



**HAL**  
open science

# Inégalités linéaires de dominance pour l'ordonnancement juste-à-temps avec date d'échéance commune non restrictive

Anne-Elisabeth Falq, Pierre Fouilhoux, Safia Kedad-Sidhoum

## ► To cite this version:

Anne-Elisabeth Falq, Pierre Fouilhoux, Safia Kedad-Sidhoum. Inégalités linéaires de dominance pour l'ordonnancement juste-à-temps avec date d'échéance commune non restrictive. JPOC11 : Journées Polyèdres et Optimisation Combinatoire, Jun 2019, Metz, France. hal-02498970

**HAL Id: hal-02498970**

**<https://hal.science/hal-02498970>**

Submitted on 4 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Inégalités linéaires de dominance pour l’ordonnancement juste-à-temps avec date d’échéance commune non restrictive

Anne-Elisabeth Falq<sup>1</sup>, Pierre Fouilhoux<sup>1</sup> et Safia Kedad-Sidhoum<sup>2</sup>

1. Sorbonne Université, CNRS, LIP6, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

2. CNAM, CEDRIC, 292 rue Saint Martin, 75003 Paris, France

**Mots-clefs :** ordonnancement juste-à-temps, programmation linéaire, dominance

## 1 Le problème d’ordonnancement juste-à-temps avec date d’échéance commune non restrictive

On considère un ensemble de tâches  $J$ , dont les durées d’exécutions  $(p_j)_{j \in J}$  sont fixées, et on cherche à les ordonner sur une machine autour d’une **date d’échéance commune** notée  $d$ . Pour une tâche  $j \in J$ , on note  $C_j$  sa date de fin. Si la tâche est en avance (i.e.  $C_j \leq d$ ), alors son avance est  $d - C_j$ , et son retard est nul. À l’inverse si elle est en retard (i.e.  $C_j > d$ ), son avance est nulle tandis que son retard est  $C_j - d$ . Étant donnés des coefficients  $(\alpha_j) \in \mathbb{R}^+$  et  $(\beta_j) \in \mathbb{R}^+$  pour chaque tâche  $j$ , notre objectif est de minimiser la somme pondérée des avances et des retards de toutes les tâches. Autrement dit il s’agit de minimiser  $\sum_{j \in J} \alpha_j [d - C_j]^+ + \beta_j [C_j - d]^+$ .

La pénalisation de l’avance en plus de celle du retard fait de ce problème un problème dit juste-à-temps, et casse en particulier la régularité, c’est-à-dire qu’on n’a plus la dominance des ordonnancements tassés à gauche (i.e. sans trou et démarrant au temps 0).

On se placera pour cet exposé dans le cas d’une date d’échéance non-restrictive c’est à dire  $d \geq \sum p_j$ . Dans ce cas, les ordonnancements **tassés** (i.e. sans trou), avec une **tâche à l’heure** (i.e. pour laquelle  $C_j = d$ ) et **”en V”** (i.e. où les ratios  $\alpha_j/p_j$  des tâches en avance sont croissants, et les ratios  $\beta_j/p_j$  des tâches en retard sont décroissants) forment un ensemble de solutions dominant [2], c’est à dire qu’on peut s’y restreindre sans changer la valeur de l’optimum.

Malgré ces propriétés de dominance, Hall et Posner [2] ont montré que le problème est NP-difficile dès que les poids dépendent des tâches, et ce même s’ils sont symétriques (i.e.  $\alpha_j = \beta_j$ ).

## 2 Formulation compacte basée sur la répartition avance retard

Grâce aux propriétés de dominance susmentionnées, on se limite aux ordonnancements **”en V”**, tassés et avec une tâche à l’heure. De par leur structure bien particulière, ces ordonnancements peuvent être encodés de manière très compacte : il suffit en effet de donner la répartition des tâches en avance et en retard pour en déduire tout l’ordonnancement [1]. Plus important encore, au prix de l’ajout de quelques variables de linéarisation, on peut exprimer linéairement l’avance et le retard de chaque tâche à partir des variables binaires représentant cette répartition.

On obtient ainsi une formulation linéaire du problème ne présentant que  $n$  variables binaires,  $n(n-1)/2$  variables continues, et  $2n(n-1)$  inégalités. Malgré sa compacité, cette formulation

se révèle peu efficace. En effet le relâché continu de cette formulation s'avère fournir une très pauvre borne inférieure.

Une première approche pour améliorer cette formulation compacte consiste à ajouter des inégalités valides (pour toutes les solutions entières) bien connues par l'étude du polyèdre des coupes, comme les inégalités dites de triangles [3]. Le but est de couper des points fractionnaires, et ainsi améliorer la valeur de relaxation.

Une deuxième approche consiste à ajouter des inégalités pour éliminer des points entiers auxquels la fonction objectif donne une valeur peu intéressante. Contrairement à la première approche, les inégalités ajoutées ici dépendent des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  définissant la fonction objectif. Au lieu de chercher à avoir un polyèdre qui colle mieux à l'enveloppe convexe des points entiers, on ajoute des inégalités qui coupent tout un pan du polyèdre, éliminant ainsi une ou plusieurs solutions entières qu'on sait ne pas être optimales. C'est sur cette deuxième approche, plus fructueuse d'un point de vue expérimental, que se concentrera l'exposé.

### 3 Traduction de dominance connues

Dans la littérature autour de ce problème d'ordonnement, de nombreuses propriétés de dominance sont connues. Certaines aboutissent à des propriétés de structure, comme on l'a vu plus haut ; d'autres donnent seulement des critères d'optimalité basés sur les durées des tâches et sur leurs coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ . On s'intéresse à ces dernières pour éliminer de notre formulation des points entiers non optimaux.

Une manière courante d'obtenir de telles propriétés est de s'intéresser à un ordonnancement voisin, c'est-à-dire obtenu par une opération de modification, comme un décalage, une réinsertion, une inversion ou un échange de tâches. Une condition d'optimalité pour un ordonnancement est alors que l'ordonnement obtenu par cette modification soit de moins bonne qualité, ce qui se traduit par la positivité de la variation de coût.

Pour les opérations de réinsertion et d'échange, nous pouvons exprimer linéairement cette variation de coût à partir des variables de la formulation compacte, et ainsi obtenir des inégalités qui éliminent tous les ordonnancements ne satisfaisant pas le critère d'optimalité associé.

Bien qu'aucune des ces inégalités n'améliore la valeur du relâché continu, certaines d'entre elles offrent une remarquable amélioration de l'efficacité de cette formulation compacte.

Nous présenterons quelques résultats expérimentaux préliminaires comparant l'apport des différentes inégalités de renforcement présentées.

### Références

- [1] Anne-Elisabeth Falq, Pierre Fouilhoux, and Safia Kedad-Sidhoum. Mixed integer formulations using natural variables for single machine scheduling around a common due date. *CoRR*, abs/1901.06880, 2019.
- [2] Nicholas G. Hall and Marc E. Posner. Earliness-tardiness scheduling problems, I : weighted deviation of completion times about a common due date. *Operations Research*, 39(5) :836–846, 1991.
- [3] Manfred Padberg. The boolean quadric polytope : Some characteristics, facets and relatives. *Math. Program.*, 45(1-3) :139–172, 1989.