



HAL
open science

SÉRIES DE FOURIER PÉRIODIQUES NON SINUSOÏDALES

Arpad Török, Stoian Petrescu, Michel Feidt

► **To cite this version:**

Arpad Török, Stoian Petrescu, Michel Feidt. SÉRIES DE FOURIER PÉRIODIQUES NON SINUSOÏDALES. 2020. hal-02485085v1

HAL Id: hal-02485085

<https://hal.science/hal-02485085v1>

Preprint submitted on 19 Feb 2020 (v1), last revised 17 Jul 2020 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SÉRIES DE FOURIER PÉRIODIQUES NON SINUSOÏDALES

Arpad Török¹, Stoian Petrescu², Michel Feidt³

¹ PhD student, The Polytechnic University of Bucharest, Department of Engineering Thermodynamics, 313, Splaiul Independentei, 060042 Bucharest, Romania, e-mail: arpi_torok@yahoo.com

² Prof. Dr. Eng., Polytechnic University of Bucharest, Department of Engineering Thermodynamics, România

³ Prof. Dr. Eng., L.E.M.T.A., U.R.A. C.N.R.S. 7563, Université de Lorraine Nancy 12, avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandœuvre-les-Nancy, France

Résumé: Selon l'analyse harmonique, toute fonction $f(x)$, périodique sur l'intervalle $[-L, L]$, qui satisfait les conditions de Dirichlet, peut être développée en une somme infinie (connue dans la littérature sous le nom de **série trigonométrique** et pour laquelle, pour des raisons qui deviendront évidentes au cours de ce travail, nous utiliserons le nom de **série sinusoïdale**), constituée des composantes pondérées, d'une base biorthogonale complète, formée de la fonction unitaire I , des harmoniques fondamentales $\sin(\pi x/L)$, paire et $\cos(\pi x/L)$, impaire (fonctions $2L$ -périodiques) et des harmoniques secondaires $\sin(n\pi x/L)$ et $\cos(n\pi x/L)$ (fonctions $2L/n$ -périodiques), où $n \in \mathbf{Z}^+$ (entiers naturels non nuls). Les coefficients de ces développements (coefficients de Fourier) peuvent être calculés à l'aide des formules d'Euler. Nous généraliserons cette affirmation et montrerons que la fonction $f(x)$ peut également être développée en des **séries périodiques non sinusoïdales**, formées de la somme infinie des composantes pondérées d'une base complète, non orthogonale: la fonction unitaire I , les quasi-harmoniques fondamentales $g(x)$, paire et $h(x)$, impaire (des fonctions $2L$ -périodiques, avec la valeur moyenne nulle sur l'intervalle de définition) et des quasi-harmoniques secondaires $g_n(x)$ et $h_n(x)$ (fonctions $2L/n$ -périodiques), où $n \in \mathbf{Z}^+$. Les quasi-harmoniques fondamentales $g(x)$ et $h(x)$ sont n'importe quoi fonctions qui admettent des développements en série sinusoïdale (elles satisfont les conditions de Dirichlet, ou elles appartiennent à l'espace L^2). Les coefficients de ces développements sont obtenus avec l'aide de certaines relations algébriques entre les coefficients de Fourier des développements des fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$. En plus de leur importance théorique évidente, ces types de développements peuvent avoir une importance pratique dans l'approximation des fonctions et dans la résolution numériques et analytiques de certaines classes d'équations différentielles.

Mots clefs: séries de Fourier sinusoïdales, séries de Fourier non sinusoïdales, bases indépendants, bases orthogonales, approximation des fonctions, équations différentielles

Abstract. According to harmonic analysis (Fourier analysis), any function $f(x)$, periodic over the interval $[-L, L]$, which satisfies the Dirichlet conditions, can be developed into an infinite sum (known in the literature as the **trigonometric serie**, and for which, for reasons which will become evident in the course of this work, we will use the name of **sinusoidal serie**), consisting of the weighted components of a complete biorthogonal base, formed of the unitary function I , of the fundamental harmonics $\sin(\pi x/L)$, even and $\cos(\pi x/L)$, odd ($2L$ -periodic functions) and of the secondary harmonics $\sin(n\pi x/L)$ and $\cos(n\pi x/L)$ (periodic functions, with period $2L/n$, where $n \in \mathbf{Z}^+$, positive integers). The coefficients of these developments (Fourier coefficients) can be calculated using Euler formulas. We will generalize this statement and show that the function $f(x)$ can also be developed into **non-sinusoidal periodic series**, formed from the sum of the weighted components of a complete, non-orthogonal base: the unit function I , the fundamental quasi-harmonics $g(x)$, even and $h(x)$, odd ($2L$ -periodic functions, with zero mean value over the definition interval) and the secondary quasi-harmonics $g_n(x)$ and $h_n(x)$ ($2L/n$ -periodic functions), where $n \in \mathbf{Z}^+$. The

fundamental quasi-harmonics $g(x)$ and $h(x)$ are any functions which admit expansions in sinusoidal series (satisfy Dirichlet conditions, or belong to space L^2). The coefficients of these expansions are obtained with the help of certain algebraic relationships between the Fourier coefficients of the expansions of the functions $f(x)$, $g(x)$ and $h(x)$. In addition to their obvious theoretical importance, these types of developments can have practical importance in the approximation of functions and in the numerical and analytical resolution of certain classes of differential equations.

Keywords: sinusoidal Fourier series, nonsinusoidal Fourier series, independent bases, orthogonal bases, approximation of functions, differential equations

1. Introduction

Soit $g(x)$ une quelconque fonction de \mathbf{R} , définie sur un intervalle réel I (ouvert, fermé ou semi-ouvert), délimité par x_l et x_{m+1} , introduite par une seule expression $g(x)=g_l(x)$ sur toute I ($m=l$), ou par m différentes expressions: $g(x)=g_i(x)$, $i=1, 2, \dots, m$, valables chacune sur l'un des sous-intervalles disjoints adjacents bornés par x_i et x_{i+1} , $1 \leq i \leq m$. Pour définir simultanément à la fois la fonction $g(x)$ et son domaine de définition, nous introduirons un système pour marquer simultanément les limites x_i des (sous)intervalles de définition et aussi les expressions de la fonction valables sur ces (sous)intervalles:

$g(x) = G[x_1^+ > g_1(x) < x_2^-]$, ou $g(x) = G[x_1 \geq g_1(x) \leq x_2]$, ou $g(x) = G[x_1^+ * g_1(x) * x_2^-]$, ou $g(x) = G[x_1^+(g_1(x))x_2^-]$, au lieu de $g(x) = g_l(x)$ si $x_l \leq x \leq x_2$. Ici $I = [x_l, x_2]$

$g(x) = G[x_1^+ > g_1 < x_2 \cup x_2^+ > \dots < x_i \cup x_i^+ > g_i < x_{i+1} \cup x_{i+1}^+ > \dots < x_m \cup x_m^+ > g_m < x_{m+1}^-]$, ou $g(x) = G[x_1 \geq g_1 < x_2 \cup x_2 \geq \dots < x_i \cup x_i \geq g_i < x_{i+1} \cup x_{i+1} \geq \dots < x_m \cup x_m \geq g_m \leq x_{m+1}]$, ou $g(x) = G[x_1^+(g_1)x_2 \cup x_2^+(g_2)\dots(g_{i-1})x_i \cup x_i^+(g_i)x_{i+1} \cup x_{i+1}^+(g_{i+1})\dots(g_{m-1})x_m \cup x_m^+(g_m)x_{m+1}^-]$, etc au lieu de $g(x) = \{g_l(x) \text{ si } x_l \leq x < x_2, \dots, g_i(x) \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1}, \dots, g_m(x) \text{ si } x_m \leq x \leq x_{m+1}\}$
Ici $I = [x_l, x_2) \cup [x_2, x_3) \cup \dots \cup [x_i, x_{i+1}) \cup \dots \cup [x_m, x_{m+1}] = [x_l, x_2]$.

Les indices supérieurs attachés aux bornes x_i de ces intervalles signifient:

- + : $g(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} g(x)$
- - : $g(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i^-} g(x)$
- sans indice : la fonction $g(x)$ est indéfinie en x_i , ou elle a une valeur fixé $g(x_i) = a \in \mathbf{R}$.

Par conséquent:

- pour $g(x): (x_1, x_2)$ nous allons utiliser l'une des notations:

$g(x) = G[x_1 > g < x_2]$, ou $g(x) = G[x_1 * (g) * x_2]$, ou $g(x) = G[x_1(g)x_2]$

- pour $g(x): [x_1, x_2]$, avec $g(x) = g_l(x)$ si $x \in (x_1, x_2)$, $g(x_1) = a$, $g(x_2) = b$, nous allons utiliser :

$g(x) = G[a < x_1 > g_1 < x_2 > b]$, $g(x) = G[(a) * x_1 * (g_1) * x_2 * (b)]$, ou $g(x) = G[(a)x_1(g_1)x_2(b)]$

- pour $g(x): (x_1, x_2) \cup (x_2, x_3)$, avec $g(x) = g_l(x)$ si $x \in (x_1, x_2)$ et $g(x) = g_2(x)$ si $x \in (x_2, x_3)$:

$g(x) = G[x_1 > g_1 < x_2 > g_2 < x_3]$, etc.

- pour $g(x): [x_1, x_2] \cup (x_3, x_4]$, avec $g(x) = g_l(x)$ si $x \in (x_1, x_2)$ et $g(x) = g_2(x)$ si $x \in (x_3, x_4)$:

$g(x) = G[x_1^+ > g_1 < x_2 > \cup < x_3 > g_2 < x_4]$, ou $g(x) = G[x_1 \geq g_1 < x_2 > \cup < x_3 > g_2 \leq x_4]$

- pour $g_a(x): [x_1, x_{m+1}]$, avec $g_a(x) = g_i(x)$ si $x \in (x_i, x_{i+1})$, et $g_a(x_i) = a_i \neq \infty$, $i=1, 2, \dots, m+1$:

$g_a(x) = G[a_1 < x_1 > g_1 < x_2 > a_2 < x_2 > g_2 < x_3 > a_3 \dots a_m < x_m > g_m < x_{m+1} > a_{m+1}]$ (a)

- pour $g_b(x): \bigcup_{i=1}^m (x_i, x_{i+1})$, avec $g_b(x) = g_i(x)$ si $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i=1, 2, \dots, m+1$, et $g_b(x_i)$ indéfinies:

$g_b(x) = G[x_1 > g_1 < x_2 > g_2 < x_3 > \dots < x_m > g_m < x_{m+1}]$. (b)

Pour ces deux derniers exemples, si $g_i(x)$ sont les mêmes, pour $i=1, 2, \dots, m+1$, les deux fonctions (ainsi que d'autres fonctions $g_r(x)$ qui accomplies cette condition et, encore la condition $g_r(x_i) = r_i \neq \infty$), sont *égaux presque partout*. S'ils sont de carré intégrable, leurs

développements de Fourier $\bar{g}_a(x)$, $\bar{g}_b(x)$ et $\bar{g}_r(x)$ ont la même expression $\bar{g}(x)$ quelle, en les points de discontinuité, converge vers:

$$\bar{g}(x_1) = \bar{g}(x_{m+1}) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_{m+1}^-} f(x) \right] \text{ et } \bar{g}(x_i) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) \right], \text{ pour } i \neq 1, m+1$$

Nous noterons $g_F(x)$ une fonction de type $g_r(x)$, pour laquelle $g_r(x_i) = \bar{g}(x_i)$, $i=1, 2, \dots, m+1$:

$$g_F(x) = G[\bar{g}(x_1) \langle x_1 \rangle g_1 \langle x_2 \rangle \bar{g}(x_2) \langle x_2 \rangle g_2 \langle x_3 \rangle \bar{g}(x_3) \dots \bar{g}(x_m) \langle x_m \rangle g_m \langle x_{m+1} \rangle \bar{g}(x_1)] \quad (c)$$

On peut noter $g_a(x) = g_b(x) = g_r(x) = g_F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{g}(x)$, l'égalité presque partout. Le

développement de Fourier de la fonction discontinue $g(x)$ est une fonction continue $\bar{g}(x)$ qui s'approche autant que possible de $g_F(x)$. On peut assigner à la fonction continue $\bar{g}_F(x)$ (qui est une approximation autant que nous voulons de proche de la fonction $g_F(x)$), l'appellation de **Fourier-fonction**, ou **F-fonction**. Dans des nombreuses situations, y compris la majorité de cet article, les valeurs r_i de la fonction $g_r(x)$ en les points de discontinuité ne sont pas pertinentes. Par conséquent, lorsque nous analyserons des fonctions de ce type, sans perdre le caractère de généralité, mais dans un souci de simplification de l'exposition, nous allons considérer toujours (sauf les cas spécifiés expressément) qu'il s'agit d'une fonction du type $g_F(x)$, et nous allons utiliser la plus simple notation équivalente, celle de $g_b(x)$, la relation (b):

$$g_F(x) = G[x_1 \rangle g_1 \langle x_2 \rangle g_2 \langle x_3 \rangle \dots \langle x_m \rangle g_m \langle x_{m+1} \rangle]$$

Autres exemples:

$$\text{pour la fonction Heaviside: } H(x) = G[-\infty \rangle 0 \langle 0 \rangle 1/2 \langle 0 \rangle 1 \langle \infty]$$

$$\text{pour la fonction Dirac: } \delta(x) = \Delta[-\infty \rangle 0 \langle 0 \rangle \infty \langle 0 \rangle 0 \langle \infty]$$

$$\text{pour la fonction Haar: } \psi_H(x) = \Psi[0^+ \rangle 1 \langle 1/2 \rangle -1 \langle 1]$$

Pour toute fonction réelle $g(x)$, ou $x \in I = [x_1, x_2]$ qui a des valeurs réels **finis** dans l'ensemble image $g(I)$ et pour laquelle $g(x_1) = g(x_2) = a$, on peut construire, par des translations successives, une **extension périodique** sur \mathbf{R} : $g_p(x_R) = \sum_k g_{pk}(x_R, k)$ où, pour $\forall k \in \mathbf{Z}$ et $\forall x \in [x_1, x_2]$

$$g_{pk}(x_R, k) = g_{pk}(x+kT) = g(x_R-kT) = g(x) \text{ si } x_R \in [x_1+kT, x_2+kT] \text{ et} \quad (1)$$

$$g_{pk}(x_R) = 0, \text{ si } x_R \notin [x_1+kT, x_2+kT]. \text{ Ici } T = x_2 - x_1,$$

Pour chaque k , il y a sur l'axe réel, un intervalle $[x_1+kT, x_2+kT]$, avec $T = x_2 - x_1$, pour lequel la relation (1) est vraie. Si $k=0$, on obtienne pour $x \in [x_1, x_2]$: $g_{p0}(x, 0) = g(x)$.

Pour une définition dans laquelle la valeur de k (dépendant de x_R), apparaît implicitement, on peut appeler à la **fonction partie entière (par défaut)** $E(x) = \lfloor x \rfloor$ = le plus grand entier inférieur ou égal à x : $E(x) \leq x < E(x) + 1$ (*floor function*, dans la littérature anglo-saxonne) [1]. Pour tout $x_R \in \mathbf{R}$, on définit la fonction $K(x_R) = E((x_R - x_1)/T)$ (1a)

Alors, pour $\forall x_R \in \mathbf{R}$, $\exists x \in [x_1, x_2]$, $x_R = x + KT$. Par définition: $g(x_R) = g(x + KT) = g(x)$.

Pour la fonction $g_p(x) = \sin(x)$, définie sur l'axe \mathbf{R} , la relation (1) est vrai, sous la forme $\sin(x_R) = \sin(x)$, pour $\forall x_R = x + 2\pi k$, **implicitement, simultanément**, pour toute $k \in \mathbf{Z}$ et pour tous les intervalles $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ que leurs correspondent. Pour une certain fonction $g(x): [x_1, x_2]$, en dehors de cet intervalle $g_p(x)$ doit être spécifiée **explicitement**, par des translations **successives**, pour tous les intervalles de validité $x_1 + kT < x < x_1 + (k+1)T$: $g_p(x_R) = g(x_R - kT) = g(x)$, pour toute $k \in \mathbf{Z}$, ou **implicitement, simultanément**:

$$g_p(x_R) = g[x_R - T \cdot E((x_R - x_1)/T)] = g(x). \quad (1b)$$

Selon la théorie développée par Fourier, la fonction $2L$ -périodique $f_p(x): (-\infty, \infty)$, l'extension sur l'axe réel de la fonction de carré intégrable $f(x): [-L, L]$, peut être décomposée

en une somme: $\tilde{f}(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)]$ où, pour toute $n \in \mathbf{N}$, $\omega_n = n \frac{\pi}{L}$. Ici,

f_0 est la valeur moyenne de la fonction $f(x)$, sur l'intervalle $[-L, L]$, $\cos(\omega_n x)$ et $\sin(\omega_n x)$ sont

des fonctions continues (appelées harmoniques secondaires paires unitaires, respectivement harmoniques secondaires impaires unitaires), qui proviennent des fonctions continues $\cos(\omega_0 x)$ et $\sin(\omega_0 x)$, pour $\omega_0 = \pi/L$ (appelées harmonique fondamentale paire unitaire, respectivement harmonique fondamentale impaire unitaire) par la multiplication de leurs argument avec un entier naturel positifs $n \in \mathbf{N}^+$. Les fonctions de valeur moyenne nulle, $\sin(n\omega_0 x)$ et $\cos(n\omega_0 x)$ prennent sur l'intervalle $[-L/n, L/n]$, les mêmes valeurs que les harmoniques fondamentales les prennent sur l'intervalle $[-L, L]$ et ils satisfont implicitement: $\sin(n\omega_0 x) = \sin[n(\omega_0 x + 2\pi k)]$ et $\cos(n\omega_0 x) = \cos[n(\omega_0 x + 2\pi k)]$, pour tous les intervalles $[(2k-1)\omega_0/n, (2k+1)\omega_0/n]$, où k est un entier relatif.

Soit la fonction $g(x)$ de variable réelle $x \in [-L, L]$, qui a des valeurs réelles finies dans l'ensemble image $\mathbf{Im}(g)$ et vérifie l'égalité $g(-L) = g(L)$. Semblable aux sinusoides, à partir de la fonction $g_p(x) \rightarrow (-\infty, \infty)$, qui est l'extension $2L$ -périodique sur l'axe réel de la fonction $g(x)$, on peut obtenir pour chaque $n \in \mathbf{N}^+$, par dilatation, une fonction $2L/n$ -périodique:

$$g_n(x) = g_p(nx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{nk}(nx, k) : (-\infty, \infty), \text{ où pour tout entier relatif } k, g_{nk}(nx, k) \text{ est une fonction}$$

définie sur l'intervalle $[(2k-1)L/n, (2k+1)L/n]$. Dans cet intervalle, $g_{nk}(nx, k)$ prend les mêmes valeurs que celles que les prend $g_{n0}(nx, 0) = g(nx)$ sur l'intervalle $[-L/n, L/n]$ et $g(x)$ sur l'intervalle $[-L, L]$. Explicitement et successivement: $g_{nk}(nx, k) = g(nx + 2kL) = g_{n0}(nx, 0) = g(nx)$ pour $x \in [(2k-1)L/n, (2k+1)L/n]$ et $g_{nk}(nx, k) = 0$, pour $x \notin [(2k-1)L/n, (2k+1)L/n]$. La relation de périodicité devient: $g_n(x) = g_n(x + 2kL/n)$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, ou implicitement: $g_n(x) = g_n(x + 2L \cdot E(n(x+L)/2L))$. La fonction $g(x)$ et les fonctions $g_n(x)$ ont, sur l'intervalle $[-L, L]$, la même valeur moyenne g_0 .

Nous appellerons la fonction $g_n(x)$, restreinte à l'intervalle $[-L, L]$, **la g-harmonique de l'ordre n** de la fonction $g(x)$ et la fonction $g_1(x) = g(x)$, **la g-harmonique fondamental**. Nous allons également, introduire pour la g-harmonique de l'ordre n une notation réduite: $g_n(x) = G[-L/n < g(nx) > L/n]_n, n \in \mathbf{N}^+$. (1c)

Ces opérations de translation et de dilatation sont similaires à celles utilisées pour créer les fonctions ondelettes $\psi_{nk}(x)$, à partir d'une fonction mère $\Psi(x)$ [3]:

$$\psi_{nk}(x) = k\Psi[(x-b)/a], \text{ pour } b = 2k/n \text{ et } a = 1/n.$$

Si la fonction $g(x)$ a, dans l'intervalle $[x_l, x_{m+1}]$, un nombre fini m de discontinuités, la fonction $g_n(x)$ (la g-harmonique de l'ordre n) aura un nombre $m \cdot n$ de telles discontinuités, qui tend vers l'infini si $n \rightarrow \infty$. Pour cette raison, la fonction $g(x)$ est impropre pour générer une base pour un sous-espace de fonctions. Mais, si la fonction $g(x)$ est de carré intégrable (appartient à l'espace $L^2[x_l, x_{m+1}]$), ou si elle satisfait les conditions aux limites de Dirichlet, elle peut être développé en une série [1, 9]:

$$\bar{g}(x) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)], \text{ où } \omega_n = n\pi/L, \forall n \in \mathbf{N}.$$

$$\text{Ici, } a_n = \frac{1}{L} \int_{x_l}^{x_{m+1}} g(x) \cos(\omega_n x) dx \text{ et } b_n = \frac{1}{L} \int_{x_l}^{x_{m+1}} g(x) \sin(\omega_n x) dx; \quad g_0 = \frac{1}{L} \int_{x_l}^{x_{m+1}} g(x) \cos dx$$

Parce que $\bar{g}(x)$ est une série convergente des fonctions continues, elle est une fonction continue (une Fourier-fonction $\bar{g}_F(x)$) et peut être pris en compte pour générer une base pour les fonctions de l'espace $L^2[x_l, x_{m+1}]$. Évidemment, toutes les fonctions continues sont des F-fonctions. En tous les points de continuités, $\bar{g}(x) \rightarrow g_F(x)$, alors que dans les environs d'un point de discontinuité, $\bar{g}(x-h) \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_i^-} g_F(x)$, et $\bar{g}(x+h) \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_i^+} g_F(x)$, si $h \rightarrow 0$. Dans l'intervalle $[x_i-h, x_i+h]$, pour $h \rightarrow 0$, la fonction $\bar{g}(x)$ approche la droite $g_F(x) = x[g_F(x_i+h) + g_F(x_i-h)]/2h$ et $\bar{g}(x_i)$ approche la valeur $[g_F(x_i+h) + g_F(x_i-h)]/2$. En conséquence, toutes les g-harmoniques $g_n(x)$, fondamental ou secondaires sont des fonctions continues dans tout l'intervalle I .

Une F-fonction peut être construite par définition: soit, une fonction $g(x)$, définie dans l'intervalle $[x_1, x_2]$, avec une discontinuité de saut au point x_i . La F-fonction correspondante est: $g_F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} G \left[x_1 * (g) * x_d - h * \left(x \frac{g(x_d - h) + g(x_d + h)}{2h} \right) * x_d + h * (g) * x_2 \right]$, h réel. (1d)

Comme nous l'avons déjà mentionné, dans cet article, lorsque nous analyserons des g-harmoniques $g_n(x)$, continues par morceaux, nous allons considérer toujours (sauf les cas spécifiés expressément) qu'il s'agit de fonctions $\bar{g}_F(x)$ de Fourier.

Pour les phénomènes de la Nature, décrits par l'évolution de certaines fonctions, du moins pour des considérations énergétiques, les fonctions discontinues cèdent leur place aux fonctions qui approchent les fonctions de Fourier.

C'est évident que les fonctions $\bar{g}_n(x)$, $n=1, 2, \dots, \infty$ sont, deux à deux, **indépendantes**. Par conséquent, ils forment une base génératrice d'un sous-espace de L^2 . Nous appellerons cette base: **la base générée par $g(x)$** ou, plus simplement, **la base $g(x)$** , notée B_g .

2. Séries de Fourier périodiques non sinusoïdales

Dans la section précédente, nous avons constaté l'existence d'une quelconque analogie formelle entre les fonctions réelles et finies $\cos(\omega_0 x)$, $\sin(\omega_0 x)$, définies sur l'intervalle $[-L, L]$, et les autres fonctions réelles et finies $g(x)$, définies sur le même intervalle. Dans cette section, nous allons essayer de découvrir ces catégories des fonctions $g(x)$ qui accentuent cette analogie, de sorte qu'elle devienne une analogie fonctionnelle, utile pour créer des bases de fonctions complètes et indépendantes.

Nous utiliserons les notations \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f} , pour les développements en série de Fourier sinusoïdale, en série de Fourier non sinusoïdale et en série de Fourier non sinusoïdale orthogonale. Pour les formules de développement des fonctions en série de Fourier et pour leurs propriétés, nous avons consulté des travaux réputés [4-13].

2.1. Séries de Fourier périodiques non sinusoïdales des fonctions paires

Théorème 1. *La base B_g d'une fonction paire $g(x)$ définie sur l'intervalle $[-L, L]$ d'une espace L^2 (notée $L^2[-L, L]$), ayant la valeur moyenne g_0 nulle sur cet intervalle, constitue une base complète pour le système F_E des toutes les fonctions paires $f_e(x)$, réelles, de L^2 , périodique de période $2L$, ayant la valeur moyenne nulle sur cet intervalle.*

La démonstration de ce théorème inclut également, la manière de calculer les coefficients A_n du développement de Fourier non sinusoïdale de la fonction paire $f_e(x)$ de L^2 :

$$\bar{f}_e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{g}_n(x), \quad \text{ou } \bar{g}_n(x) \text{ sont des séries de Fourier} \quad (2)$$

La fonction $f_e(x)$ qui est, par définition, de valeur moyenne nulle sur l'intervalle $[-L, L]$, peut être développée, selon la thèse de Fourier, de manière univoque, en une somme infinie de fonctions cosinus paires:

$$\bar{f}_e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n x), \quad \text{ou } \omega_n = n \frac{\pi}{L} = n \omega_0. \quad (2.1)$$

Dans le même temps, toutes les quasi-harmoniques $g_n(x)$ peuvent être écrites comme une combinaison linéaire de la fonction $\cos \omega_n x$ et des autres cosinus de rang supérieur:

$$\bar{g}_1(x) = c_1 \cos \omega_0 x + c_2 \cos 2\omega_0 x + c_3 \cos 3\omega_0 x + c_4 \cos 4\omega_0 x + \dots$$

$$\bar{g}_2(x) = c_1 \cos 2\omega_0 x + c_2 \cos 4\omega_0 x + c_3 \cos 6\omega_0 x + c_4 \cos 8\omega_0 x + \dots$$

$$\bar{g}_3(x) = c_1 \cos 3\omega_0 x + c_2 \cos 6\omega_0 x + c_3 \cos 9\omega_0 x + c_4 \cos 12\omega_0 x + \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\bar{g}_n(x) = c_1 \cos n\omega_0 x + c_2 \cos 2n\omega_0 x + c_3 \cos 3n\omega_0 x + c_4 \cos nN\omega_0 x + \dots$$

.....

A partir de ces relations, pour le cas général, on obtient, pour $c_1 \neq 0$:

$$\cos \omega_n x = (\bar{g}_n - c_2 \cos 2\omega_n x - c_3 \cos 3\omega_n x - c_4 \cos 4\omega_n x - \dots) / c_1, \text{ pour } n=1, 2, \dots, \infty$$

Ici, toutes les fonctions $\bar{g}_n(x)$ sont des F-fonctions (donc, continues)

$$\bar{f}_e(x) = a_1 \cos \omega_0 x + a_2 \cos 2\omega_0 x + a_3 \cos 3\omega_0 x + a_4 \cos 4\omega_0 x + \dots + a_i \cos i\omega_0 x + \dots + a_n \cos n\omega_0 x + \dots =$$

$$= \frac{a_1}{c_1} (\bar{g}_1 - c_2 \cos 2\omega_0 x - c_3 \cos 3\omega_0 x - \dots) + \frac{a_2}{c_1} (\bar{g}_2 - c_2 \cos 4\omega_0 x - c_3 \cos 6\omega_0 x - \dots) +$$

$$+ \frac{a_3}{c_1} (\bar{g}_3 - c_2 \cos 6\omega_0 x - c_3 \cos 9\omega_0 x - \dots) + \frac{a_4}{c_1} (\bar{g}_4 - c_2 \cos 8\omega_0 x - c_3 \cos 12\omega_0 x - \dots) + \dots +$$

$$+ \frac{a_n}{c_1} (\bar{g}_n - c_2 \cos 2n\omega_0 x - c_3 \cos 3n\omega_0 x - \dots) =$$

$$= \bar{f}_e(x) = A_1 \bar{g}_1(x) + A_2 \bar{g}_2(x) + A_3 \bar{g}_3(x) + A_4 \bar{g}_4(x) + A_5 \bar{g}_5(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{g}_n(x)$$

L'égalité de $\bar{f}_e(x)$ avec $\hat{f}_e(x)$ est univoque, ce qui devait être prouvé. Donc: (2.2)

$$A_1 = \frac{a_1}{c_1} = K_1, \quad A_2 = K_1 \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{c_2}{c_1} \right), \quad A_3 = K_1 \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{c_3}{c_1} \right), \quad A_4 = K_1 \left(\frac{a_4}{a_1} - \frac{a_2 c_2}{a_1 c_1} - \frac{c_4}{c_1} + \frac{c_2^2}{c_1^2} \right), \quad A_5 = K_1 \left(\frac{a_5}{a_1} - \frac{c_5}{c_1} \right)$$

$$A_6 = K_1 \left(\frac{a_6}{a_1} - \frac{a_2 c_3}{a_1 c_1} - \frac{a_3 c_2}{a_1 c_1} - \frac{c_6}{c_1} + 2 \frac{c_2 c_3}{c_1^2} \right), \quad A_7 = K_1 \left(\frac{a_7}{a_1} - \frac{c_7}{c_1} \right),$$

$$A_8 = K_1 \left(\frac{a_8}{a_1} - \frac{a_2 c_4}{a_1 c_1} - \frac{a_4 c_2}{a_1 c_1} - \frac{c_8}{c_1} + 2 \frac{c_2 c_4}{c_1^2} + \frac{a_2 c_2^2}{a_1 c_1^2} - \frac{c_2^3}{c_1^3} \right), \quad A_9 = K_1 \left(\frac{a_9}{a_1} - \frac{a_3 c_3}{a_1 c_1} - \frac{c_9}{c_1} + \frac{c_3^2}{c_1^2} \right),$$

$$A_{10} = K_1 \left(\frac{a_{10}}{a_1} - \frac{a_2 c_5}{a_1 c_1} - \frac{a_5 c_2}{a_1 c_1} - \frac{c_{10}}{c_1} + \frac{2c_2 c_5}{c_1^2} \right), \quad A_{11} = \frac{a_{11} c_1 - a_1 c_{11}}{c_1^2} = K_1 \left(\frac{a_{11}}{a_1} - \frac{c_{11}}{c_1} \right),$$

$$A_{12} = \frac{a_{12} c_1 - a_2 c_6 - a_3 c_4 - a_4 c_3 - a_6 c_2 - a_1 c_{12}}{c_1^2} + \frac{2a_1 c_3 c_4 + 2a_1 c_2 c_6 + 2a_2 c_2 c_3 + a_3 c_2^2}{c_1^3} - \frac{3a_1 c_2^2 c_3}{c_1^4} =$$

$$= K_1 \left(\frac{a_{12}}{a_1} - \frac{a_2 c_6}{a_1 c_1} - \frac{a_3 c_4}{a_1 c_1} - \frac{a_4 c_3}{a_1 c_1} - \frac{a_6 c_2}{a_1 c_1} - \frac{c_{12}}{c_1} + 2 \frac{c_3 c_4 + c_2 c_6}{c_1^2} + 2 \frac{a_2 c_2 c_3}{a_1 c_1^2} + \frac{a_3 c_2^2}{a_1 c_1^2} - 3 \frac{c_2^2 c_3}{c_1^3} \right), \dots$$

En conclusion, parce que toute fonction paire $f_e(x)$ du sous-espace $L^2[-L, L]$, peut être développée en série de Fourier sinusoïdale (2.1), elle peut également être développée en série de Fourier non sinusoïdale (2). Pour calculer les coefficients de ce développement, il est nécessaire de connaître les coefficients a_n du développement de Fourier de la fonction $f_e(x)$ ainsi que c_n , les coefficients de la fonction $g(x)$, ce qui implique le calcul des intégrales

$\int_{-L}^L f_e(x) \cos \omega_n x dx$, respectivement $\int_{-L}^L g(x) \cos \omega_n x dx$. Bien sûr, pour une autre fonction paire

$f(x) = f_0(x) + f_e(x)$, $f_0(x) \neq 0$, $\hat{f}(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{g}_n(x)$. L'approximation d'ordre N s'écrit :

$$\hat{f}_N(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^N A_n \bar{g}_n(x), \text{ ou } \bar{g}_n(x) = \sum_{m=1}^N c_m \cos(m\omega_n x). \text{ Si } N \rightarrow \infty, \bar{g}_n(x) \rightarrow g(x)$$

Pour illustrer la méthode de calcul, soit la fonction $f_2(x) = G[-I^+ > x^2 < I^-]$, qui est un polynôme du second degré, sans des discontinuités, et qui a le développement de Fourier:

$$\bar{f}_2(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \quad (2a)$$

Nous voulons de la développer en une série d'impulsions rectangulaires (fonctions créneaux):

$$\bar{f}_2(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{g}_n^{dr}(x), \quad (2b)$$

la base étant générée par la fonction paire $g_e = g^{dr} = G_e[-1 > -1 < -1/2 > 1 < 1/2 > -1 < 1]$

Le développement en série trigonométrique de la fonction $g_e(x)$ est:

$$\bar{g}_e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2n-1)\pi x = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n-1)\pi x}{2n-1} \quad (2c)$$

Les relations (2a) et (2c), fournissent les coefficients suivants:

$$a_1 = -4/\pi^2, a_2 = 1/\pi^2, a_3 = -4/9\pi^2, a_4 = 1/4\pi^2, a_5 = -4/25\pi^2, a_6 = 1/9\pi^2, a_7 = -4/49\pi^2, a_8 = 1/16\pi^2, \\ a_9 = -4/81\pi^2, a_{10} = 1/25\pi^2, a_{11} = -4/121\pi^2, a_{12} = 1/36\pi^2, \dots \text{ et}$$

$$c_1 = 2/\pi, c_2 = 0, c_3 = -2/3\pi, c_4 = 0, c_5 = 2/5\pi, c_6 = 0, c_7 = -2/7\pi, c_8 = 0, c_9 = 2/9\pi, c_{10} = 0, c_{11} = -2/11\pi, \\ c_{12} = 0, \dots$$

Selon (2.2), les coefficients du développement (2b) sont:

$$A_1 = -2/\pi, A_2 = 1/2\pi, A_3 = -8/9\pi, A_4 = 1/8\pi, A_5 = 8/25\pi, A_6 = 2/9\pi, A_7 = -16/49\pi, A_8 = 1/32\pi, \\ A_9 = -8/81\pi, A_{10} = -2/25\pi, A_{11} = -24/121\pi, A_{12} = 1/18\pi, \dots$$

La représentation des quasi-harmoniques correspondantes et des sommes partielles résultantes est donnée à la figure 1. Ici, nous avons représenté les fonction $g_{en}(x)$ au lieu des fonctions $\bar{g}_{en}(x)$. Puisque la fonction $g_e(x)$ a deux points de discontinuité, les sommes partielles S_N du développement non sinusoïdal, ont des points de saut en nombre croissant, à mesure que le rang N augmente.

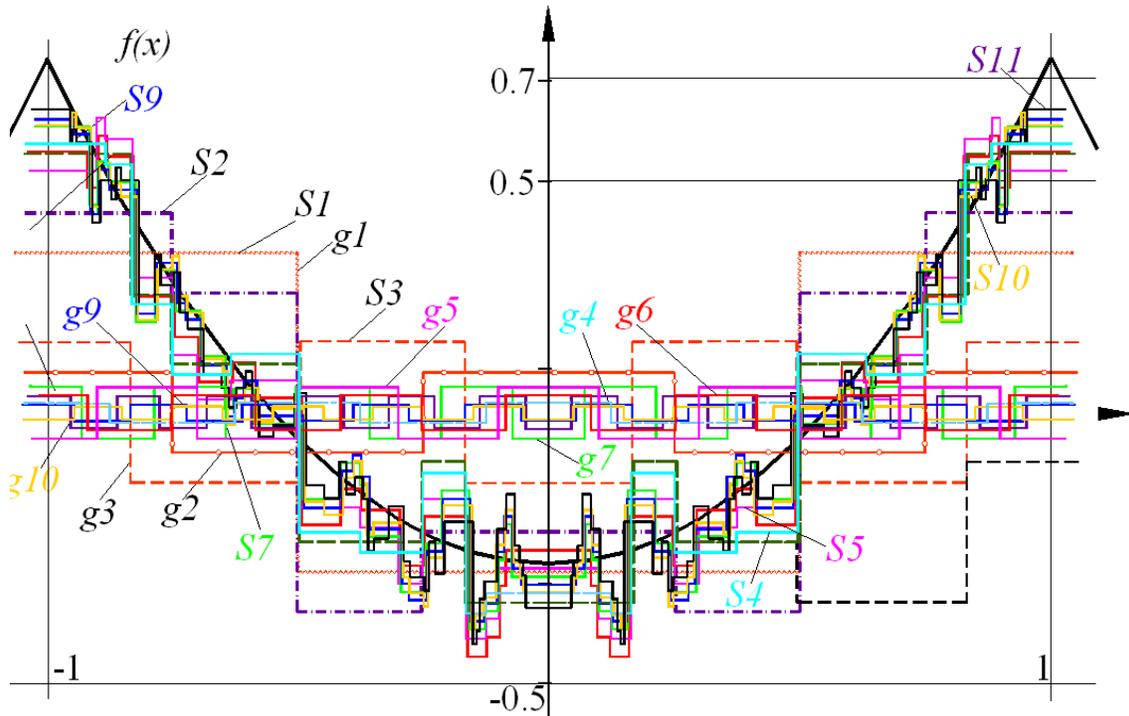


Fig.1. L'approximation de la fonction $x^2 - 1/3$ par une somme d'impulsions rectangulaires g_i : composante i des sommes partielles, S_i : somme partielle de l'ordre i

On peut remarquer une basse vitesse de convergence, par rapport à la méthode classique d'approximation de la même courbe, par le biais de segments des droits horizontaux.

Examinons, pour une comparaison, le développement de la même fonction par une somme des fonctions-rampe continues. Soit la même fonction $f_2(x)=F_2[-1^+>x^2<1^-]$ et la

fonction $g(x)=G[-1^+>x-1/2<0>x-1/2<1^-]$. $\bar{f}_2(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$ fournit:

$$a_1=-4/\pi^2, a_2=1/\pi^2, a_3=-4/9\pi^2, a_4=1/4\pi^2, a_5=-4/25\pi^2, a_6=1/9\pi^2, a_7=-4/49\pi^2, a_8=1/16\pi^2, a_9=-4/81\pi^2, a_{10}=1/25\pi^2, a_{11}=-4/121\pi^2, a_{12}=1/36\pi^2, \dots$$

et $\bar{g}(x)=-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2\pi^2}$ fournit: (2d)

$$c_1=-4/\pi^2, c_2=0, c_3=-4/9\pi^2, c_4=0, c_5=-4/25\pi^2, c_6=0, c_7=-4/49\pi^2, c_8=0, c_9=-4/81\pi^2, c_{10}=0, c_{11}=-4/121\pi^2, c_{12}=0, \dots$$

A l'aide des relations (2.2), nous pouvons développer la fonction $f_2(x)$ en une série infinie de

fonctions-rampe: $\hat{f}_2(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\bar{g}_n(x)$, où:

$$A_1=1, A_2=-1/4, A_3=0, A_4=-1/16, A_5=0, A_6=0, A_7=0, A_8=-1/64, A_9=0, A_{10}=0, A_{11}=0, A_{12}=0, \dots$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_2(x) &= \frac{1}{3} + \bar{g}_1(x) - \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \bar{g}_{2^n}(x) = \frac{1}{3} + \left[-1 > -x - \frac{1}{2} < 0 > x - \frac{1}{2} < 1 \right] - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left[-\frac{1}{2^n} > -2^n x - \frac{1}{2} < 0 > 2^n x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2^n} \right] \end{aligned}$$

La figure 2 montre les premiers quasi-harmoniques et les premières sommes partielles

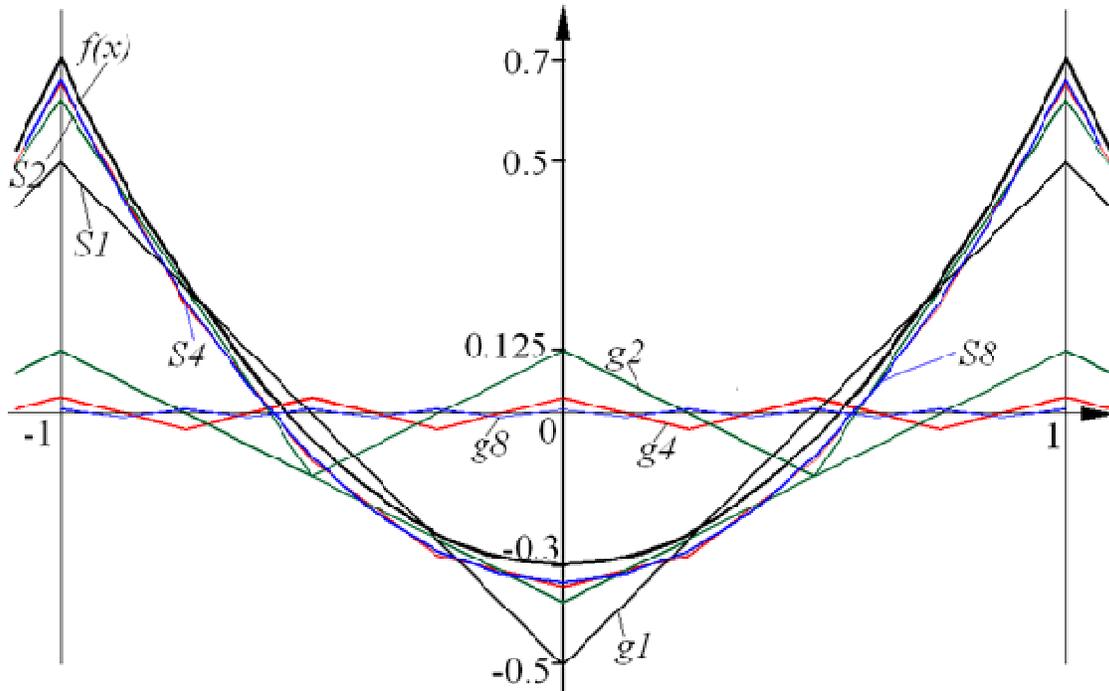


Fig.2. L'approximation de la fonction $x^2-1/3$ par une somme de fonctions-rampe paires g_i : quasi-harmoniques d'ordre i ; S_i : sommes partielles

Les fonctions $f_e(x)$ et $g(x)$ étant tous les deux paires, on peut faire aussi le développement en le sens inverse: $\hat{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \bar{f}_{en}(x)$, pour $a_1 \neq 0$, ou: (2.3)

$$A'_1 = \frac{c_1}{a_1}, A'_2 = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1^2}, A'_3 = \frac{c_3 a_1 - c_1 a_3}{a_1^2}, A'_4 = \frac{c_4 a_1 - c_2 a_2 - c_1 a_4 + c_1 a_2^2}{a_1^2}, A'_5 = \frac{c_5 a_1 - c_1 a_5}{a_1^2}, \dots$$

Si la fonction $f_e(x)$ est même la fonction $f = \cos \omega_0 x$, on écrit:

$$\begin{aligned} \cos \omega_0 x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{g}_n(x) = A_1 \bar{g}_1(x) + A_2 \bar{g}_2(x) + A_3 \bar{g}_3(x) + \dots = \\ &= A_1 (c_1 \cos \omega_0 x + c_2 \cos 2\omega_0 x + c_3 \cos 3\omega_0 x + \dots) + A_2 (c_1 \cos 2\omega_0 x + c_2 \cos 4\omega_0 x + c_3 \cos 6\omega_0 x + \dots) + \\ &+ A_3 (c_1 \cos 3\omega_0 x + c_2 \cos 6\omega_0 x + c_3 \cos 9\omega_0 x + \dots) + A_4 (c_1 \cos 4\omega_0 x + c_2 \cos 8\omega_0 x + c_3 \cos 12\omega_0 x + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Cette relation conduit au suivant système de coefficients: (2.4)

$$A_1 = \frac{1}{c_1}, A_2 = -\frac{c_2}{c_1^2}, A_3 = -\frac{c_3}{c_1^2}, A_4 = \frac{-c_1 c_4 + c_2^2}{c_1^3}, A_5 = -\frac{c_5}{c_1^2}, A_6 = \frac{-c_1 c_6 + 2c_2 c_3}{c_1^3}, A_7 = -\frac{c_7}{c_1^2}, \dots$$

Si la fonction paire $g(x)$ qui génère la base du développement est une fonction avec valeur moyenne $g_0 \neq 0$ sur l'intervalle $[-L, L]$:

$$\cos \omega_n x = (\bar{g}_n - g_0 - c_2 \cos 2\omega_n x - c_3 \cos 3\omega_n x - c_4 \cos 4\omega_n x - \dots) / c_1, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

et si la fonction $f(x)$ a aussi une valeur moyenne $f_0 \neq 0$ sur cet intervalle:

$$\hat{f}(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\bar{g}_n(x) - g_0] \quad (2.5)$$

2.2. Séries de Fourier périodiques non sinusoïdales des fonctions impaires

De la même manière est traité le problème de la fonction impaire $f_o(x)$, qui appartient à l'espace F_o des fonctions impaires de $L^2[-L, L]$.

Théorème 2. *La base B_h d'une quiconque fonction impaire $h(x)$ de $L^2[-L, L]$ constitue une base complète pour le système F_o des toutes les fonctions impaires $f_o(x)$, réelles, de L^2 , périodique de période $2L$.*

Selon la thèse de Fourier, la fonction impaire $f_o(x)$ (dont la valeur moyenne sur l'intervalle $[-L, L]$ est toujours zéro) peut être développée d'une manière univoque en une somme infinie de fonctions sinusoïdales impaires:

$$\bar{f}_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n x), \quad \text{ou } \omega_n = n\omega_0 = n \frac{\pi}{L}. \quad (2.6)$$

Tout autre développement de la fonction $f_o(x)$ doit être également une somme infinie de

$$\text{fonctions impaires: } \hat{f}_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \bar{h}_n(x), \quad \text{ou } \bar{h}_n(x) \text{ sont des séries de Fourier} \quad (2.7)$$

Ici, $\bar{h}_n(x) \rightarrow G[-1/n < h(nx) > 1/n]_n$, ou $n \in \mathbb{N}$, sont des F-fonctions $2L/n$ -périodiques. Pour

$$\text{chacun telle fonction: } \bar{h}_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \sin(i\omega_n x), \quad \text{où } \omega_n = n \frac{\pi}{L}.$$

Comme dans la démonstration précédente, ce système d'équations nous permet de déterminer les coefficients B_n du développement: (2.8)

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{b_1}{d_1} = K_2, \quad B_2 = K_2 \left(\frac{b_2}{b_1} - \frac{d_2}{d_1} \right), \quad B_3 = K_2 \left(\frac{b_3}{b_1} - \frac{d_3}{d_1} \right), \quad B_4 = K_2 \left(\frac{b_4}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_4}{d_1} + \frac{d_2^2}{d_1^2} \right), \\ B_5 &= K_2 \left(\frac{b_5}{b_1} - \frac{d_5}{d_1} \right), \quad B_6 = K_2 \left(\frac{b_6}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} \frac{d_3}{d_1} - \frac{b_3}{b_1} \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_6}{d_1} + 2 \frac{d_2 d_3}{d_1^2} \right), \quad B_7 = K_2 \left(\frac{b_7}{b_1} - \frac{d_7}{d_1} \right), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure, que toute fonction impaire $f_o(x)$ du sous-espace $L^2[-L, L]$, pouvant être développée en série de Fourier sinusoïdale (2.6), elle peut également être développée en série de Fourier non sinusoïdale (2.7). Pour calculer les coefficients de ce développement, (ainsi que ceux du développement inverse), il est nécessaire de connaître les coefficients b_n du développement de Fourier de la fonction $f_o(x)$, ainsi que celles de la fonction $h(x)$, ce qui implique le calcul des intégrales $\int_{-L}^L f_o(x) \sin \omega_n x dx$, respectivement $\int_{-L}^L h(x) \sin \omega_n x dx$.

Cette fois, pour illustrer la méthode de calcul, soit les fonctions impaires $f_o(x) = F_o[-1 > -1 < 0 > 1 < 1]$ (la fonction créneau), pour laquelle

$$\bar{f}_o(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}, \text{ et } g_o(x) = G[-1 > x < 1]$$
 (la fonction dents de scie), pour laquelle

$$\bar{g}_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\pi x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\pi x}{n}, \text{ d'où:}$$

$$b_1=4/\pi, b_2=0, b_3=4/3\pi, b_4=0, b_5=4/5\pi, b_6=0, b_7=4/7\pi, b_8=0, b_9=4/9\pi, b_{10}=0, b_{11}=4/10\pi, \dots, \\ d_1=2/\pi, d_2=-2/2\pi, d_3=2/3\pi, d_4=-2/4\pi, d_5=2/5\pi, d_6=-2/6\pi, d_7=2/7\pi, d_8=-2/8\pi, d_9=2/9\pi, \\ d_{10}=-2/10\pi, d_{11}=2/11\pi, d_{12}=-2/12\pi, \dots$$

Par conséquent, le développement $\hat{f}_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \bar{g}_n(x)$ aura les coefficients suivants:

$$B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 0, B_4 = 1, B_5 = 0, B_6 = 0, B_7 = 0, B_8 = 1/2, B_9 = 0, B_{10} = 1/5, \\ B_{11} = 0, B_{12} = 0, B_{13} = 0, B_{14} = 0, B_{15} = -2/15, \dots,$$

La figure 3 présente les graphiques de ces deux fonctions (**3a** et **3b**), les premières quasi-harmoniques du développement (**c**) et les premières sommes partielles (**d**). On remarque que, au fur et à mesure que $N \rightarrow \infty$, la somme $S_N(x)$ tend très lentement vers la fonction $f_o(x)$.

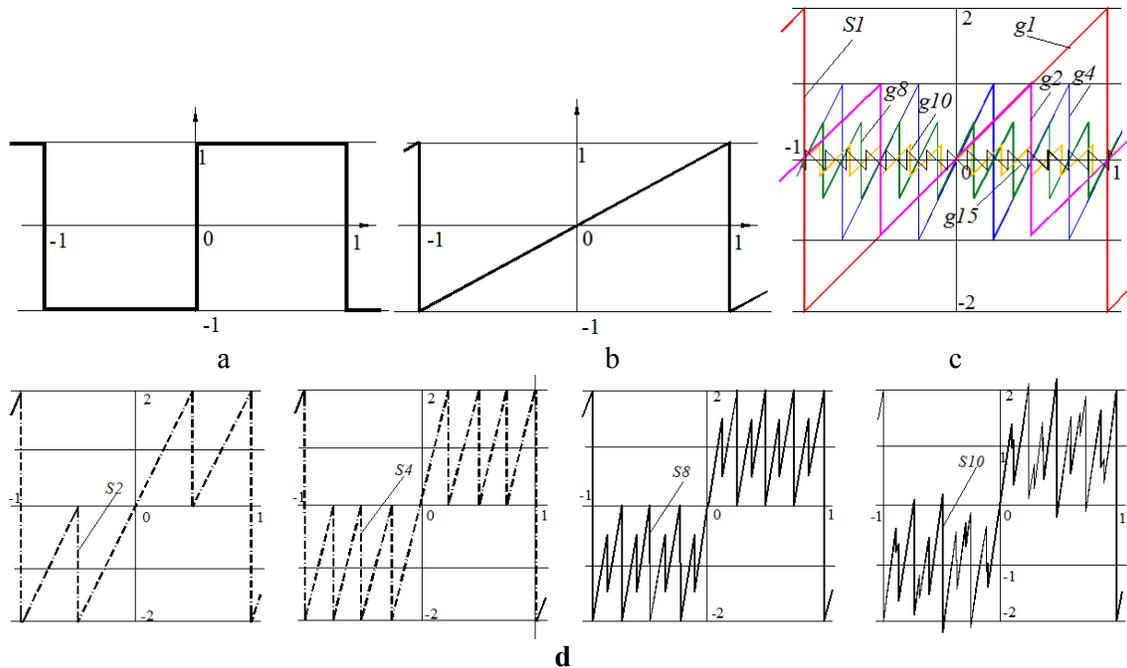


Fig. 3. Le développement de la fonction $f_o(x)$ en la base $g_o(x)$
a: $f_o(x)$ **b:** $g_o(x)$ **c:** les quasi-harmoniques $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_4(x)$, $g_8(x)$, $g_{10}(x)$, $g_{15}(x)$
d: les premières sommes partielles

Les coefficients des développements inverses sont (pour $b_l \neq 0$): (2.9)

$$B'_1 = \frac{d_1}{b_1}, B'_2 = \frac{d_2 b_1 - b_1 d_2}{b_1^2}, B'_3 = \frac{d_3 b_1 - d_1 b_3}{b_1^2}, B'_4 = \frac{d_4 b_1 - d_2 b_2 - d_1 b_4}{b_1^2} + \frac{d_1 b_2^2}{b_1^3}, B'_5 = \frac{d_5 b_1 - d_1 b_5}{b_1^2},$$

Pour les deux fonctions précédentes $f_o(x)=F_o[-1 > -1 < 0 > 1 < 1]$ et $g_o(x)=G[-1 > x < 1]$:
 $B'_1 = 1/2, B'_2 = 1/4, B'_3 = 0, B'_4 = 1/8, B'_5 = 0, B'_6 = 0, B'_7 = 0, B'_8 = 1/16, B'_9 = 0, B'_{10} = 0,$
 $B'_{11} = 0, B'_{12} = 0, B'_{13} = 0, B'_{14} = 0, B'_{15} = 0, B'_{16} = 1/32, \dots,$
 et nous pouvons écrire:

$$\bar{g}_o(x) = \bar{G}[-1 < x > 1] = \frac{1}{2} \left(\bar{F}_{o1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \bar{F}_{o2^n} \right) =$$

$$= \frac{L}{2} \bar{F}_o[-1 > -1 < 0 > 1 < 1] - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[-\frac{1}{2^n} > -1 < 0 > 1 < \frac{1}{2^n} \right]_2^F$$

Si $f(x)=\sin(\omega_o x)$, les coefficients d'un développement non sinusoïdal sont: (2.10)

$$B_1 = \frac{1}{d_1}, B_2 = -\frac{d_2}{d_1^2}, B_3 = -\frac{d_3}{d_1^2}, B_4 = \frac{-d_1 d_4 + d_2^2}{d_1^3}, B_5 = -\frac{d_5}{d_1^2}, B_6 = \frac{-d_1 d_6 + 2d_2 d_3}{d_1^3}, B_7 = -\frac{d_7}{d_1^2},$$

où d_n sont les coefficients du développement $\bar{h}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(\omega_n x)$, où $\omega_n = n \frac{\pi}{L}$.

Pour la fonction $\Pi_1(\theta) = \Pi[-\pi > -l < 0 > l < \pi]$, pour laquelle $\Pi_n(\theta) = \Pi[-\pi/n > -l < 0 > l < \pi/n]_n$,

et $\bar{\Pi}_1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1}$, pour écrire le développement $\sin \theta = \hat{f}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \bar{\Pi}_n(\theta)$, on utilise

les formules (2.10) et on obtient:

$$B_1 = \frac{\pi}{4}, B_2 = 0, B_3 = -\frac{\pi}{12}, B_4 = 0, B_5 = -\frac{\pi}{20}, B_6 = 0, B_7 = -\frac{\pi}{28}, B_8 = 0, B_9 = 0, B_{10} = 0, \dots$$

$$B_{2n-1} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{-1}{2n-1}, B_{2n} = 0, \text{ mais } B_{n^2} = 0, \text{ pour } n = 2, 3, \dots, \infty$$

Tous les coefficients du développement, sauf le coefficient de la fondamentale sont négatifs.

Pour la fonction $g_l(\theta) = X_o[-\pi < -\theta - \pi > -\pi/2 < \theta > \pi/2 < -\theta + \pi > \pi]$, le développement:

$$\bar{g}_1(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}, \text{ fournit les coefficients:}$$

$d_1 = 4/\pi, d_2 = 0, d_3 = -4/9\pi, d_4 = 0, d_5 = 4/25\pi, d_6 = 0, d_7 = -4/49\pi, d_8 = 0, d_9 = 4/81\pi, d_{10} = 0,$
 $d_{11} = -4/121\pi, d_{12} = 0, \dots,$ pour lesquelles, pour $f(\theta) = \sin \theta$, on obtient:

$$B_1 = \frac{\pi}{4}, B_2 = 0, B_3 = \frac{\pi}{36}, B_4 = 0, B_5 = -\frac{\pi}{100}, B_6 = 0, B_7 = \frac{\pi}{196}, B_8 = 0, B_9 = 0, \dots \quad (2.1)$$

$$B_{2n-1} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}, B_{2n} = 0, \text{ mais } B_{n^2} = 0, \text{ pour } n = 2, 3, \dots, \infty$$

2.3. Séries de Fourier périodiques non sinusoïdales de quelconques fonctions

Dans le cas général, une certaine fonction $f(x)$ de $L^2[-L, L]$, peut être écrite comme la somme de sa valeur moyenne f_0 sur cet intervalle, de son composant paire $f_e(x)$ (par définition, de valeur moyenne nulle sur l'intervalle $[-L, L]$) et de son composant impair $f_o(x)$:
 $f(x) = f_0 + f_e(x) + f_o(x)$. À la suite des deux théorèmes précédents, on peut affirmer:

Théorème 3. *Tout fonction $f(x)$ de $L^2[-L, L]$, peut être développée en série de Fourier non sinusoïdale en une base composée de f_0 (sa valeur moyenne sur cet intervalle), d'une*

certain base paire \mathbf{B}_{g-g_0} et d'une certain base impaire \mathbf{B}_h de $L^2[-L, L]$, ou la fonction paire $g(x)$ et la fonction impaire $h(x)$, sont des quelconques fonctions de $L^2[-L, L]$:

$$\hat{f}(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\bar{g}_n(x) - g_0] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \bar{h}_n(x), \text{ où } g_0 = \int_{-L}^L g(x) dx$$

On peut voir que le développement de Fourier sinusoïdale est un cas particulier du développement de Fourier non sinusoïdale.

Pour illustrer, soit la fonction $f(x) = F[-1 > 0 < -1/2 > -2 < 0 > 0 < 1/2 > 2 < 1]$ qui est la somme de $f_0 (=0)$, de la fonction paire $f_e = F_e[-1 > 1 < -1/2 > -1 < 1/2 > 1 < 1]$ et de la fonction impaire $f_o = F_o[-1 > -1 < 0 > 1 < 1]$, dont les développements de Fourier sont [5]:

$$\bar{f}_e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(2n-1)\pi x}{2n-1}, \text{ respectivement}$$

$$\bar{f}_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$$

Les coefficients suivants sont obtenus:

$$a_1 = 4/\pi, a_2 = 0, a_3 = -4/3\pi, a_4 = 0, a_5 = 4/5\pi, a_6 = 0, a_7 = -4/7\pi, a_8 = 0, a_9 = 4/9\pi, a_{10} = 0, a_{11} = -4/11\pi, \dots$$

$$b_1 = 4/\pi, b_2 = 0, b_3 = 4/3\pi, b_4 = 0, b_5 = 4/5\pi, b_6 = 0, b_7 = 4/7\pi, b_8 = 0, b_9 = 4/9\pi, b_{10} = 0, b_{11} = 4/11\pi, \dots$$

Pour un développement de la fonction $f(x)$ en une base exponentielle $g(x) = e^x$, étant donné que sur l'intervalle $[-1, 1]$, $g_0 = \sinh 1$, nous choisirons l'ensemble constitué des fonctions $g_e(x) = \cosh x - \sinh 1$ et $g_o(x) = \sinh x$, dont les développements en série de Fourier sont:

$$\bar{g}_e(x) = \sinh 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2\pi^2} \cos(n\pi x), \text{ et } \bar{g}_o(x) = \pi \cdot \sinh 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot (-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2} \sin(n\pi x), \text{ donc:}$$

$$c_1 = -2\sinh 1/(1+\pi^2), c_2 = 2\sinh 1/(1+4\pi^2), c_3 = -2\sinh 1/(1+9\pi^2),$$

$$c_4 = 2\sinh 1/(1+16\pi^2), c_5 = -2\sinh 1/(1+25\pi^2)$$

$$c_6 = 2\sinh 1/(1+36\pi^2), c_7 = -2\sinh 1/(1+49\pi^2), c_8 = 2\sinh 1/(1+64\pi^2), c_9 = -2\sinh 1/(1+81\pi^2),$$

$$c_{10} = 2\sinh 1/(1+100\pi^2), c_{11} = -2\sinh 1/(1+121\pi^2), c_{12} = 2\sinh 1/(1+144\pi^2), \dots$$

$$d_1 = 2\pi \sinh 1/(1+\pi^2), d_2 = -4\pi \sinh 1/(1+4\pi^2), d_3 = 6\pi \sinh 1/(1+9\pi^2), d_4 = -8\pi \sinh 1/(1+16\pi^2),$$

$$d_5 = 10\pi \sinh 1/(1+25\pi^2), d_6 = -12\pi \sinh 1/(1+36\pi^2), d_7 = 14\pi \sinh 1/(1+49\pi^2),$$

$$d_8 = -16\pi \sinh 1/(1+64\pi^2), d_9 = 18\pi \sinh 1/(1+81\pi^2), d_{10} = -20\pi \sinh 1/(1+100\pi^2),$$

$$d_{11} = 22\pi \sinh 1/(1+121\pi^2), d_{12} = -24\pi \sinh 1/(1+144\pi^2)$$

On résulte un développement en série de Fourier non sinusoïdale de la forme

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_e(x) + \hat{f}_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cosh_{F_n}(x) - \sinh 1] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh_{F_n}(x)$$

où \cosh_{F_n} et \sinh_{F_n} sont les extensions sur l'axe réel des F-fonctions $\cosh_F(nx)$, respectivement $\sinh_F(nx)$, définies sur les intervalles $[-1/n, 1/n]$, et les coefficients A_n, B_n sont:

$$\text{pour } K_1 = \frac{a_1}{c_1} = -\frac{2(1+\pi^2)}{\pi \cdot \sinh 1} \text{ et } K_2 = \frac{b_1}{d_1} = \frac{2(1+\pi^2)}{\pi^2 \cdot \sinh 1} = -\frac{K_1}{\pi} :$$

$$A_1 = K_1, A_2 = K_1 \frac{1+\pi^2}{1+4\pi^2}, A_3 = -K_1 \frac{4}{3} \cdot \frac{1+3\pi^2}{1+9\pi^2}, A_4 = K_1 \left[\frac{1+\pi^2}{1+16\pi^2} + \frac{(1+\pi^2)^2}{(1+4\pi^2)^2} \right], A_5 = -K_1 \frac{4}{5} \cdot \frac{1-5\pi^2}{1+25\pi^2}$$

$$A_6 \approx -K_1 \frac{(1+\pi^2) \cdot (7+16\pi^2)}{36\pi^2(1+4\pi^2)}, A_7 = -K_1 \frac{8}{7} \cdot \frac{1+7\pi^2}{1+49\pi^2}, A_8 \approx K_1 \frac{(1+\pi^2) \cdot (7+17\pi^2+12\pi^4)}{4(1+4\pi^2)^3}, \dots$$

$$B_1 = K_2, B_2 = 2K_2 \frac{1+\pi^2}{1+4\pi^2}, B_3 = -K_2 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{1+9\pi^2}, B_4 = 4K_2 \cdot \frac{(1+\pi^2) \cdot (2+25\pi^2+32\pi^4)}{(1+16\pi^2) \cdot (1+4\pi^2)^2}$$

$$B_5 = -K_2 \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{1+25\pi^2}, \quad B_6 \approx -K_2 \cdot \frac{3(1+\pi^2) \cdot (3+2\pi^2)}{(1+4\pi^2) \cdot (1+9\pi^2)}, \quad B_7 = -K_2 \cdot \frac{48}{7} \cdot \frac{1}{1+49\pi^2},$$

$$B_8 \approx K_2 \cdot \frac{2(1+\pi^2) \cdot (9+21\pi^2+16\pi^4)}{(1+4\pi^2)^3}, \quad B_9 \approx -K_2 \cdot \frac{1}{9\pi^4}, \quad B_{10} \approx -K_2 \cdot \frac{1+\pi^2}{1+4\pi^2} \cdot \frac{3-4\pi^2}{10\pi^2}, \dots$$

Dans l'intervalle $[-1/2, 1/2]$: $g_e(x)_2 = \cosh x - g_{02} = 1/2(e^x + e^{-x}) - 2\sinh(1/2)$ et $g_o(x)_2 = \sinh x$,

$$\text{donc } \bar{g}_e(x)_2 = \sinh \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{1+4n^2\pi^2} \cos(2n\pi x), \text{ et } \bar{g}_o(x)_2 = \pi \cdot \sinh \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n \cdot (-1)^{n+1}}{1+4n^2\pi^2} \sin(2n\pi x)$$

Nous pouvons noter que pour des valeurs $L < 1$, la fonction $g_{es}(x) = g_e(x)_L / \sinh L$ est approximée avec des déviations acceptables par la fonction $g_{ep}(x) = x^2$, et la fonction $g_{os}(x) = g_o(x)_L / \sinh L$ est approximé avec des déviations acceptables par la fonction $g_{op}(x) = x$, les déviations étant tant petites que L est plus petites.

Lorsque on demande le développement de la fonction $f(x) = f_0 + f_e + f_o$ en une base générée par une fonction quelconque $g(x) = g_0 + g_e(x) + g_o(x)$ de $L^2[-L, L]$, il faut trouver les coefficients C_n du développement

$$\hat{f}(x) = f_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n [g_{F_n}(x) - g_0], \text{ où } g_{F_n}(x) = G_F[-L/n < g_F(nx) > L/n]_n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (2.11)$$

Pour simplifier, considérons le cas particulier $f_0 = g_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \hat{f}_e(x) + \hat{f}_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_{F_{en}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n g_{F_{on}}(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n g_{F_n}(x) + (B_n - A_n) g_{F_{on}}(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n - B_n) g_{F_{en}}(x) + B_n g_{F_n}(x)] \end{aligned}$$

égalité qui coïncide avec (2.11), seulement si $A_n = B_n = C_n$. Donc, aucune fonction $g_F(x)$ ne peut pas seul générer une base pour l'espace $L^2[-L, L]$ entière, exigeant l'aide d'une autre base, générée par une fonction $h_F(x)$ avec un indice de parité différent. Si on considère les identités:

$$g_{en}(x) = \frac{1}{2} [g_n(x) + g_n(-x)] \text{ et } g_{on}(x) = \frac{1}{2} [g_n(x) - g_n(-x)], \text{ on obtient, dans le cas général:}$$

$$\hat{f}(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n + B_n}{2} [g_{F_n}(x) - g_0] + \frac{A_n - B_n}{2} [g_{F_n}(-x) - g_0] \right], \text{ ou} \quad (2.12)$$

$$\hat{f}(x) = f_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n [\bar{g}_{F_n}(x) - g_0]$$

En conclusion, nous pouvons formuler le théorème suivant:

Théorème 4. *Tout fonction $f(x)$ de $L^2[-L, L]$, peut être développé en série de Fourier non sinusoidale, en une base composée de f_0 (sa valeur moyenne sur cet intervalle) et les bases générées par les fonctions $[g(x) - g_0]$ et $[g(-x) - g_0]$. Ici, $g(x)$ est n'importe quoi fonction de $L^2[-L, L]$ qui a tous ces deux composants (paire et impaire) non nulles, $g(-x)$ est aussi de $L^2[-L, L]$, et g_0 est la valeur moyenne de $g(x)$.*

En conséquence, le développement de la fonction $f(x)$ analysé plus tôt, sur l'intervalle $[-L, L]$, peut être effectué en une base générée par les fonctions e^x et e^{-x} :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= f_0 + \hat{f}_e(x) + \hat{f}_o(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cosh_{F_n}(x) - \sinh 1] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh_{F_n}(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n + B_n}{2} e_{F_n}^x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n - B_n}{2} e_{F_n}^{-x} - A_n \sinh 1 \right) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n + B_n}{2} (e_{F_n}^x - \sinh 1) + \frac{A_n - B_n}{2} (e_{F_n}^{-x} - \sinh 1) \right] \end{aligned}$$

où $e_{F_n}^x$ et $e_{F_n}^{-x}$ sont les quasi-harmoniques de l'ordre n des F-fonctions (e^x) $_n$, respectivement (e^{-x}) $_n$ (les extensions sur l'axe réel des F-fonctions e^{nx} , respectivement e^{-nx} , définies sur les intervalles $[-1/n, 1/n]$).

L'éventail des fonctions pouvant servir comme base pour le développement de Fourier non sinusoidal est extrêmement large:

- si $g(x)$ est un polynôme dans $[-L, L]$, son composant paire $g_e(x)$ contient les puissances paires de x , pendant que son composant impaire $g_o(x)$ contient les puissances impaires
- si $g(x)$ est une fonction exponentielle, $g_{Fe}(x)$ peut être une fonction paire $G_{Fe}(\cosh x)$ et $g_{Fo}(x)$ peut être une fonction impaire $G_{Fo}(\sinh x)$
- si $g(x)$ est logarithmique: $\ln(A+x)$ (où $A>0$), $f(x)$ peut être développée uniquement sur un sous-intervalle $[a, b]$, compris dans l'intervalle $(-A, A)$, avec les bases:

$$G_{Fe}(x) = \frac{1}{2} \ln(A^2 - x^2) - g_0 \quad \text{et} \quad G_{Fo}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{A+x}{A-x}$$

- si $g(x)$ est une fonction rationnelle de la forme $1/(A+x)$, $A>0$, la fonction $f(x)$ peut être développée sur un sous-intervalle $[a, b]$ de l'intervalle $(-A, A)$, avec les bases:

$$G_{Fe}(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A+x} + \frac{1}{A-x} \right] - g_0 = \frac{A}{A^2 - x^2} - g_0 \quad \text{et} \quad G_{Fo}(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A+x} - \frac{1}{A-x} \right] = -\frac{x}{A^2 - x^2}$$

- si $g(x)$ est une fonction irrationnelle de la forme $\sqrt{A+x}$, $A>0$, la fonction $f(x)$ peut être développée en un sous-intervalle $[a, b]$ de l'intervalle $(-A, A)$, avec les bases:

$$G_{Fe}(x) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{A+x} + \sqrt{A-x} \right] - g_0 \quad \text{et} \quad G_{Fo}(x) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{A+x} - \sqrt{A-x} \right]$$

3. Séries de Fourier périodiques quasi-sinusoidales

Une autre façon de combiner deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$, afin de constituer une base pour l'espace $L^2[-L, L]$, consiste à choisir la fonction $h(x)$ comme une translation de la fonction $g(x)$: $h(x)=g(x+\alpha T)$, où $\alpha \in (0, 1)$. Parmi les bases obtenues par cette modalité, il y a quelques-unes qui sont complètes et qu'ils ont une propriété spéciale: la fonction $g(x)$ a une seule composante (la paire ou la impaire), et pour $\alpha=1/4$, $h(x)$ a la parité opposée, propriété qu'ils l'ont les fonctions $\sin(\omega \alpha x)$, respectivement $\cos(\omega \alpha x)$, aussi. Parce que cette propriété est extrêmement utile pour résoudre certains problèmes pratiques, dans cette section, nous allons leur prêter certain attention.

Si $g(x)$ est une fonction de L^2 définie sur l'intervalle $[0, L/2]$, nous pouvons construire des fonctions composées de 4 segments, **chaque** segment explicitement définis avec l'aide de la fonction $g(x)$, sur un quart de l'intervalle $[-L, L]$. On impose que les fonctions obtenues ont la valeur moyenne nulle sur l'intervalle $[-L, L]$, et qu'ils ont des symétries internes similaires à celles des fonctions *sinus*, respectivement *cosinus*: les deux branches (ce pour $x<0$ et ce pour $x>0$) des fonctions impaires sont symétriques par rapport à leur **axe** médian, et les deux branches des fonctions paires sont symétriques par rapport au leur **point** médiane. De plus, par translation, à gauche ou à droite, avec $L/2$, une fonction de parité opposée est obtenue. Nous appellerons la fonction $g(x)$, le **noyau du développement**, et les fonctions dérivés, des **quasi-sinusoides**. Nous utiliserons les notations:

$$g_s(x) = \mathbf{S}[g(x)]_L = G_s[-L < -g(x+L) > -L/2 < -g(-x) > 0 < g(x) > L/2 < g(L-x) > L], \quad \text{respectivement}$$

$$g_c(x) = \mathbf{C}[g(x)]_L = G_c[-L < -g(x+L) > -L/2 < g(-x) > 0 < g(x) > L/2 < -g(L-x) > L]$$

Par exemple, si $g(x)=x$, pour $x \in [0, \pi/2]$

$$g_s(x) = \mathbf{S}[x]_\pi = G_s[-\pi < -x-\pi > -\pi/2 < x > \pi/2 < \pi-x > \pi],$$

$$g_c(x) = \mathbf{C}[x]_\pi = G_c[-\pi < -x-\pi > -\pi/2 < -x > 0 < x > \pi/2 < -\pi+x > \pi]$$

Les fonctions $g_s(x)$ et $g_c(x)$ satisfont toutes les conditions requises par le théorème 3, par conséquence on peut conclure:

Théorème 5: Soit $g(x)$ une quelconque fonction de $L^2[0, L/2]$. Tout fonction $f(x)$ de $L^2[-L, L]$, peut être développé en série de Fourier quasi-sinusoidale, en une base composée

de f_0 (sa valeur moyenne sur cet intervalle) et les bases générées par les fonctions $S[g(x)]_L$ et $C[g(x+L/2)]_L$, ou $C[g(x)]_L$ et $S[g(x+L/2)]_L$.

Dans le cas général, les quasi-sinusoïdes et/ou leurs dérivées de premier ordre présentent des discontinuités qui peuvent être supprimées en ajoutant des quasi-sinusoïdes formées des impulsions rectangulaires (un pour chaque saut) et/ou des quasi-sinusoïdes formées des fonctions-rampe correctement choisie (pour les quasi-sinusoïdes impaires avec une discontinuité en l'origine, la rampe est $-2[g(L/2)-g(0)]/L$, pendant que pour les quasi-sinusoïdes paires, la rampe a la valeur de $-dg/dx$ en le point $x=0$). Pour les fonctions obtenues, nous utiliserons le nom de **quasi-sinusoïdes lisses**, ou **presque-sinusoïdes**, ou **sinusoïdes approximatives**, respectivement **presque-cosinusoïdes**, ou **cosinusoïdes approximatives**. Ils sont particulièrement utiles dans certains problèmes pratiques (résolution des certaines équations différentielles avec des dérivées partielles).

Par exemple, pour obtenir la presque-sinusoïdes $S[x^2-2x]_2$ de la Fig.4a, nous allons choisir deux fonctions paires $f_{2p}(x)=-x^2$ et $f_{2p}(x)=x^2$, pour $-1 \leq x \leq 1$, et par des translations verticales (en ajoutant des ondes rectangulaires) et horizontales (par changements de variables), nous superposons en l'origine ($x=0$), le dernier point de l'onde négative, avec le premier point de l'onde positive. La presque-cosinusoïdes $C[1-x^2]_2$ s'obtient en changeant la variable x avec $x-1$. Les fonctions obtenues sont définies sur l'intervalle $[-2, 2]$, ayant donc la moitié de la fréquence angulaire des fonctions initiales:

$$g_s(x)_{2L} = S[x^2-2x]_{2L} = G_s[-2L < -x^2-2x > 0 < x^2-2x > 2L], \text{ respectivement}$$

$$g_c(x)_{2L} = C[1-x^2]_{2L} = G_c[-2L < -1+(x+2)^2 > -L < 1-x^2 > L < -1+(x-2)^2 > L]$$

ou, en revenant à l'intervalle de définition initial:

$$g_s(x)_L = S[x^2-2x]_L = G_s[-L < -4x^2-4x > 0 < 4x^2-4x > L], \text{ respectivement}$$

$$g_c(x)_L = C[1-x^2]_L = G_c[-L < -1+4(x+1)^2 > -L/2 < 1-4x^2 > L/2 < -1+4(x-1)^2 > L]$$

La fonction $g_c(x)_L$ est représentée dans la Fig.4b.

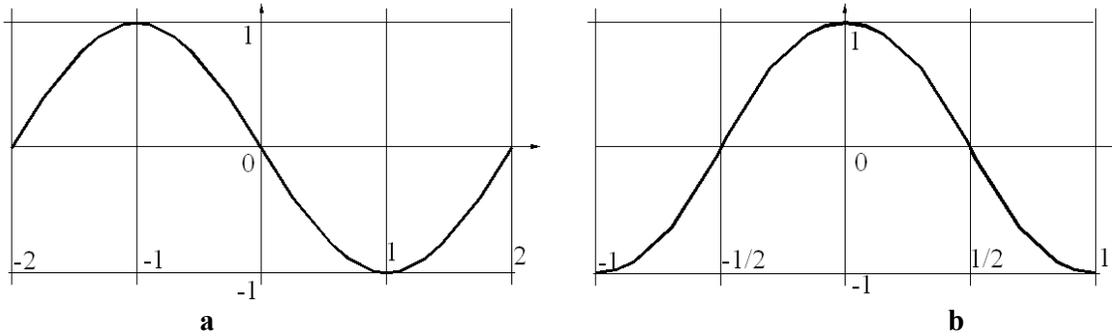


Fig.4. Des presque-sinusoïdes de 2-ème degré
a: la fonction impaire $S[x^2-2x]_2$; **b:** la fonction paire $C[1-x^2]_1$

Semblable aux développements en série de Fourier, la présence des discontinuités à l'intérieur ou aux extrémités de l'intervalle de définition de la fonction développées $f(x)$ produit, pour les développements en série non sinusoidale, des termes supplémentaires (munies avec des coefficients de forme a_n/n) et un effet similaire à l'effet de Gibbs. Cet effet est amplifié si la base du développement présente également de telles discontinuités (et les F-harmoniques présentent des sautes). De même, les discontinuités de la première dérivée génèrent des autres termes supplémentaires (munies avec des coefficients de forme a_n/n^2) et des phénomènes supplémentaires d'oscillation avec une amplitude significative. Les presque-sinusoïdes font partie de la classe C^1 de régularité (fonctions dont la première dérivée est continue) et, en raison des leurs propriétés de symétrie, semblable à ceux des fonctions sinus et cosinus, sont les mieux adaptés lorsque des développements en série de Fourier sont

nécessaires. De même, comme dans la pratique des développements de Fourier, lorsque les autres données du problème le permettent, il est avantageux de construire pour la fonction développée $f(x)$ aussi, définie sur un intervalle $[x_1, x_2]$, une extension quasi-sinusoïdale lisse, définie sur un intervalle $[x_{1e}, x_{2e}]$, qui inclut l'intervalle de définition. Par une telle approche, les "termes résiduels" du développement sont supprimés.

Pour nous édifier, nous analyserons le comportement d'une presque-sinusoïde:
 $g_c(x)_L = C[1-x^2]_L = G_c[-L < -1+4(x+1)^2 > -L/2 < 1-4x^2 > L/2 < -1+4(x-1)^2 > L]$,

avec le développement en série de Fourier: $\bar{g}_c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{32(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos(2n-1)\pi x \right\}$

lorsqu'elle est développée en une série quasi-sinusoïdale, en les bases générées par:

1) la fonction créneau (2.c): $g_e = G_e[-1 > -1 < -1/2 > 1 < 1/2 > -1 < 1]$ et

2) la fonction dent de scie (2.d): $f_{12}(x) = F_{12}[-1 > -x-1/2 < 0 > x-1/2 < 1]$ de la section 2.1.

Leurs développements en des séries trigonométriques de Fourier sont:

$$\bar{g}_e(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2n-1)\pi x = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n-1)\pi x}{2n-1} \quad \text{et} \quad \bar{f}_{12}(x) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2 \pi^2}$$

Afin de pouvoir comparer ces développements avec ceux de la section 2.1, nous allons utiliser les coefficients du développement de Fourier de la fonction $-1/2 \cdot g_c(x)$, défini sur le même intervalle. Son développement en série de Fourier génère les coefficients:

$$a_1 = -16/\pi^3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 16/27\pi^3, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -16/125\pi^3, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = 16/343\pi^3, \quad a_8 = 0, \\ a_9 = -16/729\pi^3, \quad a_{10} = 0, \quad a_{11} = 16/1331\pi^3, \quad a_{12} = 0, \dots$$

Pour la fonction créneau, les relations (2.2) nous conduisent à:

$$A_1 = -8/\pi^2, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -64/27\pi^2, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = 192/125\pi^2, \quad A_6 = 0, \quad A_7 = -384/343\pi^2, \quad A_8 = 0, \\ A_9 = 64/729\pi^2, \quad A_{10} = 0, \quad A_{11} = -960/1331\pi^2, \quad A_{12} = 0, \dots$$

Pour la fonction dent de scie, avec les mêmes relations, on calcule:

$$A_1 = 4/\pi, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -16/27\pi, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = -16/125\pi, \quad A_6 = 0, \quad A_7 = -32/343\pi, \quad A_8 = 0, \quad A_9 = 16/729\pi, \\ A_{10} = 0, \quad A_{11} = -48/1331\pi, \quad A_{12} = 0, \dots$$

Avec les valeurs ainsi obtenues, nous pouvons construire les quasi-harmoniques secondaires et les premières sommes partielles des développements quasi-sinusoïdaux correspondants: les figures 5 et 6.

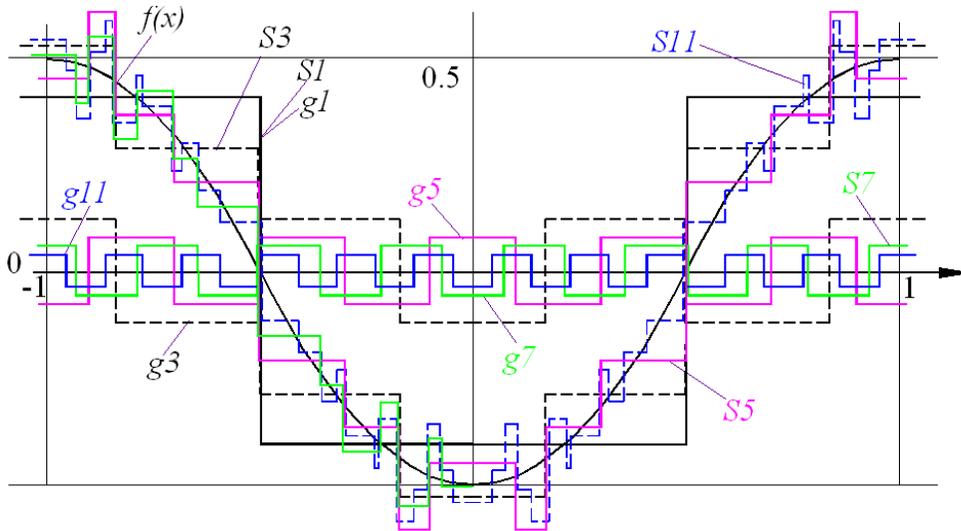


Fig.5. L'approximation de la quasi-sinusoïde $-g_c/2$ par une somme des fonctions créneau

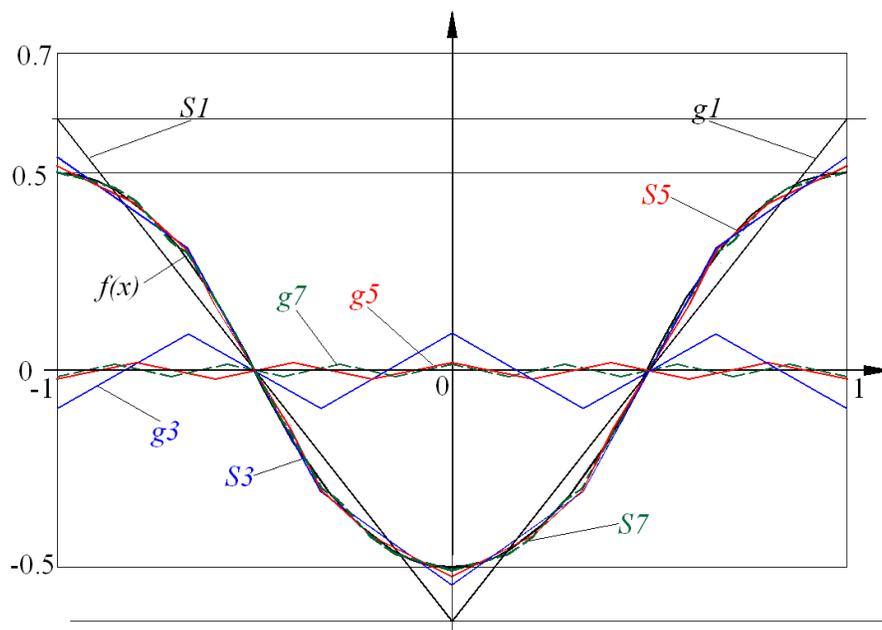


Fig.6 L'approximation de la quasi-sinusoïde $-g_c/2$ par une somme des fonctions dent-de-scie

L'aspect des développements des quasi-sinusoïdes en série presque-sinusoidale se reflète en les développements inverses des fonctions analysées précédemment. Aux figures 7 et 8, sont présentées les premières quasi-harmoniques et les sommes partielles d'ordre 12 pour les développements inverses $\hat{g}_c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n(g_c)_n$ et $\hat{f}_{12}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n(f)_{12}$. Selon (2.3):

$$A'_1 = -\pi^2/8, A'_2 = 0, A'_3 = \pi^2/27, A'_4 = 0, A'_5 = -3\pi^2/125, A'_6 = 0, A'_7 = 6\pi^2/343, A'_8 = 0, \\ A'_9 = -\pi^2/81, A'_{10} = 0, A'_{11} = 15\pi^2/1331, A'_{12} = 0, \dots, \text{ respectivement:} \\ A'_1 = -\pi/4, A'_2 = 0, A'_3 = -\pi/27, A'_4 = 0, A'_5 = -\pi/125, A'_6 = 0, A'_7 = -2\pi/343, A'_8 = 0, A'_9 = -\pi/243, \\ A'_{10} = 0, A'_{11} = -3\pi/1331, A'_{12} = 0, \dots$$

Dans les deux cas, les coefficients des développements ont des valeurs proches de celles obtenues par les développements en série sinusoidale (Fourier). Les différences deviennent encore plus petites si le noyau du développement est remplacé par $g(x) = 1 - x^{1.75}$.

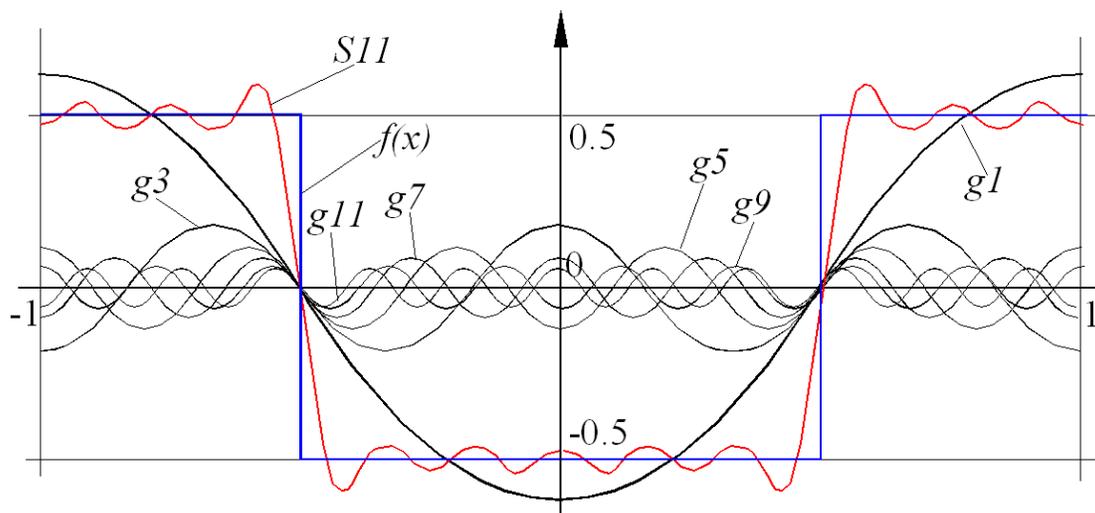


Fig.7. L'approximation de la fonction créneau par des presque-sinusoides

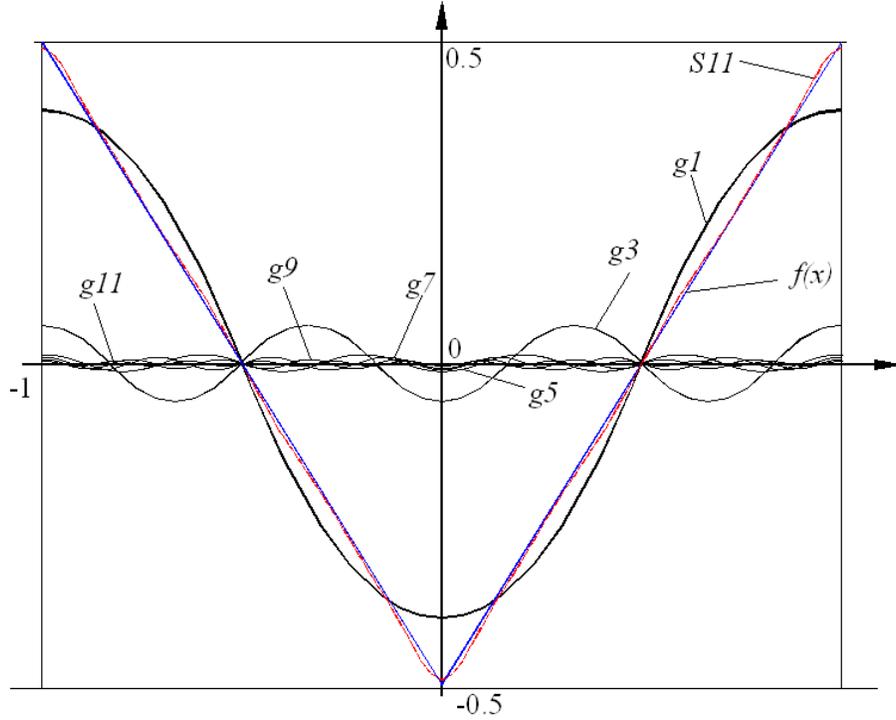


Fig.8. L'approximation de la fonction dent de scie par des presque-sinusoides

Dans l'exemple suivant, nous allons développer la fonction créneau (Fig.9.a) : $f_0 = F_0[-1 < x < 1]$ en des séries non sinusoidales: l'un générée par la fonction (Fig.9.b) $g_{o1}(x) = G_{o1}[-1 < \sinh x < 1]$, et l'autre par $g_{o2}(x)$, générée par la presque-sinusoides impaire de type exponentiel (Fig. 10.a) qui a un noyau de type $g(x) = K + \cosh(x + T/4)$, où $K = \text{constat}$:

$$g_{o2}(x) = G_{o2} \left[-1 < \frac{\cosh 0.5 - \cosh(x - 0.5)}{\cosh 0.5 - 1} > 0 < \frac{-\cosh 0.5 + \cosh(x + 0.5)}{\cosh 0.5 - 1} > 1 \right]$$

Dans l'intervalle $[-1, 1]$: $f_{o0} = g_{o10} = g_{o20} = 0$, $\bar{f}_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\pi x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$, donc:

$$b_1 = 4/\pi, b_2 = 0, b_3 = 4/3\pi, b_4 = 0, b_5 = 4/5\pi, b_6 = 0, b_7 = 4/7\pi, b_8 = 0, \dots,$$

$$\bar{g}_{o1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \sin(n\pi x)] = \pi \cdot \sinh 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot (-1)^{n+1}}{1 + n^2 \pi^2} \sin(n\pi x)$$

$$\bar{g}_{o2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot \cosh 0.5}{\pi (\cosh 0.5 - 1) \cdot (2n-1) \cdot [1 + (2n-1)^2 \pi^2]} \sin n\pi x, \text{ donc:}$$

$$d_1 = 8.8372 \cdot (4/\pi), d_2 = 0, d_3 = 8.8372 \cdot (4/3\pi) \cdot 1/(1+4\pi^2), d_4 = 0, d_5 = 8.8372 \cdot (4/5\pi) \cdot 1/(1+9\pi^2), d_6 = 0, d_7 = 8.8372 \cdot (4/7\pi) \cdot 1/(1+16\pi^2), d_8 = 0, \dots,$$

Pour $K = 8.8372$:

$$B_1 = K, B_2 = 0, B_3 = K/(1+4\pi^2), B_4 = 0, B_5 = K/(1+9\pi^2), B_6 = 0, B_7 = K/(1+16\pi^2), B_8 = 0, B_9 = K/(1+25\pi^2), B_{10} = 0, B_{11} = K/(1+36\pi^2), B_{12} = 0, \dots$$

Une représentation graphique de la somme partielle S_{12} est donnée à la figure 10.b.

Pour les valeurs de L sous-unitaire, la quasi-sinusoides exponentiel $g_{o2}(x)$ est approximée de manière satisfaisante par la quasi-sinusoides quadratique $g_c(x) = C[1-x^2]$, décrite dans la figure 4.b de la section 3. Entre les coefficients des développements de la fonction $f_0(x)$ en les deux bases générées par les quasi-sinusoides $g_c(x)$ et $g_{o2}(x)$, les différences sont négligeables.

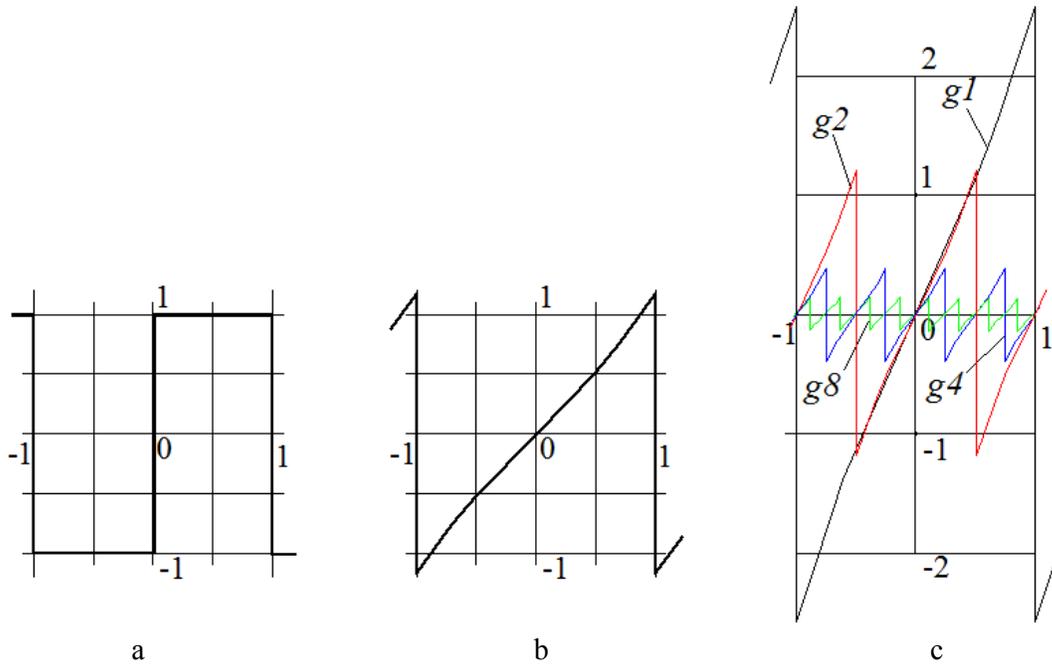


Fig. 9. Le développement de la fonction $f_0(x)$ en la base $g_{o1}(x)$
 a: $f_{o1}(x)$ b: $g_{o1}(x) = \sinh(x)$ c: les quasi-harmoniques $g_1(x), g_2(x), g_4(x), g_8(x)$

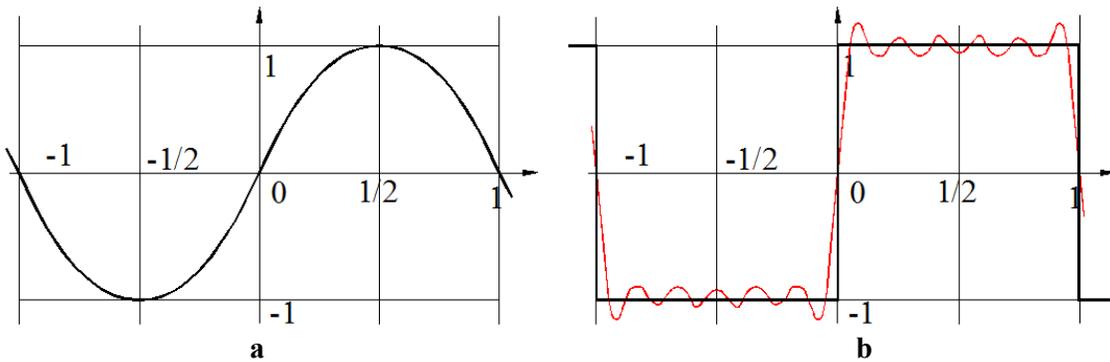


Fig. 10. Le développement de la fonction $f_0(x)$ en la base $g_{o2}(x)$
 a: $g_{o2}(x)$ b: la somme partiels $S_{12}(x)$

4. Bases orthogonales composées des fonctions périodiques non sinusoidales

Ni les quasi-harmoniques pairs $g_n(x) - g_0$ ni les impairs $h_n(x)$, analysés dans les sections précédentes, ne sont pas orthogonaux les uns aux autres, ce qui ne permet pas le calcul des coefficients de ces développements à partir de formules similaires aux formules de Euler. Mais, tout quasi-harmonique pair est orthogonal par rapport aux tous quasi-harmoniques impairs. Cela nous permet, par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt [4], de construire une base orthogonale (qu'on peut le normaliser par le même procédé) pour chacun des systèmes générés par les Fourier-fonctions $g_{Fn}(x) - g_0$ et $h_{Fn}(x)$. En les combinant et en ajoutant la fonction f_0 , on obtient une base biorthogonale complète. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt ne prétend pas, pour les g-harmoniques de la base non orthogonale, la nécessité d'être continues (d'être Fourier-fonctions), mais cette fonctionnalité est imposée par notre intention de créer une base complète pour l'espace $L^2[-L, L]$. À cause

de cela, nous considérons que les fonctions $g_{F_n}(x)$ et $h_{F_n}(x)$ sont des Fourier-fonctions par définition (1.d).

Par exemple, à partir des certaines deux fonctions $g(x)$ pair et $h(x)$ impair, qui ont la valeur moyenne nulle, définie sur un certain intervalle $[a, b]$, on obtient une base bi orthogonale formée par les fonctions $1, \Phi_n(x)$ et $\Psi_n(x), n=1, 2, 3, \dots$, où:

$$\begin{aligned}\Phi_n(x) &= g_{F_n}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\int_a^b g_n(x)\Phi_j(x)dx}{\|\Phi_j\|^2} \Phi_j(x) = g_{F_n}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} C_{in} g_{Fi}(x) \text{ et} \\ \Psi_n(x) &= h_{F_n}(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\int_a^b h_n(x)\Psi_j(x)dx}{\|\Psi_j\|^2} \Psi_j(x) = h_{F_n}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} D_{in} h_{Fi}(x)\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$\text{avec } \|\Phi_j\|^2 = \int_a^b \Phi_j^2(x)dx \text{ et } \|\Psi_j\|^2 = \int_a^b \Psi_j^2(x)dx$$

Ces considérations nous permettent de formuler le

Théorème 6: *Soit deux certaines F-fonctions $g_F(x)$ -paire et $h_F(x)$ -impair de $L^2[a, b]$. Toute fonction $f(x)$ de $L^2[a, b]$ peut être développée en une série complète, basée sur le système bi orthogonal $1, \Phi_n(x)$ et $\Psi_n(x)$, où $\Phi_n(x)$ et $\Psi_n(x)$ sont générés par les fonctions $g_{F_n}(x) - g_0$ et $h_{F_n}(x)$ par une procédé d'orthogonalisation:*

$$\tilde{f}(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^0 \Phi_n(x) + B_n^0 \Psi_n(x)] \quad (4.2)$$

Grâce à l'orthogonalité du système, pour calculer les coefficients de ce développement, sont valables les formules de Euler:

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\ A_n^0 &= \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_a^b f(x)\Phi_n(x)dx \quad n=1, 2, 3, \dots \\ B_n^0 &= \frac{1}{\|\Psi_n\|^2} \int_a^b f(x)\Psi_n(x)dx \quad n=1, 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (4.3)$$

L'obtention de ces expressions est basée sur les relations:

$$\begin{aligned}\langle f(x) | \Phi_n(x) \rangle &= \langle [f_e(x) + f_o(x)] | \Phi_n(x) \rangle = \langle f_e(x) | \Phi_n(x) \rangle \\ \langle f(x) | \Psi_n(x) \rangle &= \langle [f_e(x) + f_o(x)] | \Psi_n(x) \rangle = \langle f_o(x) | \Psi_n(x) \rangle\end{aligned}$$

qui sont vrais pour $\Phi_n(x) = \cos(n\omega_0 x)$, respectivement $\Psi_n(x) = \sin(n\omega_0 x)$, aussi.

On peut voir que les composantes d'ordre n ($n=1, 2, 3, \dots$) du système orthogonal $\Phi_n(x)$, générés par les fonctions paires $g_{F_n}(x) - g_0$, ainsi que ces du système orthogonal $\Psi_n(x)$, générés par les fonctions impaires $h_{F_n}(x)$, sont des combinaisons linéaires entre la quasi-harmoniques d'ordre n et les quasi-harmoniques d'ordre inférieur des respectifs développements non orthogonaux. Par conséquent, on peut établir une correspondance entre les coefficients A_n et B_n du développement en la base non orthogonale générés par les fonctions $g_F(x)$ et $h_F(x)$ et ceux du développement en la base orthogonale $\Phi_n(x)$ et $\Psi_n(x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 \left[g_{F_n}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} C_{in} g_{Fi}(x) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^0 \left[h_{F_n}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} D_{in} h_{Fi}(x) \right] = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^0 - \sum_{i=n+1}^{\infty} A_n^0 C_{ni} \right) g_{F_n}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n^0 - \sum_{i=n+1}^{\infty} B_n^0 D_{ni} \right) h_{F_n}(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_{F_n}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h_{F_n}(x)\end{aligned}$$

On constate que pour le calcul des coefficients $A_n = A_n^0 - \sum_{i=n+1}^{\infty} A_n^0 C_{ni}$ et $B_n = B_n^0 - \sum_{i=n+1}^{\infty} B_n^0 D_{ni}$, il est nécessaire de calculer certaines intégrales du type:

$$\int_a^b f_e(x)g_n(x)dx, \int_a^b f_o(x)h_n(x)dx, \int_a^b g_i(x)g_j(x)dx, \int_a^b h_i(x)h_j(x)dx, \text{ pour } i, j=1, 2, 3, \dots$$

Par cette méthode de calculer les coefficients, il n'est plus nécessaire de connaître les coefficients des développements en série sinusoïdale ni pour la fonction $f(x)$, ni pour les fonctions $g(x)$ et $h(x)$.

Nous allons exemplifier en construisant une base orthogonale, à partir d'une base générée par le système des fonctions créneau périodiques paires unitaires:

$$f_e = F_e[-1 > I < -1/2 > -1 < 1/2 > 1 < I]$$

Dans le cas choisi ici, le calcul sera simplifié grâce aux propriétés de symétrie de la quasi-sinusoïde choisie. Grâce aux relations (4.1), il en résulte:

$$\Phi_1(x) = g_1(x), \quad \|\Phi_1\|^2 = \int_{-1}^1 g_1^2(x)dx = 2$$

$$\Phi_2(x) = g_2(x) - \frac{\int_{-1}^1 g_2(x)g_1(x)dx}{2} g_1(x) = g_2(x), \quad \|\Phi_2\|^2 = \int_{-1}^1 g_2^2(x)dx = 2$$

$$\Phi_3(x) = g_3(x) - \frac{\int_{-1}^1 g_3(x)g_1(x)dx}{2} g_1(x) - \frac{\int_{-1}^1 g_3(x)g_2(x)dx}{2} g_2(x) = g_{F_3}(x) - \frac{1}{3}g_{F_1}(x) = g_3(x) - C_{13}g_1(x)$$

$$\|\Phi_3\|^2 = \int_{-1}^1 \left[g_3(x) - \frac{1}{3}g_1(x) \right]^2 dx = \frac{16}{9}$$

$$\Phi_4(x) = g_4(x) - \frac{\int_{-1}^1 g_4(x)g_1(x)dx}{2} g_1(x) - \frac{\int_{-1}^1 g_4(x)g_2(x)dx}{2} g_2(x) -$$

$$- \frac{9 \int_{-1}^1 g_4(x) \left[g_3(x) - \frac{1}{3}g_1(x) \right] dx}{16} \left[g_3(x) - \frac{1}{3}g_1(x) \right] = g_4(x) - C_{14}g_1(x) - C_{24}g_2(x) - C_{34}g_3(x) = g_4(x)$$

$$\|\Phi_4\|^2 = \int_{-1}^1 g_4^2(x)dx = 2$$

$$\Phi_5(x) = g_5(x) - \frac{\int_{-1}^1 g_5(x)g_1(x)dx}{2} g_1(x) - \frac{9 \int_{-1}^1 g_5(x) \left[g_3(x) - \frac{1}{3}g_1(x) \right] dx}{16} \left[g_3(x) - \frac{1}{3}g_1(x) \right] =$$

$$= g_5(x) - \frac{9}{40}g_1(x) - \frac{3}{40}g_3(x) = g_5(x) - C_{15}g_1(x) - C_{35}g_3(x)$$

$$\|\Phi_5\|^2 = \int_{-1}^1 \left[g_5(x) - \frac{17}{40}g_1(x) - \frac{3}{40}g_3(x) \right]^2 dx = \frac{1607}{800} \text{ et ainsi de suite.}$$

Par des relations similaires: $\Psi_n(x) = h_{F_n}(x) - \sum_{i=1}^{n-1} D_{in}h_{F_i}(x)$ est obtenu le système orthogonal

$\Psi_n(x)$, à partir du système $f_o(x)$ des fonctions créneau périodiques impaires unitaires:
 $f_o(x) = F_o[-1 > -I < 0 > 1 < I]$.

5. Propriétés des séries de Fourier non sinusoïdales

Les travaux sur les développements en série de Fourier trigonométrique (sinusoïdales) ont montré qu'une fonction réelle $f(x):[-L, L]$, $2L$ -périodique, peut être exprimée sous la forme d'une somme de ses projections sur les composantes d'une base orthogonal d'un espace

de fonctions, s'il remplit plusieurs conditions. Les séries résultant à la suite de ces développements ont plusieurs propriétés: convergence, sommabilité, dérivabilité, intégrabilité.

Les séries de Fourier non sinusoïdales de la fonction $f(x)$ analysée dans les sections précédentes ont résulté à partir de série sinusoïdale de cette fonction, par une redistribution de ses coefficients. Cette redistribution reconstitue les coefficients des développements en des séries sinusoïdales des composantes d'une base complète des fonctions non orthogonales. Par conséquent, les nouvelles méthodes de développement en série transfèrent des développements de Fourier sinusoïdales une série de conditionnalités et de propriétés. Sans aucun doute, ce sujet mérite une étude plus approfondie, mais pour le moment, nous nous résumons à quelques conclusions évidentes:

- toutes les fonctions $f(x)$ développées en séries de Fourier non sinusoïdales, ainsi que toutes les quasi-harmoniques ($g_n(x)$, $g_n(-x)$, $h_n(x)$, $\Phi_n(x)$, $\Psi_n(x)$, etc.) de ces développements sont des fonctions de Fourier.

- si la fonction $f(x)$ est intégrable, la suite des coefficients de son développement en série non sinusoïdale converge vers 0 (le théorème de Riemann-Lebesgue)

- si $\tilde{f}(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^0 \Phi_n(x) + B_n^0 \Psi_n(x)]$ est le développement de la fonction $f(x)$ en une base des fonctions orthogonales non sinusoïdales périodiques, alors

$$A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n^0)^2 + (B_n^0)^2] = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \quad (\text{le théorème de Parseval})$$

- si les fonctions $f(x)$, $g(x)$, et $h(x)$, sont $2L$ -périodiques, et dans l'intervalle $[-L, L]$ ils sont continus par morceaux et dérivables à gauche et à droite en tous les points de l'intervalle,

$$\text{la série } \hat{f}(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h_n(x) \text{ converge vers } \hat{f}(x_i) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) \right]$$

dans tous les points x_i .

- la série de Fourier résulte à la suite d'un développement en une quelconque base $2L$ -périodique non sinusoïdale d'une fonction $f(x)$ $2L$ -périodique, continûment dérivable par morceaux et continue, converge uniformément sur \mathbf{R} vers cette fonction.

- la série non sinusoïdale de Fourier d'une fonction $2L$ -périodique de carré intégrable sur une période, converge en norme L^2 vers la fonction considérée

- la série non sinusoïdale de Fourier d'une fonction de carré sommable converge presque partout vers cette fonction (le théorème de Carlson)

- deux fonctions $2L$ -périodiques, ayant les mêmes coefficients de leurs développements en la même base non sinusoïdale Fourier, sont égales presque partout. Notamment, dans le cas continu par morceaux, elles coïncident en tous les points de $[-L, L]$ sauf un nombre fini

- soit $f(x)$ une fonction $2L$ -périodique, continue dans l'intervalle $[-L, L]$. Son développement de Fourier $f(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h_n(x)$, sinusoïdal ou non, convergent ou non, peut être intégré terme par terme, entre toutes limites d'intégration:

$$\int f(x) dx = d_0 + f_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int g_n(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int h_n(x) dx, \text{ où } d_0 \text{ est une constante arbitraire.}$$

- soit $f(x)$ une fonction $2L$ -périodique, continue dans l'intervalle $[-L, L]$, avec $f(-L) = f(L)$ et avec la dérivée $f'(x)$ lisse par portions dans cet intervalle. Le développement de Fourier, sinusoïdal ou non, de la fonction $f'(x)$, peut être obtenu en dérivant terme par terme le développement de Fourier de la fonction $f(x)$. La série obtenue converge ponctuellement vers $f'(x)$ en tous les points de continuité et vers $[f'(x) + f'(-x)]/2$ en ceux de discontinuité.

$$\text{Si } f(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h_n(x), \text{ alors: } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g'_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h'_n(x) \quad (5.1)$$

La condition $f(-L)=f(L)$ imposée dans cette affirmation est assez restrictive, ce qui réduit l'utilité du théorème. Nous pouvons contourner cette condition si nous prenons en compte le fait que le composant de type pair f_e de la fonction $f(x)$ vérifie toujours la condition de différentiabilité, et que le composant impair f_o peut être écrit comme une somme de la fonction différentiable f_{os} et de la fonction-rampe: $f_r=x \cdot f_o(L)/L$. Alors:

$$\frac{d}{dx} f_o(x) = \frac{d}{dx} \left[f_{os}(x) + \frac{f_o(L)}{L} x \right] = \frac{d}{dx} f_{os}(x) + \frac{f_o(L)}{L}$$

Par exemple, dans le cas du développement en série de Fourier sinusoïdale:

$$f'(x) = \frac{f_o(L)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \omega_n \cos(\omega_n x) - \left(a_n \omega_n + 2(-1)^{n+1} \frac{f_o(L)}{L} \right) \sin(\omega_n x) \right], \quad (5.2)$$

ce qui nécessite la connaissance des conditions aux limites $f_o(-L)$ et $f_o(L)$. Cette relation permet de résoudre certaines équations différentielles en déterminant les coefficients du développement en série sinusoïdale de Fourier de la fonction inconnue (similaire au développement en série de Taylor).

6. Conclusions

Nous avons constaté dans les sections précédentes que toute fonction $f(x) \cdot [-L, L]$, $2L$ -périodique, qui appartient au sous-espace L^2 , peut être développée, d'une manière similaire à celle indiquée par Fourier il y a plus de 200 ans, dans une multitude de variantes, en des bases formées par la valeur moyenne de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[-L, L]$ et deux ensembles de quasi-harmoniques: un ensemble de fonctions paires $g_n(x)$ et un ensemble de fonctions impaires $h_n(x)$, ($n=1, 2, 3, \dots, \infty$), fonctions périodiques, avec la période $2L/n$. Dans le cas le plus général, les quasi-harmoniques fondamentales (pour $n = 1$) sont toutes fonctions qui satisfont les conditions de Dirichlet. Elles peuvent donc être des fonctions non trigonométriques et la base peut être non orthogonale.

Le développement en série sinusoïdale de Fourier n'est qu'un cas particulier de ce développement, à savoir le cas où les quasi-harmoniques fondamentales sont sinusoïdales: $g_{o1}(x) = \sin(\omega_0 x)$ et $g_{e1}(x) = \cos(\omega_0 x)$.

Ces résultats génèrent un large éventail de résultats théoriques. Tout d'abord, une nouvelle perspective extrêmement large s'ouvre dans l'analyse des espaces de fonctions, dans leur analyse spectrale, dans le développement de nouveaux types de transformations intégrales, dans la construction de systèmes de fonctions d'ondelettes, etc.

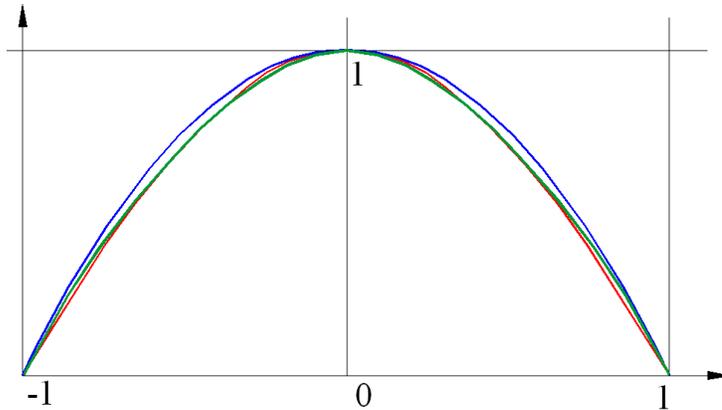


Fig.11. Comparaison entre les courbes $\cos(x\pi/2)$ (rouge), $1-|x|^{1.75}$ (verte) et $1-x^2$ (bleue) dans l'intervalle $[-1, 1]$

La comparaison des développements d'une fonction $f(x)$ en différentes bases complètes (le nombre de bases accessibles est devenu maintenant très important), permet de résoudre des nouveaux problèmes de convergence des séries numériques et des séries de fonctions et de trouver des nouvelles corrélations entre différents types de fonctions, etc. Deuxièmement, les conséquences pratiques sont également extrêmement importantes. Ce nouveau type de développement en série conduit à l'élaboration des nouvelles méthodes d'approximation de fonctions, dans lesquelles la précision de l'approximation peut être augmentée par la possibilité de choisir parmi un plus large éventail de possibilités. Par exemple, dans la figure 11, sont illustrés deux possibilités d'approximation d'une cosinusoïde.

Une perspective d'utilisation extrêmement prometteuse d'utilisation de ces types de développement en série est offerte par le domaine de la résolution numérique et analytique de larges catégories d'équations différentielles ordinaires et avec des dérivées partielles, linéaires et non linéaires.

7. Bibliographie

- [1] Perrin D., Les séries de Fourier, Notes de cours, <https://www.math.u-bordeaux.fr/~fjouve001/FourierNotes.pdf>
- [2] Weisstein, Eric W., From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/DirichletFourierSeriesConditions.html>
- [3] Burrus C. S., Gopinath R., Guo H., Wavelets and Wavelet Transforms, Collection Editor: C. Sidney Burrus, Online: <http://cnx.org/content/col11454/1.5/>
- [4] Herman R. L., An Introduction to Fourier and Complex Analysis with Applications to the Spectral Analysis of Signals, Version 2016, licensed under a Creative Commons Attribution–Noncommercial–Share Alike 3.0, United States License. [http://people.uncw.edu/hermanr/mat367/fcabook since Spring 2005](http://people.uncw.edu/hermanr/mat367/fcabook%20since%20Spring%202005)
- [5] Spiegel M. R., Mathematical Handbook of Formulas and Tables, Schaum's Outline Series, Schaum Publishing Co. 1st.ed. 1968, McGraw–Hill Book Company <https://archive.org/details/MathematicalHandbookOfFormulasAndTables>
- [6] Poularikas A. D., The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing, [http://www.ee.ufpe.br/codec/Poularikas–The–Handbook–of–Formulas–and–Table–for–Signal–Processing.pdf](http://www.ee.ufpe.br/codec/Poularikas-The-Handbook-of-Formulas-and-Table-for-Signal-Processing.pdf)
- [7] Zwillinger D., CRC Standard Mathematical Tables and Formulae, 31st Edition, 2003, by CRC Press Company
- [8] Byerly W. E., An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics, with applications to problems in mathematical physics, Harvard University, Ginn & Company, 1893
- [9] Tolstov G. P., Silverman R. A., Fourier Series, Courier Corporation, 1976
- [10] Halanay A., Gologan R., Timotin D., Elemente de Analiza Matematica, vol. 1, editia a cincea, editura Matrix–Rom., 2008
- [11] O'Neil P. V., Advanced Engineering Mathematics, Seventh Edition, part 1, Cengage Learning, 2012, Publisher: Global Engineering: Christopher M. Shortt
- [12] Kreyszig E., Advanced Engineering Mathematics, 10–th edition, chapters 1, 2, 5, 6, 11, 12, John Wiley & Sons, Inc., 2011
- [13] Polyanin A. D., A. V. Manzhirov, Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, Chapman & Hall/CRC Press, 2007