



HAL
open science

Sur le minimum de la fonction de Brjuno

Michel Balazard, Bruno Martin

► **To cite this version:**

Michel Balazard, Bruno Martin. Sur le minimum de la fonction de Brjuno. *Mathematische Zeitschrift*, 2020, 296 (3-4), pp.1819-1824. 10.1007/s00209-020-02487-8 . hal-02473360

HAL Id: hal-02473360

<https://hal.science/hal-02473360>

Submitted on 10 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur le minimum de la fonction de Brjuno

Michel Balazard et Bruno Martin

10 février 2020

ABSTRACT

The Brjuno function attains a strict global minimum at the golden section.

KEYWORDS

Gauss transformation, Brjuno function, Golden section

MSC classification : 26D07, 11A55

La transformation de Gauss,

$$\alpha(x) = \{1/x\},$$

où $\{t\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel t , est bien définie sur l'ensemble

$$X =]0, 1[\setminus \mathbb{Q},$$

et à valeurs dans X . On peut donc considérer ses itérées successives, définies par les relations $\alpha_0(x) = x$ et $\alpha_{k+1}(x) = \alpha_k(\alpha(x))$ pour $k \geq 0$, et les produits

$$\beta_k(x) = \prod_{j=0}^k \alpha_j(x) \quad (k \in \mathbb{N}, x \in X),$$

avec la convention supplémentaire $\beta_{-1}(x) = 1$. Comme α est continue sur X , les α_k et les β_k le sont également.

La fonction de Brjuno est alors définie, pour tout $x \in X$, comme la somme, éventuellement égale à $+\infty$, de la série à termes positifs

$$\Phi(x) = \sum_{k \geq 0} \beta_{k-1}(x) \ln(1/\alpha_k(x)).$$

Les points de convergence sont appelés *nombres de Brjuno*; nous noterons \mathcal{B} leur ensemble. La fonction et les nombres de Brjuno interviennent dans la théorie des systèmes dynamiques (cf. par exemple [2], [3], [4], [6]). L'ensemble \mathcal{B} est de mesure 1, et donc dense dans $[0, 1]$.

L'ensemble \mathcal{B} des nombres de Brjuno est stable par α . La fonction Φ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x) = \ln(1/x) + x\Phi(\alpha(x)) \quad (x \in \mathcal{B}), \quad (1)$$

et, plus généralement,

$$\Phi(x) = \Phi_K(x) + \beta_K(x)\Phi(\alpha_{K+1}(x)) \quad (K \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{B}), \quad (2)$$

où Φ_K désigne la somme partielle

$$\Phi_K(x) = \sum_{k=0}^K \beta_{k-1}(x) \ln(1/\alpha_k(x)).$$

Les fonctions Φ_K sont définies et continues sur X .

Dans l'article [5], Rivoal émet plusieurs conjectures sur les valeurs extrémales de séries diophantiennes, dont certaines sont proches de la fonction de Brjuno. Le théorème suivant fournit la réponse à une question posée aux auteurs par Rivoal, concernant la fonction Φ elle-même.

Théorème *Soit $\theta = (\sqrt{5}-1)/2 = 0,618\dots$ le nombre d'or. Pour tout nombre de Brjuno $x \neq \theta$, on a $\Phi(x) > \Phi(\theta)$.*

La démonstration de ce théorème s'appuie sur cinq propositions auxiliaires.

Proposition 1 *Soit r un nombre rationnel, élément du segment $[0, 1]$. On a alors*

$$\Phi(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow r, x \in \mathcal{B}).$$

Démonstration

On a $\Phi(x) \geq \Phi_0(x) = \ln 1/x$, donc le résultat est vrai si $r = 0$. On a

$$\Phi(x) = \ln 1/x + x\Phi(\alpha(x)) \geq \frac{1}{2}\Phi(1/x - 1) \quad (1/2 < x < 1),$$

donc le résultat est aussi vrai si $r = 1$.

Si r est un nombre rationnel de $]0, 1[$, écrivons r sous forme d'une fraction continue finie,

$$r = [0; a_1, \dots, a_k] \quad (k \geq 1, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*, a_k \geq 2).$$

L'application $\varphi : t \mapsto [0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t]$ est un homéomorphisme de $] - 1, 1[$ sur un certain voisinage de r dans $]0, 1[$.

Pour $t \in X$, ce qui entraîne $\varphi(\pm t) \in X$, on a

$$\alpha_k(\varphi(t)) = t \quad ; \quad \alpha_k(\varphi(-t)) = 1 - t,$$

et $\beta_{k-1}(\varphi(\pm t))$ est minorée par une constante positive (dépendant de r , cf. [1], (18)-(19), p. 199) pour $t \in X$. Comme

$$\Phi(\varphi(t)) \geq \beta_{k-1}(\varphi(t))\Phi(\alpha_k(\varphi(t))) \quad (t \in]-1, 1[\setminus \mathbb{Q}),$$

le résultat général découle des cas particuliers $r = 0, 1$. □

Posons maintenant

$$C = \inf_{x \in \mathcal{B}} \Phi(x).$$

On a $0 \leq C < \infty$, car Φ est à valeurs ≥ 0 et \mathcal{B} n'est pas vide.

Proposition 2 *La borne inférieure C est le minimum de la fonction de Brjuno sur \mathcal{B} : il existe $r \in \mathcal{B}$ tel que $C = \Phi(r)$.*

Démonstration

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathcal{B} telle que

$$\Phi(x_n) \rightarrow C \quad (n \rightarrow \infty).$$

En remplaçant éventuellement cette suite par une de ses sous-suites, nous pouvons supposer que la suite (x_n) est elle-même convergente, vers une limite $r \in [0, 1]$. La proposition 1 et l'hypothèse de convergence vers C de la suite $\Phi(x_n)$ entraînent alors que r est irrationnel. Nous allons montrer que $r \in \mathcal{B}$ et que $\Phi(r) = C$.

Soit $K \in \mathbb{N}$. Par définition de Φ on a $\Phi(x_n) \geq \Phi_K(x_n)$ pour tout n . La continuité de Φ_K en tout point irrationnel entraîne donc, par passage à la limite, l'inégalité $C \geq \Phi_K(r)$. Comme K est arbitraire, cela prouve que r est un nombre de Brjuno, et que $C \geq \Phi(r)$. Comme on a aussi, par définition de C , l'inégalité inverse $\Phi(r) \geq C$, on en déduit l'égalité $C = \Phi(r)$. Cette borne inférieure est donc bien un minimum. □

Proposition 3 *Soit $r \in \mathcal{B}$ tel que $C = \Phi(r)$. Pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a*

$$C = \Phi(r) \geq \frac{\Phi_K(r)}{1 - \beta_K(r)}.$$

Démonstration

En appliquant la relation (2) à $x = r$, nous obtenons

$$C = \Phi(r) = \Phi_K(r) + \beta_K(r)\Phi(\alpha_{K+1}(r)) \geq \Phi_K(r) + C\beta_K(r),$$

par définition de C . L'assertion en résulte. □

Proposition 4 *Pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Phi(\theta) = \frac{\Phi_K(\theta)}{1 - \beta_K(\theta)}.$$

Démonstration

En effet, en appliquant la relation (2) à $x = \theta$, nous obtenons

$$\Phi(\theta) = \Phi_K(\theta) + \beta_K(\theta)\Phi(\alpha_{K+1}(\theta)) = \Phi_K(\theta) + \beta_K(\theta)\Phi(\theta),$$

puisque θ est point fixe de α . □

Proposition 5 *Soit $r \in \mathcal{B}$ tel que $C = \Phi(r)$. On a $r \geq \theta$.*

Démonstration

D'après les propositions 3 et 4 avec $K = 0$, et la définition de C , on a

$$\frac{\Phi_0(\theta)}{1 - \beta_0(\theta)} = \Phi(\theta) \geq C = \Phi(r) \geq \frac{\Phi_0(r)}{1 - \beta_0(r)}.$$

Or, pour $0 < x < 1$,

$$\frac{\Phi_0(x)}{1 - \beta_0(x)} = \frac{\ln 1/x}{1 - x} = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)x + t},$$

est une fonction strictement décroissante de x , donc $\theta \leq r$. □

Au vu de la proposition 2, l'énoncé suivant est équivalent à celui du théorème.

Proposition 6 *Soit $r \in \mathcal{B}$ tel que $C = \Phi(r)$. On a $r = \theta$.*

Démonstration

D'après les propositions 3 et 4 avec $K = 1$, et la définition de C , on a

$$\frac{\Phi_1(\theta)}{1 - \beta_1(\theta)} = \Phi(\theta) \geq C = \Phi(r) \geq \frac{\Phi_1(r)}{1 - \beta_1(r)}. \quad (3)$$

Pour $1/2 < x < 1$, posons

$$f(x) = \frac{\Phi_1(x)}{1 - \beta_1(x)} = \frac{\ln 1/x + x \ln 1/\alpha(x)}{1 - (1-x)} = \frac{\ln 1/x}{x} + \ln \frac{x}{1-x},$$

puisque $\alpha(x) = (1-x)/x$ pour $1/2 < x < 1$.

On a

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{2x-1}{x^2(1-x)},$$

fonction qui a le signe de

$$g(x) = 2x - 1 + (1 - x) \ln x.$$

La fonction g est strictement croissante sur $]0, 1]$ et $g(0,61) = 0,027\dots > 0$. Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $[\theta, 1[$. La relation (3) et la proposition 5 entraînent donc l'égalité $r = \theta$. \square

Pour mettre en évidence la substance de la démonstration que nous venons d'exposer, remplaçons dans la définition de la fonction de Brjuno, la fonction logarithme par une fonction arbitraire $u : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, et posons

$$\Psi_u(x) = \sum_{k \geq 0} \beta_{k-1}(x) u(1/\alpha_k(x))$$

(cf. [4], §3.2, p. 609). Comme tout irrationnel quadratique appartient à l'ensemble \mathcal{B}_u des points de convergence de cette série*, cet ensemble est toujours dense. L'équation fonctionnelle (1) devient

$$\Psi_u(x) = u(1/x) + x\Psi_u(\alpha(x)) \quad (x \in \mathcal{B}_u), \quad (4)$$

En toute généralité, il n'est pas vrai que la fonction Ψ_u atteigne un minimum global au nombre d'or. En effet, si $u(t) = t^a$, avec $a < 1$, et $\theta' = 1 - \theta = 1/(2 + \theta)$, de sorte que $\alpha(\theta') = \theta$, on a

$$\Psi_u(\theta) = \theta^{-a} + \theta\Psi_u(\theta) = \theta^{-a} + (1 - \theta')\Psi_u(\theta),$$

donc $\theta'\Psi_u(\theta) = \theta^{-a}$, et

$$\Psi_u(\theta') = \theta'^{-a} + \theta'\Psi_u(\theta) = \theta'^{-a} + \theta^{-a} < \theta^{-a}/\theta' = \Psi_u(\theta),$$

car la dernière inégalité équivaut à $\theta'^{1-a} < \theta^{1-a}$, c'est-à-dire à $\theta' < \theta$, inégalité vraie.

En remplaçant, dans les énoncés, Φ par Ψ_u , \mathcal{B} par \mathcal{B}_u , et Φ_K par la somme partielle de Ψ_u correspondante, examinons les conditions de validité des six propositions précédentes.

- La proposition 1 reste valable si, et seulement si

$$u(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty). \quad (5)$$

- Sous l'hypothèse (5), la proposition 2 reste valable si

$$\text{la fonction } u \text{ est continue en chaque point irrationnel.} \quad (6)$$

- Sous les hypothèses (5) et (6), les propositions 3 et 4 restent valables.

*. D'une part, on a l'inégalité $\beta_{k-1} \leq 1/F_{k+1}$, où F_n désigne le n^e nombre de Fibonacci ; d'autre part, lorsque x est un irrationnel quadratique, l'ensemble des valeurs $\alpha_k(x)$ ($k \in \mathbb{N}$), est fini.

- Sous les hypothèses (5) et (6), la proposition 5 reste valable si

$$\text{la fonction } x \mapsto \frac{u(1/x)}{1-x} \text{ est strictement décroissante sur }]0, 1[. \quad (7)$$

- Sous les hypothèses (5), (6) et (7), la proposition 6 reste valable si

$$\text{la fonction } x \mapsto \frac{u(1/x)}{x} + u\left(\frac{x}{1-x}\right) \text{ est strictement croissante sur } [\theta, 1[. \quad (8)$$

Notons que l'hypothèse (7) entraîne que $u(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1. La proposition suivante décrit une classe de fonctions (comprenant la fonction logarithme) vérifiant les hypothèses (5), (6), (7) et (8); les fonctions Ψ_u correspondantes ont donc toutes un minimum global strict au nombre d'or.

Proposition 7 *Soit $u : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ une fonction telle que*

- $u(1) = 0$;
- $u(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) ;
- la fonction v définie par $v(t) = tu(t)$ est strictement convexe sur $[1, \infty[$.

Alors les hypothèses (5), (6) et (7) sont vérifiées. Si, de plus,

- la fonction $x \mapsto u(x/(1-x))$ est convexe sur $[1/2, 1[$;
- $u'(1/\theta) \geq u(1/\theta)$

(où u' désigne la dérivée à droite), alors l'hypothèse (8) est vérifiée.

Démonstration

La convexité de v entraîne sa continuité, donc aussi celle de u , sur $]1, \infty[$. Les deux conditions $u \geq 0$ et $u(1) = 0$ entraînent aussi la continuité à droite au point 1.

La stricte convexité de v et le fait que $v(1) = 0$ entraînent que la pente $w(t) = v(t)/(t-1)$ est une fonction strictement croissante de $t > 1$. Par conséquent la fonction v est elle-même strictement croissante, ainsi que la fonction $u(t) = (1-1/t)w(t)$. De plus, la fonction composée

$$x \mapsto w(1/x) = \frac{u(1/x)}{1-x}$$

est strictement décroissante sur $]0, 1[$.

La stricte croissance et la convexité de v sur $[1, \infty[$, et la stricte convexité de la fonction définie par $x \mapsto 1/x$ sur $]0, 1[$, entraînent la stricte convexité de la fonction $x \mapsto v(1/x) = u(1/x)/x$ sur $]0, 1[$.

Si la fonction composée $x \mapsto u(x/(1-x))$ est convexe sur son domaine de définition $[1/2, 1[$, alors la fonction intervenant dans (8) est somme d'une fonction strictement convexe et d'une fonction convexe sur $[1/2, 1[$; elle est donc strictement convexe sur cet intervalle. Pour vérifier (8), il suffit de vérifier que sa dérivée à droite au nombre d'or est positive ou nulle. Cela s'écrit

$$-\frac{1}{\theta^2}u(1/\theta) - \frac{1}{\theta^3}u'(1/\theta) + \frac{1}{(1-\theta)^2}u'\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) \geq 0$$

En tenant compte de l'équation $\theta/(1-\theta) = 1/\theta$, on voit que cette inégalité équivaut à celle de l'énoncé. \square

Si $u : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ est strictement convexe, vérifie $u(1) = 0$ et $u'(1/\theta) \geq u(1/\theta)$, alors elle vérifie les hypothèses de la proposition 7. En particulier, c'est le cas des fonctions $t \mapsto (t-1)^a$, avec $a > 1$ (si $a = 1$, la proposition 7 s'applique directement). Par ailleurs, les fonctions $t \mapsto \ln^a t$, avec $a \geq 1$, sont des exemples de fonctions non convexes vérifiant également cette proposition.

REMERCIEMENTS

Nous remercions Tanguy Rivoal d'avoir suscité le présent travail, et l'arbitre anonyme d'avoir suggéré de généraliser notre étude. Cette recherche a été rendue possible par le programme *Research in pairs* du Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. Nous remercions cette institution pour les conditions de travail idéales dont nous avons bénéficié.

Références

- [1] M. BALAZARD et B. MARTIN – « Comportement local moyen de la fonction de Brjuno », *Fund. Math.* **218** (2012), p. 193–224.
- [2] X. BUFF et A. CHERITAT – « The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks », *Ann. of Math. (2)* **164** (2006), p. 265–312.
- [3] S. MARMI, P. MOUSSA et J.-C. YOCCOZ – « The Brjuno functions and their regularity properties », *Comm. Math. Phys.* **186** (1997), p. 265–293.
- [4] —, « Some properties of real and complex Brjuno functions. », *Frontiers in number theory, physics, and geometry I. On random matrices, zeta functions, and dynamical systems*, Springer, Berlin, 2006, p. 601–623.
- [5] T. RIVOAL – « Extremality properties of some Diophantine series », *Exp. Math.* **19** (2010), p. 481–494.
- [6] J.-C. YOCCOZ – *Petits diviseurs en dimension 1.*, Astérisque, vol. 231, Soc. Math. France, Paris, 1995.

BALAZARD, Michel
Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France
Adresse électronique : balazard@math.cnrs.fr

MARTIN, Bruno
ULCO, LMPA, Calais, France
Adresse électronique : Bruno.Martin@univ-littoral.fr