HAL open science

Courbes planes : rappels et exercices

Yves Martinez-Maure

To cite this version:

Yves Martinez-Maure. Courbes planes : rappels et exercices. Master. France. 2011. hal-02463855

HAL Id: hal-02463855

https://hal.science/hal-02463855v1

Submitted on 2 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Courbes planes : rappels et exercices

Yves Martinez-Maure

Dans toute cette série d'exercices, $\mathcal{P}$ désigne un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Rappels. Une *courbe paramétrée* Γ de $\mathcal{P}$ est la donnée d'une application continue $f : I \to \mathcal{P}, t \longmapsto M(t)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que Γ est définie par la *paramétrisation* f ou par le *système d'équations paramétriques*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

où les fonctions x et y sont données par : $\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$. Construire la courbe paramétrée Γ signifie représenter l'ensemble

$$\{M(t) \in \mathcal{P} \,|t \in I\}$$

dans le plan $\mathcal{P}$.

<u>En cinématique</u>, on envisage Γ comme la trajectoire dans $\mathcal{P}$ du point mobile $M(t)$ au cours de l'intervalle de temps I.

Exemples élémentaires.

$\boxed{\text{a.}}$ Droite $\mathcal{D}(A; \overrightarrow{u})$ passant par A (a, b) et dirigée par $\overrightarrow{u}$ $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases}, \text{ où } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ et } cd \neq 0.$$

$\boxed{\text{b.}}$ La courbe représentative Γ_y d'une fonction continue y :

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ où } y : I \to \mathbb{R} \text{ est continue.}$$

$\boxed{\text{c.}}$ Ellipse :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \text{ où } ab \neq 0.$$

La notion de tangente. Soit Γ la courbe paramétrée de $\mathcal{P}$ définie par le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = x(t) \\ \\ y = y(t) \end{cases}.$$

Soit $t_0 \in I$ et soit $M_0 = M(t_0)$ le point correspondant de la courbe Γ. S'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de t_0 dans I tel que le rapport

$$\frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \qquad \left(\text{resp. } \frac{x(t) - x(t_0)}{y(t) - y(t_0)}\right)$$

soit défini sur $\mathcal{V} - \{t_0\}$ et admette une limite finie a (resp. b) lorsque $t \neq t_0$ tend vers t_0, alors on dit que la droite $(M_0M(t))$ tend vers la droite $\mathcal{D}(M_0; \overrightarrow{v_0})$, où $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$ (resp. $\overrightarrow{v_0} = b\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$), lorsque $t \neq t_0$ tend vers t_0.

Nous dirons alors que la courbe paramétrée Γ *admet une (droite) tangente en* M_0, à savoir la droite $\mathcal{D}(M_0; \overrightarrow{v_0})$ passant par M_0 et dirigée par $\overrightarrow{v_0}$.

Si elle existe, la dérivée $n^{ième}$ du *vecteur position* $\overrightarrow{OM(t)}$ en t_0 est notée $\dfrac{d^n\overrightarrow{M}}{dt^n}(t_o)$ (ou $\overrightarrow{OM}^{(n)}(t_0)\Big)$ et appelée $n^{ième}$ *vecteur dérivé* de Γ en $M_0 = M(t_0)$. Le point M_0 est alors dit *régulier* (resp. *singulier*) si

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_o) \neq 0 \qquad \left(\text{resp. } \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_o) = 0\right).$$

<u>En cinématique</u>, les vecteurs $\overrightarrow{v(t_0)} := \overrightarrow{OM}^{(1)}(t_0)$ et $\overrightarrow{\gamma(t_0)} := \overrightarrow{OM}^{(2)}(t_0)$ sont respectivement appelés les *vecteurs vitesse* et *accélération* du point M à l'instant t_0. La norme du vecteur vitesse $\overrightarrow{v(t_0)}$ est notée $v(t_0)$ et appelée *vitesse scalaire* de M à l'instant t_0. Dire que $M_0 = M(t_0)$ est singulier revient à dire que $v(t_0) = 0$. C'est pourquoi le point M_0 est dit *stationnaire* (resp. *ordinaire*) s'il est singulier (resp. régulier).

Un exemple issu de la physique.

Un projectile ponctuel M de masse m est tiré de l'origine O à l'instant $t_0 = 0$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, où $b > 0$. On néglige les frottements et l'on suppose que M n'est sousmis qu'à la force de la pesanteur $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, où $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{j}$ $\left(g \in \mathbb{R}_+^*\right)$. On en déduit un système d'équations paramétriques de sa trajectoire Γ :

$$\begin{cases} x = at \\ \\ y = bt - g\frac{t^2}{2} \end{cases}.$$

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que Γ admette un $n^{\text{ième}}$ vecteur dérivé en $M_0 = M(t_0)$ et que :*
$\dfrac{d^k\overrightarrow{M}}{dt^k}(t_o) = \overrightarrow{0}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k < n$ et $\dfrac{d^n\overrightarrow{M}}{dt^n}(t_o) \neq \overrightarrow{0}$.
La courbe paramétrée Γ admet alors une tangente au point M_0, à savoir la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\dfrac{d^n\overrightarrow{M}}{dt^n}(t_o)$.

En particulier, Γ admet une (droite) tangente en tout point régulier $M(t_0)$, à savoir la droite $\mathcal{D}\left(M(t_0); \overrightarrow{v(t_0)}\right)$.

Étude de Γ au voisinage d'un point $M_0 = M(t_0)$.

Théorème. *Supposons que le vecteur position $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$ admette des dérivées de tous les ordres en t_0.*

Supposons également que ces vecteurs dérivés $\overrightarrow{f}^{(n)}(t_0)$ ne soient pas tous nuls. Notons p le plus petit entier ≥ 1 tel que $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. Nous savons que la droite $T := \mathcal{D}\left(M_0; \overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)\right)$ est alors tangente à Γ au point M_0.

Supposons enfin qu'il existe un vecteur dérivé $\overrightarrow{f}^{(n)}(t_0)$ d'ordre $n > p$ tel que le système $\left\{\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{f}^{(n)}(t_0)\right\}$ soit libre. Notons q le plus petit entier $> p$ tel que $\left\{\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{f}^{(q)}(t_0)\right\}$ soit libre. Nous savons que la droite $D := \mathcal{D}\left(M_0; \overrightarrow{f}^{(q)}(t_0)\right)$ coupe la tangente T en M_0.

• *Si p est pair, alors Γ ne traverse pas la droite D en M_0. On dit alors que Γ admet un **point de rebroussement** en M_0 et on détermine la nature de ce rebroussement en considérant la parité de q : si q est impair (resp. pair), alors Γ traverse (resp. ne traverse pas) sa tangente T en M_0 et le point de rebroussement est dit de **première espèce** (resp. de **seconde espèce**).*

• *Si p est impair, alors Γ coupe transversalement la droite D en M_0 et l'on distingue deux cas selon la parité de q : si q est impair (resp. pair), alors Γ traverse (resp. ne traverse pas) sa tangente T en M_0 et l'on dit que Γ présente une **disposition d'inflexion** (resp. une **disposition ordinaire**) en M_0.*

Exercice. Représenter chacun de ces cas de figure.

Lorsque $p = 1$ (resp. p impair et > 1) et q pair $> p + 1$, on dit que Γ présente un *méplat* (resp. *une disposition en méplat*) en M_0.

Étude des branches infinies d'une courbe paramétrée Γ.

On dit que Γ présente une *branche infinie* lorsque $t \in I$ tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t \in I}} OM(t) = +\infty.$$

Cela revient à dire que :

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t \in I}} (|x(t)| + |y(t)|) = +\infty.$$

Marche à suivre :

• Si $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} |y(t)| = +\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est asympote à Γ quand $t \in I$ tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

• Si $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} |x(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = y_0$ est asympote à Γ quand $t \in I$ tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

• Si $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} |x(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} |y(t)| = +\infty$, alors il convient d'étudier $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} \dfrac{y(t)}{x(t)}$.

• Si $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$, alors Γ admet l'axe Oy pour direction asymptotique quand $t \in I$ tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

• Si $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}$, alors Γ admet la droite d'équation $y = \alpha x$ pour direction asymptotique quand $t \in I$ tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On étudie alors :

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t \in I}} (y(t) - \alpha x(t)).$$

• Si $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I}} (y(t) - \alpha x(t)) = \beta$, alors Γ admet la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ pour asymptote quand $t \in I$ tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On étudie alors le signe de $y(t) - \alpha x(t) - \beta$ lorsque $t \in I$ tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ afin de déterminer la position de Γ par rapport à cette asymptote.

Recherche de points multiples.

On dit que M_0 est un *point multiple* (*double*, *triple*,...) de Γ si M_0 admet plus d'un antécédent par l'application $f : I \to \mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées des points multiples revient donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ \\ x(t_1) = x(t_2) \\ \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}.$$

Cas particulier important. Si x et y sont des fonctions rationnelles de t, il est souvent commode de se ramener à un système en $s = t_1 + t_2$ et $p = t_1 t_2$.

Autre méthode sur un exemple. Supposons que le tracé de la courbe paramétrée Γ définie par

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2 - 9} \\ \\ y = \dfrac{t(t-2)}{t-3} \end{cases}$$

ait mis en évidence l'existence d'un point double M_0 (a, b). Le trinôme $t(t-2) - b(t-3) = t^2 - (b+2)t + 3b$ a deux racines distinctes communes avec $t^3 - a(t^2 - 9)$ et donc avec le trinôme $t[(b+2)t - 3b] - a(t^2 - 9) = (b + 2 - a)t^2 - 3bt + 9a$.

Les deux trinômes $t^2 - (b+2)t + 3b$ et $(b + 2 - a)t^2 - 3bt + 9a$ sont donc proportionnels. On en déduit que $(a, b) = (-8, -4)$.

La paramétrisation $f : I \to \mathcal{P}$ est dite *propre* si, en dehors d'un nombre fini de points multiples isolés, tous les points de Γ sont *simples* (i.e. obtenus pour une seule valeur du paramètre t).

Plan d'étude d'une courbe paramétrée Γ de $\mathcal{P}$

1. Étude des symétries éventuelles et réduction de l'intervalle d'étude.
2. Construction du tableau des variations de x et y sur l'intervalle d'étude.
3. Étude de Γ au voisinage de points remarquables tels que les points singuliers.
4. Étude des éventuelles branches infinies.
5. Premier tracé au brouillon.
6. Recherche des éventuels points doubles que le tracé aurait mis en évidence.
7. Tracé définitif de la courbe.

Cette étude traditionnelle "à la main" peut opportunément être adaptée pour inclure un **tracé sur machine.**

Cas d'une courbe définie par une équation polaire

Soit $M(x,y)$ un point de $\mathcal{P}$. Tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

est appelé un système de *coordonnées polaires* de M.

On appelle *équation polaire* d'une courbe plane Γ toute relation liant r et θ telle que Γ soit l'ensemble des points du plan qui admettent un système (r,θ) de coordonnées polaires satisfaisant cette relation.

Exemples élémentaires. 1. Le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ admet

$$r = R$$

pour équation polaire.

2. Soit A un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées polaires (ρ,α), où $\rho \neq 0$. La droite perpendiculaire à (OA) passant par A admet

$$r = \frac{\rho}{\cos(\theta-\alpha)}$$

pour équation polaire.

Quelques techniques propres aux coordonnées polaires

Soit Γ une courbe plane de $\mathcal{P}$ d'équation polaire $r = r(\theta)$, où r est dérivable sur I. Autrement dit, Γ est la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathcal{P} \\ \theta &\mapsto M(\theta) \quad (x(\theta), y(\theta)), \text{ où } (x(\theta), y(\theta)) = r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta). \end{aligned}$$

Nous poserons $\overrightarrow{u(\theta)} = (\cos\theta)\,\overrightarrow{i} + (\sin\theta)\,\overrightarrow{j}$, de telle sorte que :

$$\boxed{\overrightarrow{OM(\theta)} = r(\theta)\,\overrightarrow{u(\theta)}.}$$

Notons que, pour tout $\theta \in I$, $\left(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{u'(\theta)}\right)$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Symétries

S'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\alpha \in I$, tels que $r(\alpha - \theta) = \varepsilon r(\theta)$ pour tout $\theta \in I$, alors on peut réduire le domaine d'étude de moitié et compléter Γ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\alpha}{2}$ si $\varepsilon = 1$ ou $\theta = \frac{\alpha+\pi}{2}$ si $\varepsilon = -1$. En particulier, si r est paire (resp. impaire) alors Γ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) (resp. (Oy)).

Étude locale.

a. Étude à l'origine O.

Si $r(\theta_0) = 0$, alors la droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$ est la tangente à Γ en O.

b. Étude au voisinage d'un point $M(\theta_0)$ distinct de O.

Notons que $M(\theta_0)$ est un point régulier de Γ puisque :

$$\overrightarrow{OM^{(1)}(\theta_0)} := \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(\theta_o) = r'(\theta_0)\overrightarrow{u(\theta_0)} + r(\theta_0)\overrightarrow{u'(\theta_0)} \neq \overrightarrow{0},$$

du fait que $r(\theta_0) \neq 0$. En $M(\theta_0)$, la courbe Γ admet donc une tangente $\mathcal{T}_{M(\theta_0)}$ dirigée par ce vecteur dérivé.

- Si $r'(\theta_0) = 0$, alors cette tangente $\mathcal{T}_{M(\theta_0)}$ est perpendiculaire à la droite $\Delta(\theta_0) = (OM(\theta_0))$.

- Si $r'(\theta_0) = 0$, l'angle orienté de la droite $\overrightarrow{\mathcal{T}_{M(\theta_0)}}$ avec la droite $\overrightarrow{\Delta(\theta_0)}$ vérifie

$$\left(\overrightarrow{\mathcal{T}_{M(\theta_0)}}, \overrightarrow{\Delta(\theta_0)}\right) = V(\pi),$$

où

$$\boxed{\tan V = \frac{r(\theta_0)}{r'(\theta_0)}.}$$

Signe de $r(\theta)$.

Il est souvent inutile de calculer r'. Par contre, il importe d'étudier le signe de r et de connaître les valeurs de θ pour lesquelles r s'annule afin de déterminer l'allure de la courbe. On étudie le comportement de r aux bornes des intervalles constituant le domaine d'étude et on consigne tous ces résultats dans un tableau.

Étude des branches infinies.

Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{\substack{\theta \to \alpha \\ \theta \in I}} |r(\alpha)| = +\infty$.

La branche infinie correspondante admet pour direction asymptotique la droite Δ d'équation polaire $\theta = \alpha$ puisque

$$\lim_{\substack{\theta \to \alpha \\ \theta \in I}} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\substack{\theta \to \alpha \\ \theta \in I}} \tan \theta.$$

Si Γ admet une droite asymptote D, alors cette droite est parallèle à la droite Δ. Considérons le repère orthonormé direct d'origine O pour lequel l'axe orienté des abscisses (OX) est la droite Δ orientée par $\overrightarrow{u(\alpha)}$. Dans ce nouveau repère, l'ordonnée $Y(\theta)$ de $M(\theta)$ est donnée par

$$Y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta - \alpha).$$

Par conséquent, la courbe Γ admet une asymptote lorsque $\theta \in I$ tend vers α si, et seulement si, nous avons :

$$\boxed{l = \lim_{\substack{\theta \to \alpha \\ \theta \in I}} r(\theta) \sin(\theta - \alpha) \text{ existe (dans } \mathbb{R}) \text{ ;}}$$

et cette asymptote est alors la droite d'équation $Y = l$ dans le nouveau repère.

On détermine alors la position de Γ par rapport à son asymptote.

Remarque. En pratique, il est souvent commode de poser $h = \theta - \alpha$ et de chercher un développement limité de $Y(\alpha + h) = r(\theta + h) \sin(h)$ lorsque h tend vers 0.

Autres cas envisageables.

On suppose ici que le domaine d'étude contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$.

- Si $\lim\limits_{\theta \to +\infty} |r(\alpha)| = +\infty$, on dit que Γ admet une *branche spirale*.

- Si $\lim\limits_{\theta \to +\infty} |r(\alpha)| = R \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que la courbe admet un *cercle asymptote*, à savoir le cercle $C(O; R)$.

Courbe paramétrée Γ enveloppe d'une famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ de $\mathcal{P}$

Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droite de $\mathcal{P}$ d'équations cartésiennes

$$a(t)\,x + b(t)\,y + c(t) = 0,$$

où a, b et c sont des fonctions réelles de t dérivables sur I. Soit Γ une courbe paramétrée par $f : I \to \mathcal{P}$, $t \mapsto M(t)\ (x(t), y(t))$, où x et y sont dérivables sur I. Nous supposerons que Γ admet une tangente en chacun de ses points $M(t)$, $(t \in I)$. Nous cherchons à déterminer Γ de telle sorte que, pour tout $t \in I$, la droite $\mathcal{D}_t$ soit la tangente à Γ en $M(t)$.

Pour que la droite $\mathcal{D}_t$ soit la tangente à Γ en $M(t)$, il faut que :

$$M(t) \in f(I) \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \text{ orthogonal à } a(t)\,\overrightarrow{i} + b(t)\,\overrightarrow{j},$$

soit :

$$\begin{cases} a(t)\,x(t) + b(t)\,y(t) + c(t) = 0 \\ a(t)\,x'(t) + b(t)\,y'(t) = 0 \end{cases};$$

Étant donnée la première équation de ce système, la seconde équivaut à $a'(t)\,x(t) + b(t)\,y'(t) + c'(t) = 0$. Pour que la droite $\mathcal{D}_t$ soit la tangente à Γ en $M(t)$, il faut donc que $(x(t), y(t))$ soit solution du système suivant :

$$\begin{cases} a(t)\,x + b(t)\,y + c(t) = 0 \\ a'(t)\,x + b'(t)\,y + c'(t) = 0 \end{cases}.$$

Notons que ce système admet une solution unique si, et seulement si, nous avons :

$$\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Définition. *Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droites de $\mathcal{P}$ d'équations cartésiennes*

$$a(t)\,x + b(t)\,y + c(t) = 0,$$

où a, b et c sont des fonctions réelles de t dérivables sur I, telles que : $\forall t \in I$, $a(t)\,b'(t) - a'(t)\,b(t) \neq 0$. Soit Γ la courbe paramétrée définie

par $f : I \to \mathcal{P}$, $t \mapsto M(t)\ (x(t), y(t))$, où $(x(t), y(t))$ *est l'unique solution du système*

$$\boxed{\begin{cases} a(t)\,x + b(t)\,y + c(t) = 0 \\ \\ a'(t)\,x + b'(t)\,y + c'(t) = 0 \end{cases}}.$$

On dit que la courbe Γ *est l'**enveloppe** de la famille de droites* $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$.

Exemple. Soit y une fonction réelle deux fois dérivable sur I et telle que : $\forall t \in I,\ y''(t) \neq 0$. Sa courbe représentative Γ_y, paramétrée par $f : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto M(t)\,(t, y(t))$, est l'enveloppe de (la famille formée par ses) tangentes.

Définition. *L'enveloppe de la famille des droites normales à une courbe paramétrée* Γ *est appelée la **développée** de cette courbe.*

Propriétés métriques de courbes paramétrées

Soit Γ une courbe de $\mathcal{P}$ paramétrée par $f : [a, b] \to \mathcal{P}$, $t \mapsto M(t)$. À toute subdivision $\sigma = (t_0, \ldots, t_n)$ de $[a, b]$, associons la ligne polygonale $(M_0, \ldots, M_n)$, dite inscrite dans Γ, de sommets $M_k = f(t_k)$, $(0 \leq k \leq n)$. La longueur $L(f, \sigma)$ de cette ligne polygonale est

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}.$$

Posons :

$$\boxed{L(f) = \sup_{\sigma\in\Sigma} L(f, \sigma) \in \overline{\mathbb{R}}},$$

où Σ désigne l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Nous dirons que la courbe Γ est *rectifiable* si $L(f) < +\infty$. Nous dirons alors que $L(f)$ est la *longueur de* Γ.

Théorème. Si $\overrightarrow{f} : [a, b] \to \overrightarrow{\mathcal{P}}$, $t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ est de classe C^1, alors Γ est rectifiable et

$$\boxed{L(f) = \int_a^b \left\| \overrightarrow{f}'(t) \right\| dt},$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Exemple d'application. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R > 0$, représentable paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ \\ y = R\sin t \end{cases},$$

où $t \in [0, 2\pi]$, a pour longueur

$$L(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 2\pi R.$$

Abscisse curviligne.

Reprenons les hypothèses et les notations du théorème précédent. Supposons en outre que Γ est *simple* (sans point multiple) et orientée dans le sens des t croissants. Le nombre

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \overrightarrow{f}'(\tau) \right\| d\tau$$

est appelé *abscisse curviligne du point $M(t)$ comptée à partir du point $M(t_0)$ pris pour origine.*

Repère de Frenet. Courbure.

Le paramétrage de Γ par s est dit *normal* (ou *par longueur d'arc*). Il vérifie :

$$\forall s \in [0, L(f)], \left\| \overrightarrow{T}(s) \right\| = 1, \text{ où } \overrightarrow{T}(s) = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds}.$$

Désignons par $\overrightarrow{N}(s)$ le vecteur unitaire déduit de $\overrightarrow{T}(s)$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Le repère $\left(M(s); \overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s)\right)$ est appelé *repère de Frenet* en $M(s)$ à Γ.

Supposons que $\overrightarrow{T}$ soit dérivable. En dérivant la relation $\overrightarrow{T}(s)^2 = 1$, il vient :

$$\overrightarrow{T}(s) . \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) = 0,$$

soit

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) \text{ et } \overrightarrow{N}(s) \text{ colinéaires : } \exists k(s) \in \mathbb{R},\ \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) = k(s)\,\overrightarrow{N}(s).$$

Les nombres $k(s)$ et $K(s) = |k(s)|$ ne dépendent pas du choix de la paramétrisation normale. On dit que $k(s)$ (resp. $K(s)$) est la *courbure algébrique* (resp. la *courbure*) de Γ en $M(s)$ et que $M(s)$ est un *point d'inflexion* de Γ si $k(s) = 0$.

Lorsque $k(s) \neq 0$, on définit le *rayon de courbure de* Γ *en* $M(s)$ par :

$$R(s) = \frac{1}{K(s)}\ ;$$

et le *centre de courbure de* Γ *en* $M(s)$ comme le point $I(s)$ défini par :

$$\overrightarrow{M(s)\,I(s)} = R(s)\,\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s).$$

Si α désigne une détermination continue de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T}(s)\right)$, alors :

$$\boxed{k(s) = \frac{d\alpha}{ds}(s).}$$

On démontre qu'en $M(t)$ la courbure algébrique de Γ est donnée par :

$$\boxed{k = \frac{x'y'' - y'x''}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}\ .}$$

Exemple. Soit Γ la parabole d'équation $x^2 = 2py$ paramétrée par x. La courbure de Γ au point d'abscisse x est égale à :

$$\frac{p^2}{(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

Intégrales curvilignes

Soit $\omega(x,y) = u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy$ une 1-forme différentielle de classe C^1 (ce qui revient à dire que u et v sont des fonctions réelles de classe C^1) sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}$ et soit Γ une courbe paramétrée définie par une paramétrisation $f : [a,b] \to \mathcal{U}$, $t \mapsto M(t)\ (x(t), y(t))$ de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.

L'intégrale, dite *curviligne*, *de* ω *sur* Γ est notée $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ et définie par :

$$\boxed{\int_\Gamma u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy := \int_a^b \left(u(x(t), y(t))\,x'(t) + v(x(t), y(t))\,y'(t)\right) dt}.$$

Remarque. Cette définition ne dépend pas du choix de la paramétrisation admissible de Γ (en vertu de la formule de changement de variable).

Interprétation vectorielle. La donnée de la 1-forme différentielle ω sur $\mathcal{U}$ équivaut à celle du champ de vecteurs

$$\overrightarrow{X} : \mathcal{U} \to \overrightarrow{\mathcal{P}},\ M(x,y) \mapsto \overrightarrow{X}(M) = u(x,y)\,\overrightarrow{i} + v(x,y)\,\overrightarrow{j}.$$

L'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ est également notée $\displaystyle\int_\Gamma \overrightarrow{X}.\overrightarrow{dM}$ et appelée *travail* (ou *circulation*) *du champ de vecteurs* $\overrightarrow{X}$ *le long de* Γ.

Un exemple important : le calcul d'aires planes.

Soit K un corps compact de $\mathcal{P}$. Nous supposerons son bord constitué d'un nombre fini de courbes paramétrées Γ_i, définies par des paramétrisations

$$f_i : [a_i, b_i] \to \mathcal{P},\ t \mapsto M_i(t)$$

de classe C^1, régulières et telles que $f_{i|[a_i,b_i]} : [a_i, b_i] \to \mathcal{P}$ soit injective, $(1 \leq i \leq n)$. Nous noterons ∂K le bord de K orienté de telle manière qu'un point mobile $M(t)$ se déplaçant sur ∂K dans le sens de son orientation ait, à chaque instant t, le compact K à sa gauche (afin de donner un sens rigoureux à cette condition exprimée en langage intuitif, nous conviendrons que le sens positif de rotation est celui qui va "de la droite vers la gauche"). Nous supposerons que l'orientation des Γ_i correspond à celle de ∂K (c'est-à-dire que $M_i(t)$ se déplace sur ∂K dans le sens de l'orientation lorsque t croît), $(1 \leq i \leq n)$.

Nous admettrons le résultat suivant.

Théorème. *L'aire $\mathcal{A}$ du compact K est donnée par :*

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_{\partial K} xdy = -\int_{\partial K} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial K} xdy - ydx,}$$

où, pour toute 1-forme différentielle ω continue sur ∂K, on a posé :

$$\int_{\partial K} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} \omega.$$

Remarque. Le théorème est une conséquence immédiate de la formule de Green-Riemann :

$$\boxed{\int_{\partial K} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y)\,dxdy}.$$

Cas où ∂K est une courbe plane d'équation polaire $r = r(\theta)$, $\theta \in [a,b]$.

L'aire $\mathcal{A}$ de K est alors donnée par :

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_a^b r(\theta)^2\,d\theta}.$$

Exemple d'application. L'aire $\mathcal{A}$ du disque de centre O et de rayon $R > 0$ est donnée par :

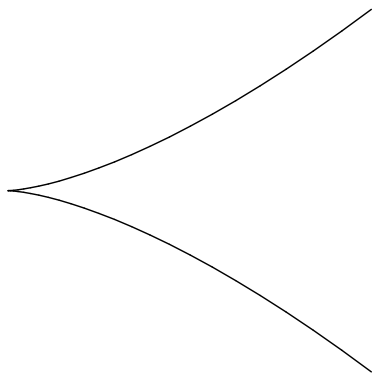
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 d\theta = \pi R^2.$$

Exercices

0. Considérons la courbe Γ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}.$$

La courbe Γ admet-elle une tangente à l'origine ?



1. Construire la courbe Γ dans chacun des cas suivants. On attachera une attention particulière aux éventuels axes de symétrie.

a. Une courbe de Lissajous :

$$\begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(2t) \end{cases}.$$

b. L'astroïde :

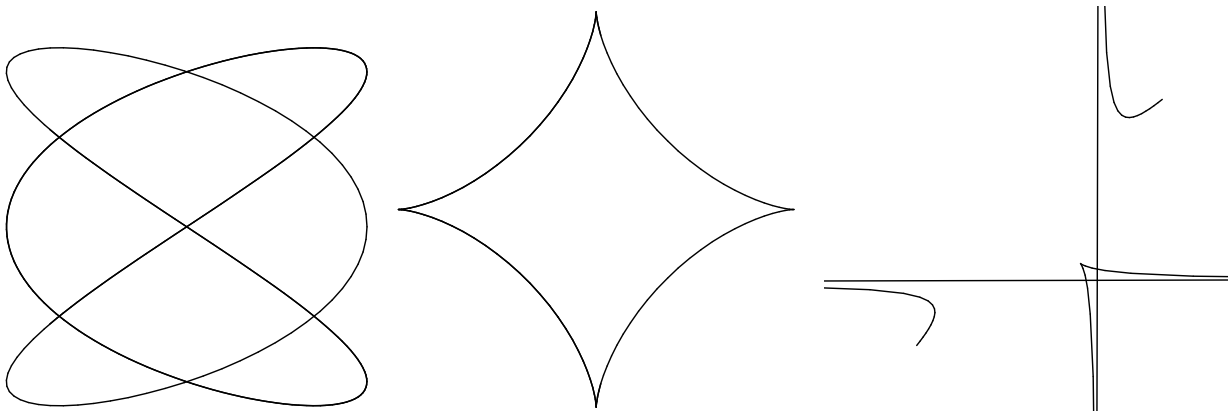
$$\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}.$$

c. Une courbe rationnelle :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t+1} \\ y = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}.$$

$\boxed{\text{d.}}$ Une autre courbe rationnelle :

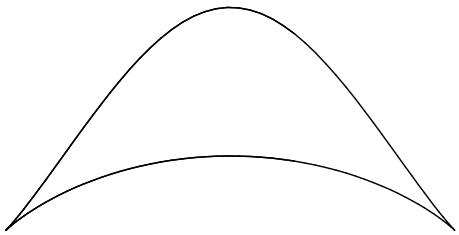
$$\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t\,(t-1)} \\ \\ y = \dfrac{t\,(t+1)}{t-1} \end{cases}.$$



$\boxed{\textbf{2.}}$ Construire la courbe Γ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \cos\,(t) \\ \\ y = \dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t} \end{cases}.$$

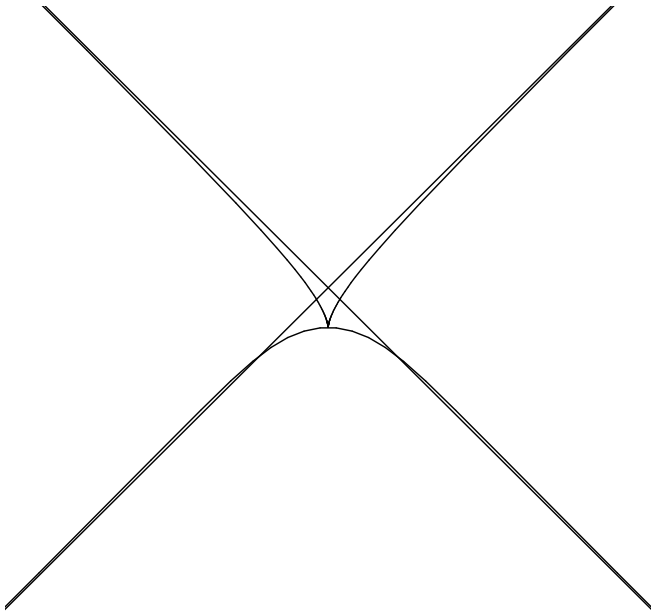
On attachera une attention particulière à ses éventuels points de rebroussement.



$\boxed{\textbf{3.}}$ Construire la courbe Γ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^4 - 1} \\ \\ y = \dfrac{t^2}{t^4 - 1} \end{cases}.$$

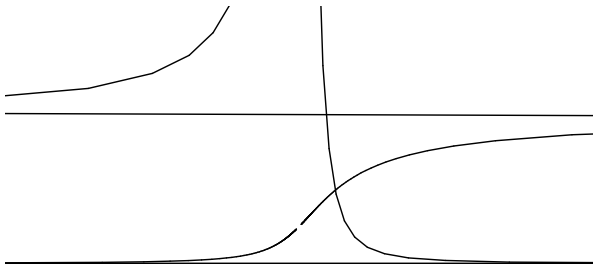
On n'oubliera pas d'étudier la position de Γ par rapport à ses asymptotes evéntuelles.



$\boxed{\textbf{4.}}$ Construire la courbe Γ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2 - 1} \\ \\ y = \left(\dfrac{t+1}{t}\right)^2 \end{cases}.$$

On précisera les coordonnées du point double.



$\boxed{\textbf{5.}}$ Soit h une fonction réelle 2π-périodique et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{a.}}$ Démontrer que la famille $(D_h(t))_{t\in[0,2\pi]}$ de droites de $\mathcal{P}$ d'équations

$$x\,\cos t + y\,\sin t = h(t)\,,$$

admet pour enveloppe une courbe paramétrée $\mathcal{H}_h$ que l'on déterminera.

$\boxed{\text{b.}}$ Dans cette question, nous supposerons que $h+h''$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'enveloppe $\mathcal{H}_h$ est régulière et sans point d'inflexion. Montrer que sa longueur et son aire sont respectivement données par :

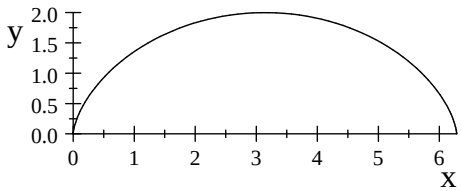
$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_h) = \int_0^{2\pi} |h(t)|\,dt \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}(\mathcal{H}_h) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} h(t)\,(h+h'')(t)\,dt.$$

$\boxed{\text{c.}}$ Quelle est l'équation de sa normale au point de paramètre t ? Quelle est la développée de $\mathcal{H}_h$ (c'est-à-dire l'enveloppe de ses normales) ?

$\boxed{\textbf{6.}}$ Quelle est la longueur $\mathcal{L}(\Gamma)$ de l'arche de cycloïde Γ d'équations paramétriques

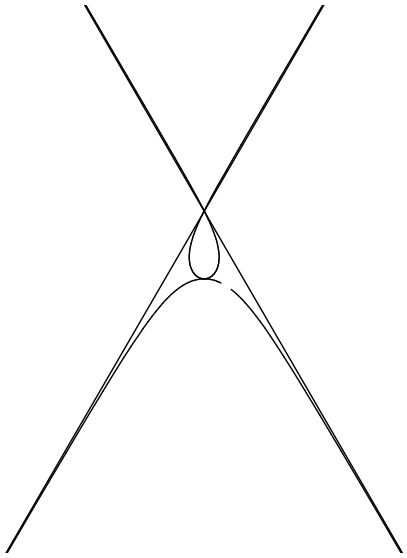
$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

où $(0 \leq t \leq 2\pi)$? Quelle est l'aire $\mathcal{A}(\Gamma)$ que cette arche Γ délimite avec l'axe (Ox) dans le plan $\mathcal{P}$?

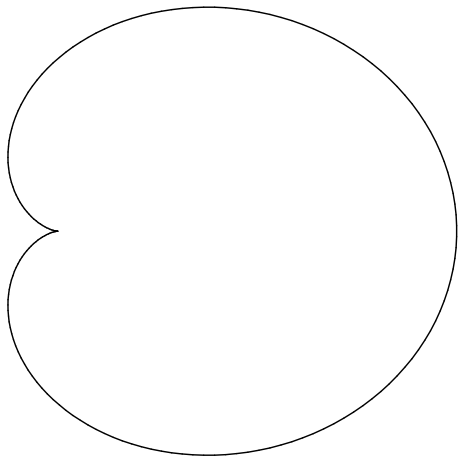


$\boxed{\textbf{7.}}$ Construire la courbe Γ d'équation polaire $r = \dfrac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}$.

On n'oubliera pas d'étudier soigneusement ses branches infinies.



$\boxed{\textbf{8.}}$ Quelle est l'aire $\mathcal{A}(\Gamma)$ délimitée dans le plan $\mathcal{P}$ par la cardioïde Γ d'équation polaire $r = a(1+\cos\theta)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$? Quelle est sa longueur $\mathcal{L}(\Gamma)$?



$\boxed{\textbf{9.}}$ Considérons dans $\mathcal{P}$ l'ellipse Γ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

où $a > b > 0$. Montrer que la développée de Γ (i.e. l'enveloppe de ses normales, lieu de ses centres de courbure) est la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ \\ y = -\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t, \end{cases}$$

où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.