



HAL
open science

Apport d'une étude historique et institutionnelle des développements limités au début de l'université : Vers une alternative d'une meilleure conceptualisation

Kouki Rahim, Yassine Hachaïchi

► **To cite this version:**

Kouki Rahim, Yassine Hachaïchi. Apport d'une étude historique et institutionnelle des développements limités au début de l'université : Vers une alternative d'une meilleure conceptualisation. ADiMA 2, Ecole Normale Supérieure, Aug 2016, Yaoundé, Cameroun. pp.316-325. <hal-02471291>

HAL Id: hal-02471291

<https://hal.science/hal-02471291v1>

Submitted on 1 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 1.0 - Universal - International License

Apport d'une étude historique et institutionnelle des développements limités au début de
l'université : Vers une alternative d'une meilleure conceptualisation :
Rahim **KOUKI** et Yassine **HACHAÏCHI**

IPEIEM
Université de Tunis El Manar
rahim.kouki@gmail.com

ENIT-LAMSIN,
Université de Tunis El Manar
Yassine.Hachaichi@ipeiem.rnu.tn

Résumé : Dans cet article nous présentons les résultats d'une investigation didactique sur l'enseignement et l'apprentissage des développements limités et des approximations au début de l'université. Deux investigations sont menées : l'une, de nature historico-épistémologique porte sur l'évolution mathématique des dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique ; et l'autre, institutionnelle, est consacrée aux résultats d'un questionnaire adressé aux enseignants universitaires pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques.

Les principaux résultats dégagés invitent à privilégier les approches de modélisation ainsi que la construction via la dialectique syntaxe/sémantique de l'objet développement limité.

Mots clés : développements limités, approximations locales, sémantique, syntaxe, sémiotique.

Abstract : In this article we present the results of a didactic investigation on teaching and learning Taylor series and polynomial approximations at the beginning of the university. Two investigations are conducted: a historical-epistemological one, concerns the mathematical evolution of semantic dimensions, syntax and semiotics; and an institutional one, which is devoted to the results of an interview of university teachers to decipher the aims and educational characteristics.

The main results emerged invite to focus on modeling approaches and the construction via the dialectical syntax / semantics of the Taylor serie object.

Keywords : Taylor serie, local approximations, semantics, syntax, semiotics.

INTRODUCTION

L'une des principales raisons qui nous a ramené à conduire cette étude réside sur le fait que la plupart des recherches didactiques conduites au niveau de la transition lycée/université ont rarement traité d'une façon explicite l'enseignement et l'apprentissage des concepts de développement limité et des approximations locales des fonctions même si elles ont mentionné la pertinence de ces objets comme étant des outils très puissants dans plusieurs domaines d'application comme le calcul de limite et l'étude locale d'une fonction, la modélisation mathématique, l'étude de phénomènes physiques etc. (cf. Ghedamsi, 2008).

Cette étude n'est pas totalement indépendante des recherches déjà conduites qui étaient généralement centrées sur les difficultés du passage de l'analyse algébrique à l'analyse formelle Artigue (2004), Bloch (2011) etc.

Certains parmi-eux ont montré l'existence de ruptures dues à ce passage interprété comme un « *saut conceptuel* » à la transition Lycée/Université et elle a mis en évidence la complexité dans

l'élaboration didactique des nouveaux concepts au début de l'université comme la construction de IR, la résolution des équations différentielles, les approximations etc.

D'autres, comme Durand-Guerrier (1996 et 2003), Bloch et Gibel (2011) Chellougui et Kouki (2012) et Kouki et Ghedamsi, (2012), ont montré la pertinence de la prise en compte des dimensions sémiotiques, sémantiques et syntaxiques dans les analyses didactiques de l'enseignement et l'apprentissage des objets de l'analyse réelle à la fin du secondaire et au début de l'université.

Dans ce travail de recherche, nous faisons l'hypothèse que la prise en compte des dimensions sémantiques et syntaxique au niveau du statut objet⁷² des développements limités mérite d'être mieux explicitée au niveau du processus de sa transposition interne.

Dans un premier temps, nous présentons une étude en termes de transposition externe dans laquelle nous délimitons le contour de l'objet développement limité à travers une analyse historico-épistémologique des différents types de techniques qui ont contribué à la genèse de cet objet de savoir.

Dans un deuxième temps, nous présentons les principaux résultats d'une investigation didactique des programmes de l'enseignement de l'analyse réelle et d'une enquête adressée auprès des enseignants universitaires en vue de confronter les différentes dimensions logico-mathématique retrouvées dans l'étude historico-épistémologique de l'objet développement limité comme savoir mathématique avec celles qui sont employées dans son enseignement.

Étude historico-épistémologique des développements limités et du calcul infinitésimal

Nous focaliserons notre étude sur les moments importants de l'évolution du concept de développement limité par la présentation, ainsi que par l'interprétation des différentes méthodes élaborées et développées par les mathématiciens du début du XVII^e siècle jusqu'à la fin du XIX^e siècle qui ont marqué l'évolution des concepts qui sont en étroite liaison avec notre objet d'étude et ce, par la prise en compte des différentes dimensions d'analyse adoptées ci-dessus.

Au XVII^e siècle, les vitesses, les quadratures, les tangentes, maxima et minima sont les aspects des problèmes de différentiations dont l'approche géométrique est l'approche la plus dominante chez les mathématiciens et les physiciens. En effet, Bourbaki (1960), écrit que :

Ces quadratures font l'objet de nombreux travaux, de Grégoire de Saint-Vincent, Huygens, Wallis, Gregory; le premier croit effectuer la quadrature du cercle, le dernier croit démontrer la transcendance de π ; chez les uns et les autres se développent des procédés d'approximation indéfinie des fonctions circulaires et logarithmiques, les uns de tendance théorique, d'autres orientés vers le calcul numérique, qui vont aboutir bientôt, avec Newton, Mercator, (...), J.Gregory, puis Leibniz, à des méthodes générales de développement en série. (Bourbaki, 1960, p. 226)

Tout au long de cette période l'approche géométrique est l'approche la plus dominante. En effet, Fermat, Descartes, Wallis, Newton et Leibniz se sont appuyés essentiellement sur l'approximation, au cours de leurs études du « problème des tangentes », certains d'entre eux ont élaboré les deux premiers termes du développement de Taylor. Ils se sont intéressés aussi à la méthode cinématique.

⁷² Au sens de Douady (1986).

Taton (2004) explique cette méthode qui est

...équivalente à notre méthode élémentaire de détermination de la tangente à une courbe définie paramétriquement. (Taton, 2004)

Dahan et Peiffer (1986) ont détaillé « le problème des tangentes » par la mise en valeur des travaux de Torricelli, Roberval, Descartes, Fermat et Barrow. Ce dernier

...est le premier à reconnaître clairement que le problème des tangentes est l'inverse du problème des quadratures, et vice versa. Aucun de ces auteurs n'a reconnu la généralité et l'importance du lien qui fait aujourd'hui l'objet du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. (Dahan et Peiffer, 1986, p. 188)

Le statut de l'objet mathématique « tangente » prend son étendue la première fois dans les travaux de Torricelli et Roberval où

... les problèmes de quadrature ont une origine très ancienne, les tangentes ne seront étudiées qu'au milieu du XVII^e siècle(...) La méthode élaborée par Archimède pour construire la tangente à la spirale se nourrit de considérations cinématiques. Elle a été étendue, au XVII^e siècle, dans les travaux de Torricelli et dans ceux de Roberval sur le mouvement des trajectoires. (Ibid., p. 185)

Au début du XVII^e siècle, l'objet développement limité est connu par la notion de développement en séries infinies dans le calcul infinitésimal. Sa genèse est due à certains problèmes physico-mathématiques.

Dans un premier temps, la résolution de «problème des tangentes» au début du XVII^e siècle, ramène à la genèse du statut objet de «la tangente» par la détermination de son équation par une méthode dynamique développée par Torricelli et Roberval à partir du concept de vitesse et des mouvements d'une part, et d'une méthode géométrique (ou la détermination des premiers termes de développement de Taylor) par Fermat, Descartes et Barrow, d'autre part.

Torricelli et Roberval considèrent les courbes engendrées par la composition de deux mouvements, dont on connaît les vitesses. La vitesse résultante sera la diagonale du parallélogramme des vitesses des deux mouvements qui engendrent la courbe. La droite ayant la direction de la diagonale sera la tangente à la courbe au point P. Cette méthode dynamique permet de déterminer les tangentes à beaucoup de courbes, mais la définition de la tangente qui y opère repose sur des concepts physiques et n'est pas applicable à toutes les courbes. (Taton, 2004, p. 185-186)

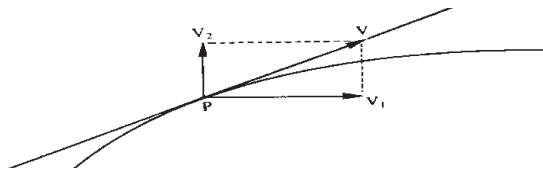


Schéma 1

Ceci nous permet de dire que la démarche développée dans la recherche de l'équation algébrique d'une tangente fait appel à une technique du type sémantique du registre graphique permettant d'obtenir d'une façon syntaxique l'équation des tangentes dans le cadre algébrique.

Le deuxième temps de la genèse de notre objet d'étude s'est réalisé par la détermination de développements en séries infinies (des cas particuliers de sinus, cosinus, tangente et $\ln(1+x)$ qui s'est effectuée par des techniques géométriques développées par Mercator et Leibniz en articulant les dimensions sémantique et syntaxique du cadre algébrique mobilisant le registre graphique.

Nicolas Mercator [...] Dans sa *Logarithmotechnia*, publié à Londres en 1668, il trouve l'aire de l'hyperbole en réduisant d'abord en série géométrique, puis en intégrant terme à terme suivant la méthode de Wallis. Ce dernier trouvait d'ailleurs la même année des résultats analogues qu'il publiait en 1670. La méthode a un succès foudroyant et, en quelques années, James Gregory, Newton, Leibniz s'y distinguent. (Taton, 1961, p. 239)

Il parvient ainsi à la formule connue par son nom qui est :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \text{ et } \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

De son côté, Newton a trouvé les mêmes développements en séries infinies, indépendamment de Leibniz, à partir de l'utilisation de sa méthode cinématique « les vitesses des mouvements » où la figure prend une place importante dans le calcul des développements en séries infinies qui sont connus dans nos jours par les parties entières des développements limités.

Newton s'est appuyé sur la méthode de Wallis, du calcul de la racine $n^{\text{ème}}$ de x^m qui est $x^{\frac{m}{n}}$ et $x^{-\frac{m}{n}}$ où m et n entiers, pour déterminer son développement connu de nos jours, par la formule du binôme.

Il a suivi un cheminement assez long pour obtenir la formule:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A Q + \frac{m-n}{2n} B Q^2 + \frac{m-2n}{3n} C Q^3 + \dots, \quad A = P^{\frac{m}{n}}, \quad B = \frac{m}{n} A Q, \dots$$

Newton n'a jamais publié cette formule et c'est Wallis qui l'a officialisé en 1685 en attribuant la découverte à Newton. Cette formule est connue dans nos jours par celle du binôme de Newton sous la forme:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k + \dots$$

Newton a utilisé son développement comme une technique de calcul de certains cas particuliers des développements en séries en posant :

$$P = c^2 \text{ et } Q = \frac{x^2}{c^2} \text{ où } m = 1 \text{ et } n = 2$$

$$(c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{1}{2} c \cdot \frac{x^2}{c^2} + \frac{1 \cdot (-1)}{2 \cdot 4} c \left(\frac{x^2}{c^2}\right)^2 + \frac{1 \cdot (-1) \cdot (-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} c \left(\frac{x^2}{c^2}\right)^3 + \dots = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{10c^5} - \dots$$

puis il obtient $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{x^8}{128} + \dots$ pour $c = 1$.

Le troisième moment se réalise par la détermination de développements en séries d'une fonction quelconque, même avant l'apparition de cette dernière notion, qui est connue la première fois sous la formule connue de Gregory-Newton. Tandis que, la formule de Taylor est due à la méthode d'intégration par parties de John Bernoulli puis par la méthode « des différences finies » de Taylor qui nécessite une mobilisation du cadre de l'analyse. A cette époque, la formule de Taylor devient un outil puissant pour résoudre certains problèmes physico-mathématiques et surtout les approximations. Comme Taylor n'a pas étudié rigoureusement le reste de sa formule, Maclaurin, Euler et Lagrange se sont intéressés à refaire cette formule par leurs méthodes analytique au XVIII^e siècle. Lagrange éclate une crise de confiance à cette formule par son approche numérique en utilisant « la théorie des séries » pour déterminer des valeurs approchées d'un transcendant qui est dans nos jours l'approximation numérique d'un nombre transcendant. Ce qui montre bien la pertinence de l'articulation des différents registres numérique graphique et algébrique dans le cadre de l'analyse et confirme la nécessité de la prise en compte des dimensions sémantique et syntaxique dans le traitement des objets mathématiques.

La rigueur en mathématiques s'organise par la genèse du concept « limite » et c'est d'Alembert qui a donné un nouvel aspect à l'analyse. De ce fait, le père de la rigueur Cauchy refait les démonstrations des différentes écritures de la formule de Taylor par une étude de sa convergence. De même, Abel a étudié rigoureusement la formule du binôme de Newton et Weierstrass a élaboré sa formule du point fixe.

Dans une dernière étape de sa formulation historique, le développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel issu de la formule de Taylor est devenue un cas particulier du développement asymptotique développé par Poincaré en 1886.

Après ce bref passage des principales phases historiques, nous présentons ci-dessous les différentes phases avec les caractéristiques des différentes techniques :

Méthode	Période	Type de technique / Registre	Dimension
Détermination de la tangente et les deux premiers éléments du calcul différentiel	Début du XVII ^e	La technique dynamique de Torricelli et Roberval / Graphique La technique dynamique des sous tangentes de Fermat (1637) / Graphique La technique des extrema de Fermat des 2 premiers termes du développement de Taylor actuel (1637-1638) / Graphique La technique d'approximation géométrique applicable aux courbes algébriques Descartes (1638) / Algébrique-graphique La technique d'Isaac Barrow / Géométrico-algébrique	Sémantique Sémantique Mixte Mixte Mixte
Les cas particuliers de développements en séries infinies	À partir de 1668	La technique géométrique de Mercator (1668) / Graphique Les techniques de Newton / Graphique et formel Les techniques algébrique de Leibniz / Graphique	Sémantique Mixte Mixte
Le développement en série d'une fonction quelconque et la formule de Taylor	XVIII ^e	La technique algébrique de Newton et Wallis / Formel Les techniques analytique de détermination du développement de Taylor / Formel	Syntaxique Mixte
L'étude rigoureuse de la formule de Taylor et la formule de Binôme de Newton	1826	Les techniques de Cauchy pour les différentes écritures de la formule de Taylor (1821) / Formel La technique algébrique et analytique d'Abel (1826) / Formel	Mixte Syntaxique
Développement asymptotique de Poincaré (1886)	1886	Les techniques analytiques des développements limités et asymptotiques / Formel	Syntaxique

Tableau 1 : Les principales phases de la genèse des développements limités

Au cours de la formulation du concept de développement limité d'une fonction à une variable réelle, les mathématiciens ont exploité différentes techniques dans les cadres mathématiques de l'algèbre, l'analyse et de la géométrie articulant des registres sémiotiques comme les figures géométriques statiques et dynamiques afin d'aboutir à des écritures algébriques ou à des représentations cartésiennes formulées etc.

Ceci confirme que ces méthodes articulaient les dimensions sémantiques et syntaxiques joignant les courbes aux tangentes aux équations en passant du numérique au graphique à l'algébrique et à l'analytique etc.

L'approche géométrique a pris une place importante dans l'étude des premiers termes de la formule de Taylor et dans la détermination des développements en séries infinies (développements limités usuels). Nous pouvons ainsi dire que dans cette période, ces mathématiciens articulaient la dimension sémantique dans l'interprétation graphique et la dimension syntaxique dans la manipulation des différentes techniques (équations, expressions analytiques) du calcul.

On ne peut pas parler du concept de développement limité sans faire retour à la notion d'équivalence. En effet, Bourbaki confirme que sa genèse est due à

...P. du Bois-Reymond [94 a et b] qui, le premier, aborda systématiquement les problèmes de comparaison des fonctions au voisinage d'un point, et, dans des travaux très originaux, reconnut le caractère («non archimédien » des échelles de comparaison, en même temps qu'il étudiait de façon générale l'intégration et la dérivation des relations de comparaison, et en tirait une foule de conséquences intéressantes [94 b]. Ses démonstrations manquent toutefois de clarté et de rigueur, et c'est à G. H. Hardy [147] que revient la présentation correcte des résultats de du Bois-Reymond: sa contribution principale a consisté à reconnaître et démontrer l'existence d'un ensemble de « fonctions élémentaires », les fonctions (H), où les opérations usuelles de l'Analyse (notamment la dérivation) sont applicables aux relations de comparaison. (Bourbaki, 1960, p. 254)

L'étude historique a permis de repérer les différentes écritures symboliques du type syntaxiques, utilisées dès la genèse du concept de développement limité, dans les divers problèmes développés traitant des situations du domaine de la physique et celui des mathématiques.

Enquête auprès des enseignants universitaires

Nous avons choisi d'étudier la transposition interne des développements limités et des approximations locales à travers deux investigations.

La première est une synthèse des résultats d'une analyse du programme tunisien de la première année de l'enseignement universitaire des classes préparatoires section mathématiques et physiques.

La deuxième est une investigation sur le terrain qui consiste en une enquête adressée à des enseignants universitaires visant à repérer la place de l'articulation des points de vue sémantique et syntaxique ainsi que l'articulation des registres de représentation sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des développements limités et des approximations locales au début de l'université⁷³.

⁷³ Nous nous restreindrons à présenter une synthèse des analyses de ce questionnaire.

L'étude des recommandations générales du programme tunisien de l'analyse réelle montre qu'elles articulaient les dimensions sémantique et syntaxique dans différents registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique. En revanche dans le contexte lié au concept de développement limité, il y a une absence de l'exploitation de la dimension sémantique au niveau du statut objet des développements limités d'une part, et de la mobilisation du calcul numérique et du graphique d'autre part.

Contenus scientifiques	Recommandations
<p>Développement limité à l'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point.</p> <p>Opérations algébriques sur les développements limités : Somme, produit; développement limité de $u \rightarrow \frac{1}{1-u}$, application au quotient.</p> <p>Existence d'un développement limité à l'ordre k pour une application de classe C^k : formule de Taylor-Young.</p>	<p>Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est pas exigible des étudiants.</p> <p>Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue; en particulier la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.</p> <p>Il convient de donner un exemple où f admet un développement limité à l'ordre 2 en un point sans être deux fois dérivable en ce point.</p>

Tableau 2 : Contenu du programme relatif à l'enseignement des développements limités

Une lecture des recommandations du programme officiel relatives au concept de développement limité, s'appuyant sur le modèle de grille d'analyse adoptée, met en évidence une divergence assez remarquable avec celle de sa genèse historique.

En effet, les statuts « outil » et « objet » du développement limité s'articulaient tout au long de sa genèse dans différents registres (analytique, algébrique, numérique, géométrique et graphique). En revanche, les recommandations du programme sont purement syntaxiques dans les cadres algébrique et analytique et le travail au niveau des registres graphique, numérique et dynamique aussi bien au niveau du statu objet qu'outil est totalement absents.

Afin de pouvoir confirmer ou infirmer l'absence d'un travail sur la coordination des registres, nous avons conduit une investigation sur le terrain qui consiste en un questionnaire auprès des enseignants universitaires dont l'objectif principal est de questionner :

- La façon d'introduire notre objet d'étude.
- La place des développements limités dans l'enseignement des mathématiques
- La place de la figure comme modèle d'outil d'approximations d'une fonction.
- Le travail sur l'articulation des différents types d'approximations à enseigner (équivalence, calcul de limite et développement limité) et les différents types de techniques mobilisables dans le traitement des problèmes mathématiques et extra-mathématiques par les développements limités

L'analyse des réponses des 16 enseignants interrogés montre que le « statut objet » du concept des développements limités est généralement mis à l'écart et ce pour des raisons institutionnelles. Le statut outil est très sollicité afin de permettre la résolution des problèmes intra ou extra mathématiques nécessitant la mobilisation de techniques algébriques, numériques et graphiques qui relèvent généralement des approximations numériques et qui font parti des domaines de la mécanique, physique et mathématiques etc.

L'articulation des registres pour le traitement des problèmes d'approximation locales est généralement absente puisque le travail sur la figure et le graphique comme dans le cas des nombres transcendants via les décimaux et les nombres rationnels sont peu sollicités.

D'après notre analyse didactique en termes de transposition didactique, l'approche numérique est absente totalement dans l'enseignement actuel de notre objet d'étude malgré le fait que le concept des développements limités est une technique d'approximations numériques d'un transcendant ou d'une fonction par un nombre *décimal* au voisinage d'un réel.

CONCLUSION

Les analyses didactiques ont montré que la genèse des développements limités est étroitement liée aux différents cadres et registres sémiotiques et qu'il y avait une dialectique dynamique des statut outil et objet du concept de développement limité et des différents concepts qui sont en étroite liaison avec cet objet mathématique ce qui a permis aux différents mathématiciens d'avancer sur leur recherche et leur mise au point de nouvel objet qui par la suite est devenu un outil fondamental dans le calcul d'approximation aussi bien en mathématiques qu'au domaine de la physique, mécanique etc. En revanche, du côté institutionnel, la pertinence de la prise en compte de l'articulation entre le point de vue sémantique et syntaxique, qui relève d'un niveau logico-mathématique n'est pas clairement prise en compte aussi bien par les programmes que par les manuels de cours d'une part, et le travail numérique et graphique permettant de montrer la pertinence de ce concept surtout pour la formation des futurs ingénieurs méritent d'être mieux explicité.

Une étude articulant les éléments de notre réflexion en didactique, et principalement en matière de raisonnement mathématique, avec les pratiques enseignantes pourrait nous renseigner davantage sur les priorités des apprentissages, les manques ainsi que les opportunités qui pourraient s'offrir dans le cadre d'une réflexion sur l'apprentissage des approximations et développements limités à l'université.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (2004). Le défi de la transition secondaire / supérieur : Que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine?
- Bloch, I. (2012). Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse, *Actes de colloque EMF 2012*, (p. 392-403).
- Bloch, I. et Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 31-2, 191-228.
- Bourbaki, N. (1984). *Éléments des histoires*, Springer, Paris.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet*, Thèse d'état : Université Paris 7.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7, n° 2, 5-31.

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, Thèse de doctorat, Université Lyon1.

Durand-Guerrier, V. et Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques? *Recherche en didactique des mathématiques* 23(3), 295-342.

Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 2.

Kouki, R., Bel Haj, Amor F. et Hachaïchi, Y. (2016). Comparaison entre l'évolution historique ayant mené aux développements limités et leur pratique d'enseignement au début de l'université : Entre syntaxe et sémantique, *In* Nardi E., Winslow C. et Hausberger T. (Eds), *Proceeding of INDRUM 2016* (WG 1, p. 123-132).

<http://indrum2016.sciencesconf.org/conference/indrum2016/pages/indrum2016proceedings.pdf>

Taton, R. (2004). *Calcul infinitésimal- Histoire*, Encyclopædia Universalis, v 10.