

Présentation de quelques modèles topologiques

Xavier Skapin

Université de Poitiers
xavier.skapin@univ-poitiers.fr

DYNAMÉ, Grenoble, janvier 2011

OUTLINES

1 MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE [BPC07]

- **Attention : ici, “modèle” = “formalisme”**
- Distinguer
 - la forme (représentation) de
 - **la structure (opération et traitements)**

Les frontières entre ces domaines sont plus ou moins floues.

DOMAINES DE REPRÉSENTATION

FORMES GÉOMÉTRIQUES DES OBJETS

- discret (pixels, voxels unités) pour images 2D et 3D
- triangulation 2D (soupes de triangles dans les GPU) et 3D
- polyédrique (à base de polygones) pour CAO
- exact (formes quelconques décrites par des équations)
- ...

DOMAINE DES OPÉRATIONS ET TRAITEMENT

CONSTRUCTION ET MANIPULATION DES OBJETS

- CSG (*Constructive Solid Geometry*) :
union/différence/intersection d'objets élémentaires regroupés dans un arbre
 - B-Rep (*Boundary Representation*) : description d'un solide par son bord (surface fermée et orientable) décomposé en sommets, arêtes, faces
 - **modèles à base topologique** : étendent les B-Rep par assemblage de cellules de dim. quelconque pour décrire des classes d'objets plus riches
- Objet = ensemble de cellules associées par relations d'adjacence, d'incidence et d'inclusion

OUTLINES

2 MODÉLISATION TOPOLOGIQUE

DES MODÈLES POUR QUOI FAIRE ?

PAS DE MODÈLE IDÉAL

Tout dépend de l'apport de chaque modèle en fonction :

- du type de cellules à représenter (régulières ou quelconques)
- des calculs d'informations à réaliser (caractéristiques topologiques, classes d'équivalence entre modèles...) \Rightarrow *groupes d'homologie*
- des facilités de construction d'objets (articulés, implicites, déformables...)

CLASSIFICATION DE MODÈLES

CRITÈRES

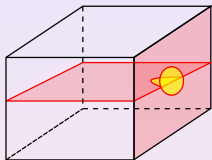
- Dimension (2, 3, $n...$)
- Domaine de représentation
- Orientabilité
- Avec bord (ouvert) ou sans (fermé)

DOMAINE DE REPRÉSENTATION

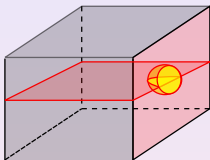
(SÉLECTION RELATIVE À CETTE PRÉSENTATION)

- Cellules simpliciales (triangles) ou quelconques
 - *Variétés* (voisinage de tout point homéomorphe à une boule) ou pas
 - Complexes *réguliers* : groupement de n -cellules uniquement par assemblages de $(n - 1)$ -cellules de leur bord
- *Quasi-variétés de dim. n* : complexes réguliers dont toute $(n - 1)$ -cellule est reliée à au plus 2 n -cellules

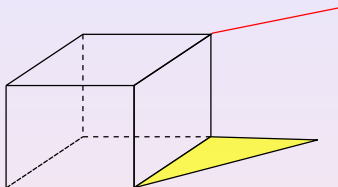
VARIÉTÉS, NON-VARIÉTÉS, QUASI-VARIÉTÉS



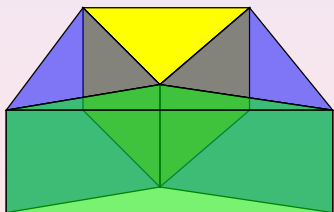
2D : non-variété
non QVC



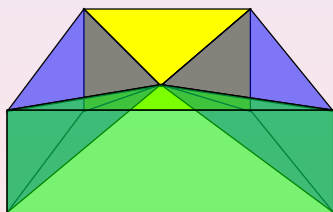
3D : variété
QVC



nD : non-variété
non-QVC



3D : variété
QVC



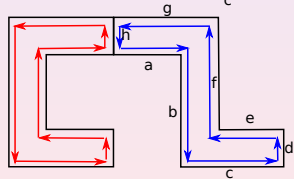
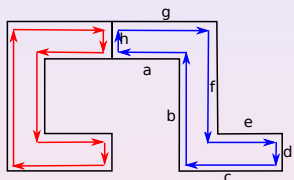
3D : non-variété
QVC

ORIENTABILITÉ

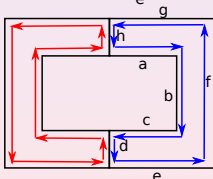
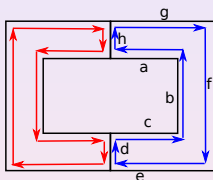
LIÉE À LA NOTION DE SUBDIVISION PAR DES FACES

- Subdivision = ensemble de faces collées le long de leurs arêtes
 - Toute face est orientable (2 orientations en suivant le cycle d'arêtes)
 - Subdivision 2D orientable ssi les orientations de deux faces le long d'une arête commune sont opposées
- En nD , subdivision variété orientable ssi possible de définir une orientation “gauche” et “droite” en tout point

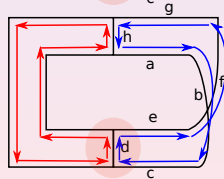
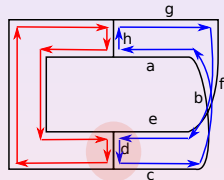
ORIENTABILITÉ



Faces orientables



Anneau orientable



Bande de Moebius
non orientable

NOMBRE DE BORDS D'UNE SUBDIVISION S

LIÉ À LA NOTION D'ARÊTES LIBRES

- arête libre = appartient à une seule face
 - bords de S = cycles élémentaires simples d'arêtes libres
- en 3D, une subdivision fermée orientable où les faces ne s'intersectent pas en dehors de leurs arêtes et sommets communs définit deux volumes, intérieur et extérieur.

CARACTÉRISTIQUES DE QUELQUES MODÈLES

TERMINOLOGIE

- *Dim* : 2D, 3D, n D
- *Ori* : orientable (O) et/ou non orientable (NO)
- *Bord* : avec (B) et/ou sans (NB)
- *Domaine* : domaine de représentation

CARACTÉRISTIQUES DE QUELQUES MODÈLES

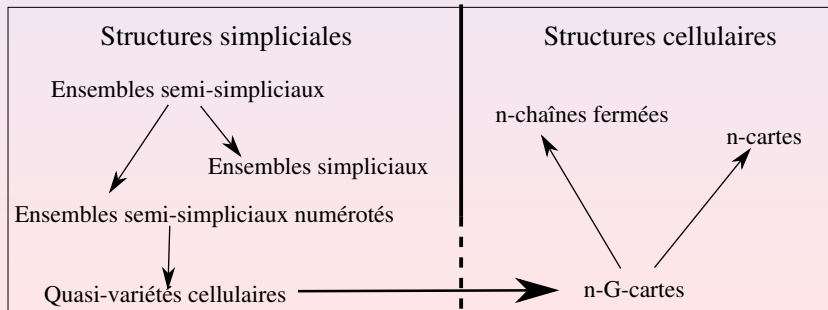
Nom	Dim	Ori	Bord	Domaine
Winged-edge	2	O	NB	équiv. n -carte
Vertex-edge	2	O	NB	équiv. n -carte
Face-edge	2	O	NB	équiv. n -carte
Carte	2	O	NB	équiv. graphe planaire
Quad-edge	2	O,NO	NB	équiv. n -G-carte
Radial-edge	3	O	NB	équiv. n -carte
V-carte	3	O	NB	équiv. n -carte ?
Pavage	3	O	NB	équiv. n -carte ?
Facet-edge	3	O,NO	B,NB	équiv. n -G-carte

CARACTÉRISTIQUES DE QUELQUES MODÈLES

Nom	Dim	Ori	Bord	Domaine
<i>n</i> -carte	<i>n</i>	O	NB	variétés cell. (ordonné)
Complexe simplicial abstrait	<i>n</i>	O,NO	B,NB	simplicial
Ens. (semi-) simplicial	<i>n</i>	O,NO	B,NB	simplicial multi-incidence
Cell-tuple	<i>n</i>	O,NO	B,NB	équiv. <i>n</i> -G-carte
<i>n</i> -G-carte	<i>n</i>	O,NO	B,NB	quasi-variété cell. (ordonné)
CW-complexe	<i>n</i>	O,NO	B,NB	cell. quelconque
Graphe d'incidence	<i>n</i>	O,NO	B,NB	complexe cell.
<i>n</i> -chaîne de cartes	<i>n</i>	O,NO	B,NB	complexe cell. (ordonné)

MODÈLES SIMPLICIAUX ET CELLULAIRES

- n -G-cartes, n -cartes et n -chaînes de cartes représentatives des structures cellulaires \rightarrow décrivent cellules “réelles” (forme quelconque)
- issues de modèles simpliciaux (discrétisent objets réels en cell. de forme simple adaptée aux calculs)



OUTLINES

3 MODÈLES SIMPLICIAUX

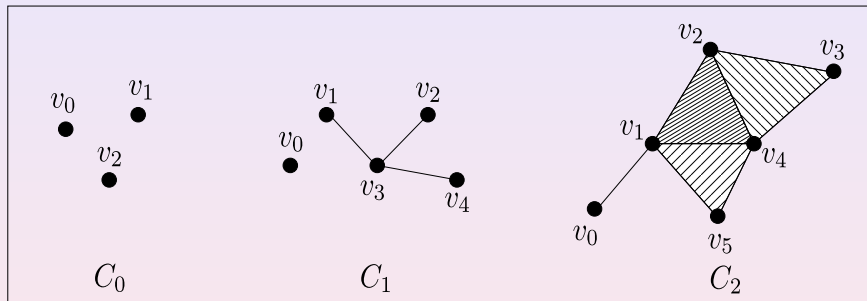
COMPLEXE SIMPLICIAL ABSTRAIT (CSA) [AGO76]

V ensemble fini d'éléments appelés *sommets*.

Complexe simplicial abstrait $C =$ ensemble de parties non vides de V tel que :

- $\forall v \in V, \{v\} \in C$;
- $\forall S \subseteq C$, tout sous-ensemble non vide de $S \in C$.

COMPLEXE SIMPLICIAL ABSTRAIT (CSA)



$$C_0 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}\}.$$

$$C_1 = \{\{v_0\}, \dots, \{v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}.$$

$$C_2 = \{\{v_0\}, \dots, \{v_5\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}.$$

ENSEMBLE SEMI-SIMPLICIAL (ESS) [MAY67]

DÉFINITION

ESS $S = (K, (d_i))$: famille d'ensembles $K = (K^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de simplexes abstraits, munis d'*opérateurs de bord*

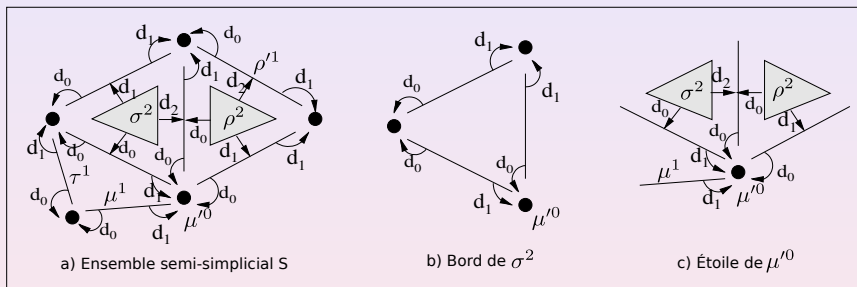
$d_i : K^n \rightarrow K^{n-1}$ ($0 \leq i \leq n$) vérifiant (notation suffixe), pour tout simplexe $\tau^n : \tau^n d_i d_j = \tau^n d_j d_{i-1}$ si $j < i$.

Composition $d_{j_1} \dots d_{j_k} = \text{comp. canonique } d_{i_1} \dots d_{i_k}$ avec $i_1 > \dots > i_k$.

TERMINOLOGIE POUR UN SIMPLEXE τ^n

- *face propre* = image de τ^n par composée de d_i
- *i-ème face* = $\tau^n d_i$ = *face opposée* au sommet τ_i^n
- *bord* = ensemble des faces propres de τ^n
- *étoile* : ensemble des simplexes dont τ^n est une face propre
- *simplexe principal* : simplexe qui n'est pas une face propre

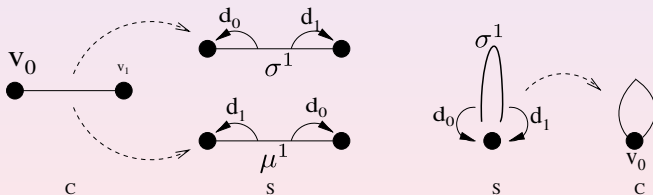
ENSEMBLE SEMI-SIMPLICIAL (ESS)



- a) ρ^2 , σ^2 , μ^1 et $\tau^1 = 2$ - et 1 -simplexes principaux de S
 ρ^1 et $\mu^0 = 1$ ère et 2 ème face de ρ^2 et μ^1 .
- b) Bord de σ^2
- c) Étoile de μ^0

CSA vs. ESS

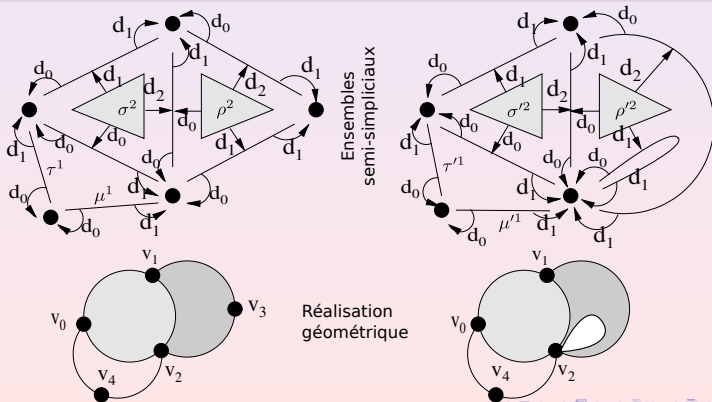
- Un simplexe τ^n est *complet* si tous ses sommets sont distincts.
- Tous les simplexes d'un CSA sont complets (pas forcément vrai dans un ESS)



ESS ET CW-COMPLEXE [HU51], [MAY67], [FP90]

CW-COMPLEXE = RÉALISATION GÉOMÉTRIQUE D'UN E(S)S

- 1 On associe une boule de dim. n à tout n -simplexe
- 2 Les boules sont collées par identification de parties de leurs bords



ENSEMBLE SIMPLICIAL (ES)

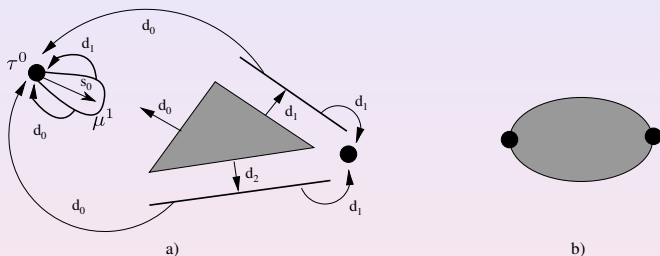
ES = ESS + *opérateurs de dégénérescence* s_i qui associent à tout simplexe un simplexe *dégénéré* de dim. supérieure.

ES $S' = (K, (d_i), (s_i))$: ensembles $K = (K^n_{n \in \mathbb{N}})$ munis de 2 classes d'applications :

- $\forall n, \forall i, 0 \leq i \leq n, d_i : K^n \rightarrow K^{n-1}$, vérifiant $d_i d_j = d_j d_{i-1}$ si $j < i$;
- $\forall n, \forall i, 0 \leq i \leq n, s_i : K^n \rightarrow K^{n+1}$, vérifiant :

$$\begin{cases} s_i s_j = s_j s_{i+1} & \text{si } j \leq i \\ s_i d_j = d_j s_{i-1} & \text{si } j < i \\ s_i d_i = s_i d_{i+1} = \text{Id} \\ s_i d_j = d_{j-1} s_i & \text{si } j > i + 1 \end{cases}$$
- Si $\mu^{n+1} = \tau^n s_i$ et $[\tau_0^n, \dots, \tau_n^n] =$ sommets de τ^n , alors $[\tau_0^n, \dots, \tau_i^n, \tau_i^n, \dots, \tau_n^n] =$ sommets de μ^{n+1} .
- Toute composition d'op. = composition canonique $d_{i_1} \dots d_{i_k} s_{j_1} \dots s_{j_p}$, avec $i_1 > \dots > i_k$ et $j_1 < \dots < j_p$

ENSEMBLE SIMPLICIAL (ES)



- a) $\mu^1 = \tau^0 s_0$: 1-simplexe dégénéré associé à τ^0 .
- b) L'arête dégénérée issue du sommet τ^0 a même réalisation géométrique que τ^0 .

Exemple d'utilisation des opérateurs de dégénérescence : le

▶ produit cartésien

ESS NUMÉROTÉS (ESSN)

DÉFINITION

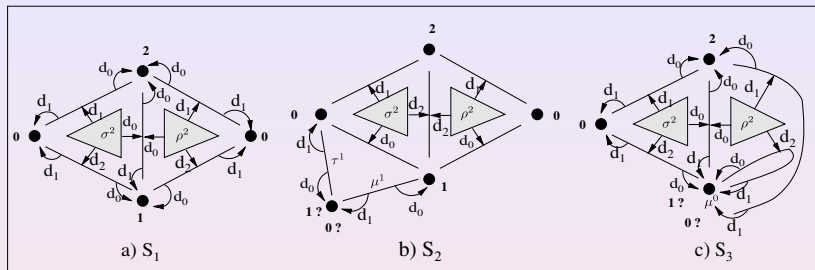
Un ESSN $S = (K, (d_i), \nu)$ est un ESS $(K, (d_i))$ de dim. k muni d'une application $\nu : K^0 \rightarrow [0, k]$ vérifiant, \forall p -simplexe principal $\tau^p \in K (0 \leq p \leq k)$:

- si $p = 0$, alors $\tau^p \nu = 0$;
- si $p > 0$, entiers associés aux sommets de $\tau^p = \{0, \dots, p\}$.

DÉFINITIONS

- Séquence de sommets de $\tau^p = [\tau_0^p, \dots, \tau_p^p]$
- séquence $[\tau_0^p, \dots, \widehat{\tau_i^p}, \dots, \tau_p^p]$ (on retire τ_i^p) = face $\tau^p d_i$
- ⇒ $(\nu_0, \dots, \nu_p) = \text{numérotation de } \tau^p$
- ⇒ $(\nu_0, \dots, \widehat{\nu_i}, \dots, \nu_p) = \text{numérotation de } \tau^p d_i$

ESS NUMÉROTÉS (ESSN)



- a) σ^2 et ρ^2 de S_1 numérotés $(0, 1, 2)$, $\sigma^2 d_0$, $\sigma^2 d_1$ et $\sigma^2 d_2$ numérotés $(1, 2)$, $(0, 2)$ et $(0, 1)$ (idem pour les faces de ρ^2).
- b-c) S_2 et S_3 ne sont pas numérotables.
- b) $\tau^1 d_0 = \mu^1 d_1$ ne peut pas être numéroté correctement.
- c) ρ^2 n'est pas complet : μ^0 ne peut avoir deux numérotations distinctes.

CELLULE

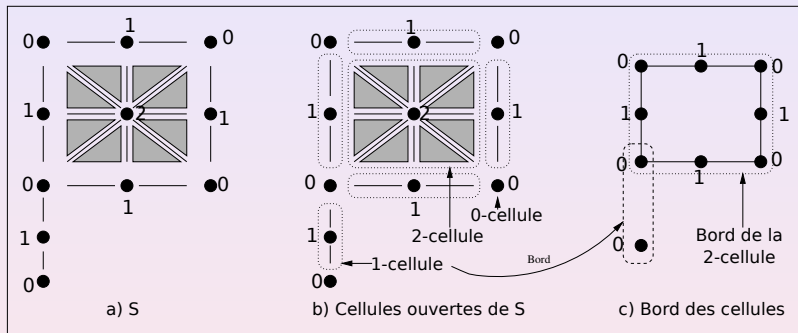
DÉFINITION [LIE94]

Soit τ^0 un 0-simplexe numéroté (i) ($0 \leq i \leq k$) d'un ESSN de dim. k .

- *Cellules de dim. i (i -cellules)* incidente à $\tau^0 = n$ -simplexes ($0 \leq n \leq i$) de l'étoile de τ^0 , numérotés par des entiers de $[0, i]$.
- *Bord* de la i -cellule = simplexes appartenant au bord des simplexes de la cellule, mais pas à la cellule elle-même.
- i -cellule *ouverte* ssi privée de son bord, *fermée* sinon.

CELLULES D'UN ESSN

SIMPLEXES PRINCIPAUX DES ESSN FORCÉMENT COMPLETS \Rightarrow NOTION DE *cellule*



- a) Cellules de S
- b) 0-cellules de $S = 0$ -simplexes. Les 1- et 2-cellules ouvertes sont entourées par des pointillés.
- c) Bord des cellules principales de S .

QUASI-VARIÉTÉ CELLULAIRE DE DIM. n (n -QVC)

[LIE94]

SOUS-ENSEMBLE DES ESSN

- 0-QVC = ensemble de 0-simplexes numérotés (0), partitionné en composantes connexes contenant un ou deux 0-simplexes.
- n -QVC ($n > 0$) = applications successives de
 - 1 *cône cellulaire* : création d'une n -cellule à partir d'une $(n - 1)$ -cellule et d'une 0-cellule
 - 2 *identification* : collage de deux $(n - 1)$ -cellules

QVC - CÔNE CELLULAIRE

Soit $S = (K, (d_j)_{j=0,\dots,n-1}, \nu)$ une $(n-1)$ -QVC non vide.

Le cône cellulaire de S est une n -QVC $S' = (K', (d'_j)_{j=0,\dots,n}, \nu')$ définie par :

- ❶ $K' = K \cup K'' \cup \{\sigma^0\}$, où :
 - σ^0 est un 0-simplexe ;
 - K, K'' et $\{\sigma^0\}$ sont disjoints ;
 - $K'' = m$ -simplexes tels que \exists une bijection Φ associant un $(m-1)$ -simplexe de K à un m -simplexe de K'' ($1 \leq m \leq n$).
- ❷ Opérateurs $(d'_j)_{j=0,\dots,n}$ de K' :
 - pour $0 \leq j \leq n-1$, $d'_j/K = d_j$;
 - $\forall m$ -simplexe σ''^m de K'' , $\sigma''^m d'_m = \sigma'' \Phi^{-1}$;
 - $\forall 1$ -simplexe σ''^1 de K'' , $\sigma''^1 d'_0 = \sigma^0$;
 - $\forall m$ -simplexe σ''^m de K'' ($0 \leq j < m$), $\sigma''^m d'_j = \sigma''^m \Phi^{-1} d_j \Phi$.
- ❸ $\nu'/K_0 = \nu, \sigma^0 \nu' = n$.

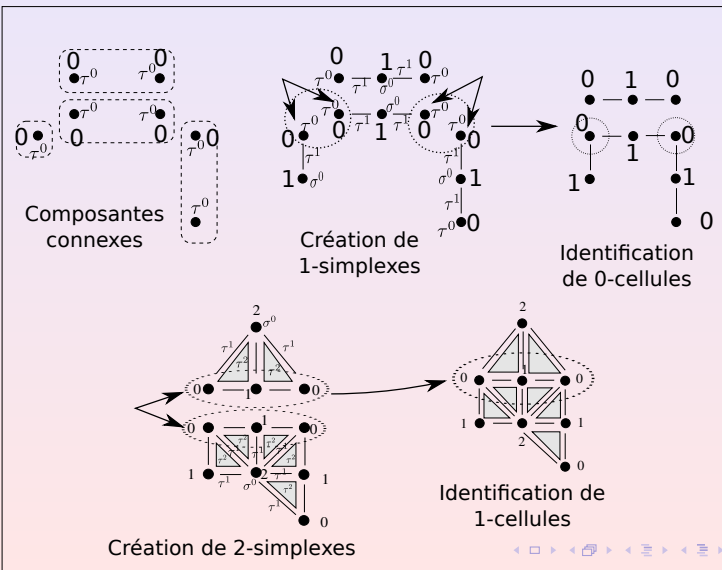
QVC - IDENTIFICATION

Soient c_1^{n-1} et c_2^{n-1} deux $(n - 1)$ -cellules fermées de S , telles que :

- chaque $(n - 1)$ -simplexe de ces cellules appartient au bord d'exactly un n -simplexe de S ,
- \exists un isomorphisme entre les simplexes de c_1^{n-1} et ceux de c_2^{n-1} .

On identifie (fusionne) chaque simplexe de c_1^{n-1} avec le simplexe correspondant de c_2^{n-1} .

QVC



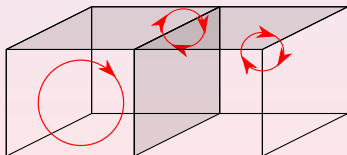
OUTLINES

4 MODÈLES ORDONNÉS DE LA FAMILLE DES CARTES

MODÈLES ORDONNÉS

La plupart du temps, \exists des relations d'ordre entre cellules incidentes

- 2D : arêtes incidentes à une même face ou un même sommet organisées en cycle
- 3D : idem pour des faces incidentes à une même arête (*cycle radial*)
- ⇒ nD : description d'un ordre des i - et $(i + 1)$ -cellules autour d'une $(i - 1)$ -cellule et à l'intérieur d'une $(i + 2)$ -cellule



Modèles souvent définis à partir d'un unique élément de base

CARTE GÉNÉRALISÉE DE DIM. n (n -G-CARTE)[LIE91], [LIE92], [LIE94]

Extension des *cartes* [Edm60] décrivant des graphes planaires (\Rightarrow équiv. 2-carte)

n -G-carte = $(n + 2)$ -uplet $G^n = (B^n, \alpha_0^n, \dots, \alpha_n^n)$ tel que :

- B^n : ensemble fini de brins ;
- pour $0 \leq k \leq n$, $\alpha_k^n : B^n \rightarrow B^n$ est une involution sur B^n , i.e. $\alpha_k^n \alpha_k^n = \text{Id}$;
- pour $0 \leq k < k + 2 \leq l \leq n$, $\alpha_k^n \alpha_l^n$ est une involution.
- G^n est *fermée (sans bord)* si α_p^n est sans point fixe ($0 \leq p \leq n$), i.e pour tout brin $b^n \in B^n : b^n \alpha_p^n \neq b^n$.
- Sinon, G^n est *ouverte (avec bord)*.

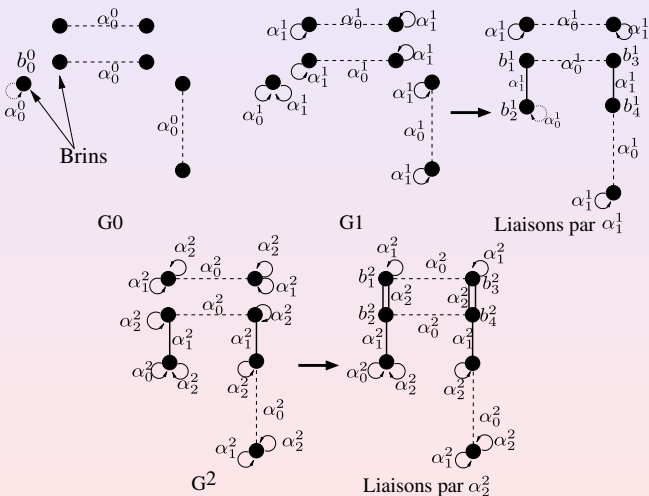
ÉQUIVALENCE ENTRE n -QVC S^n ET n -G-CARTE G^n

[LIE94]

UNE ÉQUIVALENCE INTUITIVE

- 1 n -simplexe de $S^n \Leftrightarrow$ 1 brin de G^n ;
- Cône cell. : $S^n \rightarrow (n + 1)$ -QVC $S^{n+1} \Leftrightarrow G^n \rightarrow (n + 1)$ - G^{n+1}
 - 1 même ensemble de brins pour G^n et G^{n+1}
 - 2 $\alpha_i^n (0 \leq i \leq n) \rightarrow \alpha_i^{n+1}$
 - 3 tout brin b^{n+1} de G^{n+1} est un point fixe par α_{n+1}^{n+1}
- Identifier 2 n -cellules de $S^n \Leftrightarrow$ coudre deux brins de G^n par α_n^n .

ÉQUIVALENCE ENTRE n -QVC S^n ET n -G-CARTE G^n



ÉQUIVALENCE ENTRE S^n ET G^n

NOTION D'ORBITE

- Soient $G^n, b^n \in G^n$ et $\Psi = \{\alpha_0^n, \dots, \alpha_n^n\}$.
- $\langle \Psi \rangle = \langle \alpha_0^n, \dots, \alpha_n^n \rangle =$ groupe de permutations engendré par Ψ (ensemble des permutations déduites de Ψ par composition de $\alpha_i^n, 0 \leq i \leq n$).
- Soient $H \subset \{0, \dots, n\}$ et $\langle \rangle_H$ le groupe $\langle \alpha_h^n \mid h \in H \rangle$.
- $\langle \rangle_H(b^n) = \{b^n \psi \mid \psi \in \langle \rangle_H\}$ est l'orbite de b^n relativement à H .
Si H est vide, l'orbite de b^n est $\langle \rangle(b^n) = \{b^n\}$.

$\langle \rangle_{\{H\}}(b^n) =$ ensemble des brins que l'on peut « atteindre » à partir de b^n avec des compositions quelconques de α_h^n , pour tout $h \in H$.

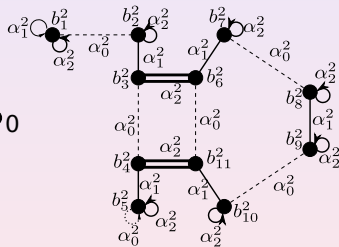
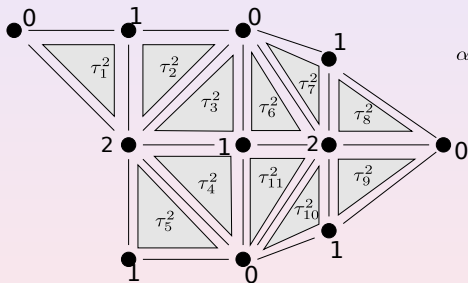
→ Composante connexe associée à $b^n =$ orbite $\langle \rangle_{N=[0,n]}(b^n)$

ÉQUIVALENCE ENTRE S^n ET G^n

DÉFINITION FORMELLE

$S^n = ((K, (d_i)_{i=0,\dots,n}, \nu))$ et $G^n = (B^n, \alpha_0^n, \dots, \alpha_n^n)$. Soit $N = \{0, \dots, n\}$. S^n et G^n sont équivalentes ssi :

- 1 $\exists \phi$ telle que :
 - $\forall h (0 \leq h \leq n)$, ϕ est une bijection de K^h sur l'ens. des orbites $\langle \rangle_{N-\{h_0,\dots,h_h\}}(b^n)$;
 - si la numérotation d'un h -simplexe de K^h est (ν_0, \dots, ν_h) , alors l'orbite associée est $\langle \rangle_{N-\{\nu_0,\dots,\nu_h\}}(b^n)$.
- 2 Si $n = 0$, alors \forall comp. conn. $\{\sigma_1^0, \sigma_2^0\}$ de S^n :
 - si $\sigma_1^0 \neq \sigma_2^0$, alors $\sigma_1^0 \phi \alpha_0^0 = \sigma_2^0 \phi$
 - sinon, $\sigma_i^0 \phi \alpha_0^0 = \sigma_i^0 \phi$.
- 3 Soit $n > 0$; $\forall b^n \in B^n, \forall h > 0, \forall \sigma^h \in K^h, \forall p (0 \leq p \leq h)$:
 si $\sigma^h \phi = \langle \rangle_{N-\{\nu_0,\dots,\nu_h\}}(b^n)$,
 alors $\sigma^h d_p \phi = \langle \rangle_{N-\{\{\nu_0,\dots,\nu_h\}-\{\nu_p\}\}}(b^n)$.

ÉQUIVALENCE ENTRE S^n ET G^n 

n -CARTE M^n [LIE91]

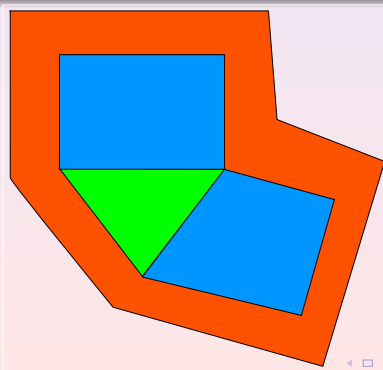
n -carte = $(n + 1)$ -uplet $M^n = (B^n, \beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n)$ tel que :

- B^n : ensemble fini de brins
- $\beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n$ permutations sur B^n
 - pour $2 \leq k \leq n$, β_k^n involution sur B^n
 - pour $1 \leq k < k + 2 \leq l \leq n$, $\beta_k^n \beta_l^n$ involution sur B^n

n -CARTE M^n [LIE91]

n -carte = $(n + 1)$ -uplet $M^n = (B^n, \beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n)$ tel que :

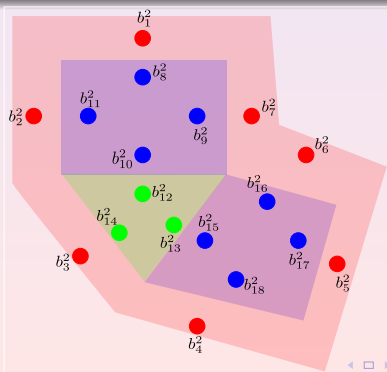
- B^n : ensemble fini de brins
- $\beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n$ permutations sur B^n
 - pour $2 \leq k \leq n$, β_k^n involution sur B^n
 - pour $1 \leq k < k + 2 \leq l \leq n$, $\beta_k^n \beta_l^n$ involution sur B^n



n -CARTE M^n [LIE91]

n -carte = $(n + 1)$ -uplet $M^n = (B^n, \beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n)$ tel que :

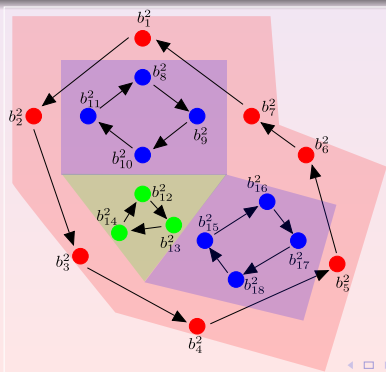
- B^n : ensemble fini de brins
- $\beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n$ permutations sur B^n
 - pour $2 \leq k \leq n$, β_k^n involution sur B^n
 - pour $1 \leq k < k + 2 \leq l \leq n$, $\beta_k^n \beta_l^n$ involution sur B^n



n -CARTE M^n [LIE91]

n -carte = $(n + 1)$ -uplet $M^n = (B^n, \beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n)$ tel que :

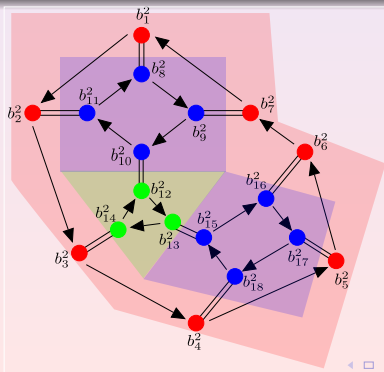
- B^n : ensemble fini de brins
- $\beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n$ permutations sur B^n
 - pour $2 \leq k \leq n$, β_k^n involution sur B^n
 - pour $1 \leq k < k + 2 \leq l \leq n$, $\beta_k^n \beta_l^n$ involution sur B^n



n -CARTE M^n [LIE91]

n -carte = $(n + 1)$ -uplet $M^n = (B^n, \beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n)$ tel que :

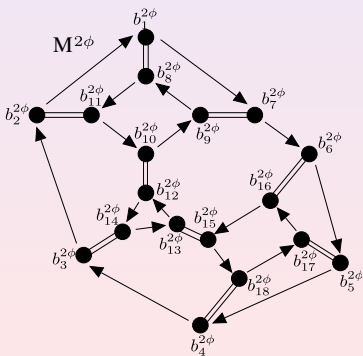
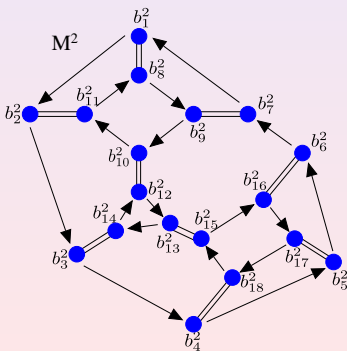
- B^n : ensemble fini de brins
- $\beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n$ permutations sur B^n
 - pour $2 \leq k \leq n$, β_k^n involution sur B^n
 - pour $1 \leq k < k + 2 \leq l \leq n$, $\beta_k^n \beta_l^n$ involution sur B^n



n -CARTE M^n ET n -CARTE INVERSE [LIE94]

Soit $M^n = (B^n, \beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n)$.

n -carte inverse de M^n : $M^{n\phi} = (B^{n\phi}, (\beta_1^n)^{-1}, \beta_2^n, \dots, \beta_n^n)$, avec ϕ bijection de B^n vers $B^{n\phi}$.



CORRESPONDANCE ENTRE n -G-CARTE G^n ET n -CARTES

$G^n = (B^n, \alpha_0^n, \dots, \alpha_n^n)$ est connexe, avec $n \geq 0$.

$OG^n = (B^n, \alpha_0^n \alpha_1^n, \alpha_0^n \alpha_2^n, \dots, \alpha_0^n \alpha_n^n)$ est la n -carte de l'orientabilité de G^n , telle que :

- 1 OG^n a au plus 2 composantes connexes
- 2 si G^n est ouverte, alors OG^n a 1 comp. conn.
- 3 si G^n est fermée et non orientable, OG^n a 1 comp. conn.
- 4 si G^n est fermée et orientable, OG^n a 2 comp. conn. CC_1 et CC_2 , telles que CC_1 est isomorphe à la n -carte inverse de CC_2 .

→ réciproquement, à partir de CC_1 et CC_2 , on peut construire G^n

CONSTRUCTION DE G^n À PARTIR DE M^n

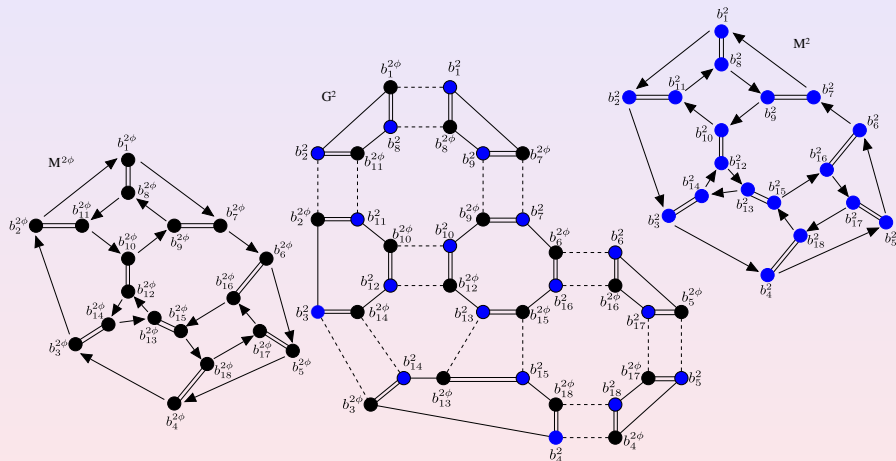
Soit la n -carte $M^n = (B^n, \beta_1^n, \dots, \beta_n^n)$.

On lui associe sa k -carte inverse $M^{k\phi} = (B^{k\phi}, \beta_1^{k\phi}, \dots, \beta_n^{k\phi})$ par la bijection $\phi : B^n \rightarrow B^{k\phi}$ (on note $b^{k\phi} = b^n \phi$)

- $\forall b^n \in B^n, (b^n \beta_1^n)^\phi = b^{k\phi} (\beta_1^{k\phi})^{-1}$
- $\forall i > 1, (b^n \beta_i^n)^\phi = b^{k\phi} \beta_i^{k\phi}$.

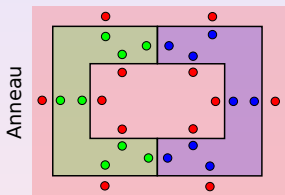
$G^n = (B^{k*} = B^n \cup B^{k\phi}, \alpha_0^n, \dots, \alpha_n^n)$ associée à M^n et $M^{k\phi}$ est définie par :

- $\alpha_0^n / B^n = \phi, \alpha_0^n / B^{k\phi} = \phi^{-1}$
- $\forall i > 0, \alpha_i^n / B^n = \phi \beta_i^{k\phi}, \alpha_i^n / B^{k\phi} = \phi^{-1} \beta_i^n$

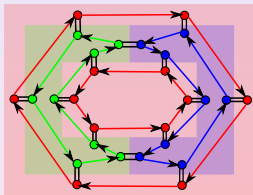
CORRESPONDANCE ENTRE n -CARTES ET n -G-CARTE

$$b_1^2 \alpha_0^2 = b_1^2 \phi = b_1^{2\phi}, \quad b_1^2 \alpha_1^2 = b_1^2 \phi \beta_1^2 = b_7^{2\phi}, \quad b_1^2 \alpha_2^2 = b_1^2 \phi \beta_2^2 = b_8^{2\phi}$$

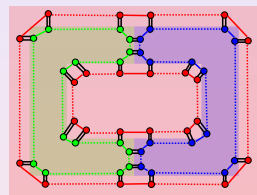
ORIENTABILITÉ, n -CARTE ET n -G-CARTE



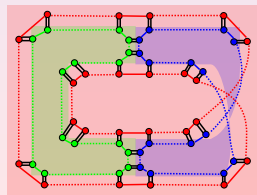
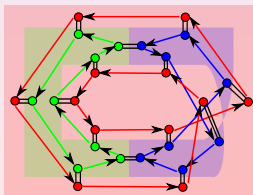
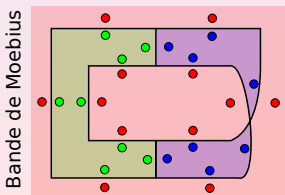
Placement des brins



2-carte (incohérence pour la B.M.)



2-G-carte



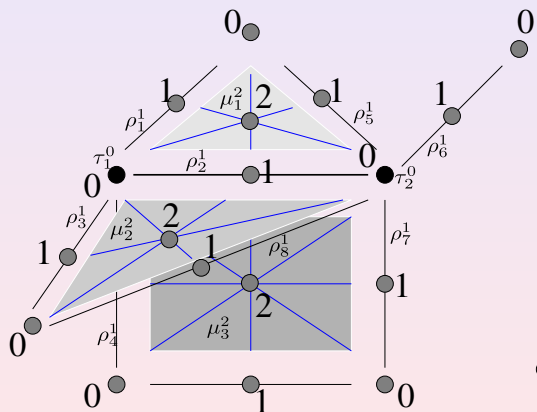
COMPLEXE CELLULAIRE FERMÉ [EL94]

n-complexe cellulaire fermé = ESSN pouvant être construit par :

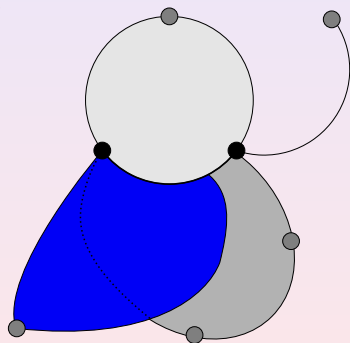
- création de *i*-cellules et de leurs bords, i.e. de *i*-QVC ($0 \leq i \leq n$) comprenant une seule *i*-cellule
- identification de $m \geq 2$ *i*-cellules, ($m = 2$ pour les QVC)

Deux cellules peuvent être identifiées si elles sont homomorphes.

COMPLEXE CELLULAIRE FERMÉ



Complexe cellulaire



Réalisation géométrique

n -CHAÎNE FERMÉE C^n [ELT94], [EL94]

ÉQUIVALENCE AVEC LES COMPLEXES CELLULAIRES FERMÉS

- Comp. cell. fermé = ens. de cellules décrites par des QVC
- C^n = ens. de G -cartes de différentes dimensions

DÉFINITION

$C^n = ((G^m)_{0 \leq m \leq n}, (\sigma^m)_{1 \leq m \leq n})$ est un $(2n + 1)$ -tuple tel que,
 $\forall m (0 \leq m \leq n)$:

- $G^m = (B^m, \alpha_0^m, \dots, \alpha_m^m)$ est une m - G -carte telle que α_m^m est indéfinie
- $\sigma^m : G^m \rightarrow G^{m-1} (1 \leq m \leq n)$ est un opérateur de bord vérifiant,
 $\forall b^m \in B^m$:
 - $b^m \alpha_k^m \sigma^m \in \{b^m \sigma^m, b^m \sigma^m \alpha_k^{m-1}\} (0 \leq k \leq m - 2)$
 - $b^m \alpha_{m-1}^m \sigma^m \sigma^{m-1} = b^m \sigma^m \sigma^{m-1}$

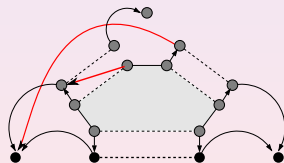
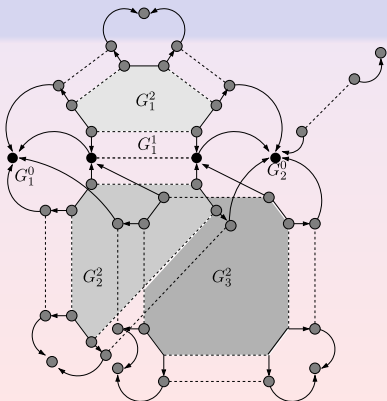
n -CHAÎNE FERMÉES

- $b^m \alpha_k^m \sigma^m \in \{b^m \sigma^m, b^m \sigma^m \alpha_k^{m-1}\} (0 \leq k \leq m - 2)$

→ Homomorphisme : $b^m \alpha_k^m \sigma^m = b^m \sigma^m \alpha_k^{m-1}$

- $b^m \alpha_{m-1}^m \sigma^m \sigma^{m-1} = b^m \sigma^m \sigma^{m-1}$

2-chaîne fermée homomorphe

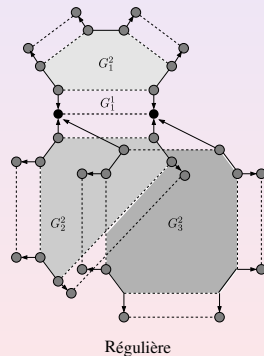
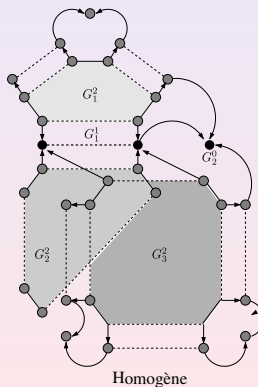
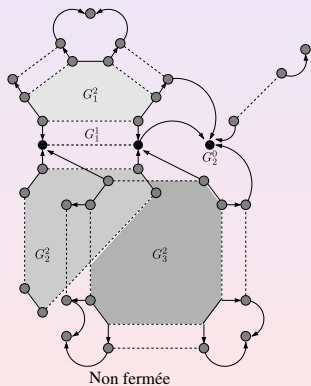


2-chaîne fermée non homomorphe

VARIANTES DE n -CHAÎNES

- *n*-chaîne non fermée : certaines cellules du bord non définies
- *n*-chaîne homogène : toute i -cellule appartient au bord d'une n -cellule
- *n*-chaîne régulière : construite par ajout de n -cellules et identification de $(n - 1)$ -cellules
- *n*-chaîne variété : n -chaînes régulières où toute $(n - 1)$ -cellule est partagée par au plus 2 n -cellules \Rightarrow n -G-cartes

VARIANTES DE n -CHAÎNES



CONCLUSION

DE NOMBREUX MODÈLES TOPOLOGIQUES

- Le choix du modèle dépend des opérations et du domaine de représentation
- Modèles ordonnés affiliés aux cartes :
 - définis en dimension n
 - supportent de nombreuses opérations (souvent définies sur les n -G-cartes puis adaptées aux autres modèles)
 - variantes pour chaque modèle par modification de sa définition selon le contexte
- ne pas confondre “grande capacité d’expression” et “faire n’importe quoi” ⇒ vérifier la cohérence topo. des objets après chaque opération

CONCLUSION

LIENS AVEC DYNAMÉ

- Modèle CORDS-ANIMA : entités (LIA) ne décrivant pas de structures
- Modèles topo. : structuration des entités (brins) pour décrire des cellules

⇒ Associer ces formalismes dans DYNAMÉ

Modèles “meshless” intéressants dans ce cadre, mais l’étude d’autres modèles (ex. : FFD) devrait apporter une vision complémentaire...

BIBLIOGRAPHIE I



M. K. Agoston.

Algebraic Topology : A First Course (Pure and Applied Mathematics).

M. Dekker, 1976.



D. Bechmann, B. Péroche, and Collectif.

Informatique graphique, modélisation géométrique et animation.

Hermes Lavoisier, 2007.



J. Edmonds.

A combinatorial representation for polyhedral surfaces.

Notices Amer. Math. Soc., 7, 1960.



H. Elter and P. Lienhardt.

Cellular complexes as structured semi-simplicial sets.

Int. Journal of Shape Modeling, 1(2) :191–217, 1994.

BIBLIOGRAPHIE II



H. Elter.

Étude de structures combinatoires pour la représentation de complexes cellulaires.

Mémoire de doctorat, L.S.I.I.T., Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1994.



R. Fristsch and R. A. Piccinini.

Cellular structures in topology.

Cambridge University Press, 1990.



S. T. Hu.

On the realizability of homotopy groups and their operations.

Pacific Journal of Mathematics, 1 :583–602, 1951.

BIBLIOGRAPHIE III



P. Lienhardt.

Subdivisions de surfaces et cartes généralisés de dimension 2.

Informatique théorique et Applications // Theoretical Informatics and Applications, 25(2) :171–202, 1991.



P. Lienhardt.

Extensions de la notion de cartes et modélisation géométrique à base topologique.

Habilitation à diriger des recherches, Université de Strasbourg, France, Janvier 1992.

BIBLIOGRAPHIE IV



P. Lienhardt.

N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds.

Int. Journal of Computational Geometry and Applications,
4(3) :275–324, 1994.

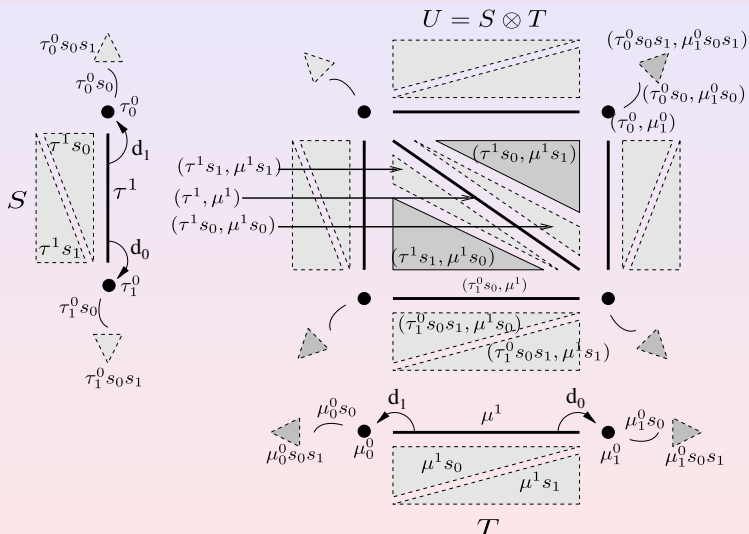


J. P. May.

Simplicial objects in algebraic topology.

In *Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton*, volume 11,
1967.

PRODUIT CARTÉSIEN D'ENSEMBLES SIMPLICIAUX

[Retour](#)


Utilisé pour l'animation...