



**HAL**  
open science

## Analyse spectrale adaptative de signaux a bandes étroites multiplies

Nacer K M'Sirdi, Ioan Doré Landau

► **To cite this version:**

Nacer K M'Sirdi, Ioan Doré Landau. Analyse spectrale adaptative de signaux a bandes étroites multiplies. 10 colloque du Grets GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images, May 1985, Nice, France. hal-02495059

**HAL Id: hal-02495059**

**<https://hal.science/hal-02495059>**

Submitted on 29 Feb 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

## ANALYSE SPECTRALE ADAPTATIVE DE SIGNAUX

### A BANDES ETROITES MULTIPLES

N.K. M'SIRDI et I.D. LANDAU

LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE DE GRENOBLE et GRECO SYSTEMES ADAPTATIFS C.N.R.S.  
(E.N.S.I.E.G.) B.P. 46 - 38402 ST MARTIN D'HERES

## RESUME

L'analyse spectrale de signaux composés de bandes étroites, est un sujet qui a fait l'objet de très nombreuses recherches au cours de ces dernières années. En outre, à de tels types de problèmes, les techniques adaptatives de modélisation de processus ARMA(X), semblent parfaitement adaptées. Dans cette étude, les techniques d'identification récursives de modèles ARMA, sont utilisées pour la détection et l'estimation de sinusoides bruitées. Une classe de filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) est étudiée pour la prédiction et l'estimation adaptative de signaux à bandes étroites. C'est la classe des filtres sélectifs (ou de leurs inverses les filtres à encoches). Ils doivent être adaptés de manière récursive pour caler leurs fréquences sur celles des composantes sinusoidales et éliminer le bruit. Le comportement des algorithmes d'estimation proposés est illustré par l'analyse de signaux simulés ayant des Rapports Signal/bruit différents.

### I - INTRODUCTION

Les méthodes de modélisation récursives disponibles à l'heure actuelle permettent l'estimation spectrale évolutive d'un signal, à partir de ses observations.

Ces techniques permettent l'obtention de modèles de filtres généralement du type ARMA(X) (autorégressif à moyenne ajustable avec éventuellement une entrée auxiliaire), pour la prédiction, l'estimation ou le filtrage adaptatif. Ce type de filtres adaptatifs à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) a remplacé les filtres (RIF) à réponse impulsionnelle finie, dans les cas où une modélisation du processus étudié peut être réalisée à l'aide d'une configuration ayant des pôles et des zéros [5 à 7] qui serait plus économique qu'une configuration FIR comprenant seulement une partie autorégressive (AR) [3] [4] qui aurait nécessité beaucoup plus de paramètres.

Le dénominateur commun de toutes ces techniques, est l'identification d'un modèle de prédiction, basée sur des séries temporelles d'observation. Le modèle, ARMA (m,n) du processus ou signal  $y_k$  est donné par l'équation suivante où  $\epsilon_k$  désigne l'erreur de prédiction :

$$\hat{y}_k = - \sum_{i=1}^n a_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^m c_i \epsilon_{k-i} \quad \text{avec} \quad \epsilon_k = y_k - \hat{y}_k$$

## SUMMARY

Adaptive ARMA(X) modelling techniques are peculiarly appealing for narrow band Signals Spectrum analysis. The problem of detecting and estimating multiple sinusoids corrupted by noise, using recursive identification techniques is considered. In this contribution a narrow band Infinite Impulse Response (IIR) filter class for adaptive line enhancement of narrow band signals is investigated. This is the class of selective filters (or Notch filters which are their inverse). They must be tuned to select sinusoidal signals and reject the noise components. Simulation results are presented to illustrate the behaviour of the proposed algorithms under various noise conditions.

Le problème d'estimation spectrale se trouve ainsi ramené à un problème d'identification paramétrique. Les filtres de type ARMA, sans contraintes n'ont généralement pas les caractéristiques requises pour représenter un signal composé de bandes étroites. Leurs zéros, ne sont pas nécessairement sur le cercle unité (ce qui est le cas des sinusoides purs) et leurs pôles peuvent se localiser loin des zéros donnant ainsi un spectre à bandes larges. Des contraintes peuvent être envisagées et imposées à la structure du filtre utilisé. Tel est le cas des filtres proposés récemment dans [19] et [11].

Dans cet article, on se propose d'étudier une classe de filtres (RII) utiles pour la prédiction et l'estimation adaptative de signaux à bandes étroites multiples, puis de passer en revue les méthodes d'identification récursives applicable à l'estimation des paramètres de ces filtres.

La seconde partie est réservée à la formulation du problème et à l'étude fréquentielle et temporelle des modèles des filtres sélectifs. La présentation des méthodes d'estimation des paramètres du modèle considéré, et de leurs capacités d'adaptations est réalisée dans la troisième partie, tandis que la quatrième consistera en leur illustration par des études de simulation sur micro-ordinateur.



## II - MODELISATION DE SIGNAUX A BANDES ETROITES

### II.1. Formulation du problème :

Les techniques classiques d'analyse spectrale, considèrent que toutes les informations sur le processus sont contenues dans les données, et qu'en dehors (de la fenêtre) du domaine d'observation ces données sont par conséquent toutes nulles. Or dans beaucoup de cas on dispose de plus d'informations, sur le processus, que celle contenues dans les données d'observations. Ces informations a priori, peuvent servir à sélectionner la structure du modèle du processus et faire des hypothèses sur le choix de l'ordre de ce modèle et la méthode d'estimation des paramètres de ce modèle. Nous devons donc dans un premier temps estimer les paramètres du modèle du signal puis calculer la densité spectrale donnée par ce modèle. Ces dernières techniques présentent l'avantage de permettre une meilleure résolution, et la possibilité de travailler avec un nombre de données plus faible.

Si on représente le processus par un modèle de type AR ou ARMA [5-6], [8] :

$$H(z) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}; \quad A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}$$

$\varepsilon_k$  est une séquence de variables aléatoires normale  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$  on obtient la fonction de transfert d'un filtre dont l'entrée est un bruit blanc  $\varepsilon_k$  et la sortie  $y_k$ .

La densité spectrale du signal de sortie de ce filtre  $\phi_y(w)$ , est reliée au spectre  $\phi_\varepsilon(w)$  du signal d'entrée par la formule :

$$\phi_y(w) = H(z) H(z^{-1}) \cdot \phi_\varepsilon(w) = \left[ \frac{C(z) \cdot C(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})} \right] \phi_\varepsilon(w)$$

Pour le calcul de la densité spectrale, nous utiliserons les paramètres  $a^i$  et  $c^i$ , qui sont les estimations récursives des paramètres du modèle, obtenue par minimisation d'un critère du type moindres-carrés ou autre. [1], [3], [7], [8].

### II.2. Etude fréquentielle de modèles à bandes étroites

#### a) \* Choix du modèle :

L'utilisation de modèles ARMA(X) en traitement du signal présente un grand nombre d'applications en analyse spectrale adaptative, rejet de perturbation, anneaux d'écho, filtrage adaptatif etc. [5-9], [15], [18].

Dans beaucoup de cas le signal à traiter,  $x_k$ , peut être représenté par une configuration comportant des pôles et des zéros, c'est-à-dire par un modèle ARMA. Le signal  $x_k$  est décrit par l'équation :

$$A(Q^{-1}) \cdot x_k = C(Q^{-1}) \cdot e_k$$

si par ailleurs nous ne disposons que d'une observation bruitée de ce signal ;  $y_k = x_k + w_k$ .  $w_k$  étant supposée une séquence de variables aléatoires normales  $(0, \sigma_w^2)$  on obtient alors :

$$y_k = \frac{C(Q^{-1})}{A(Q^{-1})} e_k + w_k = \frac{C(Q^{-1}) e_k + A(Q^{-1}) w_k}{A(Q^{-1})}$$

Le signal bruité  $y_k$ , peut se représenter par un modèle ARMA, sous la conditions que les deux termes,  $C(Q^{-1})e_k$  d'une part et  $A(Q^{-1})w_k$  d'autre part, aient des spectres en fréquences identiques.

$$y_k = \frac{C'(Q^{-1})}{A(Q^{-1})} v_k$$

$$/C'(z)C'(z^{-1})/\sigma_e^2 = /C(z)C(z^{-1})/\sigma_e^2 + /A(z)A(z^{-1})/\sigma_w^2$$

$e_k$  et  $w_k$  sont deux séquences de variables aléatoires normales indépendantes.

L'observation du signal peut être considérée comme la sortie d'un filtre (RII) excité par un bruit blanc,  $v_k$   $(0, \sigma_v^2)$ .

L'équation ci-dessus montre que si le bruit de mesure est faible ( $\sigma_w$  petit) les zéros de  $C'(z)$  tendent

vers ceux de la partie MA (moyenne ajustable) de  $C(z)$ . On retrouve bien la configuration pôle-zéro du modèle ARMA du signal, non bruité. Tandis que si le bruit augmente, ( $\sigma_w$  grand) au spectre du signal, vient s'ajouter le spectre du bruit. On devra donc ajouter des zéros au modèle ARMA du signal pour compenser l'effet dû au bruit.

L'utilisation de modèle ARMA pour le prédicteur donne un filtre générateur à (RII) réponse impulsionnelle infinie, qui bien que très utile, paraît parfois très général. C'est le cas lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la détection de pics pour des signaux à bandes étroites. Il est possible d'imaginer des contraintes, correspondant aux particularités des signaux auxquels on s'intéresse, puis de les imposer à la structure du prédicteur. Ainsi pour un signal purement autorégressif l'équation précédente devient en imposant  $C(z) = 1$  :

$$/C'(z^{-1})C'(z)/\sigma_v^2 = \sigma_e^2 + /A(z^{-1}) \cdot A(z)/\sigma_w^2$$

Pour le cas d'une observation bruitée, plus  $\sigma_w$  augmente plus les racines de  $C'(z)$  sont proches de celles de  $A(z)$ .

Considérons un signal composé de la somme de  $p$ -sinusoïdes, ce signal aura pour représentation par les équations aux différences, un modèle autorégressif (AR) pur d'ordre  $2p$  :

$$x_k = - \sum_{i=1}^{2p} a_i x_{k-i}$$

$$y_k = - \sum_{i=1}^{2p} a_i x_{k-i} + e_k = - \sum_{i=1}^{2p} a_i (y_{k-i} - e_{k-i}) + e_k$$

$$d'où : y_k = - \sum_{i=1}^{2p} a_i x_{k-i} + \sum_{i=1}^{2p} a_i e_{k-i} + e_k$$

Ceci signifie que pour de tels signaux, la partie AR du modèle est identique à la partie MA. Cette forme a été introduite par Ulrich et Clayton pour représenter des sinusoides bruitées. On obtient ainsi un modèle ARMA dont la structure est assez particulière. Ainsi, on pourrait imposer au prédicteur la structure d'un filtre sélectif dont les paramètres seront ajustés de manière, à caler les fréquences propres de ce filtre, aux fréquences des sinusoides composant le signal.

#### b) \* Etude spectrale d'un filtre sélectif :

Nous cherchons à modéliser un signal composé de bandes étroites par un filtre générateur  $H(z)$  tel que :

$$y_k = H(z^{-1}) \varepsilon_k$$

$H(z^{-1})$  doit être un filtre sélectif, de manière que toutes les sinusoides composant le signal doivent être soustraites du signal  $y_k$  pour ne laisser qu'un résidu  $\varepsilon_k$  qui est une séquence d'innovation  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Le spectre du signal non bruité  $x_k$  est composé de  $p$  pics de Dirac localisés aux fréquences des composantes du signal :

$$S_x(w) = \sum_{i=1}^{2p} \sigma_i^2 \delta(w - w_i); \quad (w_{2p-i} = -w_i)$$

$$S_e = [H(z) \cdot H(z^{-1})]^{-1} \cdot S_y(w) = [G(z)G(z^{-1})]^{-1} (S_x(w) + S_e(w))$$

le filtre inverse de  $H(z)$ , est un filtre rejeteur de bande, présentant plusieurs encoches à des fréquences qui coïncident avec les fréquences  $f_i$  [11] [19]. Le filtrage de  $y_k$  par  $G(z)$  supprime les pics dus aux sinusoides et laisse inchangé le reste du spectre :  $S_e(w) = K + /G(z)G(z^{-1})/ S_e(w)$ .

Le critère temporel correspondant à la minimisation de la puissance d'erreur est :

$$\min \left[ J_k = \int_{-\pi}^{\pi} S_e(w) dw = \int_{-\pi}^{\pi} /G(z)G(z^{-1})/ S_x(w) dw + \int_{-\pi}^{\pi} /G(z)G(z^{-1})/ S_e(w) dw \right]$$

La minimisation du premier terme de ce critère, aura pour rôle de centrer les fréquences des encoches de  $G(z)$  (ou des pics de  $H(z)$ ) sur celles des sinusoides composant le signal. Alors que le second terme se réduit pratiquement à la puissance du bruit  $\sigma_e^2$ , car la

fonction transfert du filtre  $G(z)$  vaut un partout sauf aux fréquences du signal où elle est nulle. La largeur de bande des encoches doit être très faible pour permettre une estimation précise de fréquences. Plus les bandes sont étroites, meilleure est la résolution en fréquence. Des filtres rejeteurs de bande tendant vers ce type, ont été utilisés pour la suppression de fréquences d'interférence par Glover [12], Teichler [14]. Leur paramétrisation a été réalisée sous forme de filtres optimaux, à réponse impulsionnelle finie sans contraintes sur le modèle AR.

c) Paramétrisation du filtre :

Nous avons défini le filtre rejeteur de bande appelé aussi filtre à encoches [19], [11], [12],  $G(z)$  et son filtre inverse  $H(z)$ , un filtre sélectif composé de bandes étroites qui servira pour la modélisation du signal. Ce filtre peut être représenté par un modèle ARMA de la forme suivante :

$$H(z^{-1}) = \left[ A(\Gamma z^{-1}) / A(z^{-1}) \right]$$

$r$  est un paramètre lié à la largeur de bande des pics [11], [12].

Si  $P_i$  est pôle du filtre  $P_i = r_i e^{jw_i}$ ,  $w_i$  pulsation et  $r_i$  module du pôle alors  $z_i = r P_i = r r_i e^{jw_i}$  est un zéro du filtre qui a la même fréquence et a pour module  $r_i$ . Les zéros sont contraints à avoir la même fréquence que les pôles et un rayon proche de celui des pôles ( $r$  proche de l'unité). Le choix de  $r$ , fixe la largeur de bande des pics du filtre comme le montre la figure 2.1).

$$H(z) = \left[ \frac{(-2p \prod_{i=1}^p (1 - r_i P_i z^{-1}))}{\prod_{i=1}^p (1 - P_i z^{-1})} \right]$$

où  $(P_{2p-i} = P_i^*)$

$r$  doit être inférieur à l'unité pour garder les zéros à l'intérieur du cercle unité ( $H(z)$  est à phase minimale). Les rayons  $r_i$  doivent être proches de l'unité et les pôles et zéros apparaissent sous forme de paires, complexes conjugués, ce qui montre que le modèle correspondant présente une symétrie ;  $a_i = a_{2p-i}$  pour  $i = 0, 1, \dots, p$ . Ainsi on peut aussi inverser l'ordre des coefficients  $a_i$  pour contraindre le modèle à être symétrique et obtenir la structure suivante :

$$H(z^{-1}) = \frac{a_n + a_{n-1} \Gamma z^{-1} + \dots + a_1 \Gamma^{n-1} z^{-(n-1)} + \Gamma^n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}}$$

Ce type de modèle est identique à celui proposé dans [19] par B. Friedlander et J. Smith.

II.3. Etude temporelle :

1) Etude des prédicteurs à un pas :

Le modèle du filtre sélectif étant choisi, nous allons nous intéresser à l'estimation de ces paramètres.

$$y_k = \frac{C(Q^{-1})}{A(Q^{-1})} \epsilon_k$$

est le modèle choisi avec  $C(z^{-1}) = A(r z^{-1})$  ou  $C(z^{-1}) = z^{-n} A(r z)$ .

Cette équation donne lieu à deux grandes classes de prédicteurs :

- Série-Parallèle ; utilisée par les méthodes dites d'équation de l'erreur
- Parallèle ; utilisée par les méthodes dites d'erreur de sortie. Ces dernières méthodes sont dues aux Systèmes Adaptatifs avec Modèle de Référence [16].

a) Prédicteur Série-parallèle :

L'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante,  $\hat{y}_k$  étant la sortie du prédicteur :

$$C(Q^{-1}) \hat{y}_k = [C^*(Q^{-1}) - A^*(Q^{-1})] y_k$$

où  $A^*(Q^{-1}) = A(Q^{-1}) - 1$  ;  $C^*(Q^{-1}) = C(Q^{-1}) - 1$

on aboutit ainsi au prédicteur optimal (au sens de la méthode d'identification choisi) qui est représenté par la figure 3a.

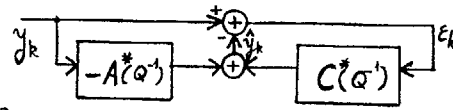
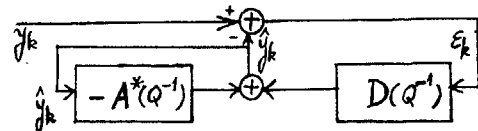


Figure 3a.

b) Prédicteur Parallèle :

s'écrire aussi :

Figure 3b.



$$\hat{y}_k = [1 - A(Q^{-1})] \hat{y}_k + D(Q^{-1}) \epsilon_k \text{ avec } D(Q^{-1}) = C(Q^{-1}) - A(Q^{-1})$$

2) Prédicteur à d-pas :

Les horizons des deux types de prédicteurs présentés peuvent être étendu à d-pas ; l'intérêt est que dans le cas d'un bruit corrélé (bruit rose), une décorrélation est assurée. Nous devons exprimer  $\hat{y}_{k+d}$  la prédiction de  $y_{k+d}$ , sur la base des informations  $(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n})$  telle que la variance de l'erreur soit minimisée

$J = E(\epsilon_{k+d})^2$  minimum

Posant l'égalité [1]:  $C(Q^{-1}) = A(Q^{-1}) R(Q^{-1}) + Q^{-d} S(Q^{-1})$

$$y_{k+d} = \frac{C(Q^{-1})}{A(Q^{-1})} \epsilon_{k+d} = R(Q^{-1}) \epsilon_{k+d} + Q^{-d} \frac{S(Q^{-1})}{A(Q^{-1})} \epsilon_{k+d}$$

Le prédicteur optimal obtenu est  $\hat{y}_{k+d} = \frac{S(Q^{-1})}{A(Q^{-1})} \epsilon_k$

$$\hat{y}_{k+d} = (1 - A(Q^{-1})) \hat{y}_{k+d} + S(Q^{-1}) \epsilon_k$$

l'erreur de prédiction obtenue en utilisant ce prédicteur à d-pas est :  $\epsilon_k^d = R(Q^{-1}) \epsilon_{k+d}$

± Cas d'un bruit corrélé :  $w_k$  est un bruit rose de fonction d'autocorrélation :  $R_1 = E(w_k w_{k+1}) = \sigma_w^2 \exp(-1/\tau)$

$$E(\hat{y}_k \cdot w_{k+1}) = \frac{S(Q^{-1})}{A(Q^{-1})} \cdot R_{1+d} \text{ avec } R_{1+d} = E(w_{k-d} w_{k+1})$$

La sortie du prédicteur à d-pas doit être décorréllée du bruit si d est correctement choisi.

$$E \left[ \hat{y}_k \cdot w_k \right] = \frac{S(Q^{-1})}{A(Q^{-1})} R_d \text{ doit être nulle}$$

De ces équations on voit que l'on doit choisir l'horizon de prédiction (d) de telle façon que la décorrélation entre  $y_k$  et  $w_k$  soit bien assurée. On en conclue que  $d > \tau_{min}$  ; où  $\tau_{min}$  est défini comme l'instant à partir duquel la fonction d'autocorrélation du bruit est nulle.

III - TECHNIQUES D'ADAPTATION PARAMETRIQUE

III.1. Méthodes d'estimation

Dans cette partie quelques algorithmes d'adaptation paramétriques sont dérivés de la méthode des moindres carrés simples et appliqués à l'estimation des coefficients de filtres sélectifs développés précédemment. Seuls les filtres dont la structure est du premier type présenté, sont considérés, l'extension aux autres types se réalise simplement.

Considérons le filtre représenté par le modèle suivant

$$y_k = A^*(Q^{-1}) y_k + A(r Q^{-1}) \epsilon_k$$

Le prédicteur optimal correspondant est du type série-parallèle, et peut s'écrire :

$$\hat{y}_k = \hat{\theta}_k^T \phi_{k-1} \text{ avec } \hat{\theta}_k^T = (a_1 ; \dots ; a_n)$$

$$\text{et } \phi_{k-1}^T = (-y_{k-1} + r \epsilon_{k-1} ; \dots ; -y_{k-n} + r^n \epsilon_{k-n})$$

Pour l'adaptation des paramètres nous utiliserons l'algorithme des moindres carrés qui constitue l'algo-



-rithme de base de toutes les méthodes d'identification récursives [1].

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + F_{k-1} \psi_{k-1} \epsilon_k \quad \text{mise à jour du vecteur paramètres.}$$

$$F_k = \frac{1}{\lambda_1(k)} \left[ F_{k-1} - \frac{F_{k-1} \psi_{k-1} \psi_{k-1}^T F_{k-1}}{\lambda_1(k) + \psi_{k-1}^T F_{k-1} \psi_{k-1}} \right]$$

gain d'adaptation ou matrice de covariance d'erreur

$$0 < \lambda_1(k) \leq 1; \quad 0 < \lambda_2(k) \leq 2 \text{ et } F(0) > 0$$

$$\epsilon_k^0 = y_k - \hat{\theta}_{k-1}^T \phi_{k-1} \quad \text{erreur de prédiction à priori.}$$

$$\epsilon_k = y_k - \hat{\theta}_k^T \phi_{k-1} = \frac{\epsilon_k^0}{1 + \psi_{k-1}^T F_{k-1} \psi_{k-1}}$$

$$\psi_k^T = \left[ -\frac{\partial \epsilon_k}{\partial a_1}; \dots; -\frac{\partial \epsilon_k}{\partial a_n} \right] \quad \text{le vecteur gradient}$$

De cet algorithme seront dérivées les méthodes du maximum de vraisemblance, des moindres carrés étendus, et d'erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu. Les différences entre ces méthodes résident dans le choix de l'approximation faite pour le gradient  $\psi_k$ , de l'erreur de sortie (filtrée ou non) et du type de prédicteur.

### 1) \* Méthode du maximum de vraisemblance : (MMV).

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - \sum_{i=1}^n a_i (-y_{k-i} + r^i \epsilon_{k-i})$$

Sachant que le signal  $y_k$  n'est pas fonction du vecteur paramètre estimé  $\hat{\theta}_k$ , on peut exprimer le gradient en différentiant  $\epsilon_k$ .

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial a_j} \cdot A(Q^{-1}) = y_{k-j} - r^j \epsilon_{k-j}$$

$$\psi_k = \frac{1}{F(Q^{-1})} \phi_k \quad \text{avec } F(Q^{-1}) = A(r Q^{-1})$$

Ce qui signifie que le gradient  $\psi_k$  peut s'obtenir par simple filtrage du vecteur de mesure  $\phi_k$  par  $1/A(r Q^{-1})$ . Ne connaissant pas les coefficients du polynôme  $A(r Q^{-1})$  nous utiliserons les paramètres estimés de  $A(r Q^{-1})$  à l'instant précédent ; c'est la méthode du maximum de vraisemblance. Elle n'est en réalité qu'une approximation de la méthode du maximum de vraisemblance hors ligne.

La convergence de cette méthode n'est assurée que si  $A(r Q^{-1})$  est stable. Un test de stabilité de ce polynôme est nécessaire, et pour assurer la convergence on utilise généralement une contraction de facteur  $k$  qui à un polynôme  $F(Q^{-1})$  associe  $F(k Q^{-1})$  avec  $k \in [0, 1]$ , réalisant ainsi une projection des zéros à l'intérieur du cercle unité. Cette contraction permet de réduire l'étape transitoire de l'algorithme, car plus les zéros de  $F(Q^{-1})$  sont proches du cercle unité, plus la durée de l'effet transitoire dû à une perturbation, sera longue.

### 2) \* Méthode des moindres carrés étendus : (MMCE).

L'utilisation, dans les formules précédentes d'un filtre  $F(Q^{-1}) = 1$ , permet d'avoir une approximation du gradient, en utilisant directement le vecteur de mesure  $\psi_k = \phi_k$ . Cette méthode est une approximation de la méthode du maximum de vraisemblance. La convergence est assurée si la condition de stricte positivité est réalisée.

Le même algorithme, peut être implanté pour les deux méthodes (MMV et MMCE) en prenant pour préfiltre  $F(z^{-1}) = A(K r z^{-1})$ ; le choix de  $k$  déterminera la méthode désirée ( $K = 0$ ; MMCE ou  $K = 1$ ; MMV).

La méthode du maximum de vraisemblance est en général initialisée par la méthode des MCE. On peut aussi choisir un paramètre  $k$  variant exponentiellement dans le temps; allant de 0 à 1, ce qui réaliserait une

commutation douce d'une méthode à l'autre (de la MMCE à la MMV), ou une valeur constante pour  $K$  ce qui définirait une méthode hybride [17].

### 3) \* Méthode d'erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu :

$$\hat{y}_k = [1 - A(Q^{-1})] y_k + D(Q^{-1}) \epsilon_k \quad \text{avec } D(Q^{-1}) = C(Q^{-1}) - A(Q^{-1})$$

On constate que pour notre cas particulier elle se ramène à la méthode des Moindres carrés Etendus. Elle nécessite donc les mêmes conditions de convergence et les mêmes conditions de stabilité.

### 4) Méthode du gradient modifiée :

La modification apportée consiste à prendre pour gradient un vecteur légèrement différent :

$$\psi_{M-k-1}^T = \left[ -y_{k-1}, \dots, -y_{k-n} \right] \quad \text{pour le Gradient Modifié.}$$

cette méthode est identique à celle présentée dans [11] par Bhaskar Rao and Kung. Pour une autre méthode du gradient simplifié, nous pouvons prendre :

$$\psi_{MY-k-1}^T = \left[ -\bar{y}_{k-1}, \dots, \bar{y}_{k-n} \right] = \frac{1}{F(Q^{-1})} \psi_{M-k-1}^T$$

qui nous donne une méthode plus proche du maximum de vraisemblance que la précédente. Des résultats de simulation, ont montré qu'elle a un bon comportement pour des filtres dont les zéros sont très proches du cercle unité. La méthode du gradient simplifié, permet de réduire les calculs et d'améliorer la stabilité de l'algorithme d'adaptation, en réalisant un découplage du bruit. Pour des références ultérieurs, à cette méthode, nous la désignerons par MMVS, méthode du maximum de vraisemblance simplifiée.

### III.2. Capacités d'adaptation des algorithmes :

#### \* Facteurs d'oubli :

L'utilité des deux facteurs d'oubli  $\lambda_1(k)$  et  $\lambda_2(k)$ , dans la matrice de gain, est qu'ils permettent d'améliorer les capacités d'adaptation des algorithmes, pour des systèmes variant lentement dans le temps. Ils permettent de choisir un compromis entre une adaptation rapide des paramètres et la possibilité de poursuite de variation de ces derniers, en évitant que la matrice de gain ne s'annule.

#### \* Fonction de pénalité :

Introduite par B. Friedlander et al [19], pour faire tendre plus rapidement les racines du polynôme  $A(Q^{-1})$  vers le cercle unité, elle consiste à ajouter à l'erreur de prédiction un terme proportionnel à  $(1-a_n)$ . car si toutes les racines sont sur le cercle unité le coefficient de plus haut degré est égal à l'unité.

### IV - RESULTATS DE SIMULATIONS

- Une étude comparative des trois méthodes (MMCE Méthode des Moindres Carrés Etendus, MMV Méthode du Maximum de Vraisemblance, et MMVS Méthode du Maximum de Vraisemblance Simplifiée), a été effectuée, sur des données simulées composées de deux fréquences :  $[f_1 = 0.1f_e \text{ et } f_2 = 0.25 f_e]$ ;  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage) le rapport signal sur bruit est  $\{30\text{dB}\}$ . On constate que le comportement des méthodes du maximum de vraisemblance est nettement meilleur pour  $r = 0.9$ , la convergence vers les vrais paramètres est assurée de façon stable et plus rapide (figure 4.1 b et c).

- Une seconde comparaison pour  $r = 0.95$  donnant des zéros encore plus proches du cercle unité, est présentée dans la figure 4.2. L'initialisation des algorithmes est identique au cas précédent. La convergence des paramètres est considérablement ralentie pour la (MMV) Méthode du Maximum de vraisemblance (figure 4.2b) et encore plus pour la méthode des Moindres Carrés Etendus ((MMCE). Elle n'a pas été observée pour 512 points. La figure 4.2a montre que la

Méthode du Maximum de Vraisemblance Simplifiée a un comportement meilleurs dans ce cas, ce qui signifie l'importance du découplage obtenu en supprimant la partie (MA) à Moyenne ajustable du gradient  $\gamma_k$ .

- La figure 4.3 présente des résultats pour le cas de trois sinusoides. La méthode utilisée est celle du MMV pour des valeurs de r différentes. On constate que l'on ne gagne pas beaucoup en vitesse de convergence, si on continue de diminuer r au delà de 0.9. Toutefois de bons résultats peuvent être obtenus pour des enregistrements courts (128 points).

- Si on utilise un ordre pour le filtre inférieur à celui du signal, la convergence de la variance de l'erreur se produit vers un minimum local. Ceci correspond aux résultats observés en figure (4.4 a et b) qui signifient qu'une ou deux sinusoides sont détectés parmi les trois qui composent le signal.

La figure 4.4b correspond à la détection de deux fréquences et la figure 4.4a à celle d'une fréquence parmi les trois par la méthode MMV et pour r = 0.9. Ceci montre l'intérêt d'utiliser une batterie de filtres d'ordre deux en cascades pour détecter séparément plusieurs sinusoides. dans la figure 4.4b on voit que pour une seule sinusoides la convergence est légèrement plus rapide que dans le cas d'un filtre d'ordre six.

- Le premier exemple (cas de deux sinusoides) a été repris avec des rapports signal sur bruit différents : RSB = 6 dB et RSB = - 0,14 dB. La figure 4.5 montre des résultats d'identification sur 440 points les paramètres sont prélevés une fois sur quatre. Nous avons représenté l'évolution des paramètres pour rendre compte de l'évolution du filtre au cours du temps. La Méthode du Maximum de Vraisemblance Simplifiée (gradient tronqué MMVS), converge pratiquement aussi rapidement que celle du maximum de vraisemblance pour RSB = 6, dB.

- La Figure 4.6 montre des résultats de modélisation pour un RSB = - 0.14. dB et r = 0.9, sur les 400 premiers points du fichier. On constate que dans les cas de signaux très bruités, la convergence de la Méthode Simplifiée (MMVS) est plus lente que celle du (MMV) (voir figure 4.6 (a) et (b), mais les paramètres présentent moins de fluctuations grâce à la propriété de découplage. La figure 4.6c représente les résultats de la MMVS pour r = 0.95, la convergence est plus lente, mais le spectre obtenue aura des bandes plus fines.

**IV - CONCLUSION**

Une approche naturelle à permis l'obtention de filtres sélectifs, en imposant des contraintes à la structure des modèles classiques de type ARMA. Les filtres obtenus peuvent être adaptés de manière réursive. Pour cela plusieurs méthodes distinctes ont été dérivées à partir des méthodes classiques. Ces méthodes nécessitent moins de paramètres que les méthodes autorégressives, et moitié moins de paramètres que les méthodes ARMA classiques, d'où une réduction de la complexité des algorithmes et du nombre d'opérations nécessaires. La résolution en fréquence obtenue est plus importantes, et la sensibilité au bruit plus faible. La convergence est d'autant plus rapide que largeur de bande des pics est grande. La méthode du maximum de vraisemblance converge plus rapidement que la méthode des moindres carrés étendus. Les filtres sélectifs offrent la possibilité de simplifier le gradient en y supprimant la partie MA, ce qui réalise un découplage et accélère la convergence pour des signaux bruités et des filtres à bandes étroites. L'utilisation d'un ordre plus faible, permet de supprimer des sinusoides sans changer le reste du spectre. De ce fait on peut utiliser plusieurs filtres d'ordre deux pour détecter les différentes sinusoides composant le signal. Cette méthode offrirait l'avantage de pouvoir estimer l'amplitude et la phase de la sinusoides à la sortie du filtre lui correspondant. Des résultats complémentaires seront présentés ultérieurement.

**REFERENCES**

- [1] L. LYUNG and T. SODERSTROM 1983. Theory and Practice of recursive Identification methods MIT Press. Cambridge Massachusets London.
- [2] G.E.P. BOX and J.M. JENKINS. Time series Analysis. Holden day, San Francisco, London.
- [3] B. WIDROW et al 1975 "Adaptive Noise Cancelling : Principles and Applications" ; proc IEEE, V 63, n 12, December 1975, pp 1692 - 1716.
- [4] J.R. TREICHLER. Transient and Convergence Behavior of the Adaptative Line Enhancer. IEEE, ASSP, V7, n 1, February 1979.
- [5] B. FRIEDLANDER Recursive Maximum Likelihood ARMA Line Enhancer. IEEE, ASSP, V30, Aug 1982.
- [6] I.D. LANDAU, L. DUGARD and S. CABRERA. Applications of Output Error Recursive estimation Algorithms for adaptive signal Processing. ICASSP, 1982. Paris Mai 1982.
- [7] J.R. RICHARD JOHNSON 1984. Adaptive IIR Filtering ; Current results and futur directions. IEEE, IT, V30, N 2, March 1984.
- [8] B. FRIEDLANDER System identification techniques for adaptive signal processing. IEEE trans. ASSP, V30, pp 240-246, April 1982.
- [9] A. RAHIMI, C.D. MOTE, "Identification of the frequency spectrum trough signal modeling", Dec. 1982.
- [10] N. MARTIN. Thèse Docteur-Ingénieur CEPHAG (ENSIEG) Grenoble Avril 1984.
- [11] D.V. BHASKAR RAO and S.Y. KUNG. "Adaptative Notch Filtering for Retrieval of Sinusoids in Noise", IEEE, ASSP, V32, N 4, August 1984, pp 791 - 802.
- [12] J.R. GLOVER. "Adaptive Noise Cancelling Applied to Sinusoidal Interferences", IEEE, ASSP, V25, N 6, December 1977.
- [13] S.M. KAY, "Spectrum Analysis - A Modern Perspective", proc. IEEE, V69, N11, Nov. 1981, pp 1380 - 14.
- [14] J.R. TREICHLER "Response of the Adaptive Line Enhancer to chirped and doppler shifted sinusoids". IEEE, ASSP. pp 243 - 248, V28, N 3, June 1980.
- [15] B. FRIEDLANDER "A recursive maximum Likechhood for ARMA spectral estimation" IEEE IT, V29, July 1982.
- [16] I.D. LANDAU "Unbiased recursive identification using model reference adaptive technique" IEEE, A.C, V21, pp 194 - 202, 1976 see also "Addendum", V23 pp 97 - 99. 1978.
- [17] B. FRIEDLANDER. A Modified Prefilter for Some Recursive parameter estimation IEEE, ASSP27 N 1, Feb. 1982.
- [18] I.D. LANDAU. Sur l'utilisation des techniques d'identification récurives en traitement du signal. GretsI 1983. Nice Mai 1983.
- [19] B. FRIEDLANDER. Analysis and Performance evaluation of an adaptive Notch filter. IEEE, IT, V30, N 2, MARCH 1984.



ANALYSE SPECTRALE ADAPTATIVE DE SIGNAUX

A BANDES ETROITES MULTIPLES

