \cdot k_C \cdot e^2 = \beta^2 c^{-1} \cdot G \cdot m_e^2$$

$$c = \alpha^{-1} \hbar^{-1} \cdot k_C \cdot e^2 = \beta^2 \hbar^{-1} \cdot G \cdot m_e^2$$

$$k_C = \alpha \hbar \cdot c \cdot e^{-2} = \alpha \beta^2 G \cdot m_e^2 \cdot e^{-2}$$

$$e^2 = \alpha \hbar \cdot c \cdot k_C^{-1} = \alpha \beta^2 G \cdot m_e^2 \cdot k_C^{-1}$$

$$G = \beta^{-2} m_e^{-2} \cdot \hbar \cdot c = (\alpha \beta^2)^{-1} m_e^{-2} \cdot k_C \cdot e^2$$

$$m_e^2 = \beta^{-2} G^{-1} \cdot \hbar \cdot c = (\alpha \beta^2)^{-1} G^{-1} \cdot k_C \cdot e^2$$

Chacune des **six constantes** : \hbar, c, G, k_C, e, m_e , est présente dans 8 des 12 bases de la proposition 4. Et si l'on partitionne l'ensemble $\{\hbar, c, G, k_C, e, m_e\}$ en les trois sous-ensembles suivants : $\{\hbar, c\}$, $\{G, m_e\}$ et $\{k_C, e\}$, chacune des **six constantes** s'exprime **de 2 manières différentes, chaque fois** en fonction de la constante appartenant au même sous-ensemble qu'elle et **des deux constantes** d'un des deux autres sous-ensembles.

Il semble que l'on ait donc une sorte de « symétrie » entre ces six constantes. Ce qui n'est plus vrai si l'on remplace k_C par μ_0 ou Z_0 .

On constate également que parmi les six constantes, seules les constantes e et m_e , utilisent un carré et admettent donc deux solutions, l'une positive et l'autre négative. Pour e , la solution négative correspond à la charge de l'électron, la solution positive à celle du proton. Pour m_e , la solution positive correspond à la masse de l'électron mais la solution négative ne correspond à rien de connu même si certaines théories évoquent aujourd'hui la possibilité de particules à masse négative.

Sachant que toute constante ou même valeur physique de F, peut s'exprimer dans les 12 bases de la proposition 4, on peut se poser la question : de combien de manières différentes peut-on exprimer une longueur, par exemple la longueur de Planck par rapport aux **six constantes** : \hbar, c, G, k_C, e, m_e ? Au plus 12, puisque l'on peut former 12 bases avec quatre des **six constantes**. Mais il est possible que l'expression de la longueur de Planck soit exactement la même dans certaines de ces bases ; ce qui est par exemple le cas, pour les bases $\{G, m_e, c, e\}$ et $\{G, m_e, c, k_C\}$ pour lesquelles on a : $l_p = \beta G \cdot m_e \cdot c^{-2}$.

En fait, à travers ces 12 bases, on obtient 8 façons différentes d'exprimer l_p :

$$\begin{aligned} l_p &= \beta G \cdot m_e \cdot c^{-2} &= (\alpha \beta)^{-1} m_e^{-1} \cdot c^{-2} \cdot k_C \cdot e^2 \\ &= \mathbf{1} (G \cdot \hbar \cdot c^{-3})^{1/2} &= \alpha^{-1/2} G^{1/2} \cdot c^{-2} \cdot k_C^{1/2} \cdot e \\ &= \beta^{-1} \hbar \cdot m_e^{-1} \cdot c^{-1} &= (\alpha / \beta) \hbar^2 \cdot m_e^{-1} \cdot k_C^{-1} \cdot e^{-2} \\ &= \beta^{-3} \hbar^2 \cdot G^{-1} \cdot m_e^{-3} &= \alpha^{3/2} \hbar^2 \cdot G^{1/2} \cdot k_C^{-3/2} \cdot e^{-3} \end{aligned}$$

Quatre des **six constantes** : \hbar , G , c , k_C , e , m_e s'expriment de 5 manières différentes en fonction de l_p et de trois des six autres constantes.

Seules k_C et e s'expriment uniquement de 4 manières différentes :

$$\begin{aligned} k_C &= \alpha\beta l_p \cdot m_e \cdot c^2 \cdot e^{-2} &= \alpha l_p^2 \cdot G^{-1} \cdot c^4 \cdot e^{-2} \\ &= (\alpha/\beta) l_p^{-1} \cdot m_e^{-1} \cdot \hbar^2 \cdot e^{-2} &= \alpha l_p^{-2/3} \cdot G^{1/3} \cdot \hbar^{4/3} \cdot e^{-2} \end{aligned}$$

Le concept de longueur introduit une rupture dans la « symétrie » entre les six constantes.

On notera que **chacune** des 12 bases de la proposition 4, contient e ou k_C (ou inclusif).

Il est intéressant d'introduire $e^* = k_C^{1/2} \cdot e$ pour simplifier les 4 écritures de l_p utilisant k_C et e :

$$\begin{aligned} l_p &= (\alpha\beta)^{-1} m_e^{-1} \cdot c^{-2} \cdot e^{*2} &= (\alpha/\beta) \hbar^2 \cdot m_e^{-1} \cdot e^{*2} \\ &= \alpha^{-1/2} G^{1/2} \cdot c^{-2} \cdot e^* &= \alpha^{3/2} \hbar^2 \cdot G^{1/2} \cdot e^{*-3} \end{aligned}$$

Pour autant, peut-on poser comme certains auteurs le préconisent $\varepsilon_0 = \mathbb{1}$ ou $k_C = \mathbb{1}$? Oui, s'il s'agit de simplifier et résoudre certains problèmes **en passant par un espace de dimension inférieure**. Non, s'il s'agit de dire que k_C ou ε_0 n'est qu'un simple artefact découlant de l'historique de la définition de charge.

5.3 Réduction dimensionnelle d'un espace schedo-vectoriel

On appelle **réduction dimensionnelle** d'un espace schedo-vectoriel E de dimension n , à partir d'un élément e_k d'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E , **la création**, en posant $e_k = \mathbb{1}$, **d'un espace schedo-vectoriel E'** , muni des lois de E restreintes à E' , dont $\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_k\}$ est une base.

Par construction, E' est de dimension $n - 1$.

C'est cette opération que l'on effectue, lorsqu'on passe en unités naturelles en posant $c = h = \mathbb{1}$ (ici réduction dimensionnelle d'ordre 2).

Conséquence : toute équation schedo-vectorielle dans un espace E de dimension n , voit son équation réduite également vérifiée dans un espace E' de dimension $n - 1$, obtenu par réduction dimensionnelle. La réciproque n'est bien sûr pas vraie.

Définissons **q^* nouvelle charge** incorporant $k_C^{1/2}$ dans sa définition en posant : $q^* = k_C^{1/2} \cdot q$

L'intensité de la force électromagnétique entre deux particules de charge q_1 et q_2 s'exprime ainsi :

$$\mathbf{F}_{em} = (4\pi \varepsilon_0)^{-1} q_1 \cdot q_2 / d^2 \quad (5-5) \quad \text{d'où } \mathbf{F}_{em} = \mathbf{q}_1^* \cdot \mathbf{q}_2^* / d^2 \quad (5-6)$$

Mais faire disparaître $4\pi \varepsilon_0$ de l'équation (5-5) **en redéfinissant la notion de charge, n'entraîne en aucune façon $4\pi \varepsilon_0 = \mathbb{1}$** ; il n'y a pas de réduction dimensionnelle. Le fait d'avoir fait disparaître la constante de Coulomb de cette équation, n'implique donc en aucune façon la disparition de la constante de Coulomb ou celle de ε_0 .

Inversement, poser $4\pi \varepsilon_0 = \mathbb{1}$ implique bien non seulement la disparition de $k_C = (4\pi \varepsilon_0)^{-1}$ de l'équation (5-5) mais également une réduction dimensionnelle.

Poser $\varepsilon_0 = \mathbb{1}$ ou $k_C = \mathbb{1}$, équivaut à travailler sur un sous-espace schedo-vectoriel de F , de dimension $n - 1$. Il n'y a donc pas d'équivalence logique entre « faire disparaître ε_0 de l'équation (5-5) en redéfinissant la charge » et « poser $\varepsilon_0 = \mathbb{1}$ ». La seconde proposition implique la première mais **la réciproque n'est pas vraie**.

5.4 Parallèle entre la redéfinition des concepts de charge et de masse

Posons **m^* nouvelle masse** incorporant $G^{1/2}$ dans sa définition : $m^* = G^{1/2} \cdot m$

La force gravitationnelle entre deux particules de masses m_1 et m_2 s'exprime ainsi : $\mathbf{F}_G = \mathbf{m}_1^* \cdot \mathbf{m}_2^* / d^2$ (5-7)

De la double égalité (5-4) on déduit : $\mathbf{m}_e^* = G^{1/2} \cdot m_e = \beta^{-1} (\hbar \cdot c)^{1/2}$ et $\mathbf{e}^* = k_C^{1/2} \cdot e = \alpha^{1/2} (\hbar \cdot c)^{1/2}$

La nouvelle charge et la nouvelle masse ont donc même dimension, celle de $(\hbar.c)^{1/2}$

Et la double équation (5-4) se réécrit : $\alpha^{-1} e^{*2} = \hbar.c = \beta^2 m_e^{*2}$

e^* et m_e^* étant liés, ils ne peuvent faire partie d'une même base, de même qu'aucun des deux ne peut faire partie d'une base comportant à la fois \hbar et c . Par contre, il est tout à fait possible que e et e^* fassent partie d'une même base comme par exemple la base $\{\hbar, G, e^*, e\}$ obtenue en remplaçant k_C par e^* dans la base $\{\hbar, G, k_C, e\}$ (cf. proposition 3).

5.5 Equations schedo-vectorielles

Reprise de quelques équations schedo-vectorielles sans abus de langage :

$$\alpha \mathbb{1} = e^2.q_p^{-2}$$

$$4\pi\alpha \mathbb{1} = e^2/(\epsilon_0.\hbar.c)$$

$$\beta \mathbb{1} = m_p.m_e^{-1}$$

$$\beta \mathbb{1} = R_C.l_p^{-1}$$

$$\alpha\beta^2 \mathbb{1} = r_e.R_C.l_p^{-2}$$

$$\beta \mathbb{1} = G^{-1/2}.m_e^{-1}.\hbar^{1/2}.c^{1/2}$$

$$r_e = \alpha\beta l_p$$

$$\hbar = R_C.m_e.c$$

$$e/m_e = (4\pi\alpha)^{1/2}\beta (G.\epsilon_0)^{1/2}$$

$$G = (\alpha\beta^2)^{-1} k_C.(e/m_e)^2$$

$$e^2.Z_0 = 2\alpha \hbar$$

$$k_C.q_p^2 = G.m_p^2 = \hbar.c$$

$$\alpha^{-1} k_C.e^2 = \beta^2 G.m_e^2 = \hbar.c$$

Dans la pratique, on utilisera l'abus de langage permettant de parler indifféremment du nombre réel α ou de la constante adimensionnelle $\alpha \mathbb{1}$, tout en étant conscient qu'il y a deux concepts bien distincts : le nombre réel α et la constante adimensionnelle $\alpha \mathbb{1}$; l'un appartient à \mathbb{R}^* , l'autre appartient à $\mathbb{R}^* \times V$. Ainsi s'autorisera-t-on à écrire α en lieu et place de $\alpha \mathbb{1}$, retrouvant ainsi l'écriture communément utilisée. Cet abus de langage permet de faire disparaître dans les équations ci-dessus, l'ensemble des $\mathbb{1}$.

5.6 Eclairage particulier sur le SI et ses évolutions en 2019

La vitesse $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$ de la lumière dans le vide en SI est une vitesse qui n'est plus issue de l'expérience mais définie exactement depuis 1983. En effet, la définition du mètre a été modifiée de la façon suivante : le mètre est la longueur du chemin emprunté par la lumière dans le vide durant un intervalle de temps de $1/299\,792\,458$ seconde.

De la même manière, l'ampère est défini de manière à ce que la perméabilité du vide μ_0 , soit très exactement en SI, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

$$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ m.kg.C}^{-2}$$

Conséquence : les constantes $\epsilon_0 = \mu_0^{-1}.c^{-2}$, $k_C = 1/(4\pi\epsilon_0) = \mu_0.c^2/4\pi$ et $Z_0 = \mu_0.c$, peuvent être calculées avec le degré de précision souhaité.

Mais à partir de mai 2019, la constante de Planck sera fixée à $6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ m}^2.\text{kg.s}^{-1}$, et c'est à partir de cette constante qu'est redéfini le nouveau kilogramme. De même la charge élémentaire est fixée à $1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$, valeur à partir de laquelle est redéfini le nouveau Coulomb. L'Ampère lui-même est redéfini à partir du nouveau Coulomb par la relation $A = C.s^{-1}$. Mais, cela implique que l'ancienne définition de l'Ampère n'ayant plus cours, **la constante μ_0** et donc les constantes $\epsilon_0 = \mu_0^{-1}.c^{-2}$, $k_C = \mu_0.c^2/4\pi$ et $Z_0 = \mu_0.c$, doivent être mesurées ou recalculées et ne sont donc plus définies exactement. Par contre, les constantes G_0, R_K, K_J, Φ_0 sont, les valeurs de e et de \hbar étant fixées, définies exactement.

Ce qui est remarquable, c'est qu'évidemment les valeurs de α , β et δ ne varient pas d'un système à l'autre.

6 Les constantes physico-chimiques

6.1 Le nombre d'Avogadro et la mole en SP_B

Avec les constantes physico-chimiques, le découragement pourrait vite gagner car une constante règne en maître dans ce domaine, à savoir le nombre d'Avogadro. Rappelons que le nombre d'Avogadro est défini comme le nombre d'entités qui se trouvent dans une **mole** ; la mole est, quant à elle, définie comme la « quantité de matière » contenant autant d'entités élémentaires que d'atomes dans 12 grammes de carbone 12. La constante d'Avogadro, notée N_A , s'exprime comme l'inverse d'une « quantité de matière » :

$$N_A = 6,022\ 140\ 857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Le choix qui a été fait n'a donc rien d'universel. Mais comment se référer à quelque chose d'universel pour définir une quantité de matière ?

Comment allons-nous pouvoir redéfinir la mole et donc le nombre d'Avogadro qui lui est étroitement lié ?

Nous avons maintenant à notre disposition, une constante adimensionnelle universelle qui va permettre de répondre à cette question. Nous redéfinissons la mole que nous noterons mole-B comme la quantité de matière contenant un nombre d'entités élémentaires égal à β ¹, ce qui correspond à une quantité de matière contenant autant d'entités que d'atomes dans non pas dans 12g de carbone 12 mais dans environ 0,4761 g de carbone 12. Ceci étant, le « environ » ne pose pas de problème car en fait nous n'avons plus besoin d'une référence à un isotope du carbone ou à tout autre élément. La seule référence dont nous avons besoin, c'est une référence à la constante adimensionnelle universelle β . **La mole redéfinie sous le nom de mole-B contient β entités élémentaires et devient donc une unité dérivée.**

De même, il nous faut redéfinir le nombre d'Avogadro que nous noterons nombre d'Avogadro-B comme étant le nombre d'entités qui se trouve dans une mole-B.

Notations :

- On notera mol_B l'unité de mesure correspondant à une mole-B de matière
- On notera $N_{AB} = \beta \text{ mol}_B^{-1}$ la constante d'Avogadro-B.

On a donc : $1 \text{ mol} / \text{mol}_B = 6,022\ 140\ 857(74) \times 10^{23} / 2,389\ 262(56) \times 10^{22}$ d'après définitions de la mole et de la mole-B. D'où $1 \text{ mol} = 25,205\ 03(59) \text{ mol}_B$.

On a également : $N_{AB} = 2,389\ 262(56) \times 10^{22} \text{ mol}_B^{-1} = 6,022\ 140\ 857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} = N_A$

Il est important de préciser qu'il ne s'agit plus uniquement d'un problème de conversion dans le système SP_B mais d'une redéfinition de concepts. **Et surtout, la mole n'est plus une unité fondamentale mais devient une unité dérivée.**

6.2 Les constantes physico-chimiques en SP_B

Nous distinguerons ici deux types de constantes : les constantes indépendantes de toute condition de température ou de pression et les constantes dépendantes des conditions initiales de température ou de pression (ou inclusif).

Constantes ne dépendant pas de conditions initiales

- **Constante de Faraday : F**

$$\begin{aligned} F &= N_{AB} \cdot e \\ &= \beta \text{ e} \cdot \text{mol}_B^{-1} \end{aligned}$$

¹ **Remarque :** on peut être tenté de ne prendre que $[\beta]$ partie entière de β (ce qui serait de toute façon négligeable au vu de l'incertitude relative), mais après tout, rien ne dit que le nombre d'Avogadro soit un nombre entier ; il faudrait pour cela que 12 g soit un multiple (nombre entier) de la masse de l'atome de carbone 12. Et même si dans la définition de la mole, le nombre d'entités a été pensé comme nombre entier, rien ne nous oblige dans la redéfinition du concept de prendre un nombre entier.

- **Constante universelle des gaz parfaits : R**

$$\begin{aligned} R &= N_{AB} \cdot k_B \\ &= \beta \text{ mol}_B^{-1} \cdot (l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot T_p^{-1}) \text{ d'après (2-5)} \\ &= \beta l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot T_p^{-1} \cdot \text{mol}_B^{-1} = \beta J_p \cdot T_p^{-1} \cdot \text{mol}_B^{-1} \end{aligned}$$

- **Constante molaire de Planck**

$$\begin{aligned} N_{AB} \cdot h &= \beta \text{ mol}_B^{-1} \cdot (2\pi l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1}) \text{ d'après (2-2)} \\ &= 2\pi\beta l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot \text{mol}_B^{-1} \end{aligned}$$

- **Seconde constante de rayonnement : c₂**

$$\begin{aligned} c_2 &= h \cdot c \cdot k_B^{-1} \\ &= (2\pi l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1}) \cdot (l_p \cdot t_p^{-1}) \cdot (l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot T_p^{-1})^{-1} \\ &= 2\pi l_p \cdot T_p \end{aligned}$$

- **Constante de Stefan-Boltzmann : σ**

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi^2 \cdot k_B^4 / 60 \hbar^3 \cdot c^2 \\ &= \pi^2 (1 m_p \cdot l_p^2 \cdot t_p^{-2} \cdot T_p^{-1})^4 / 60 (l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1})^3 \cdot (l_p^2 \cdot t_p^{-2}) \\ &= \pi^2 / 60 m_p \cdot t_p^{-3} \cdot T_p^{-4} \end{aligned}$$

- **Constante de Lorenz ou rapport de Wiedemann-Franz : L**

$$\begin{aligned} L &= \pi^2 k_B^2 / (3 e^2) \\ &= \pi^2 / 3 l_p^4 \cdot m_p^2 \cdot t_p^{-4} \cdot e^{-2} \cdot T_p^{-2} = \pi^2 / 3 J_p^2 \cdot e^{-2} \cdot T_p^{-2} \end{aligned}$$

- **Constante de Wien : σ_w**

$$\begin{aligned} \sigma_w &= h \cdot c \cdot k_B^{-1} / 4,965\ 114\ 231\ 74 \dots^{(1)} \\ &= c_2 / 4,965\ 114\ 231\ 74 \dots \\ &= (2\pi l_p \cdot T_p) / 4,965\ 114\ 231\ 74 \dots \end{aligned}$$

Nom	Symbole	Valeur (CODATA 2014)	Unités SI	Valeur	Unités SP _B
Constante de Boltzmann	k _B	1,380 648 52(79) × 10 ⁻²³	m ² ·kg·s ⁻² ·K ⁻¹	1	l _p ² ·m _p ·t _p ⁻² ·T _p ⁻¹ (= J _p ·T _p ⁻¹)
Nombre d'Avogadro	N _A = N _{AB}	6,022 140 857(74) × 10 ²³	mol ⁻¹	β	mol _B ⁻¹
Constante de Faraday	F	9,648 533 289(59) × 10 ⁴	C·mol ⁻¹	β	e·mol _B ⁻¹
Constante des gaz parfaits	R	8,314 4598(48)	m ² ·kg·s ⁻² ·K ⁻¹ ·mol ⁻¹	β	l _p ² ·m _p ·t _p ⁻² ·T _p ⁻¹ ·mol _B ⁻¹
Constante molaire de Planck	N _A ·h	3,990 312 7110(18) × 10 ⁻¹⁰	m ² ·kg·s ⁻¹ ·mol ⁻¹	2πβ	l _p ² ·m _p ·t _p ⁻¹ ·mol _B ⁻¹
Seconde constante de rayonnement	c ₂ ⁽²⁾	1,438 777 36(83) × 10 ⁻²	m·K	2π	l _p ·T _p
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5,670 367(13) × 10 ⁻⁸	kg·s ⁻³ ·K ⁻⁴	π ² /(2 ² ·3·5)	m _p ·t _p ⁻³ ·T _p ⁻⁴
Constante de Lorenz	L	2,443 0028(30) × 10 ⁻⁸	m ⁴ ·kg ² ·s ⁻⁴ ·C ⁻² ·K ⁻²	π ² /3	l _p ⁴ ·m _p ² ·t _p ⁻⁴ ·e ⁻² ·T _p ⁻² (= J _p ² ·e ⁻² ·T _p ⁻²)
Constante de Wien	σ _w	2,897 7729(17) × 10 ⁻³	m·K	2π/ 4,965 ...	l _p ·T _p

Tableau 6

⁽¹⁾ 4,965 114 231 74 ... unique racine positive de l'équation e^x + (1/5)x - 1 = 0

⁽²⁾ c_{1R} et c_{1L} ont été traitées § 3.4 et § 5 Tableau 4. Notons à ce propos que les unités d'angle plan et d'angle solide que sont respectivement le radian et le stéradian sont des unités dérivées qui dans l'espace schédo-vectorel sont toutes deux égales à 1. En effet le radian étant l'angle compris entre deux rayons r et interceptant un arc de cercle de longueur l = r, on a rad = l/r = 1. De même le stéradian étant l'angle solide interceptant dans une sphère de rayon r, une surface S = r², on a sr = S/r² = 1.

Le seul inconvénient dans notre redéfinition du nombre d'Avogadro est d'avoir perdu une précision de l'ordre de trois décimales **mais nous gagnons une dimension en faisant de la nouvelle mole, une unité dérivée.**

Pour être complet, il reste à traiter le cas des constantes physico-chimiques dépendant des conditions de température et de pression, le terme constante étant par ailleurs peu adapté puisque dépendant justement de ces conditions initiales. Pour cette raison et pour alléger un corps de texte déjà copieux, ce cas est traité en **annexe 5.**

7 Le système SP_B et quatre exceptions chez les constantes

Le système d'unités SP_B est initialement représenté par les sept unités suivantes : $\{l_p, m_p, t_p, e, T_p, \text{mol}_B, \text{cd}\}^1$. Mais comme $\text{mol}_B = \beta$, la mole-B devient une unité dérivée, ce qui implique que **le système d'unités SP_B ne comporte que six unités de base, à savoir : $\{l_p, m_p, t_p, e, T_p, \text{cd}\}$.** Il en est de même pour le SI dont l'ensemble des unités de base devient $\{m, \text{kg}, s, C, K, \text{cd}\}$. Le système d'unités SP_B et le SI ont une unité **dérivée** commune qui est mol_B . Chacun de ces deux ensembles est une base de l'espace schedo-vectoriel complet V , espace contenant l'ensemble des valeurs physiques et donc des constantes et des unités de mesure de la physique.

Il est curieux de constater que les **coefficients** en SP_B de **toutes** les constantes physiques étudiées (Tableaux 4 et 6), **hormis la constante de Wien**, utilisent seulement 8 nombres avec leurs puissances positives ou négatives : 2, 3, 5, π , α , β et δ auxquels il convient d'ajouter -1 pour obtenir les constantes négatives comme la charge de l'électron.

L'univers est très économe en nombres.

L'ensemble de ces coefficients est inclus dans un sous-groupe A de R^* que nous allons définir. En premier lieu, rappelons la définition du concept mathématique de sous-groupe engendré par une partie P d'un groupe :

Soit P une partie d'un groupe G , on appelle **sous-groupe engendré par P** , on note $\langle P \rangle$, l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant P .

Proposition : Soit P une partie du groupe R^* muni de la multiplication et $P^{-1} = \{x^{-1} \in R^* \mid x \in P\}$
alors $\langle P \rangle = \{x_1 \cdot \dots \cdot x_n \mid x_i \in P \cup P^{-1}\}$

Conséquence : Si $P = \{a_1, \dots, a_n\}$ alors $\langle P \rangle = \{x = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n} \mid \forall j \in \{1, \dots, n\}, i_j \in \mathbb{Z}\}$

On peut donc écrire $A = \langle \{-1, 2, 3, 5, \pi, \alpha, \beta, \delta\} \rangle$

$$= \{x = (-1)^{i_1} 2^{i_2} 3^{i_3} 5^{i_4} \pi^{i_5} \alpha^{i_6} \beta^{i_7} \delta^{i_8} \mid \forall j \in \{1, \dots, 8\}, i_j \in \mathbb{Z}\}$$

Par exemple, le coefficient de R_∞ en SP_B s'écrit $(-1)^0 2^{-2} 3^0 5^0 \pi^{-1} \alpha^2 \beta^{-1} \delta^0 = \alpha^2 / (4\pi\beta)$

En résumé, toute constante étudiée (tableaux 4 et 6), **hormis la constante de Wien**, s'exprime dans le système SP_B à l'aide d'un **sous-groupe de R^*** , engendré par **cinq** nombres purement mathématiques -1, 2, 3, 5, π et par **trois** nombres issus de la physique : deux nombres réels **fondamentaux** α et β , ainsi que le nombre δ .

Quatre constantes font exception :

¹ Rappelons que l'unité d'intensité lumineuse cd , n'entre pas dans le cadre de cette étude et est donc laissée telle quelle. Une unité acceptable d'intensité lumineuse dans notre cadre serait W/sr , unité dérivée qui en unités de Planck se traduit par $l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-3} \cdot \text{sr}^{-1}$

- **La constante de Wien** que nous avons traitée § 6.2.
- **La constante de Fermi** : $G_F/(\hbar c)^3 = 1,166\ 364(5)\ \text{GeV}^{-2}$ et **l'angle de Weinberg** θ_w défini par $\cos \theta_w = m_w/m_{Z_0}$. Dans l'expression de la constante de couplage de Fermi, on utilise $\sin^2 \theta_w = 0,2223(21)$; ces deux constantes qui sont liées font l'objet d'une étude approfondie (cf. **Annexe 6**), précédée de rappels sur les différents systèmes de Planck et les unités naturelles associées à ces systèmes.
- **Le rapport entre le moment magnétique de l'électron et le magnéton de Bohr** : $\mu_e/\mu_B = -1,001\ 159\ 652\ 180\ 85(76) = g_e/2$, où g_e est le facteur de Landé de l'électron, qui n'est pas traité dans cette étude.

Concernant les quatre constantes faisant exception, une solution consiste à intégrer leurs coefficients en unités SP_B à la partie génératrice du sous-groupe A. Mais la solution est peu élégante dans le sens où chacun de ces nombres ne serait introduit que pour une seule constante. **Les seules exceptions seraient alors les facteurs de Landé et les masses des différentes particules (hormis celles de l'électron et du proton).**

Notons que la présence des nombres 2 et 5 dans la partie génératrice de A permet de remplacer α , β et δ par leur mantisse respective dans cette même partie génératrice, le groupe A restant inchangé.

Notons enfin que si l'on veut travailler dans l'ensemble des constantes en exprimant celles-ci en une autre base que la base SP_B et passer, par exemple, en base $\{\hbar ; G ; \varepsilon_0 ; c ; T_P ; cd\}$, le sous-groupe A de R^* ne suffit plus, il faut l'élargir au sous-groupe A_Q de R^* dans lequel par rapport à A, l'ensemble des nombres rationnels Q remplace l'ensemble des entiers relatifs Z.

$$A_Q = \{ x = (-1)^{i_1} 2^{i_2} 3^{i_3} 5^{i_4} \pi^{i_5} \alpha^{i_6} \beta^{i_7} \delta^{i_8} \mid \forall j \in \{1, \dots, 8\}, i_j \in \mathbf{Q} \text{ et } i_1 = 0 \text{ ou } 1 \}$$

8 « Constantes » cosmologiques et grands nombres de Dirac

8.1 Constante de Hubble, temps de Hubble et âge de l'univers

La première difficulté rencontrée, tient à la définition même de la constante de Hubble. En effet, cette constante donne le taux d'expansion **actuel** de l'univers. Or le terme « actuel » traduit deux choses : la première est une trivialité, la « constante » de Hubble n'est pas stable dans le temps et l'emploi du terme constante est donc abusif ; la seconde est que le terme « actuel » traduit également une sorte *d'anthropocentrisme temporel*.

Aussi adopterons-nous une démarche différente. Mais avant de la décrire, quelques mots sur la relation entre âge de l'univers et temps de Hubble. Le temps de Hubble est donné par l'équation $t_H = 1/H_0$. le temps de Hubble qui représente une bonne estimation de l'âge de l'univers t_0 , même si cette estimation est aujourd'hui amendée de manière plus fine par d'autres paramètres ⁽¹⁾ inclus dans une même fonction.

Si l'on prend comme hypothèse que cette équation est généralisable dans le temps, cela implique que pour tout t dans R^{*+} , $H(t) = 1/t$, ce qui entraîne pour $t = t_p$, $H(t_p) = 1/t_p \approx 1,855 \times 10^{43} \text{ s}^{-1}$ et pour $t = 1 \text{ s}$, $H(t) = 1 \text{ s}^{-1} = 5,391\,16(13) \times 10^{-44} t_p^{-1}$.

Le rayon de Hubble est donné par l'équation : $R_H(t) = c/H(t)$ et on obtient alors :

$$R_H(t_p) = 1 \text{ l}_p \text{ (car } c = 1 \text{ l}_p \cdot t_p^{-1} \text{) et } R_H(1 \text{ s}) = c/(1 \text{ s}^{-1}) = 299\,792\,458 \text{ m} \approx 1,855 \times 10^{43} \text{ l}_p.$$

En moins d'une seconde, le rayon de l'univers est multiplié par plus de 10^{43} !

Même si l'on sait aujourd'hui que l'on ne peut généraliser cette fonction dans le temps (période d'inflation de l'univers, ...), on voit qu'une fonction inversement proportionnelle au temps pour $H(t)$ est tout à fait conforme à une situation de type « big bang ».

Notons qu'il est illusoire de chercher une expression de H_0 qui soit fonction de α , β et δ . En effet, H_0 représentant la vitesse d'expansion de l'univers **aujourd'hui**, la valeur de H_0 , même dans un système d'unités non anthropocentrique, ne peut être qu'**anthropocentrique**. Il s'agit là, si l'on peut dire, d'un **anthropocentrisme temporel**.

Sachant cela, nous allons procéder à l'inverse en prenant un « **univers de référence** » construit autour d'une constante de Hubble notée H_{ref} dont la valeur en SP_B sera fonction de nos constantes adimensionnelles, mais **suffisamment proche de la valeur de H_0 donnée aujourd'hui**, et examiner ce que cela signifie pour les principales « constantes cosmologiques actuelles ».

Quelques calculs permettent vite d'obtenir une première approximation tout à fait acceptable, **qui ne fait intervenir que deux de nos constantes, à savoir β et δ** :

$$H_{\text{ref}} = (1/2)\beta^{-3}\delta^2 t_p^{-1} \quad (8-1)$$

Ce qui implique $H_{\text{ref}} = 1,235\,937(87) \times 10^{-61} t_p^{-1} = 2,292\,53(22) \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$

$$= 70,7400(67) \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} \text{ (1 Mpc} = 3,085\,677\,581\,49 \times 10^{22} \text{ m)}$$

En partant de cette valeur pour H_{ref} , nous allons pouvoir regarder ce que donnent quelques constantes cosmologiques fonction de H_0 , en posant $\kappa = H_{\text{ref}}/H_0$ et donc $H_0 = \kappa^{-1} H_{\text{ref}}$

$$\kappa = H_{\text{ref}}/H_0 = 70,7400(67) / 67,8(9) \text{ }^{(2)} = 1,043(15)$$

⁽¹⁾ L'âge t_0 est donné par une expression de la forme $t_0 = f(\Omega_r, \Omega_m, \Omega_\Lambda, \dots) H_0^{-1}$ où H_0 est le paramètre de Hubble et la fonction f dépend seulement du pourcentage par rapport au contenu énergétique de l'univers de chacun des composants. Pour les valeurs du satellite Planck (Ω_m, Ω_Λ) = (0.3086, 0.6914), ce facteur de correction est $F = 0,957$ (Age of the universe – Wikipédia).

⁽²⁾ Les valeurs des constantes et paramètres astrophysiques, utilisées dans ce chapitre, proviennent toutes de « Astrophysical constants and parameters - PDG » 2018. La valeur de β est celle calculée § 3.2, les valeurs des autres constantes sont celles du CODATA 2014.

Age de l'univers t_0 ; $F = 0,957(16)$, voir note 1, page précédente.

Le temps de Hubble est $t_H = 1/H_0 = \kappa/H_{ref} = \kappa(2\beta^3\delta^{-2}) t_p = \kappa \times 13,8226(14) \times 10^9$ yr

Si on applique la dernière valeur $F = 0,957(16)$ du facteur de correction évoqué dans la note 1, on obtient : $t_0 = F/H_0 = F\kappa/H_{ref} = F\kappa(2\beta^3\delta^{-2}) t_p = F\kappa \times 4,362\,00(41) \times 10^{17}$ s
 $= F\kappa \times 13,8226(14) \times 10^9$ yr
 $= 13,80(42) \times 10^9$ yr

8.2 Quelques autres paramètres cosmologiques

Rayon de Hubble R_{H0}

$$R_{H0} = c/H_0 = \kappa c/H_{ref} = \kappa(2\beta^3\delta^{-2}) l_p \quad (\text{car } c = 1 l_p \cdot t_p^{-1})$$

$$= \kappa \times 1,307\,69(13) \times 10^{26} \text{ m} = 1,364(19) \times 10^{26} \text{ m}$$

Volume de Hubble V_{H0}

$$V_{H0} = (4/3)\pi R_{H0}^3 = \kappa^3 \times 9,3671(27) \times 10^{78} \text{ m}^3 = 1,064(44) \times 10^{79} \text{ m}^3$$

$$V_{H0} = \kappa^3(4/3)\pi[2\beta^3\delta^{-2}]^3 l_p^3$$

Densité critique ρ_c

La densité critique exprimée en *masse volumique* ρ_c est donnée par :

$$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 3(\kappa^{-1} H_{ref})^2/8\pi G = \kappa^{-2} \times 9,3998(22) \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 8,63(24) \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_c = \kappa^{-2}(3/2^5)\pi^{-1}[\beta^{-3}\delta^2]^2 m_p \cdot l_p^{-3}$$

La densité critique d'énergie est donnée par :

$$\mu_c = \rho_c \cdot c^2 = 7,76(21) \times 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\mu_c = \rho_c \cdot c^2 = \kappa^{-2}(3/2^5)\pi^{-1}[\beta^{-3}\delta^2]^2 E_p \cdot l_p^{-3} \quad (\text{car } m_p \cdot c^2 = E_p)$$

Masse de l'univers observable m_{U0}

$$m_{U0} = V_{H0} \cdot \rho_c = (4/3)\pi R_{H0}^3 \cdot 3H_0^2/8\pi G = (4/3)\pi(c/H_0)^3 \cdot 3H_0^2/8\pi G$$

$$= (1/2) c^3 \cdot H_0^{-1} \cdot G^{-1} \quad (8-2)$$

$$\text{d'où } m_{U0} = (1/2) (l_p \cdot t_p^{-1})^3 \cdot \kappa(2\beta^3\delta^{-2}) t_p \cdot (l_p^{-3} \cdot m_p \cdot t_p^2)$$

$$= \kappa\beta^3\delta^{-2} m_p = \kappa \times 8,804\,94(82) \times 10^{52} \text{ kg} = 9,19(13) \times 10^{52} \text{ kg}$$

Dans le développement des paramètres cosmologiques en unités SP_B , le paramètre κ fait le lien entre notre univers aujourd'hui et celui pris comme référence¹, proche du nôtre avec $H_{ref} = (1/2)\beta^{-3}\delta^2 t_p^{-1} = 70,7400(67) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$

Il est intéressant de constater que la constante β est remarquablement adaptée à la déclinaison des propriétés de notre univers en SP_B (ou en unités de Planck). Plus précisément, on peut constater que $\beta^3\delta^{-2}$ revient constamment dans l'expression des constantes de notre univers, exprimées en unités de Planck : $H_0 = (\kappa^{-1}/2)(\beta^3\delta^{-2})^{-1} t_p^{-1}$; $t_0 = 2F\kappa(\beta^3\delta^{-2}) t_p$; $R_{H0} = 2\kappa(\beta^3\delta^{-2}) l_p$; $\rho_c = \kappa^{-2}(3/2^5)\pi^{-1}[\beta^3\delta^{-2}]^2 m_p \cdot l_p^{-3}$; $m_{U0} = \kappa(\beta^3\delta^{-2}) m_p$.

Et si l'on rapporte les paramètres de l'univers aux unités de Planck dans lesquelles on les exprime, on obtient des grands nombres, proches de 10^{60} :

¹ On pourrait choisir un univers de référence avec $H_{ref} = (3/2\pi)\beta^3\delta^2 t_p^{-1} = 67,55(1) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ qui est une meilleure approximation de la dernière valeur donnée par le PDG (Particle Data Group), à savoir $H_0 = 67,8(9) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$; on aurait alors $\kappa = 0,996(14)$. Les valeurs calculées des paramètres cosmologiques donneraient les mêmes résultats, la nouvelle valeur de κ compensant la nouvelle valeur de H_{ref} .

Nom	Rapport de la constante à son unité de Planck	Coefficient (de l'ordre de l'unité)
Age de l'univers t_0	$t_0/t_P = 2F\kappa(\beta^3\delta^{-2}) = 8,08(25) \times 10^{60}$	$2F\kappa \approx 1,997$
Rayon de Hubble R_{H0}	$R_{H0}/l_P = 2\kappa(\beta^3\delta^{-2}) = 8,091\ 03(57) \times 10^{60}$	$2\kappa \approx 2,087$
Masse de l'univers observable m_{U0}	$m_{U0}/m_P = \kappa(\beta^3\delta^{-2}) = 4,221(58) \times 10^{60}$	$\kappa \approx 1,043$

On remarque que $\beta^3\delta^{-2} = \beta/\alpha_G = 4,045\ 51(28) \times 10^{60}$, intervient systématiquement dans l'expression de chacune des constantes adimensionnelles ci-dessus, **modulée par un coefficient, toujours de l'ordre de l'unité par rapport à un ordre de grandeur de 10^{60} !**

Or, c'est justement cet ordre de grandeur de 10^{60} , qui a conduit en partie, à l'hypothèse des grands nombres de Dirac.

8.3 L'hypothèse des grands nombres de Dirac

L'hypothèse des grands nombres de Dirac exprime l'idée que la cosmologie fait apparaître des grands nombres quand ses ordres de grandeur sont comparés à ceux du monde microscopique. Elle concerne les rapports entre des nombres à l'échelle de l'univers et des nombres à l'échelle des particules élémentaires.

Les deux exemples principaux choisis par Dirac étaient les suivants :

Rapport entre le rayon de Hubble et le rayon classique de l'électron

$$R_1 = R_{H0}/r_e = 2\kappa\beta^3\delta^{-2}/\alpha\beta \\ = 2\kappa\alpha^{-1}\beta^2\delta^{-2} = \kappa \times 4,640\ 60(23) \times 10^{40} = 4,842(65) \times 10^{40}$$

Ce rapport est presque égal à celui entre l'âge de l'univers et le temps t_e que met la lumière pour parcourir le rayon classique de l'électron, ceci au facteur F près :

$$R_{H0}/r_e = c/(H_0 \cdot r_e) = t_0 \cdot c/(F r_e) \quad \text{car } H_0 = F/t_0 \\ = F^{-1} t_0/t_e$$

$$\text{D'où } t_0/t_e = F R_{H0}/r_e = 4,63(15) \times 10^{40}$$

Rapport entre l'intensité de la force électromagnétique et l'intensité de la force gravitationnelle pour un électron et un proton¹ :

$$R_2 = k_C \cdot e^2/G \cdot m_{pr} \cdot m_e = \alpha\beta^2/\delta = 2,268\ 74(11) \times 10^{39} \quad (\text{cf. équation 4-3})$$

Contrairement à R_2 dont l'expression en α et β correspond à une égalité stricte, R_1 est fonction de H_0 . Il est donc normal que figure dans son expression, le facteur κ qui traduit l'anthropomorphisme temporel défini § 8.1.

On retrouve toutefois dans ces deux rapports la constante β dont le carré constitue, comme on le verra, l'essence même de ces grands nombres voisins de 10^{40} qui intriguaient Dirac. Des deux ratios R_1 et R_2 ci-dessus, l'un fait intervenir la constante de Hubble, c'est à dire une constante reflétant un anthropocentrisme temporel marqué par la présence de κ , alors que l'autre rapport ne fait intervenir que des constantes non anthropocentriques.

Nous allons donc lors de notre étude de quelques grands nombres, les regrouper selon qu'ils dépendent ou non de la constante de Hubble (ou de l'une de ses constantes dérivées comme R_{H0} ou m_{U0})².

¹ Voir à ce propos l'interview de Paul Dirac menée par David Peat et Paul Buckley au début des années 1970.

² Nous indiquerons par des nombres impairs les rapports dépendant de la constante de Hubble et par des nombres pairs les autres rapports.

8.3.1 Rapports dépendant de la constante de Hubble

Rapport entre la masse de l'univers et la masse du proton : le nombre d'Eddington

Le plus célèbre des nombres utilisant une constante dérivée de la constante de Hubble est le nombre d'Eddington qui donne une approximation du nombre de protons dans l'univers.

$$N_E = m_{UO}/m_{pr} = \kappa\beta^3\delta^{-2} m_p / [(\beta^{-1}\delta) m_p] = \kappa\beta^4\delta^{-3} = \kappa\alpha_G^{-2}\delta = \kappa \times 5,264\ 15(50) \times 10^{79} \\ = 5,492(75) \times 10^{79}$$

Rapport entre le rayon de Hubble et la longueur d'onde de Compton de l'électron

$$R_3 = R_{H0}/\lambda_C = (c/H_0) / (h/m_e.c) = \kappa(2\beta^3\delta^{-2})(2\pi\beta)^{-1} \\ = \kappa\pi^{-1}\beta^2\delta^{-2} = \kappa(\pi\alpha_G)^{-1} \\ = \kappa \times 5,389\ 64(26) \times 10^{37}$$

Rapport entre le rayon de Hubble et la longueur d'onde de Compton du proton

$$R_5 = R_{H0}/\lambda_{Cpr} = \delta R_3 \\ = \kappa\pi^{-1}\beta^2\delta^{-1} = \kappa \times 9,896\ 21(47) \times 10^{40}$$

8.3.2 Rapports indépendants de la constante de Hubble

Rapport entre l'intensité de la force de répulsion électromagnétique et l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle **pour deux électrons**

$$R_4 = k_C \cdot e^2 / G \cdot m_e^2 \\ = \alpha\beta^2 = 4,165\ 75(20) \times 10^{42} \quad (\text{cf. équation 4-1})$$

Rapport entre l'intensité de la force de répulsion électromagnétique et l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle **pour deux protons**

$$R_6 = k_C \cdot e^2 / G \cdot m_{pr}^2 \\ = \alpha\beta^2/\delta^2 = 1,235\ 592(58) \times 10^{36} \quad (\text{cf. équation 4-2})$$

8.3.3 Ossature des grands nombres de Dirac : β^2

Dans les rapports dépendant de la constante de Hubble, l'anthropomorphisme temporel ayant été clairement identifié et marqué par le facteur $\kappa = H_{ref}/H_0 = 1,043(15)$, la **présence de β^2** modulée par des puissances de κ , π , α ou δ , explique **pourquoi tous ces grands nombres sont compris entre 10^{36} et 10^{45}** hormis N_E qui incorporant $(\beta^2)^2$, frise les 10^{80} .

Dans les rapports indépendants de la constante de Hubble, la présence de β^2 ne peut être contestée car découlant directement de la théorie.

Dans chacun des grands nombres de Dirac, le facteur $\beta^2 \approx 5,708 \times 10^{44}$ est présent, modulé par une combinaison de puissances de κ , π , α et δ .

9 Problèmes ouverts et conclusion provisoire

9.1 Masse linéique de Planck

Nous avons vu le rôle fondamental de la constante β dans l'expression des constantes de la physique en SP_B et en quoi, § 4.2, cette constante permettait de répondre à la question de Richard Feynman : « *L'attraction gravitationnelle relativement à la répulsion électrique de deux électrons est 1 divisé par $4,17 \times 10^{42}$. La question est : d'où provient un nombre aussi grand ?* ».

Mais peut-on aller plus loin ? Nous pouvons essayer de prolonger cette question ainsi : **Pourquoi le rapport β entre la masse de Planck et la masse de l'électron est-il aussi grand ?**

Et pour y répondre, nous allons utiliser le concept de masse linéique qui est défini comme étant la grandeur physique qui mesure la masse par unité de longueur.

L'équation (2-8) $l_p \cdot m_p^{-1} = G/c^2$, nous permet d'écrire pour la masse linéique de Planck μ_p ,

$$\mu_p = m_p/l_p = c^2/G$$

Observons les équations donnant les formules respectives de l_p et m_p , en fonction de c , G , et \hbar . On a : $l_p = (\hbar \cdot G/c^3)^{1/2}$ et $m_p = (\hbar \cdot c/G)^{1/2}$

Il est possible d'extraire un facteur commun à chacune de ces unités de Planck : $(\hbar/c)^{1/2}$

On peut ainsi écrire : $l_p = (\hbar/c)^{1/2} \cdot (G/c^2)^{1/2}$ et $m_p = (\hbar/c)^{1/2} \cdot (c^2/G)^{1/2}$

Et en déduire : $l_p = (\hbar/c)^{1/2} \cdot \mu_p^{-1/2}$ et $m_p = (\hbar/c)^{1/2} \cdot \mu_p^{1/2}$

Les deux unités de Planck m_p et l_p peuvent donc se mettre chacune sous forme d'un produit de 2 facteurs dont l'un est $(\hbar/c)^{1/2}$, l'autre étant : $\mu_p^{-1/2}$ pour l_p et $\mu_p^{1/2}$ pour m_p .

C'est donc la masse linéique de Planck $\mu_p = c^2/G = 1,346\ 635(63) \times 10^{27}$ kg/m et donc **le rapport entre le carré de la vitesse de la lumière et la constante gravitationnelle**, qui, sa racine **multipliant** le facteur $(\hbar/c)^{1/2}$ est à l'origine d'une **masse de Planck si grande** à l'échelle de l'électron : $m_p/m_e = \beta \approx 10^{22}$ et qui, sa racine **divisant** le même facteur $(\hbar/c)^{1/2}$ est à l'origine d'une longueur de Planck, si petite à l'échelle de l'électron : $l_p/\lambda_c = \beta^{-1}$ (Cf. Tableau 4).

9.2 Rayon de Schwarzschild et masse linéique

Le rayon de Schwarzschild d'une masse m est le rayon de la sphère, appelée horizon du trou noir, dans laquelle est confinée cette masse m . On a $R_S(m) = 2 G \cdot m/c^2$

On peut donc déduire de cette définition et de $\mu_p = c^2/G$, la relation entre le rayon de Schwarzschild d'une masse m et la masse linéique de Planck : $R_S(m) = 2 m \cdot \mu_p^{-1}$

Ce qui appliqué à la masse de Planck donne : $R_S(m_p) = 2 m_p \cdot \mu_p^{-1} = 2 l_p$

Mais quel peut être le rayon de Schwarzschild appliqué à la masse de l'univers observable ?

$$R_S(m_{UO}) = 2 G \cdot m_{UO}/c^2 = 2 G \cdot ((1/2) c^3 \cdot H_0^{-1} \cdot G^{-1})/c^2 \quad (\text{cf. (8-2) } m_{UO} = (1/2) c^3 \cdot H_0^{-1} \cdot G^{-1})$$

$$= c/H_0 = R_{H0}$$

Ainsi, le rayon de Schwarzschild de l'univers est égal au rayon de Hubble ! De là à imaginer que l'univers serait un gigantesque trou noir dans un méta-univers dont il ne serait qu'un élément parmi d'autres, il y a un pas que nous ne franchirons pas.

La mesure maximale d'une masse linéique est théoriquement la masse linéique de Planck, $\mu_p = m_p/l_p$, qui mesure le rapport entre la masse et le diamètre d'un trou noir.

Définissons maintenant la masse linéique de l'univers comme étant le rapport de sa masse à son diamètre : $\mu_{UO} = m_{UO}/(2 R_{H0})$

$$\text{On a donc : } \mu_{UO} = (\kappa \beta^3 \delta^{-2} m_p)/(2\kappa(2\beta^3 \delta^{-2}) l_p)$$

$$= (1/4) m_p/l_p = (1/4) \mu_p$$

(1) « La valeur extrême exacte pour chaque observable dans la nature est obtenue lorsque dans toutes les quantités de Planck : G est remplacé par $4G$ et $4\pi\epsilon_0$ est remplacé par $4\pi\epsilon_0\alpha$ »

A partir de cette assertion, on déduit les unités de Planck ainsi normalisées :

$$l_{p_n} = 2 l_p ; t_{p_n} = 2 t_p ; m_{p_n} = (1/2) m_p \text{ et } q_{p_n} = \alpha^{1/2} q_p = e$$

Voici une curiosité mathématique que l'on peut tirer de ces unités : Si l'on considère qu'à t_{p_n} , le diamètre de l'univers était l_{p_n} et sa masse m_{p_n} , la masse linéique de l'univers était donc $\mu_{p_n} = m_{p_n}/l_{p_n} = (1/4) \mu_p$ d'où $\mu_{UO} = \mu_{p_n}$; ce qui signifierait que la masse de l'univers observable a crû dans les mêmes proportions que son diamètre, sa masse linéique étant restée constante.

9.3 Le rayon de charge du proton r_{cp}

Le 8 juillet 2010 un article intitulé « The size of the proton », était publié dans Nature et signé par 32 scientifiques (Randolf Pohl, ...), indiquant une mesure de **0,84184(67) fm**, différant de la valeur CODATA qui était alors de 0,8768(69) fm, et ce à partir d'expérience menée avec de l'hydrogène muonique.

Le rayon de charge actuel du proton donné par le CODATA 2014 est $r_{cp} = 8,751(61) \times 10^{-16}$ m.

Or il existe une équation donnant le ratio masse proton / masse électron en fonction du rayon de charge du proton : $\delta = m_{pr}/m_e = \alpha^2/(\pi r_{cp} R_\infty)$ (2). Si l'on utilise cette équation de manière à déterminer r_{cp} , on obtient : $r_{cp} = (\alpha^2/\pi\delta) R_\infty^{-1} = 8,412\ 356\ 4043(49) \times 10^{-16}$ m (3)

Si l'on revient à nos constantes adimensionnelles, on obtient à partir de l'équation ci-dessus et de (3-2) : $r_{cp} = (\alpha^2/\pi\delta) (\alpha^2/4\pi\beta l_p^{-1})^{-1}$
 $= 4\beta\delta^{-1} l_p$

ce qui, en prenant la valeur calculée de β (cf. § 3.2), donne : $r_{cp} = 8,412\ 36(40) \times 10^{-16}$ m, la précision étant ici plus grossière.

Or ce résultat est **curieusement** en accord avec l'article de 2010 cité plus haut mais également avec d'autres travaux dont ceux(4) de Clara Peset et d'Antonio Pineda qui, se rapportant également à **de l'hydrogène muonique**, aboutissent à $r_{cp} = 0,8412(15)$ fm. Curieusement, car la formule donnant le rayon de charge du proton ne contient **aucune caractéristique du muon** mais utilise le rapport δ entre la masse du proton et celle de l'électron.

Si l'on prend les nouvelles mesures faites à partir de l'hydrogène muonique, le rayon de charge du proton $r_{cp} = 4\beta\delta^{-1} l_p$ s'exprime donc en unités SP_B comme la plupart des constantes, en fonction des nombres 2, 3, 5, π , α , β , δ et de leurs puissances.

Notons également : $r_{cp}/\lambda_{C,pr} = (4\delta^{-1}\beta l_p) / (\beta\delta^{-1} l_p) = 4$

On tire également de $r_{cp} = 4\delta^{-1}\beta l_p$ et de $r_e = \alpha\beta l_p$ (3-1), l'équation suivante : $r_e/r_{cp} = \alpha\delta/4$

(1) MontagneMouvement-Volume 2 Christoph Schiller

(2) The 2010 & 2013 muonic hydrogen proton radius predicted by Nassim Haremein is also in the equation, μ , the proton to electron mass ratio. This ratio is a well known value, however, this equation is new and precise. Derived by Mark Rohrbaugh using Nassim Haremein's work and insight from Lyz Starwalker 2015.

Advanced Geometric Physics Solutions – Mark Rohrbaugh

(3) Calcul toujours avec les valeurs du CODATA 2014 pour α , δ , R_∞

(4) Model-independent determination of the Lamb shift in muonic hydrogen and the proton radius, Clara Peset, Antonio Pineda, Dept. of Physics and IFAE, Universitat Autònoma de Barcelona (23 mars 2015).

9.4 Conclusion provisoire

Que peut éventuellement nous dire l'univers si nous parlons son langage (tout au moins un langage non anthropocentrique) ? L'univers répond et il répond essentiellement par trois nombres réels α , β et δ issus de la physique, plus précisément issus des constantes adimensionnelles que sont : $\alpha = e^2 \cdot q_p^{-2}$, $\beta = m_p \cdot m_e^{-1}$ et $\delta = m_{pr} \cdot m_e^{-1}$

Nous avons montré que l'essentiel des constantes de la physique (voir tableaux 4 et 6) s'expriment en SP_B à l'aide uniquement de ces trois nombres α , β et δ renforcés par la présence de cinq nombres mathématiques : -1, 2, 3, π et 5. Une seule exception dans ces deux tableaux : la constante de Wien. Il faut toutefois ajouter à cette exception 3 constantes (cf. § 7) ainsi que la masse et le facteur de Landé de chaque particule élémentaire.

Ce qui ouvre la porte à différents problèmes dont l'un est celui de la hiérarchie des masses. Ce dernier peut-il trouver une réponse, par exemple, sous la forme d'une constante adimensionnelle γ telle que pour chacune des 6 familles de particules : bosons (Higgs, Z, W), leptons, quarks, mésons, baryons, neutrinos, on puisse décliner des fonctions qui donneront pour chaque particule $p_{i,j}$ ($j^{\text{ème}}$ particule de la $i^{\text{ème}}$ famille) une masse exprimée en $\beta^{-1} m_p$, de type $m(p_{i,j}) = m_{i,j}(\alpha, \beta, \gamma)$; δ dans ce schéma, n'étant plus qu'un cas particulier. Ce qui laisse espérer une réponse à cette question, même s'il s'agit d'une réponse tout à fait différente de l'exemple proposé ci-dessus, est une autre question qui se pose pour chaque particule élémentaire à propos de sa masse : pourquoi cette valeur ? Question qui trouve sa pertinence dans la célèbre phrase d'Einstein : « Le plus incompréhensible est que le monde soit compréhensible »¹.

Nous finirons, en revenant sur le premier système d'unités non anthropocentrique, précurseur de celui de Planck, à savoir le système de Stoney qui avait fabriqué les unités de mesure de longueur, masse et temps de la manière suivante :

$$l_s = (G \cdot e^2 / (4\pi \epsilon_0 \cdot c^4))^{1/2} ; m_s = (e^2 / (4\pi \epsilon_0 \cdot G))^{1/2} \text{ et } t_s = (G \cdot e^2 / (4\pi \epsilon_0 \cdot c^6))^{1/2}$$

Aujourd'hui, de $e^2 / (4\pi \epsilon_0 \cdot \hbar \cdot c) = \alpha$, on peut déduire $e^2 / (4\pi \epsilon_0) = \alpha \hbar \cdot c$ d'où :

$$l_s = (G \cdot (\alpha \hbar) / c^3)^{1/2} = \alpha^{1/2} l_p ; m_s = (e^2 / (4\pi \epsilon_0 \cdot G))^{1/2} = (\alpha \hbar \cdot c / G)^{1/2} = \alpha^{1/2} m_p$$

$$\text{et } t_s = (G \cdot e^2 / (4\pi \epsilon_0 \cdot c^6))^{1/2} = (G \cdot (\alpha \hbar) / c^5)^{1/2} = \alpha^{1/2} t_p$$

En fait Stoney était doublement un précurseur puisque les unités de Planck n'existant pas encore, pas plus que la constante de Planck ou que α , il avait conçu un système d'unités qui aujourd'hui peut s'écrire : $l_s = \alpha^{1/2} l_p$; $m_s = \alpha^{1/2} m_p$; $t_s = \alpha^{1/2} t_p$, système d'unités semblable à un facteur près à celui de Planck.

Quant à β , nous avons montré que la question de Richard Feynman quant à l'origine d'un nombre aussi grand que celui du rapport entre la répulsion électrique de deux électrons et leur attraction gravitationnelle, trouvait sa réponse dans la constante adimensionnelle $\beta = m_p / m_e$ (cf. § 4.2) et dans le rapport entre le carré de la vitesse de la lumière et la constante gravitationnelle c^2 / G , qui, sa racine **multipliant** le facteur $(\hbar / c)^{1/2}$ est à l'origine d'une **masse de Planck si grande** à l'échelle de l'électron et qui, sa racine **divisant** le même facteur $(\hbar / c)^{1/2}$ est à l'origine d'une longueur de Planck si petite à l'échelle de l'électron (cf. § 9.1). Ce qui ne fait que renforcer **l'importance de β , constante omniprésente**, comme α dans tous les paragraphes de cette étude.

¹ Sous-entendu pour quelqu'un comme Einstein, compréhensible par les Mathématiques.

10 Annexes

10.1 Démonstration des équivalences et propositions du § 5.1.1¹

10.1.1 Démonstration de l'équivalence de définitions d'une partie libre ↩

Une partie libre finie d'un espace schedo-vectoriel E , d'élément neutre $\mathbb{1}$, est définie ainsi :

Une partie $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E est une **partie libre** de E , si :

a) Pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans R^* et pour tous q_1, \dots, q_n dans Q , $\prod_{i=1}^{i=n} (\lambda_i e_i^{q_i}) = \mathbb{1}$ implique

$q_1 = \dots = q_n = 0$ et $\prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i = 1$, **ce qui équivaut à :** **b)** Pour tout λ dans R^* et tous q_1, \dots, q_n

dans Q , $\lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i} = \mathbb{1}$ **implique** $q_1 = \dots = q_n = 0$ et $\lambda = 1$.

Démonstration : Montrons l'équivalence des propositions a) et b)

Montrons **a) \Rightarrow b)** : Pour tout λ dans R^* , et tous q_1, \dots, q_n dans Q tels que $\lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i} = \mathbb{1}$,

posons $\lambda_1 = \lambda$ et pour tout $i \neq 1$, $\lambda_i = 1$. On peut alors écrire $\lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i} = \prod_{i=1}^{i=n} (\lambda_i e_i^{q_i})$ et donc

$\lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i} = \mathbb{1}$ implique $\prod_{i=1}^{i=n} (\lambda_i e_i^{q_i}) = \mathbb{1}$, d'où d'après a), on a $q_1 = \dots = q_n = 0$ et $\prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i = 1$ d'où

$\lambda_1 \prod_{i=2}^{i=n} \lambda_i = 1$ et comme $\prod_{i=2}^{i=n} \lambda_i = 1$, on en déduit $\lambda_1 = 1$.

On a donc $q_1 = \dots = q_n = 0$ et $\lambda = \lambda_1 = 1$.

Montrons **b) \Rightarrow a)** : pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans R^* et q_1, \dots, q_n dans Q , $\prod_{i=1}^{i=n} (\lambda_i e_i^{q_i}) = \mathbb{1} \Leftrightarrow$

$(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i} = \mathbb{1}$ d'où en posant $\lambda = \prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i$, on a $\lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i} = \mathbb{1}$ d'où en appliquant b),

$\prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i = \lambda = 1$ et $q_1 = \dots = q_n = 0$.

10.1.2 Démonstration Proposition 1 ↩

Proposition 1 : Soit E un espace schedo-vectoriel, a) « $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une **base** de E »

équivaut à b) « Tout élément u de E s'écrit de manière unique $u = \lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i}$ avec λ dans R^* et

q_1, \dots, q_n dans Q ».

Démonstration : Montrons l'équivalence des propositions a) et b)

Montrons **a) \Rightarrow b)** : $\{e_1, \dots, e_n\}$ est **une base** de E implique $\{e_1, \dots, e_n\}$ partie génératrice de E , d'où pour tout u dans E , il existe λ dans R^* et q_1, \dots, q_n dans Q , tels que

¹ Dans les démonstrations qui suivent ainsi que dans plusieurs propositions, le symbole \prod est employé pour signifier selon le contexte le produit d'éléments de R^* (loi de composition interne sur R^*) ou le produit de schedo-vecteurs de E (loi de composition interne sur E).

$\mathbf{u} = \lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i}$; supposons $\mathbf{u} = \lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i} = \lambda' \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q'_i}$, on peut en déduire : $\lambda \lambda'^{-1} \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i - q'_i} = \mathbb{1}$,

d'où comme $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de E donc partie libre de E, $\lambda \lambda'^{-1} = 1$ d'où $\lambda = \lambda'$ et pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, $q_i - q'_i = 0$ d'où $q_i = q'_i$ et donc u s'écrit de manière unique

$\mathbf{u} = \lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i}$ dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Montrons b) \Rightarrow a) : pour tout u dans E, u s'écrit de manière unique $\mathbf{u} = \lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i}$ implique

$\{e_1, \dots, e_n\}$ partie génératrice de E. D'autre part pour tout λ dans \mathbb{R}^* , et tous q_1, \dots, q_n dans \mathbb{Q} ,

$\lambda \prod_{i=1}^{i=n} e_i^{q_i} = \mathbb{1}$ et $1 \prod_{i=1}^{i=n} e_i^0 = \mathbb{1}$ impliquent d'après b), $\lambda = 1$ et pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, $q_i = 0$

d'où **$\{e_1, \dots, e_n\}$ partie libre de E.**

10.2 Annexe 2 : Sous-espaces schedo-vectoriels ↩

Soit E un espace schedo-vectoriel sur \mathbb{R}^* , de loi interne « \cdot » et soit H une partie de E .

H est un **sous-espace schedo-vectoriel** de E si :

1. H est un sous-groupe de E :
 - 1.1 $H \neq \emptyset$
 - 1.2 H est stable pour la loi interne « \cdot » : $\forall u \in H, \forall v \in H, u \cdot v \in H$
 - 1.3 H est stable par passage à l'inverse : $\forall u \in H, u^{-1} \in H$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall u \in H, \lambda \cdot u \in H$

Conséquence : $\mathbb{1} \in H$

Démonstration : D'après 1.1, $\exists u \in H$. D'où d'après 1.3, $u^{-1} \in H$, d'où d'après 1.2, $\mathbb{1} = u \cdot u^{-1} \in H$

Définition : On appelle sous-espace schedo-vectoriel **engendré par une partie A** de E , le plus petit sous-espace schedo-vectoriel contenant A .

Proposition : $E_1 = \{u \in E \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } u = \lambda \mathbb{1}\}$ est un sous-espace schedo-vectoriel de E qui est contenu dans tout sous-espace schedo-vectoriel de E .

Démonstration : Montrons E_1 sous-espace schedo-vectoriel de E , c'est-à-dire que E_1 vérifie les propriétés 1.1, 1.2, 1.3 et 2 des sous-espaces schedo-vectoriels.

1.1 Immédiat, $\mathbb{1} = 1 \mathbb{1} \in E_1$

1.2 Soit u dans E_1 et v dans E_1 , il existe λ et λ' dans \mathbb{R}^* tels que $u = \lambda \mathbb{1}$ et $v = \lambda' \mathbb{1}$ d'où $u \cdot v = (\lambda \mathbb{1}) \cdot (\lambda' \mathbb{1}) = (\lambda \lambda') \mathbb{1}$, d'où $u \cdot v$ appartient à E_1 .

1.3 Pour tout u dans E_1 , il existe λ dans \mathbb{R}^* tel que $u = \lambda \mathbb{1}$, et comme $u^{-1} = (\lambda \mathbb{1})^{-1} = \lambda^{-1} \mathbb{1}$, u^{-1} appartient donc à E_1 .

2. Pour tout u dans E_1 , il existe λ dans \mathbb{R}^* tel que $u = \lambda \mathbb{1}$ et donc pour tout μ dans \mathbb{R}^* , $\mu \cdot u = \mu \cdot (\lambda \mathbb{1}) = (\mu \lambda) \mathbb{1}$, d'où $\mu \cdot u \in E_1$.

E_1 est donc un sous-espace schedo-vectoriel de E .

Il reste à montrer que E_1 est contenu dans tout sous-espace H de E .

Soit H un sous-espace schedo-vectoriel de E , $\mathbb{1} \in H$ (conséquence 1) et donc pour tout λ dans \mathbb{R}^* , $\lambda \mathbb{1} \in H$. D'où $E_1 \subseteq H$.

10.3 Annexe 3 : Démonstration de $\{l_p, \mu_0, c, e\}$ base de F ↩

Montrons que $\{l_p, \mu_0, c, e\}$ est une base de F, c'est-à-dire que $\{l_p, \mu_0, c, e\}$ est à la fois une partie génératrice et une partie libre de F.

Pour tout u dans F, il existe $(q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{Q}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que $u = \lambda l_p^{q_1} \cdot m_p^{q_2} \cdot t_p^{q_3} \cdot e^{q_4}$ (10-1) car $\{l_p, m_p, t_p, e\}$ est une base de F.

Or, $\mu_0 = 4\pi\alpha l_p \cdot m_p \cdot e^{-2}$ (cf. tableau 4) et $c = 1 l_p \cdot t_p^{-1}$ d'où : $m_p = (4\pi\alpha)^{-1} l_p^{-1} \cdot \mu_0 \cdot e^2$ et $t_p = 1 l_p \cdot c^{-1}$

Ce qui donne en remplaçant dans l'équation (10-1) : $u = \lambda l_p^{q_1} \cdot [(4\pi\alpha)^{-1} l_p^{-1} \cdot \mu_0 \cdot e^2]^{q_2} \cdot (l_p \cdot c^{-1})^{q_3} \cdot e^{q_4}$

D'où $u = \lambda / (4\pi\alpha)^{q_2} l_p^{q_1 - q_2 + q_3} \cdot \mu_0^{q_2} \cdot c^{-q_3} \cdot e^{2q_2 + q_4}$

Donc pour tout $u = \lambda l_p^{q_1} \cdot m_p^{q_2} \cdot t_p^{q_3} \cdot e^{q_4} \in F$, il existe $\lambda' \in \mathbb{R}^*$ et $(q'_1, q'_2, q'_3, q'_4) \in \mathbb{Q}^4$ tels que $u = \lambda' l_p^{q'_1} \cdot \mu_0^{q'_2} \cdot c^{q'_3} \cdot e^{q'_4}$ (avec $\lambda' = \lambda / (4\pi\alpha)^{q_2}$) ; $q'_1 = q_1 - q_2 + q_3$; $q'_2 = q_2$; $q'_3 = -q_3$ et $q'_4 = 2q_2 + q_4$.

$\{l_p, \mu_0, c, e\}$ est donc une partie génératrice de F.

Montrons maintenant que $\{l_p, \mu_0, c, e\}$ est une partie libre de F.

Soit $u = \lambda l_p^{q_1} \cdot \mu_0^{q_2} \cdot c^{q_3} \cdot e^{q_4} = \mathbb{1}$, montrons que cela entraîne $\lambda = 1$ et $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$

$u = \lambda l_p^{q_1} \cdot \mu_0^{q_2} \cdot c^{q_3} \cdot e^{q_4} = \lambda l_p^{q_1} \cdot (4\pi\alpha l_p \cdot m_p \cdot e^{-2})^{q_2} \cdot (l_p \cdot t_p^{-1})^{q_3} \cdot e^{q_4} = \lambda (4\pi\alpha)^{q_2} l_p^{q_1 + q_2 + q_3} \cdot m_p^{q_2} \cdot t_p^{-q_3} \cdot e^{-2q_2 + q_4}$

Comme $u = \mathbb{1}$ et que $\{l_p, m_p, t_p, e\}$ est une base de F, on a donc les cinq équations :

$\lambda (4\pi\alpha)^{q_2} = 1$ (1), $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ (2), $q_2 = 0$ (3), $-q_3 = 0$ (4) et $-2q_2 + q_4 = 0$ (5)

Des équations (3) et (4), on tire $q_2 = q_3 = 0$ et des équations (2), (3) et (4) on tire $q_1 = 0$

Des équations (3) et (5), on tire $q_4 = 0$

Des équations (1) et (3), on tire $\lambda = 1$

On a donc montré que $u = \lambda l_p^{q_1} \cdot \mu_0^{q_2} \cdot c^{q_3} \cdot e^{q_4} = \mathbb{1}$ implique $\lambda = 1$ et $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$

$\{l_p, \mu_0, c, e\}$ est donc à la fois partie génératrice et partie libre de F, c'est donc une base de F.

Remarque : Il sera heureusement beaucoup plus simple de démontrer que $\{l_p, \mu_0, c, e\}$ est une de base de F après avoir vu la proposition 3 du § 5.2.

10.4 Annexe 4 : Constantes fondamentales exprimées selon différentes bases

Une formulation dans une base comportant deux caractéristiques relatives à l'électron. ↩

Nom	Symbole	Valeur (CODATA 2014)	Unités SI	Valeur	Base {h ; m _e ; c ; e}
Vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458	m.s ⁻¹	1	c
Constante de Planck	h	6,626 070 040(81) × 10 ⁻³⁴	m ² .kg.s ⁻¹	1	h
Constante gravitationnelle	G	6,674 08(31) × 10 ⁻¹¹	m ³ .kg ⁻¹ .s ⁻²	β ² /2π	h.m _e ⁻² .c
Charge élémentaire	e	1,602 176 6208(98) × 10 ⁻¹⁹	C	1	e
Constante de permittivité du vide	ε ₀	8,854 187 817... × 10 ⁻¹²	m ⁻³ .kg ⁻¹ .s ² .C ²	(2α) ⁻¹	h ⁻¹ .c ⁻¹ .e ²
Constante de perméabilité du vide	μ ₀	4π × 10 ⁻⁷	m.kg.C ⁻²	2α	h.c ⁻¹ .e ⁻²
Constante de Coulomb	k _C = 1/(4πε ₀)	8,987 551 787... × 10 ⁹	m ³ .kg.s ⁻² .C ⁻²	α/2π	h.c.e ⁻²
Impédance caractéristique du vide	Z ₀	376,730 313 461 ...	m ² .kg.s ⁻¹ .C ⁻²	2α	h.e ⁻²
Quantum de conductance	G ₀	7,748 091 7310(18) × 10 ⁻⁵	m ⁻² .kg ⁻¹ .s.C ²	2	h ⁻¹ .e ²
Constante de Josephson	K _J	4,835 978 525(30) × 10 ¹⁴	m ⁻² .kg ⁻¹ .s.C	2	h ⁻¹ .e
Quantum de flux magnétique	Φ ₀	2,067 833 831(13) × 10 ⁻¹⁵	m ² .kg.s ⁻¹ .C ⁻¹	1/2	h.e ⁻¹
Constante de von Klitzing	R _K	2,581 280 745 55(59) × 10 ⁴	m ² .kg.s ⁻¹ .C ⁻²	1	h.e ⁻²
Magnéton de Bohr	μ _B	9,274 009 994(57) × 10 ⁻²⁴	m ² .s ⁻¹ .C	1/4π	h.m _e ⁻¹ .e
Magnéton nucléaire	μ _N	5,050 783 699(31) × 10 ⁻²⁷	m ² .s ⁻¹ .C	(4πδ) ⁻¹	h.m _e ⁻¹ .e
Rayon de Bohr	a ₀	5,291 772 1067(12) × 10 ⁻¹¹	m	(2πα) ⁻¹	h.m _e ⁻¹ .c ⁻¹
Rayon classique de l'électron	r _e	2,817 940 3227(19) × 10 ⁻¹⁵	m	α/2π	h.m _e ⁻¹ .c ⁻¹
Masse de l'électron	m _e	9,109 383 56(11) × 10 ⁻³¹	kg	1	m _e
Masse du proton	m _{pr}	1,672 621 898(21) × 10 ⁻²⁷	kg	δ	m _e
Constante de Rydberg	R _∞	1,097 373 156 8508(65) × 10 ⁷	m ⁻¹	α ² /2	h ⁻¹ .m _e .c
Energie de Hartree	E _H	4,359 744 650(54) × 10 ⁻¹⁸	m ² .kg.s ⁻²	α ²	m _e .c ²
Rayon de Compton de l'électron	R _C	3,861 592 6764(18) × 10 ⁻¹³	m	1/2π	h.m _e ⁻¹ .c ⁻¹
Longueur d'onde de Compton pour l'électron	λ _C	2,426 310 2367(11) × 10 ⁻¹²	m	1	h.m _e ⁻¹ .c ⁻¹
Longueur d'onde de Compton pour le proton	λ _{Cpr}	1,321 409 853 96(61) × 10 ⁻¹⁵	m	δ ⁻¹	h.m _e ⁻¹ .c ⁻¹
Quantum de circulation	h/2m _e	3,636 947 5486(17) × 10 ⁻⁴	m ² .s ⁻¹	1/2	h.m _e ⁻¹
Section efficace de Thomson	T _{CS}	6,652 458 7158(91) × 10 ⁻²⁹	m ²	(2/3π)α ²	h ² .m _e ⁻² .c ⁻²
Première constante de rayonnement	c _{1R}	3,741 771 790(46) × 10 ⁻¹⁶	m ⁴ .kg.s ⁻³	2π	h.c ²
Constante de couplage de la force électromagnétique	α _{em} = k _C .e ² /hc	7,297 352 5664(17) × 10 ⁻³	1	α	1
Constante de couplage de la force de gravitation	α _G = G.m _{pr} ² /hc	5,905 95(28) × 10 ⁻³⁹	1	(β ⁻¹ δ) ²	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 protons)	α _{em} /α _G = k _C .e ² /G.m _{pr} ²	1,235 592(58) × 10 ³⁶	1	αβ ² /δ ²	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 électrons)	k _C .e ² /G.m _e ²	4,165 75(20) × 10 ⁴²	1	αβ ²	1
Attraction électrique / Attraction gravitationnelle (un proton, un électron)	k _C .e ² /G.m _e .m _{pr}	2,268 74(11) × 10 ³⁹	1	αβ ² /δ	1

Tableau 7 : Constantes en base {h, m_e, c, e}

Une formulation dans une base comportant trois caractéristiques relatives à l'électron. ↩

Nom	Symbole	Valeur (CODATA 2014)	Unités SI	Valeur	Base { r_e ; m_e ; c ; e }
Vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458	$m \cdot s^{-1}$	1	c
Constante de Planck	h	$6,626\,070\,040(81) \times 10^{-34}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$	$2\pi\alpha^{-1}$	$r_e \cdot m_e \cdot c$
Constante gravitationnelle	G	$6,674\,08(31) \times 10^{-11}$	$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$	$(\alpha\beta^2)^{-1}$	$r_e \cdot m_e^{-1} \cdot c^2$
Charge élémentaire	e	$1,602\,176\,6208(98) \times 10^{-19}$	C	1	e
Constante de permittivité du vide	ϵ_0	$8,854\,187\,817 \dots \times 10^{-12}$	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^2 \cdot C^2$	$1/4\pi$	$r_e^{-1} \cdot m_e^{-1} \cdot c^{-2} \cdot e^2$
Constante de perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	$m \cdot kg \cdot C^{-2}$	4π	$r_e \cdot m_e \cdot e^{-2}$
Constante de Coulomb	$k_C = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8,987\,551\,787 \dots \times 10^9$	$m^3 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-2}$	1	$r_e \cdot m_e \cdot c^2 \cdot e^{-2}$
Impédance caractéristique du vide	Z_0	376,730 313 461 ...	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-2}$	4π	$r_e \cdot m_e \cdot c \cdot e^{-2}$
Quantum de conductance	G_0	$7,748\,091\,7310(18) \times 10^{-5}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s \cdot C^2$	$\pi^{-1}\alpha$	$r_e^{-1} \cdot m_e^{-1} \cdot c^{-1} \cdot e^2$
Constante de Josephson	K_J	$4,835\,978\,525(30) \times 10^{14}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s \cdot C$	$\pi^{-1}\alpha$	$r_e^{-1} \cdot m_e^{-1} \cdot c^{-1} \cdot e$
Quantum de flux magnétique	Φ_0	$2,067\,833\,831(13) \times 10^{-15}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-1}$	$\pi\alpha^{-1}$	$r_e \cdot m_e \cdot c \cdot e^{-1}$
Constante de von Klitzing	R_K	$2,581\,280\,745\,55(59) \times 10^4$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-2}$	$2\pi\alpha^{-1}$	$r_e \cdot m_e \cdot c \cdot e^{-2}$
Magnéton de Bohr	μ_B	$9,274\,009\,994(57) \times 10^{-24}$	$m^2 \cdot s^{-1} \cdot C$	$1/2\alpha$	$r_e \cdot c \cdot e$
Magnéton nucléaire	μ_N	$5,050\,783\,699(31) \times 10^{-27}$	$m^2 \cdot s^{-1} \cdot C$	$1/(2\alpha\delta)$	$r_e \cdot c \cdot e$
Rayon de Bohr	a_0	$5,291\,772\,1067(12) \times 10^{-11}$	m	α^{-2}	r_e
Rayon classique de l'électron	r_e	$2,817\,940\,3227(19) \times 10^{-15}$	m	1	r_e
Masse de l'électron	m_e	$9,109\,383\,56(11) \times 10^{-31}$	kg	1	m_e
Masse du proton	m_{pr}	$1,672\,621\,898(21) \times 10^{-27}$	kg	δ	m_e
Constante de Rydberg	R_∞	$1,097\,373\,156\,8508(65) \times 10^7$	m^{-1}	$\alpha^3/4\pi$	r_e^{-1}
Energie de Hartree	E_H	$4,359\,744\,650(54) \times 10^{-18}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	α^2	$m_e \cdot c^2$
Rayon de Compton de l'électron	R_C	$3,861\,592\,6764(18) \times 10^{-13}$	m	α^{-1}	r_e
Longueur d'onde de Compton pour l'électron	λ_C	$2,426\,310\,2367(11) \times 10^{-12}$	m	$2\pi\alpha^{-1}$	r_e
Longueur d'onde de Compton pour le proton	λ_{Cpr}	$1,321\,409\,853\,96(61) \times 10^{-15}$	m	$2\pi(\alpha\delta)^{-1}$	r_e
Quantum de circulation	$h/2m_e$	$3,636\,947\,5486(17) \times 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	$\pi\alpha^{-1}$	$r_e \cdot c$
Section efficace de Thomson	T_{CS}	$6,652\,458\,7158(91) \times 10^{-29}$	m^2	$(8/3)\pi$	r_e^2
Première constante de rayonnement	c_{1R}	$3,741\,771\,790(46) \times 10^{-16}$	$m^4 \cdot kg \cdot s^{-3}$	$4\pi^2/\alpha$	$r_e \cdot m_e \cdot c^3$
Constante de couplage de la force électromagnétique	$\alpha_{em} = k_C \cdot e^2 / \hbar c$	$7,297\,352\,5664(17) \times 10^{-3}$	1	α	1
Constante de couplage de la force de gravitation	$\alpha_G = G \cdot m_{pr}^2 / \hbar c$	$5,905\,95(28) \times 10^{-39}$	1	$(\beta^{-1}\delta)^2$	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 protons)	$\alpha_{em}/\alpha_G = k_C \cdot e^2 / G \cdot m_{pr}^2$	$1,235\,592(58) \times 10^{36}$	1	$\alpha\beta^2/\delta^2$	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 électrons)	$k_C \cdot e^2 / G \cdot m_e^2$	$4,165\,75(20) \times 10^{42}$	1	$\alpha\beta^2$	1
Attraction électrique / Attraction gravitationnelle (un proton, un électron)	$k_C \cdot e^2 / G \cdot m_e \cdot m_{pr}$	$2,268\,74(11) \times 10^{39}$	1	$\alpha\beta^2/\delta$	1

Tableau 8 : Constantes en base $\{r_e, m_e, c, e\}$

Une formulation élégante dans une base appropriée. ↩

Nom	Symbole	Valeur (CODATA 2014)	Unités SI	Valeur	Unités { R_C, Z_0, c, e }
Vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458	$m \cdot s^{-1}$	1	c
Constante de Planck	h	$6,626\,070\,040(81) \times 10^{-34}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$	$1/2\alpha$	$Z_0 \cdot e^2$
Constante gravitationnelle	G	$6,674\,08(31) \times 10^{-11}$	$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$	$4\pi\alpha\beta^{-2}$	$R_C^2 \cdot Z_0^{-1} \cdot c^3 \cdot e^{-2}$
Charge élémentaire	e	$1,602\,176\,6208(98) \times 10^{-19}$	C	1	e
Constante de permittivité du vide	ϵ_0	$8,854\,187\,817 \dots \times 10^{-12}$	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^2 \cdot C^2$	1	$Z_0^{-1} \cdot c^{-1}$
Constante de perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	$m \cdot kg \cdot C^{-2}$	1	$Z_0 \cdot c^{-1}$
Constante de Coulomb	$k_C = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8,987\,551\,787 \dots \times 10^9$	$m^3 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-2}$	$1/4\pi$	$Z_0 \cdot c$
Impédance caractéristique du vide	Z_0	376,730 313 461 ...	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-2}$	1	Z_0
Quantum de conductance	G_0	$7,748\,091\,7310(18) \times 10^{-5}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s \cdot C^2$	4α	Z_0^{-1}
Constante de Josephson	K_J	$4,835\,978\,525(30) \times 10^{14}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s \cdot C$	4α	$Z_0^{-1} \cdot e^{-1}$
Quantum de flux magnétique	Φ_0	$2,067\,833\,831(13) \times 10^{-15}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-1}$	$1/4\alpha$	$Z_0 \cdot e$
Constante de von Klitzing	R_K	$2,581\,280\,745\,55(59) \times 10^4$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-2}$	$1/2\alpha$	Z_0
Magnéton de Bohr	μ_B	$9,274\,009\,994(57) \times 10^{-24}$	$m^2 \cdot s^{-1} \cdot C$	$1/2$	$R_C \cdot c \cdot e$
Magnéton nucléaire	μ_N	$5,050\,783\,699(31) \times 10^{-27}$	$m^2 \cdot s^{-1} \cdot C$	$1/2\delta$	$R_C \cdot c \cdot e$
Rayon de Bohr	a_0	$5,291\,772\,1067(12) \times 10^{-11}$	m	α^{-1}	R_C
Rayon classique de l'électron	r_e	$2,817\,940\,3227(19) \times 10^{-15}$	m	α	R_C
Masse de l'électron	m_e	$9,109\,383\,56(11) \times 10^{-31}$	kg	$(4\pi\alpha)^{-1}$	$R_C^{-1} \cdot Z_0 \cdot c^{-1} \cdot e^2$
Masse du proton	m_{pr}	$1,672\,621\,898(21) \times 10^{-27}$	kg	$(4\pi\alpha)^{-1}\delta$	$R_C^{-1} \cdot Z_0 \cdot c^{-1} \cdot e^2$
Constante de Rydberg	R_∞	$1,097\,373\,156\,8508(65) \times 10^7$	m^{-1}	$\alpha^2/4\pi$	R_C^{-1}
Energie de Hartree	E_H	$4,359\,744\,650(54) \times 10^{-18}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	$\alpha/4\pi$	$R_C^{-1} \cdot Z_0 \cdot c \cdot e^2$
Rayon de Compton de l'électron	R_C	$3,861\,592\,6764(18) \times 10^{-13}$	m	1	R_C
Longueur d'onde de Compton pour l'électron	λ_C	$2,426\,310\,2367(11) \times 10^{-12}$	m	2π	R_C
Longueur d'onde de Compton pour le proton	λ_{Cpr}	$1,321\,409\,853\,96(61) \times 10^{-15}$	m	$2\pi\delta^{-1}$	R_C
Quantum de circulation	$h/2m_e$	$3,636\,947\,5486(17) \times 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	π	$R_C \cdot c$
Section efficace de Thomson	T_{CS}	$6,652\,458\,7158(91) \times 10^{-29}$	m^2	$(8\pi/3)\alpha^2$	R_C^2
Première constante de rayonnement	c_{1R}	$3,741\,771\,790(46) \times 10^{-16}$	$m^4 \cdot kg \cdot s^{-3}$	π/α	$Z_0 \cdot c^2 \cdot e^2$
Constante de couplage de la force électromagnétique	$\alpha_{em} = k_C \cdot e^2 / \hbar c$	$7,297\,352\,5664(17) \times 10^{-3}$	1	α	1
Constante de couplage de la force de gravitation	$\alpha_G = G \cdot m_{pr}^2 / \hbar c$	$5,905\,95(28) \times 10^{-39}$	1	$(\beta^{-1}\delta)^2$	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 protons)	$\alpha_{em}/\alpha_G = k_C \cdot e^2 / G \cdot m_{pr}^2$	$1,235\,592(58) \times 10^{36}$	1	$\alpha\beta^2/\delta^2$	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 électrons)	$k_C \cdot e^2 / G \cdot m_e^2$	$4,165\,75(20) \times 10^{42}$	1	$\alpha\beta^2$	1
Attraction électrique / Attraction gravitationnelle (un proton, un électron)	$k_C \cdot e^2 / G \cdot m_e \cdot m_{pr}$	$2,268\,74(11) \times 10^{39}$	1	$\alpha\beta^2/\delta$	1

Tableau 9 : Constantes en base $\{R_C, Z_0, c, e\}$

Une formulation dans une base composée de 4 constantes fondamentales.

Nom	Symbole	Valeur (CODATA 2014)	Unités SI	Valeur	Base { \hbar ; G; c; ϵ_0 }
Vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458	m.s ⁻¹	1	c
Constante de Planck	h	6,626 070 040(81) × 10 ⁻³⁴	m ² .kg.s ⁻¹	2 π	\hbar
Constante gravitationnelle	G	6,674 08(31) × 10 ⁻¹¹	m ³ .kg ⁻¹ .s ⁻²	1	G
Charge élémentaire	e	1,602 176 6208(98) × 10 ⁻¹⁹	C	(4 $\pi\alpha$) ^{1/2}	$\hbar^{1/2}.c^{1/2}.\epsilon_0^{1/2}$
Constante de permittivité du vide	ϵ_0	8,854 187 817... × 10 ⁻¹²	m ⁻³ .kg ⁻¹ .s ² .C ²	1	ϵ_0
Constante de perméabilité du vide	μ_0	4 π × 10 ⁻⁷	m.kg.C ⁻²	1	C ⁻² . ϵ_0^{-1}
Constante de Coulomb	$k_C = 1/(4\pi\epsilon_0)$	8,987 551 787... × 10 ⁹	m ³ .kg.s ⁻² .C ⁻²	1/4 π	ϵ_0^{-1}
Impédance caractéristique du vide	Z ₀	376,730 313 461 ...	m ² .kg.s ⁻¹ .C ⁻²	1	C ⁻¹ . ϵ_0^{-1}
Quantum de conductance	G ₀	7,748 091 7310(18) × 10 ⁻⁵	m ⁻² .kg ⁻¹ .s.C ²	4 α	c. ϵ_0
Constante de Josephson	K _J	4,835 978 525(30) × 10 ¹⁴	m ⁻² .kg ⁻¹ .s.C	(4 α/π) ^{1/2}	$\hbar^{-1/2}.c^{1/2}.\epsilon_0^{1/2}$
Quantum de flux magnétique	Φ_0	2,067 833 831(13) × 10 ⁻¹⁵	m ² .kg.s ⁻¹ .C ⁻¹	(4 α/π) ^{-1/2}	$\hbar^{1/2}.c^{-1/2}.\epsilon_0^{-1/2}$
Constante de von Klitzing	R _K	2,581 280 745 55(59) × 10 ⁴	m ² .kg.s ⁻¹ .C ⁻²	1/2 α	C ⁻¹ . ϵ_0^{-1}
Magnéton de Bohr	μ_B	9,274 009 994(57) × 10 ⁻²⁴	m ² .s ⁻¹ .C	($\pi\alpha$) ^{1/2} β	$\hbar.G^{1/2}.\epsilon_0^{1/2}$
Magnéton nucléaire	μ_N	5,050 783 699(31) × 10 ⁻²⁷	m ² .s ⁻¹ .C	($\pi\alpha$) ^{1/2} β/δ	$\hbar.G^{1/2}.\epsilon_0^{1/2}$
Rayon de Bohr	a ₀	5,291 772 1067(12) × 10 ⁻¹¹	m	$\alpha^{-1}\beta$	$\hbar^{1/2}.G^{1/2}.c^{-3/2}$
Rayon classique de l'électron	r _e	2,817 940 3227(19) × 10 ⁻¹⁵	m	$\alpha\beta$	$\hbar^{1/2}.G^{1/2}.c^{-3/2}$
Masse de l'électron	m _e	9,109 383 56(11) × 10 ⁻³¹	kg	β^{-1}	$\hbar^{1/2}.G^{-1/2}.c^{1/2}$
Masse du proton	m _{pr}	1,672 621 898(21) × 10 ⁻²⁷	kg	$\beta^{-1}\delta$	$\hbar^{1/2}.G^{-1/2}.c^{1/2}$
Constante de Rydberg	R _∞	1,097 373 156 8508(65) × 10 ⁷	m ⁻¹	$\alpha^2/(4\pi\beta)$	$\hbar^{-1/2}.G^{-1/2}.c^{3/2}$
Energie de Hartree	E _H	4,359 744 650(54) × 10 ⁻¹⁸	m ² .kg.s ⁻²	$\alpha^2\beta^{-1}$	$\hbar^{1/2}.G^{-1/2}.c^{5/2}$
Rayon de Compton de l'électron	R _C	3,861 592 6764(18) × 10 ⁻¹³	m	β	$\hbar^{1/2}.G^{1/2}.c^{-3/2}$
Longueur d'onde de Compton pour l'électron	λ_C	2,426 310 2367(11) × 10 ⁻¹²	m	2 $\pi\beta$	$\hbar^{1/2}.G^{1/2}.c^{-3/2}$
Longueur d'onde de Compton pour le proton	λ_{Cpr}	1,321 409 853 96(61) × 10 ⁻¹⁵	m	2 $\pi\beta\delta^{-1}$	$\hbar^{1/2}.G^{1/2}.c^{-3/2}$
Quantum de circulation	h/2m _e	3,636 947 5486(17) × 10 ⁻⁴	m ² .s ⁻¹	$\pi\beta$	$\hbar^{1/2}.G^{1/2}.c^{-1/2}$
Section efficace de Thomson	T _{CS}	6,652 458 7158(91) × 10 ⁻²⁹	m ²	(8 $\pi/3$) $\alpha^2\beta^2$	$\hbar.G.c^{-3}$
Première constante de rayonnement	C _{1R}	3,741 771 790(46) × 10 ⁻¹⁶	m ⁴ .kg.s ⁻³	4 π^2	$\hbar.c^2$
Constante de couplage de la force électromagnétique	$\alpha_{em} = k_C.e^2/\hbar c$	7,297 352 5664(17) × 10 ⁻³	1	α	1
Constante de couplage de la force de gravitation	$\alpha_G = G.m_{pr}^2/\hbar c$	5,905 95(28) × 10 ⁻³⁹	1	($\beta^{-1}\delta$) ²	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 protons)	$\alpha_{em}/\alpha_G = k_C.e^2/G.m_{pr}^2$	1,235 592(58) × 10 ³⁶	1	$\alpha\beta^2/\delta^2$	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 électrons)	$k_C.e^2/G.m_e^2$	4,165 75(20) × 10 ⁴²	1	$\alpha\beta^2$	1
Attraction électrique / Attraction gravitationnelle (un proton, un électron)	$k_C.e^2/G.m_e.m_{pr}$	2,268 74(11) × 10 ³⁹	1	$\alpha\beta^2/\delta$	1

Tableau 10 : Constantes en base { \hbar , G, c, ϵ_0 }

10.5 Annexe 5 : Constantes physico-chimiques dépendant de conditions initiales ↩

- **Volume molaire d'un gaz parfait** : V_m à $T = x T_p$ et $Pr = y l_p^{-1} \cdot m_p \cdot t_p^{-2}$

$$V_m = RT/P$$

$$= \beta l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot T_p^{-1} \cdot \text{mol}_B^{-1} \times [x T_p / (y l_p^{-1} \cdot m_p \cdot t_p^{-2})] \quad \text{car } R = \beta l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot T_p^{-1} \cdot \text{mol}_B^{-1}$$

$$= \beta l_p^3 \cdot \text{mol}_B^{-1} \times (x/y)$$

$$= \beta (x/y) l_p^3 \cdot \text{mol}_B^{-1}$$

$$\text{Pour } x = y = 1, \text{ on obtient } V_m = \beta l_p^3 \cdot \text{mol}_B^{-1}$$

- **Constante de Loschmidt** : n_0 à $T = x T_p$ et $Pr = y l_p^{-1} \cdot m_p \cdot t_p^{-2}$

$$n_0 = N_{AB} / V_m$$

$$= \beta \text{mol}_B^{-1} / \beta (x/y) l_p^3 \cdot \text{mol}_B^{-1}$$

$$= (y/x) l_p^{-3}$$

$$\text{Pour } x = y = 1, \text{ on obtient } n_0 = 1 l_p^{-3}$$

- **Constante de Sackur-Tetrode** : S_0/R à $T = x T_p$ et $Pr = y l_p^{-1} \cdot m_p \cdot t_p^{-2} = y Pr_p$

Il reste toutefois à traiter une constante physico-chimique qui semble constituer une exception, à savoir la constante de Sackur-Tetrode. En effet de par sa formulation, elle semble rétive à toute expression qui serait fonction des constantes adimensionnelles α , β et δ . Examinons cette constante en premier lieu dans son expression en SI, sous les conditions auxquelles elle est donnée habituellement, soit : $T = 1 \text{ K}$ et $Pr = 101 \text{ 325 Pa}$

$$S_0/R = 5/2 + \ln[(2\pi m_u \cdot k_B \cdot T/h^2)^{3/2} \cdot k_B \cdot T/Pr]$$

$$= 5/2 + \ln[(2\pi m_u)^{3/2} (k_B \cdot T)^{5/2} / Pr \cdot h^3]$$

$$= 5/2 - 3,664 \text{ 8714(14)} = -1,164 \text{ 8714(14)}$$

Nous voyons dans la formule de cette constante apparaître l'unité de masse atomique m_u qui est définie comme étant le douzième de la masse de l'atome de l'isotope 12 du carbone $m_u = 10^{-3}/N_A \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Cette unité arbitraire, et anthropocentrique (choix du carbone) doit être remplacée par une unité non anthropocentrique.

En 2002, le **CNRS** a proposé une unité de masse atomique basée sur : 1 unité = 1 proton. Mais la proposition n'a pas été validée. Dans le système SP_B , il est logique et impératif de prendre en compte cette proposition car elle s'inscrit totalement dans le fait de choisir des unités ayant un caractère d'universalité. Développons maintenant la formule de la constante de Sackur-Tetrode pour $T = x T_p$ et $Pr = y Pr_p = y l_p^{-1} \cdot m_p \cdot t_p^{-2}$, en prenant en compte cette nouvelle unité :

$$S_0/R = 5/2 + \ln[(2\pi m_{pr})^{3/2} (k_B \cdot T)^{5/2} / Pr \cdot h^3]$$

$$= 5/2 + \ln[(2\pi \beta^{-1} \delta m_p)^{3/2} (x l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot T_p^{-1} \cdot T_p)^{5/2} / (y l_p^{-1} \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot (2\pi l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1})^3)]$$

$$= 5/2 + \ln[(2\pi \beta^{-1} \delta)^{3/2} x^{5/2} / y (2\pi)^3]$$

$$= 5/2 + \ln[((2\pi \beta)^{-1} \delta)^{3/2} x^{5/2} / y]$$

$$\text{Pour } x = y = 1, \text{ on obtient } S_0/R = 5/2 + (3/2) \ln[(2\pi \beta)^{-1} \delta]$$

Il reste toutefois un problème important relatif à un abus de langage. L'expression $\ln[(2\pi m_{pr})^{3/2} (k_B \cdot T)^{5/2} / Pr \cdot h^3]$ est illégitime dans le sens où n'est pas défini ce qu'est le logarithme népérien d'une unité de mesure ou plus généralement d'un schedo-vecteur. L'expression se simplifie pour donner $\ln[((2\pi \beta)^{-1} \delta)^{3/2} x^{5/2} / y]$. Mais l'écriture est incorrecte, il aurait fallu écrire $\ln[((2\pi \beta)^{-1} \delta)^{3/2} x^{5/2} y^{-1} \mathbb{1}]$.

L'abus de langage (cf. remarques § 5.1.2), que l'on a admis en étant conscient qu'il s'agissait d'une facilité d'écriture, est ici beaucoup plus gênant car il conduit à utiliser un concept infondé. Il est nécessaire, si l'on veut être rigoureux, de définir en posant $V_1^+ = \{u \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}^{*+} \text{ tel que } u = \lambda \mathbb{1}\}$, une application \ln de V_1^+ dans l'espace vectoriel $E_1^{(1)}$, qui à tout élément $u = \lambda \mathbb{1}$ de V_1^+ , fait correspondre le **vecteur** $\ln(\lambda) \mathbb{1}$ de E_1 . On peut alors écrire :

$$S_0/R = (5/2) \mathbb{1} + \ln[(2\pi m_{pr})^{3/2} (k_B T)^{5/2} / Pr \cdot h^3] = (5/2) \mathbb{1} + \ln[((2\pi\beta)^{-1}\delta)^{3/2} x^{5/2} y^{-1} \mathbb{1}]$$

$$= (5/2) \mathbb{1} + \ln[((2\pi\beta)^{-1}\delta)^{3/2} x^{5/2} y^{-1}] \mathbb{1}$$

$$= (5/2 + \ln[((2\pi\beta)^{-1}\delta)^{3/2} x^{5/2} y^{-1}]) \mathbb{1}$$

Nom	Symbole	Valeur (CODATA 2014)	Unités SI	Valeur	Unités SP _B
Volume molaire d'un gaz parfait	V_m	$2,241\,3962(13) \times 10^{-2} \text{ (2)}$	$\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$	$\beta \text{ (3)}$	$l_p^3 \cdot \text{mol}_B^{-1}$
Constante de Loschmidt	n_0	$2,686\,7811(15) \times 10^{25} \text{ (2)}$	m^{-3}	1 (3)	l_p^{-3}
Constante de Sackur-Tetrode	S_0/R	$-1,164\,8714(14) \text{ (4)}$	$\mathbb{1}$	$5/2 + (3/2)\ln[(2\pi\beta)^{-1}\delta] \text{ (3)}$	$\mathbb{1}$

Tableau 11

Avec les trois dernières constantes que nous venons de voir, l'exercice atteint toutefois ses limites. Nous avons en effet donné en unités SP_B, la valeur de ces constantes à des **conditions initiales non anthropocentriques** : $T = 1 T_p$ et $Pr = 1 Pr_p$ que l'on pourrait qualifier de « conditions big-bang » !

A titre d'exemple, une pression de $1 Pr_p = 1 l_p^{-1} \cdot m_p \cdot t_p^{-2}$ convertie en Pascals donne $4,633\,25(44) \times 10^{113}$ Pa ! Nous pourrions toutefois regarder ce qui se passe à des conditions initiales proches de $T = 273,15$ K et $Pr = 101325$ Pa. Pour cela nous aurions besoin de créer des unités de mesure proches du Kelvin et du Pascal, respectivement fonction de T_p et de Pr_p , en posant par exemple :

$$T_B = (2\pi^3(\alpha\beta)^{3/2})^{-1} T_p = 0,992\,402(59) \text{ K et } Pr_B = 2\pi^{-2} \alpha^{1/2} \beta^{-5} Pr_p = 1,030\,10(22) \text{ Pa}$$

Mais introduire ainsi l'arbitraire avec des conditions initiales anthropocentriques, offrirait peu d'intérêt dans le cadre de cette démarche dont l'objectif est d'observer ce qu'apporte le fait d'exprimer des constantes dans un système d'unités non anthropocentrique.

(1) On peut créer à partir de $V_1 = \{v \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } v = \lambda \mathbb{1}\}$, un espace vectoriel E_1 sur \mathbb{R} , en remplaçant pour la loi externe le domaine d'opérateurs \mathbb{R}^* par le corps des réels \mathbb{R} (ce qui implique d'ajouter à V_1 l'élément $0 = 0 \mathbb{1}$), et en munissant le nouvel ensemble obtenu, $E_1 = V_1 \cup \{0\} = \{v \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } v = \lambda \mathbb{1}\}$, d'une loi de composition interne « + » définie ainsi : pour tous $v = \lambda \mathbb{1}$ et $v' = \lambda' \mathbb{1}$ u dans E_1 , $v + v' = \lambda \mathbb{1} + \lambda' \mathbb{1} = (\lambda + \lambda') \mathbb{1}$.

Cette loi interne additive définie sur E_1 remplace la loi interne multiplicative définie sur V_1 et fait de E_1 un espace vectoriel de dimension 1.

(2) Conditions prises à $T = 273,15$ K et $Pr = 101\,325$ Pa en SI

(3) Conditions prises à $T = 1 T_p$ et $Pr = 1 Pr_p$ en SP_B

(4) Conditions prises à $T = 1$ K et $Pr = 101\,325$ Pa en SI

10.6 Annexe 6 : La constante de Fermi ↩

10.6.1 Etude de tableaux afférents à la constante de Fermi

Tableaux comparatifs des différentes expressions de α , g_w , α_w et de $G_F/(\hbar c)^3$ en fonction des différents modèles et des différents systèmes d'unités de mesure des auteurs.

T1 : Constantes en unités naturelles H-L	Unités naturelles H-L	T2 : Constantes en unités CGS gaussiennes	Unités gaussiennes
$\alpha = e^2/4\pi$		$\alpha = e^2/\hbar c$	
$g_w = e/\sin\theta_w = (4\pi\alpha)^{1/2}/\sin\theta_w$ $= 0,6423(31)$	1	$g_w = e(4\pi/\hbar c)^{1/2}/\sin\theta_w = (4\pi\alpha)^{1/2}/\sin\theta_w$ $= 0,6423(31)$	1
$\alpha_w = g_w^2/4\pi = \alpha/\sin^2\theta_w$ $= 3,283(32) \cdot 10^{-2}$	1	$\alpha_w = g_w^2/4\pi = \alpha/\sin^2\theta_w$ $= 3,283(32) \cdot 10^{-2}$	1
$G_F = (\sqrt{2}/8) (g_{weak}^2/m_w^2)$ $= 4,397(44) \cdot 10^{14}$ $= 1,129(12) \cdot 10^{-5}$	J^{-2} GeV^{-2}	$G_F/(\hbar c)^3 = \sqrt{2}/8 \cdot (g_w/m_w c^2)^2$ $= 4,397(44)$	$(cm^2 \cdot g \cdot s^{-2})^{-2}$

T3 : Constantes en unités SI (Nota : e est ici notée q par les auteurs)	Unités SI	T4 : Constantes en unités SI (g_w définie en tant que charge faible)	Unités SI
$\alpha = q^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$		$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$	
$g_w = q/[(\hbar c\epsilon_0)^{1/2}\sin\theta_w] = (4\pi\alpha)^{1/2}/\sin\theta_w$ $= 0,6423(31)$	1	$g_w = e/\sin\theta_w$ $= 3,398(17) \cdot 10^{-19}$	C
$\alpha_w = g_w^2/4\pi = \alpha/\sin^2\theta_w$ $= 3,283(32) \cdot 10^{-2}$	1	$\alpha_w = g_w^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = \alpha/\sin^2\theta_w$ $= 3,283(32) \cdot 10^{-2}$	1
$G_F/(\hbar c)^3 = (\sqrt{2}/8) \cdot (g_w/m_w c^2)^2$ $= 4,397(44) \cdot 10^{14}$	J^{-2}	$G_F/(\hbar c)^3 = (\pi/\sqrt{2})\alpha_w/(m_w \cdot c^2)^2$ $= 4,397(44) \cdot 10^{14}$	J^{-2}

T5 : Constantes en CGS électrostatique (H-L) (g_w définie en tant que charge faible)	Unités CGSE	T6 : Constantes en unités SI	Unités SI
$\alpha = e^2/(4\pi\hbar c)$		$\alpha = k_c \cdot e^2/\hbar c$	
$g_w = (4\pi\alpha \hbar c)^{1/2}/\sin\theta_w = 3,611(18) \cdot 10^{-9}$ $= e/\sin\theta_w = 3,611(18) \cdot 10^{-9}$	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$ statC _{H-L}	$G_F = 1,435\ 850\ 98(62) \cdot 10^{62} \approx 1,43 \cdot 10^{62}$	$J \cdot m^3$
$\alpha_w = g_w^2/(4\pi\hbar c) = \alpha/\sin^2\theta_w$ $= 3,283(32) \cdot 10^{-2}$	1	$\alpha_w = G_F m_e^2 c/\hbar^3 = (G_F/(\hbar \cdot c)^3) \cdot (m_e \cdot c^2)^2$ $= 3,045\ 6472(17) \cdot 10^{-12} \approx 3,05 \cdot 10^{-12}$	1
$G_F/(\hbar c)^3 \approx \alpha_w/(m_w c^2)^2 = \alpha/(\sin\theta_w \cdot m_w \cdot c^2)^2$ $= 1,979(20)$	$(cm^2 \cdot g \cdot s^{-2})^{-2}$	$G_F/(\hbar c)^3 = \alpha_w/(m_e \cdot c^2)^2$ $= 4,543\ 7957(25) \cdot 10^{14}$	J^{-2}

T7 : Constantes en unités CGS gaussiennes (g_w définie en tant que charge faible)	Unités gaussiennes	T8 : Constantes en unités SI	Unités SI
$\alpha = e^2/\hbar c$		$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$	
$g_w = (\alpha \hbar c)^{1/2}/\sin\theta_w = 1,0187(49) \cdot 10^{-9}$ $= e/\sin\theta_w = 1,0187(49) \cdot 10^{-9}$	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$ statC	$g_w = G_F^{1/2} m_{pr} c/\hbar$ $= 5,697\ 6663(18) \cdot 10^{-16} \approx 5,7 \cdot 10^{-16}$	$(J \cdot m)^{1/2}$
$\alpha_w = g_w^2/\hbar c = \alpha/\sin^2\theta_w$ $= 3,283(32) \cdot 10^{-2}$	1	$\alpha_w = g_w^2/\hbar c = 1,026\ 826\ 74(66) \cdot 10^{-5} \approx 10^{-5}$ $= G_F \cdot m_{pr}^2 \cdot c/\hbar^3 = (G_F/(\hbar \cdot c)^3) \cdot (m_{pr} \cdot c^2)^2$	1
$G_F = 2^{1/2} g_w^2 / 8 m_w^2$ (donnée en unités naturelles !) $G_F/(\hbar \cdot c)^3 = 4,397(44)$	$(cm^2 \cdot g \cdot s^{-2})^{-2}$	$G_F/(\hbar c)^3 = \alpha_w/(m_{pr} \cdot c^2)^2$ $= 4,543\ 7957(30) \cdot 10^{14}$	J^{-2}

T9 : Constantes en unités naturelles (H-L)	Unités naturelles H-L
$\alpha = e^2/4\pi$	
$g_w = G_F^{1/2} m_{pr}$	
$\alpha_F = G_F m_{pr}^2 / 4\pi$ $= 8,171\ 2275(46) \times 10^{-7} \approx 10^{-6}$	1
$G_F = 4,543\ 7957(25) \times 10^{-14}$ $= \alpha_F / (\sin\theta_w m_{pr})^2$	J ²

Nota 1 : dans ces différents tableaux, le **1** en face d'une valeur numérique, représente l'élément neutre de l'espace schedo-vectoriel V.

Nota 2 : nous avons élaboré ces tableaux à partir des textes référencés ⁽¹⁾ ci-dessous. Nous avons rajouté en **bleu** des écritures utiles à la comparaison mais ne figurant pas dans le texte initial. Les calculs rajoutés en bleu sont déduits des données CODATA 2014.

Nous avons rassemblé dans ces tableaux les différentes expressions de la constante de Fermi $G_F/(\hbar c)^3$. Cette dernière est souvent donnée en unités naturelles sous la forme exprimée dans le tableau T1, à savoir $G_F = (\sqrt{2}/8) (g_w^2/m_W^2)$ où m_W est la masse des bosons W^+ et W^- alors que g_w exprime la constante de couplage faible⁽²⁾ et α_w la constante de structure de couplage faible. Cette dernière est toujours adimensionnelle alors que g_w est un polysème recouvrant, selon le modèle, une constante adimensionnelle ou une charge faible. θ_w est l'angle d'interaction faible (angle de Weinberg) défini par $\cos \theta_w = m_W/m_Z$.

En tête de chaque tableau, se trouve la formule de α toujours très utile pour aider à déterminer dans quel système d'unités, on se trouve.

10.6.2 Les systèmes de Planck et les systèmes d'unités naturelles

Rappelons que le système SP_B reprend les mêmes unités que le système de Planck, pour la longueur, la masse, le temps, la température. Il diffère uniquement quant à l'unité de mesure de la charge pour laquelle nous avons pris e en lieu et place de q_p et redéfini la mole. Si l'on veut passer du système SP_B au système de Planck, il suffira de remplacer e par $\alpha^{1/2} q_p$ dans toutes les formules contenant une puissance de e (cf. § 2.2).

Il existe un autre système basé sur les unités de Planck mais avec une unité de charge q'_p obtenue à partir de $\epsilon_0 = 1 \text{ l}_p^{-3} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^2 \cdot q'_p{}^2$. Ce système est dit de Planck Heaviside-Lorentz. On montre facilement que $\epsilon_0 = 1$ dans ce système d'unités équivaut à $q'_p = (4\pi\alpha)^{-1/2} e$.

	Valeur	Unités SP_B	Valeur	Unités SP	Valeur	Unités SP (H-L)
e	1	e	$\alpha^{1/2}$	q_p	$(4\pi\alpha)^{1/2}$	q'_p
ϵ_0	$1/4\pi\alpha$	$\text{l}_p^{-3} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^2 \cdot e^2$	$1/4\pi$	$\text{l}_p^{-3} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^2 \cdot q_p^2$	1	$\text{l}_p^{-3} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^2 \cdot q'_p{}^2$

⁽¹⁾ T₁ : **Cosmology and particle astrophysics** (Lars Bergström et Ariel Goobar)

Introduction à la physique des particules fondamentales Chapitre 6 (Allan G. Clark – Université de Genève 2011)

T₂ : **Introduction to elementary particles** (Griffiths 2^{ème} édition 2008)

T₃ : **Energie nucléaire** (Jean-Louis Basdevant, James Rich, Michel Spiro)

T₄ : **Nuclei and particles 2014/2015** (Alexander Belyaev)

T₅ : **Introduction à la physique des particules fondamentales Chapitre 1** (Allan G. Clark – Université de Genève 2011)

T₆ : **Univers, les théories de la cosmologie contemporaine** (Jacques Demaret – Le Mail 1991)

T₇ : **A Primer in Particle Physics, Alpha, Beta, Gamma... Z** (Lev Borisovich Okun, 01/01/1987)

T₈ : **The Intelligible Universe** (Julio Antonio Gonzalo, 2^{ème} édition 2008)

Physique subatomique (Bertrand Berche)

T₉ : **Introduction à la Physique des Particules** (Luc Marleau)

⁽²⁾ w en indice dans g_w et α_w signifie weak (faible), en indice dans m_w , w représente un boson W.

Prenons par exemple la constante de Von Klitzing, on a en SP_B : $R_K = 2\pi l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot e^{-2}$

En remplaçant e par $\alpha^{1/2} q_p$, on obtient en système de Planck (gaussien) :

$$R_K = 2\pi\alpha^{-1} l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot q_p^{-2}$$

En remplaçant e par $(4\pi\alpha)^{1/2} q'_p$, on obtient en système de Planck (H-L) :

$$R_K = (1/2\alpha) l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot q'_p^{-2}$$

Quant aux unités naturelles, elles partent de $c = \hbar = 1$ ⁽¹⁾, ce qui sous-entend un saut conceptuel car lorsqu'on écrit $c = 1$, cela signifie que l'on pose en SI, $1 = c_1$ m/s, d'où $m = c_1^{-1}$ s (avec $c_1 = 299\,792\,458$, valeur numérique de c en SI) ; temps et espace sont donc de **même dimension** en unités naturelles.

De même, $\hbar = 1$ implique $\hbar_1 J \cdot s = 1$ d'où $s = \hbar_1^{-1} J^{-1}$ et $m = (\hbar_1 c_1)^{-1} J^{-1}$

(avec \hbar_1 valeur numérique de \hbar en SI)

D'autre part $\hbar_1 J \cdot s = 1$ implique $\hbar_1 m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} = 1$

d'où $kg = \hbar_1^{-1} m^{-2} \cdot s$

$$= \hbar_1^{-1} [(\hbar_1 c_1)^2 J^2] \cdot (\hbar_1^{-1} J^{-1})$$

$$= c_1^2 J = 5,609\,588\,650(37) \times 10^{26} \text{ GeV}$$

Il faut donc dans T1, lorsqu'on calcule G_F , ne pas oublier de multiplier m_W par c_1^2 .

Mais il est beaucoup plus simple de traduire, à partir des unités de Planck, la signification de $c = \hbar = 1$. On prendra donc les unités naturelles basées, non pas sur le SI mais sur le système des unités de Planck.

En effet, $c = 1$ se traduit en utilisant les unités de Planck par $l_p = t_p$; d'autre part, $\hbar = 1$ se traduit par $1 l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} = 1$ d'où $l_p = m_p^{-1}$

Appelons E_p l'unité de mesure de l'énergie en unités de Planck ; $E_p = 1 l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2}$; $\hbar = 1$ peut donc s'écrire $1 E_p \cdot t_p = 1$ d'où $t_p = E_p^{-1}$

On a donc en unités naturelles basées sur les unités de Planck : $l_p = t_p = m_p^{-1} = E_p^{-1}$

Les unités naturelles (système de Heaviside-Lorentz pour l'électromagnétisme) ajoutent à $c = \hbar = 1$, $\epsilon_0 = 1$.

Nous savons que $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0$ d'où $\epsilon_0 = (4\pi\alpha)^{-1} e^2$, et donc $\epsilon_0 = 1$ implique $e = (4\pi\alpha)^{1/2} 1$

En unités naturelles (H-L), $e = (4\pi\alpha)^{1/2} 1$

De même ont été également définies les unités naturelles basées sur le système de Planck (ou encore système de Planck gaussien) ajoutant à $c = \hbar = 1$, $1/4\pi\epsilon_0 = 1$. D'où $e = \alpha^{1/2} 1$

Nous considérerons également les unités naturelles basées sur notre système SP_B , qui elles se caractérisent par $e = 1$.

Dans les trois systèmes d'unités naturelles ainsi définis et **tous basés sur les unités de Planck**, on a : $l_p = t_p = m_p^{-1} = E_p^{-1}$ et une charge adimensionnelle e ayant une valeur caractéristique pour chaque système, à savoir : $e = 1$ pour les unités naturelles SP_B ; $e = \alpha^{1/2} 1$ pour les unités naturelles de Planck et $e = (4\pi\alpha)^{1/2} 1$ pour les unités naturelles de Planck (H-L).

⁽¹⁾ Nous évitons dans cette partie tout abus de langage, en distinguant notamment le 1 élément neutre des nombres réels et le 1 élément neutre de l'espace E des valeurs physiques.

Donnons le tableau comparatif des constantes en unités SP_B et en unités naturelles SP_B .

Nom	Symbole	Valeur	Unités SP_B	Valeur	Unités naturelles SP_B
Vitesse de la lumière dans le vide	c	1	$l_p \cdot t_p^{-1}$	1	1
Constante de Planck	h	2π	$l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1}$	2π	1
Constante gravitationnelle	G	1	$l_p^3 \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^{-2}$	1	E_p^{-2}
Charge élémentaire	e	1	e	1	1
Constante de permittivité du vide	ϵ_0	$(4\pi\alpha)^{-1}$	$l_p^{-3} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p^2 \cdot e^2$	$(4\pi\alpha)^{-1}$	1
Constante de perméabilité du vide	μ_0	$4\pi\alpha$	$l_p \cdot m_p \cdot e^{-2}$	$4\pi\alpha$	1
Constante de Coulomb	$k_C = 1/(4\pi\epsilon_0)$	α	$l_p^3 \cdot m_p \cdot t_p^{-2} \cdot e^{-2}$	α	1
Impédance caractéristique du vide	Z_0	$4\pi\alpha$	$l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot e^{-2}$	$4\pi\alpha$	1
Quantum de conductance	G_0	π^{-1}	$l_p^{-2} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p \cdot e^2$	π^{-1}	1
Constante de Josephson	K_J	π^{-1}	$l_p^{-2} \cdot m_p^{-1} \cdot t_p \cdot e$	π^{-1}	1
Quantum de flux magnétique	Φ_0	π	$l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot e^{-1}$	π	1
Constante de von Klitzing	R_K	2π	$l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-1} \cdot e^{-2}$	2π	1
Magnéton de Bohr	μ_B	$\beta/2$	$l_p^2 \cdot t_p^{-1} \cdot e$	$\beta/2$	E_p^{-1}
Magnéton nucléaire	μ_N	$\beta/2\delta$	$l_p^2 \cdot t_p^{-1} \cdot e$	$\beta/2\delta$	E_p^{-1}
Rayon de Bohr	a_0	$\alpha^{-1}\beta$	l_p	$\alpha^{-1}\beta$	E_p^{-1}
Rayon classique de l'électron	r_e	$\alpha\beta$	l_p	$\alpha\beta$	E_p^{-1}
Masse de l'électron	m_e	β^{-1}	m_p	β^{-1}	E_p
Masse du proton	m_{pr}	$\beta^{-1}\delta$	m_p	$\beta^{-1}\delta$	E_p
Constante de Rydberg	R_∞	$\alpha^2/4\pi\beta$	l_p^{-1}	$\alpha^2/4\pi\beta$	E_p
Energie de Hartree	E_H	$\alpha^2\beta^{-1}$	$l_p^2 \cdot m_p \cdot t_p^{-2}$	$\alpha^2\beta^{-1}$	E_p
Rayon de Compton de l'électron	R_C	β	l_p	β	E_p^{-1}
Longueur d'onde de Compton pour l'électron	λ_C	$2\pi\beta$	l_p	$2\pi\beta$	E_p^{-1}
Longueur d'onde de Compton pour le proton	λ_{Cpr}	$2\pi\beta\delta^{-1}$	l_p	$2\pi\beta\delta^{-1}$	E_p^{-1}
Quantum de circulation	$h/2m_e$	$\pi\beta$	$l_p^2 \cdot t_p^{-1}$	$\pi\beta$	E_p^{-1}
Section efficace de Thomson	T_{CS}	$(8\pi/3)\alpha^2\beta^2$	l_p^2	$(8\pi/3)\alpha^2\beta^2$	E_p^{-2}
Première constante de rayonnement	c_{1R}	$4\pi^2$	$l_p^4 \cdot m_p \cdot t_p^{-3}$	$4\pi^2$	1
Constante de couplage de la force électromagnétique	α_{em}	α	1	α	1
Constante de couplage de la force de gravitation	α_G	$(\beta^{-1}\delta)^2$	1	$(\beta^{-1}\delta)^2$	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 protons)	α_{em}/α_G	$\alpha\beta^2/\delta^2$	1	$\alpha\beta^2/\delta^2$	1
Répulsion électrique / Attraction gravitationnelle (pour 2 électrons)		$\alpha\beta^2$	1	$\alpha\beta^2$	1
Attraction électrique / Attraction gravitationnelle (un proton, un électron)		$\alpha\beta^2/\delta$	1	$\alpha\beta^2/\delta$	1

Tableau 12 : Constantes fondamentales en SP_B et en unités naturelles SP_B

On constate que les **coefficients** sont exactement les mêmes en unités SP_B et en unités naturelles SP_B . C'est une caractéristique de tous les systèmes d'unités non anthropocentriques dérivés des unités de Planck.

10.6.3 Comparaison des tableaux relatifs à la constante de Fermi

Revenons maintenant à l'étude des 9 tableaux élaborés à partir de différents ouvrages dont les références ont été données en note de bas de page (cf. § 10.6.1).

On trouve dans ces tableaux les différentes expressions de α , g_w , α_w , et de la constante de couplage de Fermi $G_F/(\hbar c)^3$.

α_w désigne la constante de structure de couplage faible.

α_w est à la force faible, ce que α_G et α_{em} sont respectivement à la force gravitationnelle et à la force électromagnétique (cf. chapitre 4). Quant à g_w , c'est un polysème qui désigne selon le modèle : une constante adimensionnelle appelée constante de couplage faible — par opposition à la constante de structure de couplage faible α_w — ou encore le concept de « charge faible ».

La caractéristique de ces tableaux est en outre d'utiliser des systèmes d'unités de mesure différents. Aussi allons-nous rappeler les caractéristiques de chacun des systèmes d'unités de mesure utilisés.

T1 et T9 : utilisation des unités naturelles (H-L) que nous avons évoquées dans le chapitre précédent et caractérisées par $\mathbf{c} = \hbar = \epsilon_0 = \mathbb{1}$

T2 et T7 : utilisation du système CGS (centimètre, gramme, seconde) **gaussien** caractérisé par $\mathbf{1/4\pi\epsilon_0} = \mathbb{1}$

T3, T4, T6 et T8 : utilisation du SI

T5 : utilisation du système CGS électrostatique (H-L) caractérisé par $\epsilon_0 = \mathbb{1}$

Comparaison de T1, T2 et T3

Les tableaux T1, T2, T3 utilisent g_w en tant que constante adimensionnelle égale à $(4\pi\alpha)^{1/2}/\sin\theta_w$. Dans ces trois tableaux, on a de même égalité sur α_w ainsi que sur la constante de couplage de Fermi après conversion pour cette dernière des unités de mesure entre T1 et T2 : $\mathbf{10^{14} J^{-2} = (cm^2 \cdot g \cdot s^{-2})^{-2}}$

Comparaison de T4, T5 et T7

Les tableaux T4, T5, T7 utilisent g_w comme désignant le concept de **charge faible**.

Outre l'égalité déjà visible des α_w dans **T4 et T5**, on a pour ces mêmes tableaux, égalité entre les g_w . En effet, dans T5, statC_{HL}^1 étant le *statcoulomb* du système CGS électrostatique (en unités **CGS H-L** : $\text{statC}_{HL} = 9,409\,669\,397 \dots \times 10^{-11}$ C), on peut vérifier l'égalité :

$$3,398(17) \times 10^{-19} \mathbf{C} = 3,611(18) \times 10^{-9} \mathbf{statC}_{HL}$$

De même outre l'égalité déjà visible des α_w dans **T4 et T7**, on a égalité entre les g_w de ces mêmes tableaux. En effet, dans T7, statC^2 étant cette fois, le *statcoulomb* ou esu du système CGS électrostatique (en unités **CGS gaussiennes** : $\text{statC} = 3,335\,640\,951 \dots \times 10^{-10}$ C), on peut vérifier l'égalité : $3,398(17) \times 10^{-19} \mathbf{C} = 1,0187(49) \times 10^{-9} \mathbf{statC}$

¹ Nous avons choisi d'appeler statC_{HL} l'unité de charge du système CGS électrostatique en unités Heaviside-Lorentz ($4\pi\epsilon_0 = \mathbb{1}$)

On a $\text{statC}_{HL} = 9,409\,669\,397\,81 \dots \times 10^{-11}$ C et $e = 1,602\,176\,6208 \times 10^{-19} / 9,409\,669\,397\,81 \dots \times 10^{-11} \text{statC}_{HL} = \mathbf{1,702\,691\,665(38)} \times 10^{-9} \text{statC}_{HL}$

² statC est l'unité de charge du système CGS électrostatique en unités gaussiennes ($\epsilon_0 = \mathbb{1}$), encore appelé esu ou Franklin

On a $\text{statC} = 3,335\,640\,951\,98 \dots \times 10^{-10}$ C et $e = 1,602\,176\,6208 \times 10^{-19} / 3,33564095198 \times 10^{-10} \text{statC} = \mathbf{4,803\,204\,51(11)} \times 10^{-10} \text{statC}$

Si l'on développe la formule de G_F donnée en unités naturelles (H-L) pour T7, à savoir : $G_F = 2^{1/2} g_w^2 / 8m_w^2$, on obtient $G_F = (\sqrt{2}/8)(4\pi\alpha/\sin^2\theta_w)/m_w^2 = (\pi\alpha/\sqrt{2})/(\sin\theta_w m_w)^2$
On en déduit pour T4 et T7 : $G_F/(\hbar c)^3 = (\pi/\sqrt{2})\alpha_w / (m_w \cdot c^2)^2 = (\pi\alpha/\sqrt{2}) / (\sin\theta_w m_w \cdot c^2)^2$

Pour T5, l'approximation qui est donnée de $G_F / (\hbar c)^3 \approx \alpha_w / (m_w \cdot c^2)^2 = 1,979(20) \times 10^{14} \text{ J}^{-2}$ (car $(\text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{s}^{-2})^{-2} = 10^{14} \text{ J}^{-2}$), ne comporte pas le coefficient $\pi/\sqrt{2}$, ce qui explique la différence de résultat avec : $G_F/(\hbar c)^3 = (\pi/\sqrt{2})\alpha_w / (m_w \cdot c^2)^2 = 4,397(44) \times 10^{14} \text{ J}^{-2} = 1,129(12) \text{ GeV}^{-2}$

Synthèse comparative de T1, T2, T3, T4, T5 et T7¹

Il est à noter que la traduction de g_w en unités naturelles (H-L) donne les mêmes résultats, que g_w soit utilisée en tant que constante adimensionnelle ou en tant que charge faible. Il en est de même pour α_w et pour $G_F/(\hbar c)^3$.

Finalement, de par le fait que T1 soit en unités naturelles (H-L), et que dans ces unités la charge soit adimensionnelle, T1 est aussi bien la traduction en unités naturelles de T2 ou T3, que de T4, T5 ou T7 avec la correction apportée dans T5 par le coefficient $\pi/\sqrt{2}$ à l'expression de $G_F/(\hbar c)^3$.

Et dans tous les cas on a :

$$\alpha_w = \alpha / \sin^2\theta_w \quad \text{et} \quad G_F/(\hbar c)^3 = (\pi\alpha/\sqrt{2})/(\sin\theta_w m_w \cdot c^2)^2$$

Ce qui en fonction des valeurs CODATA 2014, nous donne² :

$\alpha_w = 3,283(32) \times 10^{-2}$ et $G_F/(\hbar c)^3 = 4,397(44) \times 10^{14} \text{ J}^{-2} = 1,129(12) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, soit la valeur expérimentale de $G_F/(\hbar c)^3$ divisée par un coefficient de **1,033(11)**.

Notons que l'on retrouve la valeur expérimentale de $1,166\ 3787(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ à condition d'avoir $\sin^2\theta_w = 0,2151(42)$ à la place de $0,2223(21)$.

Cela signifie que soit la formule $G_F/(\hbar c)^3 = (\pi\alpha/\sqrt{2})/(\sin\theta_w m_w \cdot c^2)^2$ est incomplète et il manque à celle-ci un coefficient multiplicateur compris strictement entre **1,022 et 1,044**, soit elle est complète et alors $\sin^2\theta_w = 0,2151(42)$.

Si l'on traduit en unités naturelles SP_B la formule de la constante de couplage de Fermi, on obtient : $G_F = (\pi\alpha/\sqrt{2})/(\sin\theta_w m_w)^2 = 1,682(16) \times 10^{33} \text{ E}_p^{-2}$

Il existe par ailleurs une autre formule pour le calcul de $G_F/(\hbar c)^3$ qui est la suivante :

$$G_F^2/(\hbar c)^6 = (\hbar/\tau_\mu) \times 192\pi^3 / (m_\mu \cdot c^2)^5 \text{ d'où } G_F/(\hbar c)^3 = 2^3\pi(3\pi)^{1/2} (\hbar/(\tau_\mu \cdot m_\mu \cdot c^2))^{1/2} / (m_\mu \cdot c^2)^2$$

$$m_\mu = 105,658\ 3745(24) \text{ MeV}/c^2 = 1,883\ 531\ 594(65) \times 10^{-28} \text{ kg} = 8,654\ 07(21) \times 10^{-21} m_p$$

$$\tau_\mu = 2,196\ 9811(22) \times 10^{-6} \text{ s} = 4,075\ 16(11) \times 10^{37} t_p$$

En prenant les données ci-dessus, on obtient $G_F/(\hbar c)^3 = 1,163\ 818\ 70(71) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$

Le coefficient multiplicateur manquant n'est plus que de **1,002 1997(12)** par rapport à la valeur expérimentale de **1,166 3787(6) $\times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$**

En unités naturelles SP_B , on obtient : $G_F = [192\pi^3/(\tau_\mu \cdot m_\mu^5)]^{1/2} = 1,734\ 814(83) \times 10^{33} \text{ E}_p^{-2}$

¹ Les tableaux T6, T8 et T9 sont donnés à titre d'information pour montrer qu'il existe d'autres modèles donnant des valeurs différentes pour α_w . Ils ne font toutefois pas l'objet d'un paragraphe spécifique sachant que dans ces modèles les formules d' α_w pour T6 ou T8 ou d' α_f pour T9 sont obtenues à partir de la valeur expérimentale de G_F . Les lignes « $G_f/(\hbar c)^3 =$ » que nous avons rajoutées pour T6 et T8 ainsi que la ligne « $G_f =$ » pour T9 sont donc redondantes puisque la valeur de $G_f/(\hbar c)^3$ ou de G_f est prise comme valeur de départ pour les calculs de α_w ou α_f . Elles ont été rajoutées pour respecter la structure des tableaux.

² Calcul établi toujours avec les valeurs CODATA 2014 :

$m_w = 80,379(12) \text{ GeV}/c^2 = 1,432\ 89(22) \times 10^{-25} \text{ kg} = 6,5835(12) \times 10^{-18} m_p$; $\text{MeV}/c^2 = 1,782\ 661\ 907(12) \times 10^{-30} \text{ kg}$; $\sin^2\theta_w = 0,2223(21)$

Bibliographie

- [BAR 05] J.D. BARROW
« LES CONSTANTES DE LA NATURE »
ODILE JACOB SCIENCES 2005
- [BAS 11] J-L. BASDEVANT, J. DALIBARD
« MECANIQUE QUANTIQUE »
LES EDITIONS DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE - 2011
- [COH 91] G. COHEN-TANNOUJJI, M. SPIRO
« LE BOSON ET LE CHAPEAU MEXICAIN »
FOLIO ESSAIS GALLIMARD - 2013
- [COD 15] CODATA
« RECOMMENDED VALUES OF THE FUNDAMENTAL PHYSICAL CONSTANTS : 2014* »
Peter J. Mohr ; David B. Newell ; Barry N. Taylor National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland 20899-8420, USA (Dated: 25 June 2015)
- [CRO 87] M. CROZON
« LA MATIERE PREMIERE »
EDITIONS DU SEUIL - 1987
- [DAV 89] P. DAVIES
« LES FORCES DE LA NATURE »
ARMAND COLIN - 1989
- [FEY 79] FEYNMAN, LEIGHTON, SANDS
« LE COURS DE PHYSIQUE DE FEYNMAN : MECANIQUE 1 »
INTEREDITIONS - 1979
- [FEY 79] FEYNMAN, LEIGHTON, SANDS
« LE COURS DE PHYSIQUE DE FEYNMAN : MECANIQUE QUANTIQUE »
INTEREDITIONS - 1979
- [GLA 15] V. GLAVIEUX
« UNITES DE MESURE CHERCHENT ETALON »
LA RECHERCHE N° 499 MAI 2015
- [LAM 98] M. LAMBERT
« INTRODUCTION A LA MECANIQUE QUANTIQUE »
ELLIPSES – 1998
- [PDG 15] PARTICLE DATA GROUP
« PHYSICAL CONSTANTS - 2015 »
Reviewed 2015 by P.J. Mohr and D.B. Newell (NIST)
- [PDG 16] PARTICLE DATA GROUP
« PARTICLE PHYSICS BOOKLET - 2016 »
Extracted October from the Review of Particle Physics C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chinese Physics C (2016)
- [PDG 17] PARTICLE DATA GROUP
« ASTROPHYSICAL CONSTANTS AND PARAMETERS »
Revised October 2017 by D.E. Groom (LBNL) and D. Scott (University of British Columbia)
- [UZA 05] J-P. UZAN, R. LEHOUCQ
« LES CONSTANTES FONDAMENTALES »
BELIN - 2005