HAL open science

LA DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE L'ENTROPIE POSITIVE D'HERMAN D'APRES BERGER ET TURAEV

Marie-Claude Arnaud

To cite this version:

Marie-Claude Arnaud. LA DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE L'ENTROPIE POSITIVE D'HERMAN D'APRES BERGER ET TURAEV. Séminaire Bourbaki, Nov 2019, Paris, France. hal-02491292

HAL Id: hal-02491292

https://hal.science/hal-02491292

Submitted on 26 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Séminaire BOURBAKI Novembre 2019
72e année, 2019–2020, nº 1166

LA DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE L'ENTROPIE POSITIVE D'HERMAN
[d'après Berger et Turaev]

par **Marie-Claude Arnaud**

Abstract We present the proof of Berger and Turaev of Herman's positive entropy conjecture. In every neighbourhood of identity in the set of smooth symplectic diffeomorphisms of the 2-dimensional disc, there exists a diffeomorphism with positive metric entropy.

1. INTRODUCTION

Ce texte traite de l'entropie métrique pour la mesure de Lebesgue en dimension 2, une quantité qui mesure le chaos détecté par la mesure de Lebesgue pour un système dynamique différentiable la préservant. Bien longtemps, les seuls exemples connus d'entropie métrique positive [(1)] ont été les systèmes Anosov (appelés aussi uniformément hyperboliques), définis sur le tore 2-dimensionnel. D'autres exemples ont suivi dans les années 80, construits par Katok (1980), sur toute surface, mais toujours élaborés à partir des Anosov, et toujours loin de l'identité au sens de la topologie C^1. Au congrès international de 1998, Herman énonce la conjecture suivante.

Conjecture 1.1 (Herman). — *Soit* $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D})$ *l'ensemble des difféomorphismes du disque de classe* C^∞ *qui préservent l'aire. Dans tout voisinage de l'identité dans* $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D})$*, il existe un difféomorphisme d'entropie métrique positive.*

Une autre conjecture fameuse de l'entropie positive, qui concerne la famille standard des difféomorphismes du tore définis par $f_\lambda(x,y) = (2x - y + \lambda \sin 2\pi x, x)$, a été énoncée par Sinai (1994).

Conjecture 1.2 (Sinai). — *Pour tout paramètre* $\lambda \neq 0$*, l'entropie métrique de* f_λ *est positive.*

En ce qui concerne la conjecture 1.2, on ne sait démontrer pour aucun paramètre λ que l'entropie est positive, même si les simulations numériques semblent montrer des mers de chaos.

1. Ici, positive signifie strictement positive.

La conjecture 1.1 vient d'être démontrée par Berger et Turaev (2019), dans un véritable tour de force et l'objet de ce texte et de présenter leur démonstration.

Après avoir rappelé ce qu'est l'entropie métrique, nous commencerons par décrire ce que Berger et Turaev appellent les îlots stochastiques, qui généralisent un exemple dû à Przytycki (1982). Ces objets, porteurs d'entropie positive, sont fragiles et ne résistent pas aux perturbations. Berger et Turaev construisent un îlot stochastique qui résiste à un certain type de perturbations qu'ils introduisent, dites relatives aux liens. Nous parlerons alors de renormalisation et expliquerons comment l'existence de bandes homoclines pour un point périodique hyperbolique permet de créer par perturbation des dynamiques qui, renormalisées, sont très proches de n'importe quelle dynamique (par exemple de l'îlot stochastique de Berger et Turaev). Une partie des méthodes utilisées ici ont été développées par Turaev (2003), dans le contexte des dynamiques universelles et par Gonchenko, Shilnikov et Turaev (2008), pour étudier les domaines de Newhouse. Il s'agit de la partie la plus technique de la preuve. Finalement, nous montrerons comment construire dans tout voisinage de l'identité un difféomorphisme f ayant une bande homocline, ce qui permettra d'injecter une dynamique proche de l'îlot stochastique de Berger et Turaev comme renormalisée de f. Il faudra ensuite restaurer l'îlot stochastique. Cette dernière étape utilise un opérateur astucieusement défini pour évaluer l'écart entre deux branches de variétés invariantes.

Remords. — *L'élément central de l'exposé est la démonstration de la conjecture de Herman. Mais en vérité, Berger et Turaev démontrent plus que cette conjecture et montrent le résultat suivant : soit f un difféomorphisme préservant l'aire qui a un point périodique non hyperbolique et V un voisinage de f en topologie C^∞. Alors V contient un difféomorphisme préservant l'aire d'entropie métrique positive.*
Ceci leur permet de progresser vers la conjecture suivante.

Conjecture 1.3 (Berger & Turaev). — *Il existe un ensemble dense de* $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D})$ *dont tout élément est d'entropie métrique positive.*

Je remercie chaleureusement Sylvain Maillot pour sa relecture de cet exposé et ses précieux conseils, ainsi que Pierre Berger et Sylvain Crovisier qui m'ont aidé à améliorer tant le texte que les illustrations. Merci aussi à toute l'équipe éditoriale qui fait un travail remarquable dans un délai très resserré.

2. PARLONS D'ENTROPIES

Un *système dynamique discret* est la donnée d'une transformation (bijection) $f : X \to X$ d'un ensemble X muni d'une structure dont on étudie les itérées $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier,

— si X est un espace métrique, f est un homéomorphisme ;
— si X est un espace de probabilité, f est mesurable et préserve la probabilité.

Pour introduire une notion de complexité d'un tel système, on s'intéresse aux « morceaux finis » d'orbites $(f^i x)_{0\leq i\leq n} \in X^{n+1}$ de longueur $n \in \mathbb{N}$ et on regarde ce qui se passe quand n tend vers $+\infty$. Étant donné un recouvrement ouvert ou mesurable

$$X = \bigcup_{0\leq i\leq m} X_i$$

de X, chaque morceau fini d'orbite $(f^i x)_{0\leq i\leq n}$ a au moins un itinéraire $(n_i(x))_{0\leq i\leq n} \in [0,m]^{n+1}$ qui vérifie $f^i(x) \in X_{n_i(x)}$. On note $\mathcal{I}((X_i), f, n) \subset [0,m]^{n+1}$ l'ensemble de tous les itinéraires pour f. Si les X_i forment une partition et pas seulement un recouvrement, chaque morceau d'orbite a un unique itinéraire $I(x)$ et l'entropie de f en temps n relativement à la partition (X_i) est alors le logarithme du nombre des itinéraires.

$$h((X_i), f, n) = \log |\mathcal{I}((X_i), f, n)| \text{ [2]}$$

Si les X_i forment seulement un recouvrement, on choisit $\mathcal{J}((X_i), f, n) \subset \mathcal{I}((X_i), f, n)$ de cardinal minimal tel que chaque morceau d'orbite de longueur n a un itinéraire dans $\mathcal{J}((X_i), f, n)$, et on note

$$h((X_i), f, n) = \log |\mathcal{J}((X_i), f, n)|.$$

Dans les deux cas, la quantité $h((X_i), f, n)$ est sous-additive en n et donc la quantité

$$h((X_i), f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h((X_i), f, n)$$

existe. C'est l'entropie de f relativement au recouvrement (X_i), qui mesure donc le taux de croissance exponentiel du nombre d'itinéraires en fonction de n. On a ainsi

$$\mathcal{J}((X_i), f, n) \propto \exp\left(n h((X_i), f)\right). \text{ [3]}$$

Quand X est un espace métrique et f un homéomorphisme, l'*entropie topologique* $h_{\text{top}}(f)$ de f est alors le supremum des $h((X_i), f)$ pour (X_i) parcourant l'ensemble des recouvrements ouverts de X. Cette définition d'entropie topologique est due à Adler, Konheim et McAndrew (1965) qui s'inspiraient de la définition d'entropie métrique de Kolmogorov que nous donnons plus loin. Une définition équivalente souvent plus maniable pour traiter les exemples fut introduite indépendamment par Dinaburg (1971) et Bowen (1970) par la suite.

Exemple 2.1. — Une isométrie d'un espace métrique compact est d'entropie topologique nulle.

Quand (X, μ) est un espace de probabilité et f est une bijection mesurable qui préserve μ, on définit l'entropie métrique en tirant parti de la mesure. Pour $(X_i)_{0\leq i\leq m}$ partition mesurable, pour chaque $I \in \mathcal{I}((X_i), f, n)$, on note X_I l'ensemble des points

2. Les barres $|.|$ servent à désigner le cardinal.
3. Le signe $\propto$ signifie que le logarithme du rapport des deux quantités est négligeable devant n.

de X d'itinéraire I. L'entropie métrique de f en temps n relativement à la partition (X_i) est alors

$$h((X_i), f, \mu, n) = -\sum_{I \in \mathcal{I}} \mu(X_I) \log(\mu(X_I)).$$

C'est l'intégrale de la fonction $x \in X \mapsto -\log \mu(X_{I(x)})$. On a alors

$$h((X_i), f, \mu, n) \leq \log |\mathcal{I}((X_i), f, n)| = h((X_i), f, n).$$ [4]

avec égalité seulement dans le cas particulier où les X_I sont équiprobables. L'entropie métrique de f relativement à la partition (X_i) est

$$h((X_i), f, \mu) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} h((X_i), f, \mu, n).$$

L'*entropie métrique* $h_\mu(f)$ de f est le supremum des $h((X_i), \mu, f)$ pour (X_i) parcourant l'ensemble des partitions mesurables de X. Cette notion, antérieure à la notion d'entropie topologique, fut introduite par Kolmogorov, en 1959 (cf. Kolmogorov, 1985), qui s'inspirait des travaux de Shannon concernant la théorie de l'information.

On suppose que X est un espace métrique compact et que f en est un homéomorphisme. L'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des probabilités boréliennes de X est muni de la topologie faible et l'ensemble $\mathcal{M}(f)$ des probabilités boréliennes invariantes par f est alors un compact non vide. Goodwyn (1971) a montré l'inégalité variationnelle

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(f), h_\mu(f) \leq h_{\text{top}}(f).$$

Il est donc possible que l'entropie d'une mesure particulière soit nulle et que l'entropie topologique soit positive [5] [6], alors que l'inverse est impossible. Katok (1980) a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un difféomorphisme de classe $C^{1+\alpha}$ d'une surface soit d'entropie topologique positive : un tel difféomorphisme a un fer à cheval [7]. Or, il y a de très nombreux difféomorphismes qui ont un fer à cheval. Dans un travail en cours, Le Calvez et Sambarino montrent que si M est une surface compacte munie d'une forme d'aire, pour tout $k \in [1, \infty]$, il existe un ouvert dense de l'ensemble des difféomorphismes de classe C^k de M qui préservent l'aire dont tout élément a un fer à cheval. Précisons qu'un fer à cheval est un ensemble de Cantor [8] et est donc petit au sens de la topologie car c'est un fermé d'intérieur vide.

4. C'est une conséquence de la convexité de la fonction $x \mapsto x \cdot \log(x)$.

5. Les deux notions d'entropie sont toujours positives ou nulles. Pour ne pas alourdir le texte et en suivant la terminologie anglaise, nous avons omis le terme strictement devant positive, mais dans ce texte positive signifiera toujours strictement positive.

6. Pour un difféomorphisme de classe C^1 d'une variété compacte, les deux types d'entropie sont finies.

7. Le fer à cheval est un ensemble compact invariant qui apparait quand les variétés stable et instable d'un point périodique hyperbolique s'intersectent transversalement ailleurs qu'en ce point. Ils furent construits par Smale (1965).

8. Rappelons qu'un ensemble de Cantor est un ensemble non vide, compact, totalement discontinu et sans point isolé. Il a donc la puissance du continu.

Plaçons nous donc dans le cas d'une surface compacte munie d'une forme d'aire, par exemple le disque unité de $\mathbb{R}^2$ muni de la mesure de Lebesgue. Désormais, nous ne nous intéresserons à l'entropie métrique que pour la mesure associée à la forme d'aire. On sait alors que l'entropie topologique de la plupart (au sens de la catégorie de Baire) des difféomorphismes du disque qui préservent l'aire est positive. Ceci n'implique bien sûr pas que leur entropie métrique (pour la mesure de Lebesgue donc) est positive.

Connaissons-nous beaucoup de difféomorphismes d'entropie métrique positive ? En 1977, Pesin a fait le lien entre l'entropie métrique pour une mesure de Lebesgue et le taux exponentiel avec lequel des points proches s'éloignent sous l'action dynamique, i.e. les taux de divergence des différentielles Df^n. Ceux-ci s'appellent les exposants de Lyapunov. Plus précisément, pour un difféomorphisme f qui préserve une mesure de probabilité μ équivalente à une forme volume, le fibré tangent peut se décomposer comme somme directe $\oplus E_i(x)$ de fibrés mesurables Df-invariants sur un ensemble de μ-mesure 1 et pour chaque $v \in E_i(x)$ non nul, la limite suivante existe et est indépendante de v.

$$\lambda_i(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left(\|Df^n(x)v\|\right).$$

Il s'agit des exposants de Lyapunov au point x.

Pesin (1977) montre que si f est un difféomorphisme de classe au moins C^2 d'une variété qui préserve une mesure μ équivalente à une forme volume, alors l'entropie est égale à la somme des exposants de Lyapunov positifs, i.e.

$$h_\mu(f) = \int \sum \lambda_i^+(x) \mathrm{dim} E_i(x) d\mu(x)$$

où les λ_i^+ sont les exposants de Lyapunov positifs et $\dim E_i(x)$ est la multiplicité de $\lambda_i^+(x)$. Ceci permet de construire des exemples de difféomorphismes d'entropie métrique positive pour la mesure de Lebesgue.

Exemple 2.2. — La transformation du tore 2-dimensionnel $f : \mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{T}^2$ définie par $f(\theta_1, \theta_2) = (2\theta_1 + \theta_2, \theta_1 + \theta_2)$ a pour entropie $\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ puisque les valeurs propres de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sont $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Cet exemple appartient à la classe plus vaste des difféomorphismes Anosov, ceux pour lesquels on peut écrire le tangent à la variété comme somme directe de deux sous-fibrés Df-invariants $E^s \oplus E^u$, l'un suivant lequel Df contracte et l'autre suivant lequel Df dilate. On sait que la seule surface compacte qui porte un difféomorphisme Anosov est le tore $\mathbb{T}^2$ et qu'un difféomorphisme Anosov n'est pas homotope à l'identité, et donc est loin de l'identité. On sait aussi qu'être Anosov est une propriété stable par perturbation C^1 petite, et on obtient donc un ouvert de difféomorphismes dont l'entropie métrique est positive. Nous n'avons aucune raison de penser que les exemples présentant de l'entropie métrique positive que nous allons construire par la suite ont un voisinage en topologie C^∞ qui a la même propriété, mais nous ne savons démontrer ni la véracité de ceci ni son contraire.

Si on n'a en tête que les difféomorphismes Anosov comme exemples ayant une entropie métrique positive, plusieurs questions paraissent naturelles.

Questions provisoires. — [9]

1. *Existe-t-il des exemples de difféomorphismes d'entropie métrique positive sur des surfaces autres que le tore ?*
2. *Peut-on trouver de tels difféomorphismes très proches de l'identité en topologie C^∞ ?*
3. *Plus généralement, l'ensemble des difféomorphismes d'entropie métrique positive est-il dense dans l'ensemble des difféomorphismes qui préservent l'aire ?*

3. LES ÎLOTS STOCHASTIQUES ET LEURS PERTURBATIONS

3.1. Notion et construction d'îlots stochastiques

Katok (1979) a prouvé que toute surface compacte porte au moins un difféomorphisme de classe C^∞ qui préserve la forme d'aire et est d'entropie métrique positive. Il commence par construire un tel difféomorphisme pour le disque qui vaut l'identité au bord, puis injecte ce difféomorphisme dans toute surface.

Pour construire son exemple sur le disque, il part d'un difféomorphisme A Anosov du tore tel que $A \circ (-\mathrm{Id}) = -A$ et tel que les quatre points fixes de $-\mathrm{Id}$ sont aussi fixés par A. Il ralentit A aux points fixes (i.e. le rend tangent à l'identité) en préservant à la fois la symétrie par $-\mathrm{Id}$ et l'invariance des directions stables et instables. Il obtient ainsi un difféomorphisme F du tore tel que $F \circ (-\mathrm{Id}) = -F$ et qui en dehors des quatre points fixes a un exposant de Lyapunov positif. Le quotient du tore par $-\mathrm{Id}$ est une sphère. En passant donc au quotient, on obtient un homéomorphisme f de $\mathbb{S}^2$. Le passage au quotient définit un revêtement de degré 2 ramifié aux quatre points fixes, f est de classe C^∞ en dehors des points fixes. Le seul problème de régularité qui pourrait se poser concernerait les points fixes, mais avoir rendu le difféomorphisme F tangent à l'identité permet d'obtenir un f de classe C^∞, qui a comme avait F une entropie métrique positive. Ensuite, on éclate la sphère en un des points fixes pour obtenir finalement un difféomorphisme g du disque fermé qui vaut l'identité au bord et qui est d'entropie métrique positive.

Notation 3.1. — *On notera $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Diff}^r_\omega(\mathbb{D})$ désignera l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de classe C^r du disque unité.*

9. Provisoires car comme nous allons l'expliquer dans ce texte, Katok a répondu positivement à la première et Berger et Turaev positivement à la seconde.

Remarquons que dans cet exemple, presque tout point (pour la mesure d'aire) a un exposant de Lyapunov positif, i.e. le domaine qui porte l'entropie positive est de mesure pleine. Cette propriété ne persiste pas par perturbation petite en topologie C^∞ : on peut rendre générique [10] l'un des points fixes elliptiques, de telle sorte qu'on puisse appliquer en son voisinage les théorèmes K.A.M. qui fournissent un ensemble de mesure positive sur lequel tout point a ses exposants de Lyapunov qui sont nuls [11]. Mais il pourrait subsister une région invariante plus petite de mesure non nulle sur laquelle un des exposants de Lyapunov est positif, la question est ouverte. Tout comme la question suivante plus précise d'Herman à l'ICM de 1998 (Herman, 1998).

Question. — *Comme l'application qui à f associe son plus grand exposant de Lyapunov pour la mesure de Lebesgue est semi-continue supérieurement, l'ensemble $\mathcal{G}$ des difféomorphismes de classe C^1 préservant l'aire dont les exposants de Lyapunov sont nuls presque partout est un ensemble G_δ. Par la théorie de Baire, on ne peut avoir qu'une des deux situations suivantes.*

1. *soit $\mathcal{G}$ est dense ;*
2. *soit il existe un ensemble ouvert en topologie C^1 dont tout élément est d'entropie métrique positive.*

Quelle est la situation qui est vérifiée, la première ou la seconde ?

En topologie C^1, Mañé (1984, 1996) avait annoncé puis donné des éléments de démonstration qu'un difféomorphisme symplectique générique d'une surface qui n'est pas Anosov est d'entropie métrique nulle, la démonstration complète ayant été donnée par Bochi (2002). La question reste ouverte pour la topologie C^∞.

Przytycki (1982) a construit sur le tore un exemple où on a une situation mixte : une région où l'entropie métrique est positive et une région elliptique où l'entropie métrique est nulle. Berger et Turaev appellent *îlots stochastiques* une famille de dynamiques que nous décrivons ci-après en définition 3.3 et qui englobe la région d'entropie métrique positive construite par Przytycki.

Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ d'une surface M qui préserve une forme d'aire. On rappelle qu'un point τ-périodique $P = f^\tau(P)$ est hyperbolique si les deux valeurs propres λ, λ^{-1} de $Df^\tau(P)$ sont réelles et de module différent de 1. On sait alors qu'il existe deux immersions injectives $j_s, j_u : (\mathbb{R}, 0) \hookrightarrow (M, P)$ de classe C^∞ telles que $j_s(\mathbb{R})$ (resp. $j_u(\mathbb{R})$) est la variété stable (resp. instable) de P qui est définie par

$$W^s(P, f) = \{x \in M; \lim_{n\to+\infty} d(f^n x, f^n P) = 0\} = W^u(P, f^{-1}).$$

10. Un point fixe est elliptique si sa différentielle est conjuguée à une rotation. Il est alors générique si le rapport de l'angle de cette rotation à 2π est diophantien et le premier terme dans son développement en forme normale est non nul.

11. Cet ensemble s'écrit comme la réunion d'un ensemble de courbes sur lesquelles la dynamique est conjuguée à une rotation. Cette propriété d'avoir des courbes invariantes KAM subsiste d'ailleurs si on fait des perturbations petites en topologie C^∞, même si le fait d'avoir un nombre de rotation diophantien ne subsiste pas.

Une *branche stable* (resp. *instable*) de P est la réunion de $\{P\}$ et d'une des deux composantes connexes de $W^s(f,P)\backslash\{P\}$ (resp. $W^u(f,P)\backslash\{P\}$).

Définition 3.2. — *On appelle alors* lien hétérocline *un cercle topologiquement plongé (i.e. un lacet) invariant qui s'écrit comme une union finie de branches stables de points périodiques hyperboliques. Si n points périodiques interviennent, on parle de n-*lien*, de* bi-lien *si $n = 2$.*

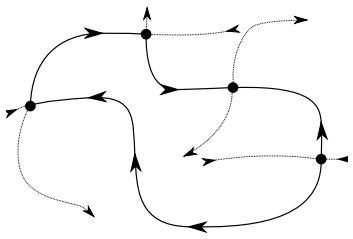


Figure 1. Un lien hétérocline en gras

Un lien hétérocline est alors de classe C^∞ sauf éventuellement aux points périodiques où il peut présenter un point anguleux.

Définition 3.3. — *Un îlot stochastique est un ouvert invariant $\mathcal{I}$ dont le bord est une union finie de liens hétéroclines tel que chaque point de $\mathcal{I}$ a un exposant de Lyapunov positif.*

Berger et Turaev (2019) adaptent la construction de Katok en remplaçant les quatre points fixes par des disques bordés par des bi-liens hétéroclines, le complémentaire de leur union étant alors un îlot stochastique $\mathcal{I}_0$. Ils se ramènent au disque comme faisait Katok.

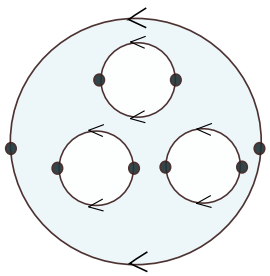


Figure 2. L'îlot stochastique de Berger et Turaev.

3.2. Ilots stochastiques et perturbations

Comme nous l'avons déjà mentionné, le problème de ces constructions est leur fragilité. Par perturbation, les points hyperboliques et leurs branches persistent en ce sens qu'ils admettent des prolongement par continuité, mais en général, deux branches ne coïncident pas, et quand elles se coupent, elle se coupent transversalement. Or, pour injecter leur construction dans une dynamique proche de l'identité (ce que n'est pas cet exemple), les auteurs vont avoir besoin de perturber. Ils proposent alors de restreindre l'ensemble des perturbations de manière à ne considérer que des perturbations qui préservent les liens hétéroclines (plutôt d'ailleurs ils feront des perturbations qui cassent ces liens mais seront capables de les restaurer).

Définition 3.4. — *Une perturbation f de f_0* relativement aux liens d'un îlot stochastique de f_0 [12] *bordé par m liens hétéroclines est une perturbation telle que les branches stables ou instables qui définissent le bord de l'îlot stochastique de f_0 ont leurs prolongements par continuité qui définissent encore m liens hétéroclines (pour f).*

Un îlot stochastique $\mathcal{I}_0$ pour f_0 est robuste relativement aux liens *s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f_0 pour la topologie C^2 tel que tout difféomorphisme (non nécessairement conservatif) de $f \in \mathcal{U}$ qui est une perturbation de f_0 relativement aux liens de $\mathcal{I}_0$ a un îlot stochastique bordée par les liens perturbés.*

Proposition 3.5. — *L'exemple construit par Berger et Turaev est robuste relativement aux liens.*

Pour démontrer ceci, Berger et Turaev s'inspirent d'un résultat non publié de Arroyo et Pujals concernant les difféomorphismes des surfaces à bord qui sont structurellement stables par C^k-perturbation [13].

Ils commencent pas faire une perturbation de la perturbation f de f_0 de façon à ce que les liens de f_0 et sa perturbation que nous noterons encore f soient les mêmes [14]. Ensuite, ils se ramènent à travailler dans le tore en utilisant le revêtement ramifié introduit précédemment, et constatent qu'ils sont en train de perturber en topologie Lipschitz un difféomorphisme Anosov, ce qui donne un homéomorphisme qui est encore un difféomorphisme sauf aux quatre singularités du revêtement ramifié et a encore un exposant de Lyapunov positif partout sauf en ces points. Ils passent ensuite au quotient pour revenir à la sphère puis au disque, et la positivité des exposants de Lyapunov est préservée par ces opérations [15].

12. Souvent, nous ne rappellerons pas explicitement l'îlot stochastique concerné et parlerons de perturbation de f_0 relativement aux liens.

13. Un difféomorphisme est structurellement stable par C^k-perturbation si toute dynamique qui est C^k-proche d'un tel difféomorphisme lui est C^0-conjuguée.

14. Comme les aires des deux îles stochastiques ne sont pas forcément les mêmes, cette perturbation ne préserve pas forcément les aires.

15. Berger et Turaev montrent aussi que la dynamique perturbée est transitive dans l'îlot stochastique rétabli, en adaptant à leur cas la démonstration valable dans le cas Anosov.

3.3. Lissage des îlots stochastiques

Donnons un énoncé qui, même s'il n'est pas donné sous cette forme dans leur texte, est démontré par Berger et Turaev. Cet énoncé leur permettra de lisser les exemples qu'ils construiront qui ne seront pas forcément de classe C^∞ dans un premier temps.

Proposition 3.6. — *Soit $r \geq 2$ un entier. Soit $f_0 \in \mathrm{Diff}^r_\omega(\mathbb{D})$ ayant un îlot stochastique sans coin $\mathcal{I}_0$ robuste relativement aux liens et $\mathcal{U}$ un voisinage de f_0 en topologie C^r. Il existe $f \in \mathcal{U}$ de classe C^∞ qui est une perturbation de f_0 relativement aux liens de $\mathcal{I}_0$.*

L'idée est la suivante. Il existe $\hat{f} \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D}) \cap \mathcal{U}$ qui est proche de f_0 en topologie C^r, ainsi qu'une réunion finie de cercles C^∞ immergés $\bigcup_{1\leq k\leq N} \gamma_k$ qui est proche de $\partial\mathcal{I}_0$ toujours en topologie C^r. Or, comme chaque composante connexe de $\partial\mathcal{I}_0$ est invariante par f_0, alors chaque $\hat{f}(\gamma_k)$ est proche en topologie C^r de γ_k. On construit alors un élément g de $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D})$ dans un voisinage en topologie C^r de Id qui envoie chaque $\hat{f}(\gamma_k)$ sur γ_k [16]. Alors, $f = g \circ \hat{f} \in \mathcal{U}$ est proche de f_0 en topologie C^r et fixe la courbe γ_k qui est proche en topologie C^r d'une composante connexe de $\partial\mathcal{I}_0$. La dynamique restreinte $f_{|\cup\gamma_k}$ est alors proche en topologie C^r de la dynamique $f_{0|\partial\mathcal{I}_0}$. Or, f_0 restreint à une composante connexe de $\partial\mathcal{I}_0$ est un difféomorphisme d'un cercle immergé qui a des points périodiques qui sont tous hyperboliques. Une telle dynamique est structurellement stable, ce qui signifie que toute dynamique qui lui est C^1-proche lui est C^0-conjuguée. D'autre part, les points périodiques contenus dans cette courbe sont toujours hyperboliques et de même type que ceux qui existaient avant la perturbation (attractifs ou répulsifs pour la restriction à la courbe). Ceci implique que γ est un lien hétérocline pour f, et donc que f a un îlot stochastique proche de $\mathcal{I}_0$.

3.4. Bonnes cartes pour un bi-lien

Nous allons maintenant expliquer une notion due à Berger et Turaev, celle de bonne carte pour un bi-lien. Dans cette carte, au voisinage de certains arcs des branches du bi-lien, la dynamique se lit comme une translation (les auteurs parlent alors de *coordonnées énergie-temps*) et une certaine transition d'un arc à un autre se lit comme une application affine hyperbolique. Ces cartes seront utilisées dans la section 5 pour évaluer un certain opérateur de transformation de graphe.

Étant donné un bi-lien $\mathcal{I}$ sans coin du disque pour un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^r_\omega(\mathbb{D})$, il existe toujours un difféomorphisme $\phi \in \mathrm{Diff}^{r-1}_\omega(\mathbb{D})$ tel que pour $\hat{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, le bi-lien $\hat{\mathcal{I}} = \phi(\mathcal{I})$ intersecte deux bandes verticales $V_a = [x_a - 2\tau, x_a] \times \mathbb{R}$ et $V_b = [x_b, x_b + 2\tau] \times \mathbb{R}$ de la manière que nous décrivons ci-dessous. On note L_a et L_b les deux branches du bi-lien.

— $V_a \cap L_a = [x_a - 2\tau, x_a] \times \{y_a\}$ et sur un voisinage N_a de $[x_a - 2\tau, x_a] \times \{y_a\}$, $\hat{f}(x, y) = (x - \tau, y)$ est une translation horizontale ;

— $V_b \cap L_a = \emptyset$;

16. Pour faire ceci, il est par exemple possible d'utiliser le théorème du voisinage tubulaire symplectique de Weinstein (1977) qui permet de travailler dans un anneau $\mathbb{T} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$.

— $V_b \cap L_b = [x_b, x_b + 2\tau] \times \{y_b^-, y_b^+\}$ avec $y_b^- < y_b^+$;
— sur un voisinage N_b^+ de $[x_b, x_b + 2\tau] \times \{y_b^+\}$, $\hat{f}(x, y) = (x + \tau, y)$;
— sur un voisinage N_b^- de $[x_b, x_b + 2\tau] \times \{y_b^-\}$, $\hat{f}(x, y) = (x - \frac{\tau}{2}, y)$;
— Il existe $n \geq 1$ tel que $\hat{f}^n$ envoie $[x_b, x_b + 2\tau] \times \{y_b^+\} \cup f^2([x_b, x_b + 2\tau] \times \{y_b^+\})$ sur $[x_b, x_b + 2\tau] \times \{y_b^-\}$ et $\forall (x, y) \in N_b^+, f^n(x, y) = \Theta - (\frac{x}{2}, 2y)$ où Θ est un point fixé de $\mathbb{R}^2$.

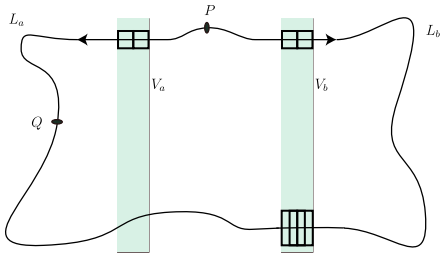


FIGURE 3. Le bi-lien dans une bonne carte.

4. RENORMALISATION

4.1. Première approche

Expliquons maintenant quel procédé Berger et Turaev vont utiliser pour injecter leur îlot stochastique (qui encore une fois est associé à un difféomorphisme f_0 qui est loin de l'identité en topologie C^1) dans une dynamique proche de l'identité pour la topologie C^∞.

Commençons par faire trois remarques qui découlent aisément de la définition de l'entropie métrique.

— on a $h_\mu(f^n) = nh_\mu(f)$ et donc si une itérée de f est d'entropie métrique positive, il en est de même pour f ;
— si A est un ensemble invariant par f tel que $\mu(A) > 0$ et si $\mu_A(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$, alors $h_\mu(f) \geq \mu(A).h_{\mu_A}(f_{|A})$ et donc si une restriction de f à un ensemble invariant est d'entropie métrique positive pour la probabilité conditionnelle, il en est de même pour f ;
— l'entropie métrique est invariante par conjugaison qui préserve la mesure [17].

On va donc essayer d'écrire ce difféomorphisme f_0 qui est loin de l'identité comme $f_0 = h^{-1} \circ g^n_{|A} \circ h$ où

— g est un difféomorphisme du disque qui préserve l'aire et est proche de Id en topologie C^∞ ;

17. Kolmogorov l'a d'ailleurs introduite pour montrer que les applications décalages $(u_n) \in \{1, \ldots, p\}^{\mathbb{Z}} \mapsto (u_{n+1})$ munies de la mesure produit des probabilités uniformes ne sont pas mesurablement conjuguées pour des entiers p différents.

— A est un ensemble invariant par g^n d'aire $a > 0$;
— h est un difféomorphisme de classe C^∞ qui multiplie la forme d'aire par a.

Définition 4.1. — *Étant donné un difféomorphisme symplectique f, on appelle* renormalisation *de f tout difféomorphisme qui s'écrit $h^{-1} \circ f^n_{|A} \circ h$ où $h : \mathbb{D} \to A$ est une application de jacobien constant du disque sur l'ensemble f^n-invariant A.*

Par extension, si $f \in \mathrm{Diff}_\omega(\mathbb{D})$, pour $h : U \to \mathbb{D}$ application de jacobien constant définie sur un ouvert U contenant $\mathbb{D}$, à condition que $f^n(h(\mathbb{D})) \subset h(U)$, on dira que $h^{-1} \circ f^n \circ h_{|\mathbb{D}}$ est une renormalisation de f.

Remarquons que comme $h(\mathbb{D})$ n'est dans ce cas pas forcément invariante par f^n dans la dernière définition, cette notion de renormalisation ne rend pas compte d'une dynamique sous-jacente et ne permet en aucune façon de calculer l'entropie.

On veut trouver un difféomorphisme g du disque qui est proche de l'identité en topologie C^∞, préserve l'aire et a un disque topologique D invariant par un de ses itérés g^n tel que $g^n_{|D}$ est conformément conjuguée à f_0.

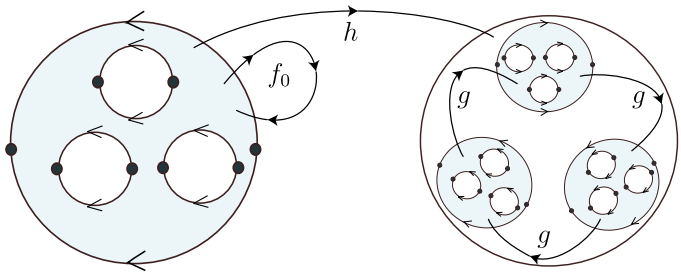


Figure 4. Une renormalisation avec $n = 3$.

Une première approche pour construire g est d'écrire f_0 comme la composée $f_0 = g_n \circ \cdots \circ g_1$ d'un certain nombre de difféomorphismes $g_1, \ldots, g_n$ qui sont $\frac{1}{n}$ proches de l'identité en topologie C^∞ et préservant l'aire, ce qui est toujours possible en utilisant une isotopie hamiltonienne. On place dans le disque $\mathbb{D}$ n petits disques disjoints $D_1, \ldots, D_n = D_0$ de même rayon r (qui est donc plus petit que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ car la somme de leurs aires est plus petite que celle du disque $\mathbb{D}$). Notons $h_j : \mathbb{D} \to D_i$ l'homothétie de rapport r qui envoie $\mathbb{D}$ sur D_j. On construit alors un difféomorphisme f de $\mathbb{D}$ tel que $f(D_j) = D_{j+1}$ et $f_{|D_j} = h_{j+1} \circ g_j \circ h_j^{-1}$. Par construction, on a $h_1^{-1} \circ g^n_{|D_1} \circ h_1 = f_0$ et donc g est bien d'entropie métrique positive. Comme les h_j sont des homothéties de rapport r, la distance en topologie C^k de $f_{|D_j} = h_{j+1} \circ g_j \circ h_j^{-1}$ à l'identité est de l'ordre de $\frac{1}{r^{k-1}} \|g_j\|_{C^k} \geq (\sqrt{n})^{k-1} \|g_j\|_{C^k}$.

Le théorème des accroissements finis nous dit alors que $\|g_i\|_{C^1}$ est au moins de l'ordre de $\frac{1}{n}$, donc $\|f_{|D_j}\|_{C^k}$ est au moins de l'ordre de $(\sqrt{n})^{k-3}$, donc explose dès que $k > 3$.

Si nous n'étions intéressés qu'en des approximations en topologie C^1 ou C^2, ce raisonnement serait suffisant. C'est ce que font Newhouse, Ruelle et Takens pour construire des difféomorphismes du tore qui ont des attracteurs étranges dans des

voisinages petits en topologie C^2 de l'identité, (Newhouse, Ruelle et Takens, 1978/79). Mais nous sommes intéressés en des approximations plus fines.

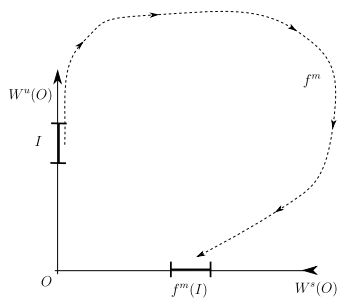
Maintenant, nous allons expliquer comment la renormalisation au voisinage des bandes homoclines permet à Berger et Turaev de réaliser beaucoup de dynamiques dans des topologies plus fines.

4.2. Énoncé du lemme de renormalisation au voisinage des bandes homoclines

Soit (M, ω) une surface munie d'une forme d'aire et $f : M \to M$ un difféomorphisme symplectique de classe C^∞ qui a un point périodique hyperbolique O de période τ. Cela signifie que $f^\tau(O) = O$ et les deux valeurs propres $\lambda \in]0, 1[$, λ^{-1} de $Df^\tau(O)$ sont réelles et de module différent de 1. On sait alors qu'il existe deux immersions injectives $j_s, j_u : (\mathbb{R}, 0) \hookrightarrow (M, O)$ de classe C^∞ telles que $j_s(\mathbb{R})$ (resp. $j_u(\mathbb{R})$) est la variété stable (resp. instable) de O qui est définie par

$$W^s(O, f) = \{x \in M; \lim_{n\to+\infty} d(f^n x, f^n O) = 0\} = W^u(O, f^{-1}).$$

Les deux variétés immergées $W^s(O, f)$ et $W^u(O, f)$ sont invariantes par f^τ et se coupent transversalement en O. Parfois, $W^u(O, f)$ et $f^j(W^s(O, f)) = W^s(f^j(O), f)$ se rencontrent en un autre point que O pour un $j \in [0, \tau - 1]$. On dit alors que ces points d'intersection sont des points homoclines à l'orbite de O : l'orbite positive et l'orbite négative d'un tel point se rapprochent de celle de O quand le temps tend vers l'infini. Il peut arriver qu'en un tel point les deux variétés se coupent transversalement, et dans ce cas on a un fer à cheval. À l'autre extrême, ces deux variétés peuvent être égales ou au moins coïncider le long d'un arc I non réduit à un point. On parle alors de *bande homocline*.



Nous supposerons désormais l'existence d'une telle bande homocline. En se plaçant dans une bonne carte, on peut supposer que les variétés stables et instables de O coïncident localement avec les axes des coordonnées et donc que le segment vertical I s'envoie par une itérée f^m de f sur un segment horizontal. Sous ces hypothèses, Berger et Turaev développent Gonchenko, Shilnikov et Turaev (2007) et démontrent le lemme suivant de renormalisation.

Définition 4.2. — *Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^r. L'application de type Hénon H_ψ est définie par*

$$H_\psi(x, y) = (y, -x + \psi(y)).$$

Lemme 4.3 (Lemme de renormalisation). — *Pour tout N impair, pour tout $r \geq 1$ pour tous $L, \delta > 0$ et pour tout voisinage U_I de I, il existe*

- *un entier $n > 1$;*
- *des difféomorphismes $\Phi_1, \ldots, \Phi_N \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{R}^2)$ qui sont δ-proches de l'identité ;*
- *un difféomorphisme de classe C^∞ $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de jacobien constant tel que $Q(\mathbb{D}) \subset U_I$;*

tels que pour toutes fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_N \in C^r(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont les normes C^r sont majorées par L, il existe un difféomorphisme symplectique $\hat{f}$ de classe C^r [18] qui coïncide avec f sur le complémentaire de U_I, est tel que $\|\hat{f} - f\|_{C^r} < \delta$ et

$$Q^{-1} \circ \hat{f}^n \circ Q_{|\mathbb{D}} = H_{\psi_N} \circ \Phi_N \circ \cdots \circ H_{\psi_1} \circ \Phi_{1|\mathbb{D}}.$$

De plus, $\hat{f}^m \circ Q(\mathbb{D}) \cap Q(\mathbb{D}) = \emptyset$ pour tout $m = 1, \ldots, n-1$.

En d'autres termes, il existe N applications $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ C^r-proches de l'identité telles que, quitte à s'autoriser une perturbation petite $\hat{f}$ de f, on peut réaliser comme renormalisation de $\hat{f}$ [19] toutes les composées de N applications de Hénon de norme C^r bornée par L alternées avec les Φ_i.

Un résultat de Turaev (2003) permet d'approximer toute dynamique symplectique par une composée d'applications de Hénon. Le résultat précédent donne donc une clé pour voir apparaître un ensemble dense de dynamiques symplectiques comme renormalisées. Dans un autre cadre, Turaev (2003) introduisait la notion d'application universelle telle que l'ensemble de ses applications renormalisées est dense dans $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D}, \mathbb{R}^2)$ [20].

4.3. Démonstration du lemme de renormalisation

Quitte à diminuer l'intervalle I, on peut supposer que $I \cap f^\tau(I) = \emptyset$ et que donc I ne rencontre aucune de ses images. Quitte à les remplacer par des images par des itérés de la dynamique, on peut aussi supposer que I et $f^m(I)$ sont dans un petit voisinage $V = [-\alpha, \alpha]^2$ de O. On fixe deux voisinages ouverts $V_\varepsilon \subset \bar{V}_\varepsilon \subset U_\varepsilon$ de taille $\varepsilon > 0$ de $f^m(I)$. On choisit alors N points distincts $M_1^- \ldots, M_N^-$ dans I et on utilise la notation $M_i^+ = f^m(M_i^-)$. On note leurs coordonnées $M_i^-(0, y_i^-)$ et $M_i^+(x_i^+, 0)$.

On va utiliser tout d'abord deux types de changement d'échelle qui sont des affinités [21]

- au voisinage de M_i^-, $(x, y) \mapsto (\frac{x}{\lambda^k}, y - y_i^-)$;
- au voisinage de M_i^+, $(x, y) \mapsto (x - x_i^+, \frac{y}{\lambda^k})$.

18. Si les ψ_i sont de classe C^∞, $\hat{f}$ est de classe C^∞ aussi mais on n'a un contrôle que sur la norme C^r.

19. Renormalisation s'entend ici au sens faible de la définition 4.1, c-à-d sans que le domaine où on renormalise soit invariant par une itérée de f.

20. Pour des difféomorphismes de classe C^1, Bonatti et Diaz montraient l'existence de telles dynamiques en présence de classes homoclines d'un certains type (Bonatti et Díaz, 2002).

21. Rappelons que $\lambda \in]0, 1[$ est une des deux valeurs propres de $Df^\tau(O)$, l'autre étant λ^{-1}.

On utilisera aussi une suite (μ_k) qui tend en décroissant de façon sous-exponentielle vers 0 pour faire des changements d'échelle homothétiques $(x, y) \mapsto (\frac{x-x_i}{\mu_k}, \frac{y-y_i}{\mu_k})$ autour de points variables $M_i(x_i, y_i)$.

Pour faire ces changements d'échelle, on a donc besoin d'être

— soit dans une bande verticale de largeur $\lambda^k\alpha$ et dans une ellipse verticale qui est proche d'un M_i^- de grand axe au plus $\mu_k\alpha$ et dont le rapport des axes vaut λ^k ;
— soit dans une bande horizontale de hauteur $\lambda^k\alpha$ et dans une ellipse horizontale qui est proche d'un M_i^+ de grand axe au plus $\mu_k\alpha$ et dont le rapport des axes vaut λ^k [22].

Un premier résultat concerne l'application $f^{\tau k}$ renormalisée dans une ellipse de taille au plus $\mu_k\alpha$ dont les k premières images par f^τ restent dans V (Gonchenko, Shilnikov et Turaev, 2008). Il énonce que l'application $f^{\tau k}$ renormalisée dans une ellipse de

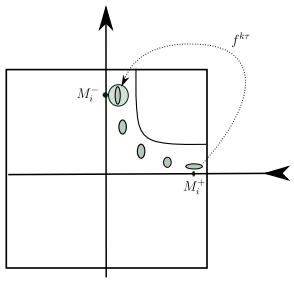


Figure 5. Une transition « presque linéaire »

taille au plus $\mu_k\alpha$ dont les k premières images par f^τ restent dans V s'écrit (dans les coordonnées renormalisées fixées de taille R)

$$T_0(X, Y) = (X, Y) + \Delta_k(X, Y)$$

où la norme C^∞ de Δ_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. En d'autres termes, les transitions dans V, où f^τ est « presque linéaire », se lisent après renormalisation comme « presque l'identité ».

Un second résultat décrit ce qui se passe pour l'application renormalisée quand on suit une connexion homocline plate de M_i^- à M_i^+ par f^m.

22. Berger et Turaev font aussi un changement d'échelle indépendant de k que nous ne faisons que mentionner pour ne pas alourdir.

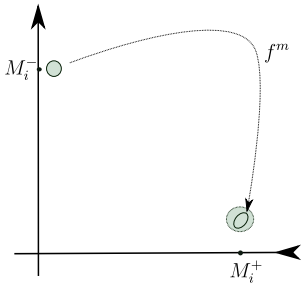


FIGURE 6. Une autre transition « presque linéaire »

En ce cas, l'application renormalisée n'est plus proche de l'identité, mais d'une application de Hénon linéaire, toujours pour la topologie C^∞.

$$(X, Y) \mapsto (Y, -X + aY);$$

avec a uniformément borné en k.

Berger et Turaev vont alors faire une perturbation à support très petit de f de manière à intercaler entre des transitions bien choisies des applications de la forme $(x, y) \mapsto (x, y + \psi(x))$ [23]qui permettront de faire apparaître des applications de type Hénon et aussi de faire disparaître la transition qui n'est a priori pas proche de l'identité. Pour ce faire, il faut préciser un peu les domaines des transitions et des renormalisations.

Tout d'abord, ils choisissent des ellipses horizontales $B_{i,k}^+$ au voisinage des M_i^+ et des ellipses verticales $B_{i,k}^-$ au voisinage des M_i^- de telle sorte que $f^{\tau k}$ définisse une transition dans V de $B_{i,k}^+$ vers $B_{i+1,k}^-$ [24]. Le centre de $B_{i,k}^+$ a même abscisse x_i^+ que M_i^+ et le centre de $B_{i+1,k}^-$ a même ordonnée que M_{i+1}^-. Si la transition envoie le centre de $B_{i,k}^+$ sur le centre de $B_{i+1,k}^-$, ceci détermine entièrement les centres des ellipses.

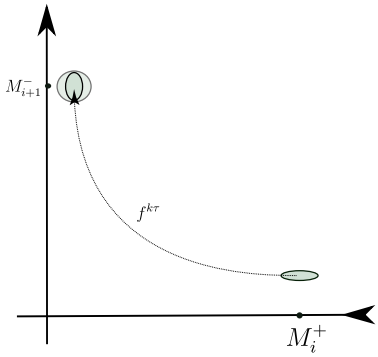


FIGURE 7. Transition du voisinage de M_i^+ vers le voisinage de M_{i+1}^-.

23. Il s'agit donc de translations dans la fibre verticale.

24. Notons que de telles ellipses de transition peuvent être construites quels que soient les points (M_i^+) et (M_i^-) fixés.

On remarque que $f^{\tau k}(B^+_{i,k})$ peut avoir un diamètre plus grand que celui de $B^+_{i,k}$, c'est pourquoi le diamètre de $B^-_{i+1,k}$ peut être plus grand que celui de $B^+_{i,k}$. Mais Berger et Turaev montrent que le rapport entre les deux rayons reste borné uniformément en k.

Ensuite, on utilise f^m pour faire une transition de $B^-_{i+1,k}$ vers un voisinage de M^+_{i+1}. Il n'y a aucune raison que $f^m(B^-_{i+1,k})$ soit incluse dans $B^+_{i+1,k}$, non pas pour une question de taille car celle-ci peut être ajustée [25], mais parce que le centre de $B^+_{i+1,k}$ peut être relativement éloigné de $f^m(B^-_{i+1,k})$, où le terme *relativement* concerne ce qui se passe quand on a renormalisé à la fois par λ^k et par μ_k. Toutefois, si on revient dans le voisinage V de O, avant les changements d'échelle donc, on constate que cette distance ne peut être d'ordre plus grand que λ^k.

Berger et Turaev construisent alors un difféomorphisme symplectique g_k qui est μ_k-proche de l'identité en topologie C^k, à support dans U_ε, qui coïncide avec une application $(x, y) \to (x, y + \beta_k(x))$ dans V_ε, et qui a les effets suivants [26] :

— pour chaque $i \in [1, N-1]$, on a $g_k \circ f^m(B^-_{i,k}) \subset B^+_{i+1,k}$; on peut en effet grâce à une translation dans la fibre verticale ramener $f^m(B^-_{i,k})$ dans $B^+_{i+1,k}$;
— après renormalisation par λ^k et par μ_k, l'application $g_k \circ f^m$ restreinte à $B^-_{i,k}$ est proche de $H_{\psi_i} : (X, Y) \mapsto (Y, -X + \psi_i(Y))$; en effet, toujours grâce à une translation dans la fibre, on peut faire disparaître le terme a qui apparaissait dans la transition homocline f^m ; on est alors ramené à composer une application Φ_i proche de $H_0 : (X, Y) \mapsto (Y, -X)$ avec l'application $S_{\psi_i} : (X, Y) \mapsto (X, Y + \psi_i(X))$, ce qui donne la composée d'une application proche de l'identité [27] et d'une application proche de $(X, Y) \mapsto (Y, -X + \psi_i(Y))$.

La renormalisée d'une composition étant la composition des renormalisées, on peut alors exprimer la renormalisée de $\left((g \circ f)^{N(m+\tau k)}\right)_{|B^+_{1,k}}$ qui est

$$H_{\psi_N} \circ \hat{\Phi}_N \circ \cdots \circ H_{\psi_1} \circ \hat{\Phi}_{1|\mathbb{D}}. \text{ [28]}$$

Notons que l'image de cette application n'a aucune raison d'être dans $B^+_{1,k}$, on sait juste qu'elle est dans $f^m(B^-_{1,k})$. Ce n'est donc a priori pas une application de premier retour dans $B^+_{1,k}$.

25. Là encore le rapport des deux rayons peut être borné uniformément en k.
26. Faire ces opérations ne requiert aucune condition spéciale sur les points M^-_i à part qu'ils soient deux à deux distincts.
27. Notons que cette application Φ_i dépend de k mais pas de ψ_i
28. Dans cette expression, les applications $\hat{\Phi}_i$ ne dépendent pas de ψ_i.

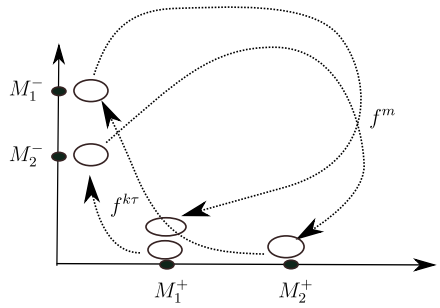


FIGURE 8. la construction pour $N = 2$.

4.4. Le corollaire du lemme de renormalisation

Berger et Turaev vont en fait utiliser le corollaire suivant du lemme de renormalisation.

COROLLAIRE 4.4. — *Soit $f \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ qui admet un point périodique hyperbolique ayant une bande homocline. Alors il existe un sous-ensemble C^∞-dense $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D}, \mathbb{R}^2)$ tel que pour tout $F \in \mathcal{F}$, tout $r \geq 2$, pour toute fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^r et tout $\varepsilon > 0$, il existe un difféomorphisme $\hat{f} \in \mathrm{Diff}^r_\omega(M)$ tel que*

— *$d_{C^r}(\hat{f}, f) < \varepsilon$;*
— *la composée $S_\psi \circ F$ est égale à une application renormalisée de $\hat{f}$ où $S_\psi(x, y) = (x, y + \psi(x))$.*

Pour déduire le corollaire 4.4 du lemme de renormalisation, les deux arguments clés sont

— le résultat de TURAEV (2003) qui énonce qu'on peut approximer en topologie C^∞ tout plongement symplectique du disque dans $\mathbb{R}^2$ par une composée d'un nombre pair d'applications de Hénon polynomiales ;
— la remarque que $S_\psi = H_\psi \circ H_0^{-1}$.

Étant donné $F \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D}, \mathbb{R}^2)$, ils approximent $H_0^{-1} \circ F$ par une composition $H_{\psi_{2k}} \circ \cdots \circ H_{\psi_1}$ d'applications de Hénon polynomiales avec une précision de $\frac{\varepsilon}{2}$ en topologie C^∞. Comme $H_0(x, y) = (y, -x)$ est une rotation, on a aussi

$$d_{C^\infty}(F, H_0 \circ H_{\psi_{2k}} \circ \cdots \circ H_{\psi_1}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Utilisant le lemme de renormalisation pour $N = 2k + 1$, un majorant L de la norme C^r de $\psi_{2k+1} = \psi, \psi_{2k}, \ldots, \psi_1$, $\delta > 0$, on déduit l'existence d'un entier $n \geq 1$, d'un difféomorphisme de classe C^r $\hat{f}$ qui coïncide avec f en dehors de U_I, tel que $d_{C^r}(f, \hat{f}) < \varepsilon$, de difféomorphismes $\Phi_1, \ldots, \Phi_N \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{R}^2)$ qui sont δ-C^r-proches de Id, un plongement $Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ et de jacobien constant tel que

$$Q^{-1} \circ \hat{f}^n \circ Q_{|\mathbb{D}} = H_{\psi_N} \circ \Phi_N \circ \cdots \circ H_{\psi_1} \circ \Phi_{1|\mathbb{D}}.$$

Comme $H_\psi = S_\psi \circ H_0$, cela s'écrit aussi

$$Q^{-1} \circ \hat{f}^n \circ Q_{|\mathbb{D}} = S_\psi \circ H_0 \circ \Phi_N \circ \cdots \circ H_{\psi_1} \circ \Phi_{1|\mathbb{D}}.$$

Posant $\hat{F} = H_0 \circ \Phi_N \circ \cdots \circ H_{\psi_1} \circ \Phi_1$ et choisissant δ petit, on a alors

$$d_{C^\infty}(\hat{F}, H_0 \circ H_{\psi_{2k}} \circ \cdots \circ H_{\psi_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $d_{C^\infty}(F, \hat{F}) < \varepsilon$, $d_{C^r}(f, \hat{f}) < \varepsilon$ et

$$Q^{-1} \circ \hat{f}^n \circ Q_{|\mathbb{D}} = S_\psi \circ \hat{F}.$$

5. LA RÉPARATION DE LIENS

Afin d'utiliser les résultats obtenus en section 4 au voisinage des bandes homoclines, on perturbe l'application identité du disque en une application f_0 qui préserve l'aire, vaut l'identité au bord du disque et qui a un point hyperbolique tel que la variété stable et la variété instable de son orbite coïncident [29]. Ceci ne présente pas de difficulté majeure : en utilisant un hamiltonien du type énergie cinétique plus énergie potentielle dans un petit anneau, on fait apparaître des suites de connexions hétéroclines avec des branches stables et instables qui coïncident comme sur la figure 9 et on compose avec une rotation d'angle petit.

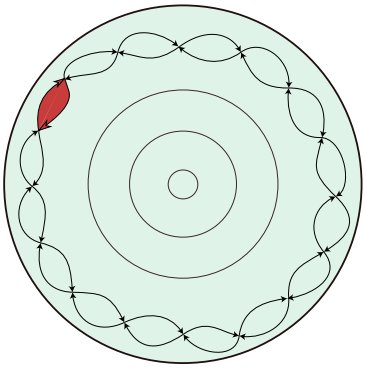


FIGURE 9. Une guirlande de connexions hétéroclines.

Le corollaire 4.4 nous permet alors grâce à une perturbation f de la dynamique f_0 de voir une perturbation de l'îlot stochastique $\hat{\mathcal{I}}_0$ qui est l'îlot introduit en section 3 lu dans une bonne carte que nous allons décrire un peu plus loin comme une application renormalisée de f. Nous représentons ci-après ce qui se passe pour une itérée de f près du domaine invariant par cette itérée que nous avons représenté en foncé sur la figure 9. La figure 10 reprend la figure 8 adaptée à notre cas.

29. En utilisant les formes normales, GELFREICH et TURAEV (2010) ont montré qu'une telle perturbation est possible au voisinage de tout point fixe elliptique. Ceci explique comment montrer le remords cité dans l'introduction.

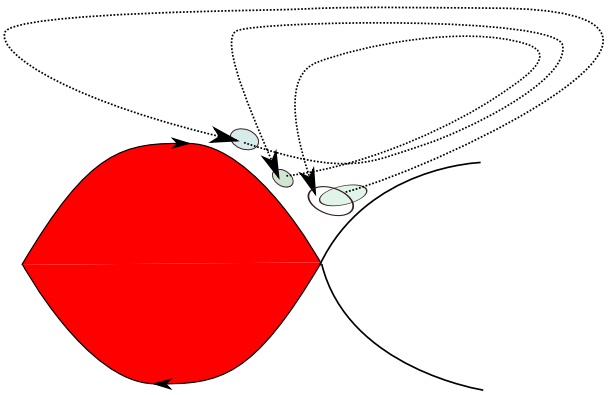


FIGURE 10. La dynamique perturbée itérée sur un petit domaine.

Le défi est maintenant de restaurer les liens. Les quatre bi-liens ont en effet été cassés et la figure renormalisée que l'on obtient ressemble à la figure 11.

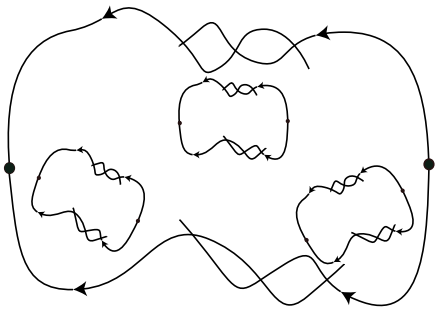


FIGURE 11. L'îlot stochastique perturbé [30].

Il est assez fréquent en dynamique de vouloir créer des intersections hétéroclines dans le but d'obtenir des fers à cheval et donc un comportement chaotique, par exemple quand une branche stable d'un point périodique hyperbolique s'accumule sur une branche instable d'un autre point périodique. C'est un problème perturbatif difficile dont une solution générale existe uniquement en topologie C^1, présentée par Hayashi lors du congrès international de 1998 (HAYASHI, 1998).

Le problème envisagé ici est différent, car on sait que la dynamique est proche de celle d'un îlot stochastique où branches stables et instables coïncidaient. Le problème est de rétablir cette coïncidence en n'utilisant qu'un certain type de perturbations autorisées par le corollaire 4.4, celles de la forme $(x, y) \mapsto (x, y + \psi(x))$. [31]

30. Le dessin montre des branches stables et instables qui continuent à s'intersecter, il n'y a a priori aucune raison que ce soit le cas et le dessin pourrait être différent.

31. Remarquons à l'opposé que pour une dynamique holomorphe et entière, USHIKI (1980) a montré qu'il n'est pas possible d'avoir des bi-liens.

5.1. Cartes énergie-temps pour des perturbations de bi-liens

Afin d'estimer la non-coïncidence des variétés stables et instables, Berger et Turaev vont encore utiliser des coordonnées de type énergie-temps comme en section 3.4 dans lesquelles les branches stables et instables s'écriront localement comme des graphes. Notons que si la dynamique est de classe C^r, les cartes énergie-temps construites par Berger et Turaev sont de classe C^{r-1}. Alors, les graphes coïncident si et seulement si la différence des fonctions qui leur sont associées est nulle.

On se ramène donc à travailler dans des sous-espaces fixés d'espaces de fonctions de la forme $C^{r-1}([x, x+\tau], \mathbb{R})$, deux tels espaces fonctionnels pour chacun des bi-liens bordant l'îlot stochastique initial.

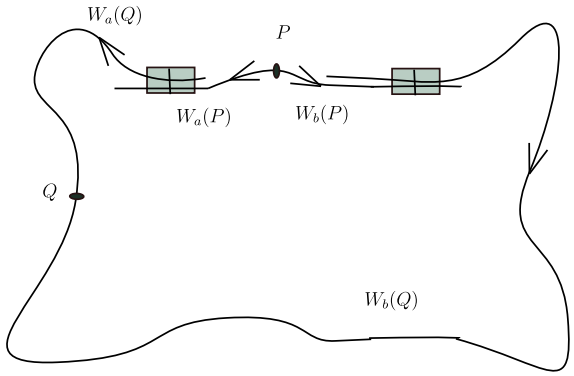


FIGURE 12. Les coordonnées énergie-temps pour un bi-lien brisé.

5.2. La restauration d'un bi-lien par des opérateurs

Nous expliquons ici comment restaurer un bi-lien dans une bonne carte si on ne se soucie pas de l'impact sur les autres bi-liens. Pour cela, on utilise la carte énergie-temps construite dans le paragraphe précédent ainsi que les notations introduites dans les paragraphes 5.1 et 3.4. Cette bonne carte est de classe C^{r-1} et dépend de façon C^1 de la dynamique perturbée $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, elle-même proche de la dynamique non perturbée F_0 qui possède un îlot stochastique.

Une bande verticale coupe le bi-lien de F_0 suivant deux composantes connexes, et donc une translation verticale $S_\psi : (x, y) \mapsto (x, y + \psi(x))$ à support dans une bande verticale V_a perturbe le bi-lien de F_0 ou les arcs de branches qui lui correspondent pour F en deux endroits [32]. Afin de pouvoir restaurer la première connexion L_a sans problème, Berger et Turaev construisent donc leur carte de manière à ce que V_a ne coupe L_a qu'en un seul endroit.

32. En réalité le bi-lien n'existe plus dans le cas perturbé, chaque branche du bi-lien de F_0 étant dédoublée par perturbation comme indiqué dans la figure 12. Aussi, couper L_a ou L_b dans le cas perturbé signifiera couper les deux branches correspondantes.

Comme la dynamique se lit au voisinage de $L_a \cap V_a$ comme la translation $(x, y) \mapsto (x - \tau, y)$, la partie $W^u(P)$ nous intéressant est le graphe d'une fonction τ-périodique $w_a^u : [x_a - 2\tau, x_a] \to \mathbb{R}$ et la partie de $W^s(Q)$ est aussi le graphe d'une fonction τ-périodique $w_a^s : [x_a - 2\tau, x_a] \to \mathbb{R}$. L'écart entre les deux branches est alors la fonction $M_a(F) = (w_a^u - w_a^s)_{|[x_a-\tau,x_a]}$, fonction que nous voulons rendre nulle.

Notation 5.1. — *Un nombre $\delta > 0$ petit étant fixé, on note $C_\delta^{r-2}([x_a - 2\tau, x_a], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^{r-2} définies sur $\mathbb{R}$ à support dans $[x_a - 2\tau + \delta, x_a - \delta]$.*

Berger et Turaev montrent alors que l'opérateur

$$\psi \in C_\delta^{r-2}([x_a - 2\tau, x_a], \mathbb{R}) \mapsto M_a(S_\psi \circ F)$$

est de classe C^1, dépend continûment de F, et que dans le cas non perturbé, l'écart entre les deux branches est $M_a(S_\psi \circ F_0)(t) = M_a(F_0) + \psi(t) + \psi(t - \tau)$.

Si on se restreint à l'ensemble des fonctions $\psi = \rho_a \cdot \tilde{\psi}$ où $\rho_a \in C_\delta^\infty([x_a - 2\tau, x_a], [0, 1])$ vérifie $\rho_a(t) + \rho_a(t + \tau) = 1$, alors l'opérateur $\Delta_a(F) : \tilde{\psi} \mapsto M_a(S_{\rho_a \cdot \tilde{\psi}} \circ F)$ défini sur l'ensemble $\mathcal{P}_\tau^{r-2}$ des fonctions de classe C^{r-2} et τ-périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est de classe C^1 et est l'opérateur identité pour F_0 [33]. Aussi, $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}_\tau^{r-2}} - \Delta_a(F_0)$ est une contraction au voisinage de 0. Pour F assez proche de F_0, $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}_\tau^{r-2}} - \Delta_a(F)$ est aussi une contraction sur ce voisinage, a donc un point fixe proche de 0 et $\Delta_a(F)$ a un zéro proche de 0. Ce zéro, que nous notons ψ^a, rétablit la connexion L_a.

Il reste alors à rétablir la connexion L_b à l'aide d'une translation verticale à support dans V_b, les branches correspondantes ayant été encore modifiées par la perturbation introduites pour L_a. La construction est plus compliquée car la bande V_b coupe en deux composantes connexes le lien L_b non perturbé. L'opérateur $M_b : F \mapsto (w_b^u - w_b^s)_{|[x_b,x_b+\tau]}$ est construit comme l'était M_a et $\psi \in C_\delta^{r-4}([x_b, x_b + 2\tau], \mathbb{R}) \mapsto M_b(S_\psi \circ F)$ est de classe C^1, dépend continûment de F, et dans le cas non perturbé, l'écart entre les deux branches devient alors

$$M_b(S_\psi \circ F_0)(t) = M_b(F_0)(t) - \psi(t) - \psi(t + \tau)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\psi(\frac{3x_b + \tau - x}{2}) + \psi(\frac{3x_b + 2\tau - x}{2}) + \psi(\frac{3x_b + 3\tau - x}{2}) + \psi(\frac{3x_b + 4\tau - x}{2})\right).$$

Une remarque fondamentale est alors qu'une fois que le lien L_a a été restauré, $M_b(F)$ est d'intégrale nulle simplement parce que F préserve l'aire. Aussi, on peut se restreindre aux fonctions d'intégrale nulle. Finalement, Berger et Turaev définissent sur l'espace $\mathcal{P}_{\tau,0}^{r-4}$ des fonctions $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ-périodiques, de classe C^{r-4} et d'intégrale nulle sur une période l'opérateur $\Delta_b(F) : \tilde{\psi} \mapsto M_b(S_{\rho_b \cdot \tilde{\psi}} \circ F)$ où cette fois le support de ρ_b est dans $[x_b, x_b + 2\tau]$ et on a toujours $\rho_b(t) + \rho_b(t + \tau) = 1$. Si on munit l'espace $\mathcal{P}_{\tau,0}^{r-4}$ de la norme

$$\|\psi\| = \max_{1 \le i \le r-4} \|D^i \psi\|$$

alors $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}_{\tau,0}^{r-4}} - \Delta_b(F_0)$ devient encore une contraction et on conclut comme dans le cas précédent qu'il existe ψ^b qui rétablit le lien.

33. À condition d'identifier $\tilde{\psi}$ qui est τ-périodique et $\tilde{\psi}_{|[x_a-\tau,x_a]}$.

Notons que comme cette nouvelle perturbation est à support dans V_b qui ne rencontre pas L_a, cette nouvelle perturbation ne casse pas la partie restaurée L_a et donc qu'on a ainsi restauré le bi-lien en entier.

La perturbation globale utilisée pour restaurer le bi-lien est finalement S_ψ où $\psi = \rho_a.\psi^a + \rho_b.\psi^b$.

5.3. De bonnes cartes

Il y a quatre bi-liens à restaurer dans le cas envisagé par Berger et Turaev. Ils commencent par utiliser un difféomorphisme $\phi \in \mathrm{Diff}^r_\omega(\mathbb{D})$ tel que $\hat{f}_0 = \phi \circ f_0 \circ \phi^{-1}$ détermine une bonne carte pour chacun des quatre bi-liens avant perturbation au sens du paragraphe 3.4. La figure 13 résume ceci.

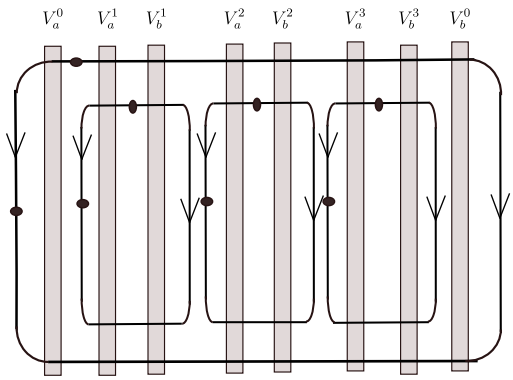


FIGURE 13. Une bonne carte pour l'îlot $\mathcal{I}_0$.

Une carte analogue est construite dans le cas perturbé qui est une carte énergie-temps au sens du paragraphe 5.1 pour chaque bi-lien de l'îlot perturbé.

Il y a alors un ordre pour restaurer les bi-liens suivant la méthode que nous avons expliqué dans le paragraphe précédent : tout d'abord, Berger et Turaev vont restaurer les bi-liens 1 à 3 en composant $\hat{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ par une translation verticale de classe C^{r-4} $(x, y) \mapsto (x, y + \psi_i(x))$ qui est à support dans $V_a^i \cup V_b^i$. Vu comment sont disposées les bandes verticales supports des perturbations, on peut restaurer les bi-liens 1 à 3 indépendamment, mais cela va bien sûr changer les branches du dernier bi-lien 0. Puis, on restaure ce lien 0 par une translation verticale $(x, y) \mapsto (x, y + \psi_0(x))$ de classe C^{r-8} à support dans $V_a^0 \cup V_b^0$, et ceci n'impacte pas les bi-liens 1 à 3 déjà restaurés car le support de la dernière perturbation ne les rencontre pas.

La translation verticale $(x, y) \mapsto (x, y + \psi(x))$ de classe C^{r-8} que l'on cherchait est donc définie par la fonction $\psi = \sum_{i=0}^{3} \psi_i$.

5.4. Synthèse

On commence par fixer un voisinage de l'identité dans $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D})$, qui correspond à contrôler la distance C^r. On construit alors $\hat{f} \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(\mathbb{D})$ qui est C^{r+8} proche de l'identité et qui admet comme application renormalisée une application proche de l'îlot stochastique construit par Berger et Turaev dans le paragraphe 3.1. Le corollaire 4.4 nous permet alors de rétablir les liens de l'îlot stochastique en utilisant les translations verticales de classe C^r décrites dans le paragraphe 5.3. La proposition 3.5 nous dit alors que la dynamique obtenue, qui est de classe C^r, a un îlot stochastique et la proposition 3.6 permet de rendre cet exemple de classe C^∞.

RÉFÉRENCES

Adler, Roy L., Alan G. Konheim et Michael H. McAndrew (1965). « Topological entropy ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 114, p. 309–319.

Berger, Pierre et Dmitry Turaev (2019). « On Herman's positive entropy conjecture ». In : *Adv. Math.* 349, p. 1234–1288.

Bochi, Jairo (2002). « Genericity of zero Lyapunov exponents ». In : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 22.6, p. 1667–1696.

Bonatti, Christian et Lorenzo Díaz (2002). « On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms ». In : *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 96, 171–197 (2003).

Bowen, Rufus (1970). « Topological entropy and axiom A ». In : *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968).* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., p. 23–41.

Dinaburg, Efim I. (1971). « On the relations among various entropy characteristics of dynamical systems ». In : *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 35, p. 324–366.

Gelfreich, Vassili et Dmitry Turaev (2010). « Universal dynamics in a neighborhood of a generic elliptic periodic point ». In : *Regul. Chaotic Dyn.* 15.2-3, p. 159–164.

Gonchenko, Sergey V., Leonid P. Shilnikov et Dmitry V. Turaev (2007). « Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps ». In : *Nonlinearity* 20.2, p. 241–275.

——— (2008). « On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. I ». In : *Nonlinearity* 21.5, p. 923–972.

Goodwyn, Lew Wayne (1971). « Topological entropy bounds measure-theoretic entropy ». In : *Global differentiable dynamics (Proc. Conf., Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio, 1969)*, 69–84. Lecture Notes in Math., Vol. 235.

Hayashi, Shuhei (1998). « Hyperbolicity, stability, and the creation of homoclinic points ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998).* Extra Vol. II, p. 789–796.

Herman, Michael (1998). « Some open problems in dynamical systems ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*. Extra Vol. II, p. 797–808.

Katok, Anatole B. (1979). « Bernoulli diffeomorphisms on surfaces ». In : *Ann. of Math. (2)* 110.3, p. 529–547.

——— (1980). « Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms ». In : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 51, p. 137–173.

Kolmogorov, Andrei N. (1985). « A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces ». In : t. 169. Topology, ordinary differential equations, dynamical systems, p. 94–98, 254.

Mañé, Ricardo (1984). « Oseledec's theorem from the generic viewpoint ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983)*. PWN, Warsaw, p. 1269–1276.

——— (1996). « The Lyapunov exponents of generic area preserving diffeomorphisms ». In : *International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995)*. T. 362. Pitman Res. Notes Math. Ser. Longman, Harlow, p. 110–119.

Newhouse, Sheldon, David Ruelle et Floris Takens (1978/79). « Occurrence of strange Axiom A attractors near quasiperiodic flows on $T^m, m \geq 3$ ». In : *Comm. Math. Phys.* 64.1, p. 35–40.

Pesin, Yakov B. (1977). « Characteristic Ljapunov exponents, and smooth ergodic theory ». In : *Uspehi Mat. Nauk* 32.4 (196), p. 55–112, 287.

Przytycki, Feliks (1982). « Examples of conservative diffeomorphisms of the two-dimensional torus with coexistence of elliptic and stochastic behaviour ». In : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 2.3-4, 439–463 (1983).

Sinai, Yakov G. (1994). *Topics in ergodic theory*. T. 44. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, p. viii+218. isbn : 0-691-03277-7.

Smale, Stephen (1965). « Diffeomorphisms with many periodic points ». In : *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., p. 63–80.

Turaev, Dmitry (2003). « Polynomial approximations of symplectic dynamics and richness of chaos in non-hyperbolic area-preserving maps ». In : *Nonlinearity* 16.1, p. 123–135.

Ushiki, Shigehiro (1980). « Sur les liaisons-cols des systèmes dynamiques analytiques ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 291.7, A447–A449.

Weinstein, Alan (1977). *Lectures on symplectic manifolds*. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of North Carolina, March 8–12, 1976, Regional Conference Series in Mathematics, No. 29. American Mathematical Society, Providence, R.I., p. iv+48.

Marie-Claude Arnaud

IMJ-PRG, UMR7586
Université de Paris
Bâtiment Sophie Germain,
Boite Courrier 7012
8 Place Aurélie Nemours,
75205 Paris Cedex 13
E-mail : marie-claude.arnaud@imj-prg.fr