



HAL
open science

Diagrammes temporels mixtes et analyse harmonique pour l'identification de cycles

Jacques Gautier, Paule-Annick Davoine, Claire Cuntty

► **To cite this version:**

Jacques Gautier, Paule-Annick Davoine, Claire Cuntty. Diagrammes temporels mixtes et analyse harmonique pour l'identification de cycles. SAGEO 2019, Nov 2019, Clermont-Ferrand, France. hal-02473602

HAL Id: hal-02473602

<https://hal.science/hal-02473602>

Submitted on 10 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Diagrammes temporels mixtes et analyse harmonique pour l'identification de cycles

Jacques Gautier¹, Paule-Annick Davoine², Claire Cuntty³

1. Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, 38000 Grenoble, France
jacques.gautier@univ-grenoble-alpes.fr

2. Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Science Po Grenoble, PACTE, 38000 Grenoble, France
paule-annick.davoine@univ-grenoble-alpes.fr

3. Laboratoire EVS, Université Lyon II, Lyon, France
claire.cuntty@univ-lyon2.fr

RÉSUMÉ. Les environnements de géovisualisation dédiés à l'analyse de phénomènes spatio-temporels intègrent depuis longtemps des représentations graphiques permettant d'apprécier l'aspect cyclique du temps. En revanche, ils autorisent rarement une recherche visuelle de récurrences cycliques au cours d'une analyse exploratoire. La recherche visuelle de cycles est cependant possible au travers de diagrammes intégrant les aspects linéaires et cycliques du temps, lors d'une modification graduelle de l'échelle cyclique représentée. Couplés à des outils d'analyse harmonique suggérant aux utilisateurs des pistes de recherche, ces diagrammes représentent une opportunité pour l'analyse exploratoire de cycles dans les phénomènes spatio-temporels.

ABSTRACT. Geovisualization environments that allow the analysis of spatio-temporal phenomena, have used for a long time graphical representations that allow to estimate the cyclic aspect of time. However, they rarely enable a visual search for cyclic recurrences during an exploratory analysis. The visual search for cycles is yet possible through the use of diagrams that integrate both linear and cyclic aspects of time, during a gradual modification of the represented cyclic scale. When they are associated with harmonic analysis tools which suggest searching paths to users, these diagrams give an opportunity for an exploratory analysis of cycles in spatio-temporal phenomena.

MOTS-CLÉS : Diagramme mixte, Analyse harmonique, Analyse exploratoire, Récurrences cycliques, Visualisation

KEYWORDS: Mixt diagram, Harmonic analysis, Exploratory analysis, Cyclic recurrences, Visualization

1. Introduction

La représentation de l'aspect cyclique du temps est étudiée depuis longtemps en visualisation (Carlis, Konstan, 1998 ; Weber *et al.*, 2001 ; Müller, Schumann, 2003), et beaucoup d'environnements de géovisualisation intègrent des représentations permettant d'apprécier visuellement la cyclicité de certains phénomènes (*Time Wave* (Li, 2010), *PerSE* (Swedberg, Peuquet, 2017)). En revanche, la dimension cyclique y est majoritairement représentée au travers d'échelles correspondant à des rythmes de la nature ou à des activités humaines (Hornsby, Egenhofer, 2002). Ces environnements permettent d'explorer des données temporelles à travers une liste finie d'échelles cycliques usuelles, mais peu d'entre eux offrent, dans une démarche exploratoire, la possibilité d'une recherche visuelle de récurrences cycliques dont la période de réapparition peut présenter n'importe quelle valeur. Ce que nous désignons ici par le terme de « récurrences cycliques » fait référence à la réapparition d'un phénomène, aussi bien qu'à une évolution de son intensité, respectant une certaine périodicité. Proposer des représentations visuelles permettant l'identification de ces récurrences cycliques, au sein d'environnements de géovisualisation, présente alors un enjeu de recherche pour l'analyse visuelle des phénomènes spatio-temporels. L'analyse de récurrences cycliques fait l'objet de recherche dans d'autres domaines tels que le traitement du signal : des outils provenant de ce domaine, comme l'analyse harmonique (Gasquet, Witomski, 2000 ; Bony, 2001 ; Katznelson, 2004), permettent de déceler ces comportements cycliques dans les données temporelles. Nous émettons l'hypothèse que l'intégration de tels outils dans les environnements de visualisation, suggérant à l'utilisateur des pistes de recherche, pourrait améliorer l'efficacité d'une analyse exploratoire de structures cycliques dans les données temporelles.

Nous présentons à travers ce travail une approche de visualisation associant représentations graphiques et outils d'analyse harmonique, dans l'objectif de faciliter l'identification des récurrences cycliques lors de l'analyse exploratoire de séries d'événements spatio-temporels. Dans un premier temps, nous exposons les possibilités offertes par les diagrammes temporels et par l'analyse harmonique pour identifier ces cycles dans des données temporelles. Nous présentons ensuite comment l'approche visuelle offerte par les diagrammes temporels peut être associée à l'analyse harmonique pour permettre la recherche de cycles au cours d'une analyse exploratoire. Enfin, nous présentons comment cette proposition, intégrée au sein d'un environnement de visualisation, nous permet d'identifier des cycles au sein de jeux de données majoritairement aléatoires.

2. Visualisation de récurrences cycliques

2.1. Identification de cycles dans les représentations graphiques du temps

La majorité des diagrammes temporels intégrés au sein d'environnements de

géovisualisation sont basés sur les modèles de la *timeline*, représentant le temps de manière linéaire, et de la *timewheel*, représentant le temps au travers d'une échelle cyclique (R. M. Edsall *et al.*, 1997 ; R. Edsall, Peuquet, 1997). L'identification d'une récurrence cyclique dans les données temporelles au travers de ces outils pose toutefois certaines limites :

- la *timeline* n'intégrant pas de représentation de la structure cyclique du temps, l'utilisateur doit identifier une réapparition de patterns graphiques similaires séparés par une distance graphique régulière (Figure 1.A);

- la *timewheel* étant la représentation, soit d'une instance unique d'une échelle cyclique considérée, soit d'une projection de différentes instances de cette échelle sur un même espace graphique, elle permet difficilement l'identification de la réapparition d'un pattern dans plusieurs instances (Figure 1.B) : l'observation d'un événement, apparaissant le 3 mars, dans une *timewheel* représentant une échelle d'un an, ne permet pas de dire si cet événement n'apparaît qu'une seule année, ou s'il se répète chaque année le 3 mars.

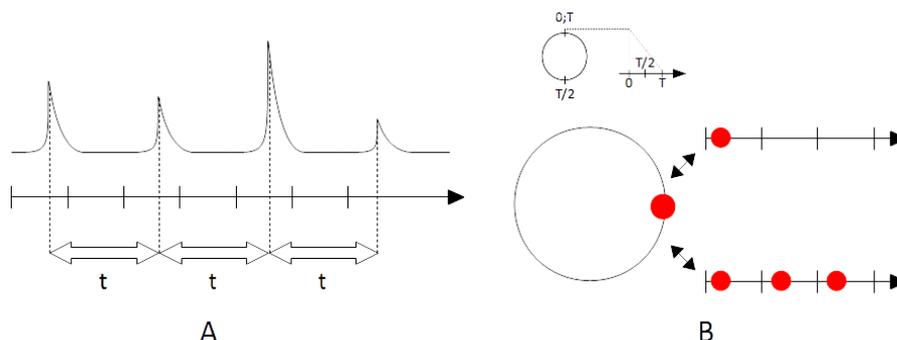


FIGURE 1. Difficulté d'identification d'un cycle dans les timelines et timewheels

D'autres diagrammes proposent d'allier les avantages de la *timeline* et de la *timewheel*, en intégrant dans une même représentation les aspects linéaires et cycliques du temps (R. Edsall, Peuquet, 1997 ; Van Wijk, Van Selow, 1999 ; Weber *et al.*, 2001 ; Li, 2010). Ces diagrammes, que l'on peut appeler diagrammes mixtes, représentent le temps de manière linéaire, à travers une succession d'instances d'une échelle cyclique considérée. À titre d'exemple, nous pouvons citer :

- le diagramme *Spiral Graph* (Weber *et al.*, 2001) (Figure 2.A), basé sur une version linéaire de la timewheel, se présentant sous la forme d'une spirale dont les anneaux représentent les instances successives d'une échelle cyclique;

- les *tiles maps* (Van Wijk, Van Selow, 1999) (Figure 2.B), représentant le temps au travers d'une échelle linéaire et d'une échelle cyclique sur deux axes orthogonaux, selon deux granularités différentes, créant une matrice dont

chaque colonne représente une instance de l'échelle cyclique (ex: une journée), et chaque ligne un même moment dans ces différentes instances (ex: 15h);

– les diagrammes *Time Coil* (R. Edsall, Peuquet, 1997) (Figure 2.C.1) et *Time Wave* (Li, 2010) (Figure 2.C.2), basés sur la combinaison des structures de la *timeline* et de la *timewheel*, et composés d'une série de motifs graphiques, représentant chacun une instance d'une échelle temporelle cyclique définie, se succédant le long d'un axe représentant la dimension linéaire du temps.

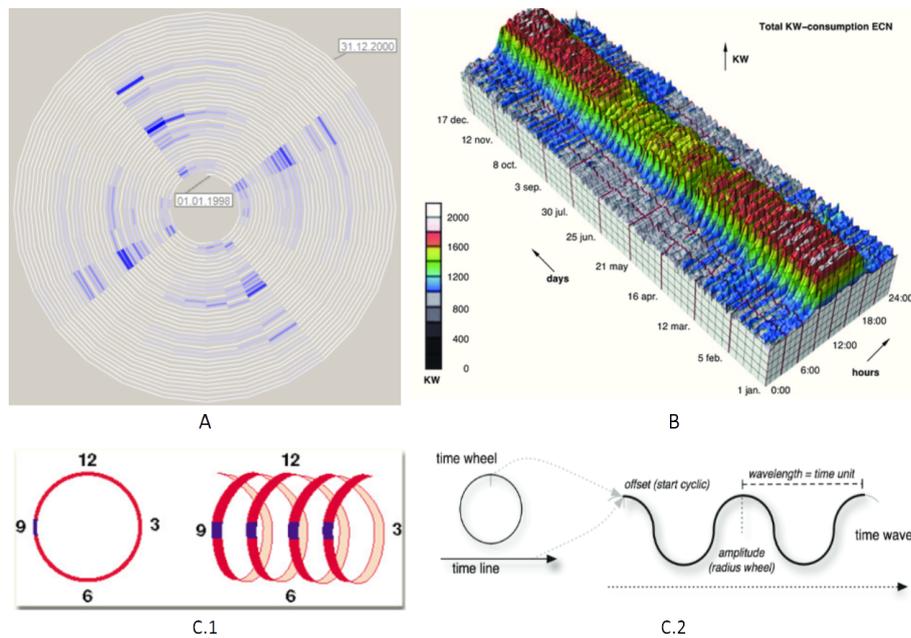


FIGURE 2. Exemples de diagrammes temporels mixtes (R. Edsall, Peuquet, 1997, Van Wijk, Van Selow, 1999, Weber et al., 2001, Li, 2010)

Ces diagrammes permettent d'identifier visuellement une récurrence cyclique dans des données temporelles, à travers l'observation d'un alignement de patterns graphiques similaires le long d'un axe, lorsque la période du cycle approche la durée de l'échelle cyclique représentée. La recherche d'une récurrence cyclique se base ainsi sur le même procédé : l'utilisateur doit chercher pour quelle échelle cyclique un alignement graphique est observable.

L'objectif de nombreux environnements de visualisation intégrant de tels diagrammes n'est cependant pas de déterminer si un phénomène est cyclique ou non, en identifiant les possibles récurrences cycliques de ce dernier. Pour beaucoup, l'objectif est de permettre l'analyse, à travers une représentation

combinée du temps linéaire et d'une (ou de plusieurs) échelle(s) cyclique(s), de la structure temporelle de phénomènes, souvent déjà considérés comme cycliques (tels que ceux liés au cycle jour/nuit). Cet objectif entraîne la limitation du nombre d'échelles cycliques paramétrables dans ces environnements.

Selon Hornsby et Egenhofer (Hornsby, Egenhofer, 2002), les échelles cycliques utilisées dans les représentations du temps sont le plus souvent basées sur les rythmes de la nature ou des activités humaines, et correspondent à des périodes usuelles et calendaires comme les jours, les mois, les heures, etc. Les échelles paramétrables dans les environnements de visualisation intégrant des diagrammes mixtes sont ainsi souvent circonscrites à ces périodes usuelles, ce qui limite d'emblée les périodes pour lesquelles il est possible d'identifier une récurrence cyclique des événements. Par ailleurs, le caractère discontinu de la série d'échelles cycliques paramétrables (le passage d'une échelle cyclique d'un mois à une échelle cyclique d'un an s'effectue généralement sans transition) empêche l'observation de la formation d'alignements graphiques, caractéristiques d'une récurrence cyclique, lors d'une modification graduelle de l'échelle cyclique du diagramme. Or, l'observation de la formation d'un alignement permet à l'utilisateur de savoir s'il approche d'une échelle pour laquelle une récurrence est identifiable. Il est donc nécessaire, pour rendre possible une telle recherche, de permettre une modification dynamique et continue de la durée des échelles cycliques représentées (Weber *et al.*, 2001).

2.2. La recherche de cycles par l'analyse harmonique

La recherche de récurrences cycliques au moyen de diagrammes temporels mixtes est exploratoire : c'est l'identification visuelle d'alignements graphiques par l'utilisateur, lors d'une modification de l'échelle cyclique, qui lui permet de détecter la présence de récurrences dans les données temporelles. Il existe d'autres méthodes, faisant notamment appel à des outils d'analyse mathématiques, qui permettent d'identifier des récurrences cycliques et donc d'aider l'utilisateur dans sa démarche exploratoire.

L'analyse harmonique est une branche des mathématiques étudiant la représentation des signaux comme des superpositions de fonctions sinusoidales élémentaires, de fréquence et d'amplitude différentes, appelées harmoniques (Bony, 2001 ; Katznelson, 2004). Les analyses harmoniques ont connu de nombreuses applications en physique sous le nom d'analyse spectrale, et font appel à des outils mathématiques, tels que les transformées de Fourier, permettant de décomposer une fonction mathématique en une somme de fonctions périodiques de différentes fréquences (Gasquet, Witomski, 2000). Lorsqu'une fonction mathématique représente un phénomène physique, cette fonction est appelée signal, et sa transformée de Fourier est appelée spectre. Ce spectre permet de recenser les fréquences, fondamentales et harmoniques, de toutes les fonctions sinusoidales permettant de recomposer le signal originel. L'identification des

fonctions sinusoidales recomposant au mieux un signal, représentant un phénomène physique, permet alors d'identifier les fréquences de possibles récurrences cycliques d'un phénomène physique.

Nous émettons donc l'hypothèse qu'une analyse harmonique effectuée sur des données temporelles, en arrière-plan d'une représentation de ces dernières dans un diagramme mixte, permettrait d'identifier de possibles récurrences cycliques dans le jeu de données étudié. Les résultats trouvés pourraient alors être retournés de manière graphique à l'utilisateur en guise de pistes d'exploration, sous la forme d'une suggestion de valeurs à affecter à la durée de l'échelle temporelle cyclique représentée.

3. Diagrammes mixtes et transformées de Fourier pour la recherche de cycles

Pour permettre la recherche de récurrences cycliques dans les données retranscrivant des phénomènes spatio-temporels, au cours d'une analyse exploratoire, nous proposons un diagramme temporel mixte combiné à des outils d'analyse harmonique utilisant la transformée de Fourier.

3.1. Diagramme temporel mixte en dents de scie

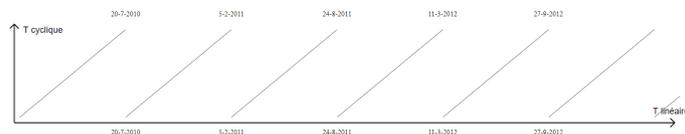


FIGURE 3. Diagramme temporel en dents de scie

Notre proposition est en partie inspirée des *tiles map* (Van Wijk, Van Selow, 1999), et prend la forme d'une fonction périodique en dents de scie (Figure 3). Le temps est représenté sur deux axes selon la même granularité temporelle, l'axe des abscisses représentant le temps de manière linéaire, l'axe des ordonnées représentant le temps selon une échelle cyclique. Une instance de l'échelle cyclique est représentée par un axe linéaire oblique, la représentation d'une suite d'instances de l'échelle cyclique prenant ainsi la forme d'une suite de lignes brisées.

Les données représentées prennent la forme de séries événementielles ponctuelles, pouvant correspondre à des événements ponctuels observables dans le temps et dans l'espace, ou à des instants pour lesquels une variable modélisée

par une série temporelle dépasse une valeur seuil (Figure 4.A). Ces événements sont représentés sur le diagramme par des entités graphiques ponctuelles. Afin de faciliter l'analyse de nombreuses données, les événements temporellement proches sont agrégés, et ces agrégats sont représentés par des entités graphiques, dont la taille est proportionnelle au nombre d'événements agrégés. Les entités graphiques sont placées le long de la courbe du diagramme en fonction du moment d'apparition de l'événement représenté, ou en fonction du « barycentre » des moments d'apparition des événements agrégés (Figure 4.B).

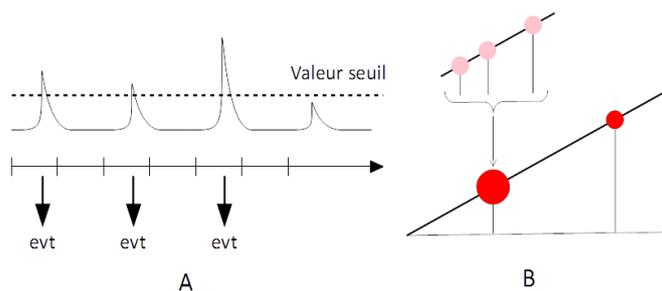


FIGURE 4. Représentation des données dans le diagramme temporel mixte

La durée T de l'échelle cyclique représentée par le diagramme peut être modifiée de manière dynamique et graduelle. Lors d'une modification de l'échelle cyclique (Figure 5), la longueur graphique utilisée pour représenter T reste inchangée sur l'axe des ordonnées, mais est modifiée sur l'axe des abscisses. Ainsi, lorsque T diminue, le nombre de lignes brisées du diagramme augmente et celles-ci apparaissent de plus en plus rapprochées et de plus en plus verticales. À l'inverse, lorsque T augmente, le nombre de lignes brisées du diagramme diminue et celles-ci apparaissent de plus en plus espacées de plus en plus horizontales. La recherche visuelle de récurrences cycliques s'effectue en modifiant graduellement la durée T de l'échelle temporelle cyclique, au moyen d'un curseur via une interface de contrôle, dans le but d'observer la formation d'un alignement d'entités graphiques sur le diagramme.

La formation de cet alignement est observable lorsque la valeur de T approche celle de la période P d'une récurrence cyclique. L'alignement des entités graphiques forme d'abord une, ou plusieurs droites obliques. Lorsque les entités représentant des événements cycliques forment un tel alignement pour une échelle de durée $T1$, l'orientation de ces droites indique si la période P est inférieure ou supérieure à $T1$:

- si $P < T1$, la ou les droites formées par l'alignement des entités graphiques seront descendantes.
- si $P > T1$, la ou les droites formées par l'alignement des entités graphiques seront ascendantes.

Au fur et à mesure que la valeur de T approche de celle de P , l'orientation de la ou des droites formées se rapproche de celle de l'axe des abscisses. Les entités sont alors alignées, parallèlement à cet axe, lorsque $T = P$ (Figure 5).

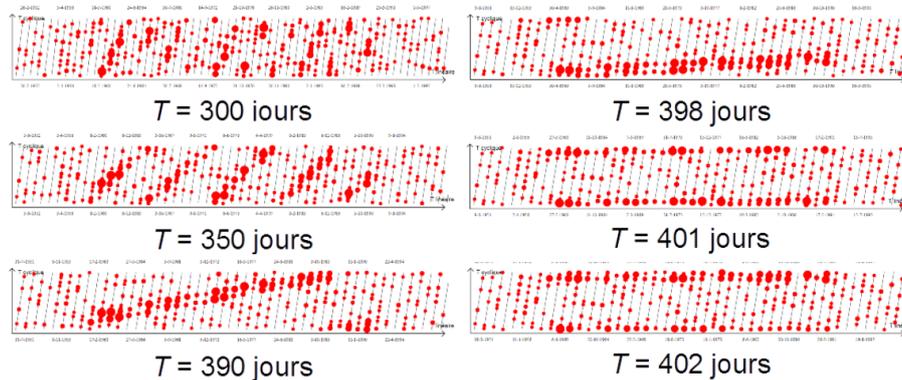


FIGURE 5. Recherche visuelle d'une récurrence cyclique par modification de la durée de l'échelle cyclique

3.2. Améliorer la recherche visuelle par l'analyse harmonique

En arrière-plan de la représentation graphique, une analyse harmonique par transformée de Fourier est effectuée sur les données étudiées, dans le but d'y détecter de possibles comportements cycliques. Afin d'effectuer cette analyse, nous recréons dans un premier temps un signal échantillonné à partir des séries événementielles que nous étudions. Pour cela, nous discrétisons l'étendue temporelle linéaire de notre analyse selon un intervalle d'échantillonnage (paramétrable par l'utilisateur), et nous calculons, pour chaque intervalle temporel, le nombre d'événements y apparaissant. La représentation graphique du signal obtenu prend la forme d'un diagramme en bâtons (Figure 6.A). Nous appliquons sur le signal échantillonné obtenu une transformée de Fourier discrète. Nous sélectionnons alors les fréquences correspondant aux pics les plus significatifs du spectre obtenu (Figure 6.B).

La durée des périodes correspondantes est alors représentée de manière graphique, en étant projetée sur le curseur de modification de la durée de l'échelle cyclique, dans l'interface de contrôle (Figure 6.C). Ces périodes constituent alors une suggestion d'échelles temporelles cycliques "remarquables" que l'utilisateur peut "inspecter". Ce dernier peut faire évoluer la durée de l'échelle cyclique vers ces valeurs, afin de vérifier si la formation d'alignements graphiques est observable sur le diagramme mixte (Figure 6.D).

Diagrammes mixtes et analyse harmonique

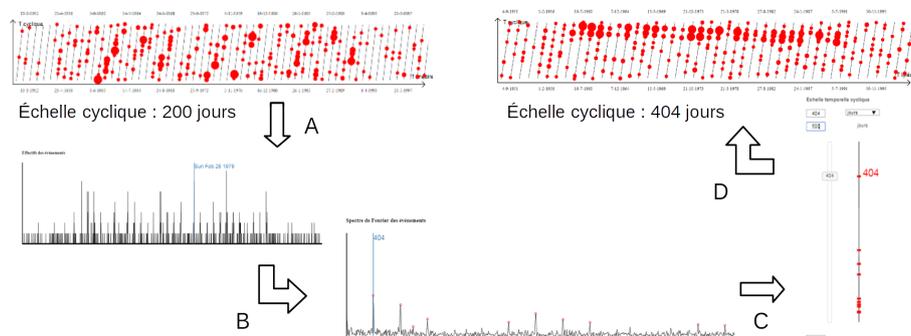


FIGURE 6. Utilisation de l'analyse harmonique pour assister la recherche de récurrences cycliques

4. Validation de la proposition

Notre proposition de diagramme mixte associé à une analyse harmonique est intégré dans un environnement de géovisualisation nommé GRAPHIST¹ (Gautier, 2018). Nous avons pu, au moyen de cet environnement, appliquer notre proposition à l'analyse d'une série de huit jeux de données créés de manière procédurale, chacun composé :

- d'une série d'événements cycliques localisés dans l'espace, mais dont la période du cycle et la zone d'apparition sont définies aléatoirement ;
- d'une série d'événements dont le lieu et le moment d'apparition sont générés de manière aléatoire. Parmi les jeux de données créés, quatre comportent 80% d'événements aléatoires (jeux A), les jeux restants en comportant 90% (jeux B). Nous émettons l'hypothèse que si l'identification visuelle de récurrences cycliques dans de tels jeux de données est possible au moyen de notre interface, notre approche peut être utilisée afin d'identifier des structures analogues dans des jeux de données réels.

Les paramètres de création de chaque jeu sont choisis de manière aléatoire, puis stockés dans un fichier annexe, de manière à être accessibles a posteriori, mais inconnus lors de l'expérimentation. Il s'agit donc d'identifier la composante cyclique de chaque jeu de données, d'estimer les paramètres de cette composante cyclique, puis de comparer les résultats estimés avec les paramètres stockés. Plus précisément, la tâche consiste à estimer (Figure 7) :

- la durée P de la période du cycle, identifiable lors de l'observation d'un alignement graphique parallèle à l'axe des abscisses du diagramme ;

1. GRAPHIST est disponible en ligne https://steamer.imag.fr/?page_id=735

- l'étendue temporelle linéaire E couverte par le cycle, estimée en observant l'étalement de l'alignement formé sur l'axe des abscisses du diagramme ;
- la dispersion temporelle D du cycle, définissant l'intervalle cyclique durant lequel les événements apparaissent : « des événements apparaissent tous les P jours, plus ou moins k jours », où $k = P * D$. D est estimée en observant l'étalement de l'alignement formé sur l'axe des ordonnées du diagramme.

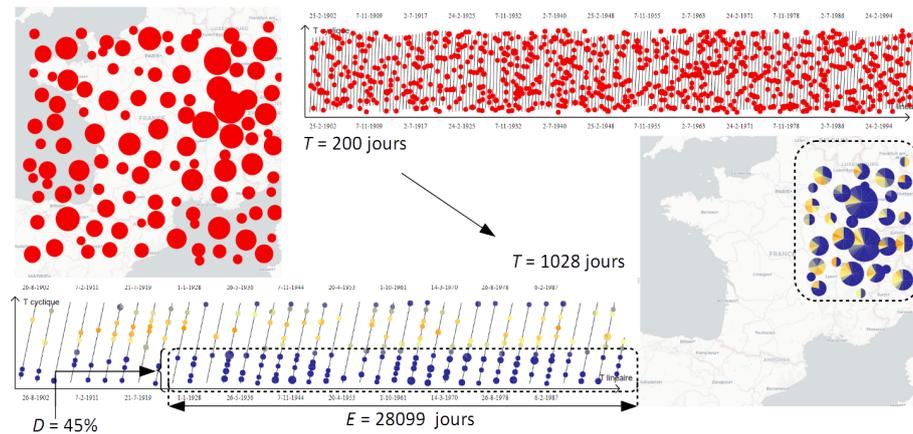


FIGURE 7. Identification d'événements cycliques (jeu B6) (Gautier, 2018)

En combinaison avec le diagramme mixte, GrAPHiST représente dans une carte l'ensemble des événements présents sur le diagramme temporel. Ces événements sont classés selon des périodes d'apparition relatives à l'échelle cyclique représentée, et une couleur est affectée à chaque classe. Les événements spatialement proches sont agrégés, et sont représentés par des entités graphiques dont la taille est fonction du nombre d'événements agrégés. Ces entités prennent la forme de *pie charts*, dont les sections représentent la proportion d'événements de chaque classe. Une concentration spatiale d'événements cycliques (et donc apparaissant durant la même période cyclique) sera observable par des *pie charts* présentant une couleur majoritaire (Figure 7).

La Table 1 présente les résultats des analyses effectuées sur les huit jeux de données. Pour chacun de ces derniers, l'analyse harmonique a permis de suggérer, au travers de l'interface graphique, une échelle cyclique pour laquelle un alignement graphique, légèrement décalé par rapport à l'axe horizontal du diagramme, est observable. Une légère modification de l'échelle cyclique a permis de placer cet alignement parallèlement à l'axe des abscisses, afin d'estimer la valeur de P . L'analyse exploratoire effectuée a permis d'estimer précisément la période du cycle de chaque jeu de données, hormis pour le jeu A2, où la période estimée correspond à un harmonique du cycle (moins de 2% de marge

d'erreur ; 3e colonne de la Table 1). En revanche, l'estimation de l'étendue et de la dispersion temporelle de chaque cycle reste peu précise (respectivement jusqu'à 26% et 15% de marge d'erreur ; 4e et 5e colonnes de la Table 1).

En dépit du manque de précision sur ces derniers points, ces résultats sont satisfaisants et valident notre proposition: une analyse exploratoire, au moyen du diagramme en dents de scie couplé à une analyse harmonique, permet de révéler l'existence de cycles au sein de séries d'événements majoritairement aléatoires, et d'estimer précisément leur période de réapparition.

TABLE 1. *Résultats de l'expérimentation (Gautier, 2018)*

Jeu	Proportion d'événements aléatoires	Taux d'imprécision de P estimée	Taux d'imprécision de E estimée	Taux d'imprécision de D estimée
A1	80 %	1.9%	0.2%	0.5%
A2	80 %	X	11.7%	15.0%
A3	80 %	0.1%	0.1%	1.2%
A4	80 %	0.6%	6.8%	3.0%
B1	90 %	0.2%	14.3%	6.0%
B2	90 %	0.4%	26.0%	12.0%
B3	90 %	0 %	4.9%	3.0%
B4	90 %	1.6%	13.8%	3.0%

5. Conclusion

Intégrée dans un environnement de visualisation, notre proposition peut être utilisée pour identifier des comportements cycliques isolés dans l'espace, ou pour identifier les différentes périodicités d'un phénomène selon l'espace, afin d'aider la compréhension, voire la prévision de ces phénomènes. Différents cas d'application peuvent être imaginés, comme l'analyse de données météorologiques, marégraphiques ou sismiques, mais également de données sociales.

Notre démarche ayant été de nous concentrer en priorité sur l'analyse d'événements ponctuels, nos propositions de représentations graphiques ne permettent pas de prendre en compte des données décrivant des événements étendus dans le temps. De plus, notre approche n'est pas adaptée à l'identification de comportements cycliques dont la période de réapparition évolue, apparaissant de manière plus ou moins fréquente au cours du temps. Pour répondre à ces limites, de nouvelles représentations graphiques doivent être élaborées, et notre proposition de diagramme mixte associé à une analyse harmonique constitue un support pour la conception de ces nouvelles représentations. De futurs axes de travail peuvent être l'extension de notre approche afin de permettre l'analyse d'événements étendus dans le temps, et l'intégration de représentations graphiques permettant d'identifier, et d'estimer, une évolution temporelle de la période de réapparition d'un comportement cyclique.

Remerciements

Cette recherche a été soutenue par la Région Auvergne-Rhône-Alpes.

Bibliographie

- Bony J.-M. (2001). *Cours d'analyse: théorie des distributions et analyse de fourier*. Editions Ecole Polytechnique.
- Carlis J. V., Konstan J. A. (1998). Interactive visualization of serial periodic data. In *Acm symposium on user interface software and technology*, p. 29–38.
- Edsall R., Peuquet D. (1997). A graphical user interface for the integration of time into gis. In *Proceedings of the 1997 american congress of surveying and mapping annual convention and exhibition, seattle, wa*, p. 182–189.
- Edsall R. M., Kraak M.-J., MacEachren A. M., Peuquet D. J. (1997). Assessing the effectiveness of temporal legends in environmental visualization. In *Gis/lis*, vol. 97, p. 28–30.
- Gasquet C., Witomski P. (2000). *Analyse de fourier et applications: filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Dunod.
- Gautier J. (2018). *GrAPHiST: An exploratory analysis approach for the identification of dynamics of spatio-temporal phenomena*. Theses, Université Grenoble Alpes (France). Consulté sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02067484>
- Hornsby K., Egenhofer M. J. (2002). Modeling moving objects over multiple granularities. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, vol. 36, n° 1, p. 177–194.
- Katznelson Y. (2004). *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge University Press.
- Li X. (2010). The time wave in time space: a visual exploration environment for spatio-temporal data.
- Müller W., Schumann H. (2003). Visualization for modeling and simulation: visualization methods for time-dependent data-an overview. In *Proceedings of the 35th conference on winter simulation: driving innovation*, p. 737–745.
- Swedberg B., Peuquet D. (2017). Perse: visual analytics for calendar related spatiotemporal periodicity detection and analysis. *GeoInformatica*, vol. 21, n° 3, p. 577–597.
- Van Wijk J. J., Van Selow E. R. (1999). Cluster and calendar based visualization of time series data. In *Information visualization, 1999.(info vis' 99) proceedings. 1999 ieee symposium on*, p. 4–9.
- Weber M., Alexa M., Müller W. (2001). Visualizing time-series on spirals. In *Infovis*, vol. 1, p. 7–14.