HAL
open science

Champ thermique d'une goutte alimentée soumise à des perturbations HF

R. Prud'homme, K. Anani, M. Hounkonnou

To cite this version:

R. Prud'homme, K. Anani, M. Hounkonnou. Champ thermique d'une goutte alimentée soumise à des perturbations HF. Thermodynamique des interfaces et mécanique des fluides, 2020, 4 (1), 10.21494/ISTE.OP.2020.0472 . hal-02457831v1

HAL Id: hal-02457831

https://hal.science/hal-02457831v1

Submitted on 28 Jan 2020 (v1), last revised 8 Feb 2020 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CHAMP THERMIQUE D'UNE GOUTTE ALIMENTEE SOUMISE A DES PERTURBATIONS HF

THERMAL FIELD OF O FED DROP SUBJECTED TO HF DISTURBANCES

PRUD'HOMME R.[1], ANANI K.[2], HOUNKONNOU M. N.[3]

Résumé : On examine le champ de température d'une goutte sphérique en évaporation soumise à des oscillations acoustiques HF pouvant causer des instabilités. La goutte fixe est alimentée de façon continue de telle manière qu'elle garde un volume constant durant le processus. L'alimentation par le même liquide est réalisée de manière adiabatique et il est tenu compte des effets de la conduction de chaleur dans la phase liquide. Les effets de la variation du nombre de Péclet sur le champ thermique dans la gouttelette sont étudiés.
Mots clés : goutte, évaporation, oscillations harmoniques, perturbations de température
Abstract: The temperature field of a spherical drop in evaporation subjected to acoustic oscillations that can cause instabilities is examined. The fixed drop is fed continuously so that it keeps a constant volume during the process. Feeding with the same liquid is carried out adiabatically and the effects of heat conduction in the liquid phase are considered. The effects of the variation of the Peclet number on the thermal field in the droplet are studied.
Key words: droplet, evaporation, harmonic oscillations, temperature perturbation

Liste des symboles

Symbole	*Signification*	*Symbole*	*Signification*
$A,\ B$	Coefficients thermodynamiques	r	Rayon ; coordonnée radiale
B_M, B_T	Paramètres de Spalding	$\bar{r}_S$	Rayon moyen de la goutte
c	Chambre de combustion	s	Valeur propre caractéristique
$f,\ \bar{f}$	Fonction, sa valeur moyenne	S	Surface d'évaporation ; aire de base
$\Delta f,\ f'$	Perturbation absolue, relative $\Delta f / \bar{f}$	t	Temps ; paramètre
$\hat{f}$	$f' = \hat{f}\exp(i\omega t)$	T	Température
$E(u,\theta)$	Fonction de distribution	u	Pulsation acoustique réduite
$H,\ h$	Coefficient d'échange thermique	v	Vitesse
k	Conductivité thermique	V	Volume
$L,\ l$	Indices se référant à la phase liquide	x	Coordonnée axiale
ℓ	Chaleur latente d'évaporation	Z	Fonction de transfert
M	Masse de la goutte	α, μ	Coefficients thermodynamiques
$\dot{M}$	Débit d'évaporation instantané	κ	Diffusivité thermique
$\overline{\dot{M}}$	Débit d'évaporation moyen	θ	Rapport $\bar{\tau}_v / \tilde{\tau}_T$ (inverse de $\mathrm{Pe_L}$)
N	Facteur de réponse	τ	Temps réduit $\tau = t/\bar{\tau}_v$
p	Pression	$\tilde{\tau}_T$	Temps caractéristique thermique
Pe	Nombre de Péclet	$\bar{\tau}_v$	Temps de vie (ou de séjour) moyen
$p,\ q$	Paramètres physiques	$\omega,\ \bar{\tau}_\omega$	Pulsation, période acoustique
Q	Flux de chaleur instantané	ξ	Coordonnée axiale réduite $\xi = x/\bar{x}_S$; coordonnée radiale réduite $\xi = r/\bar{r}_S$
ΔQ_L	Perturbation de Q_L		

[1] Sorbonne Université, CNRS, Institut Jean Le Rond d'Alembert, Paris, France, roger.prud_homme@upmc.fr
[2] Université de Lomé, Faculty of Sciences, Department of Mathematics, Lomé, Togo, kanani@univ-lome.tg
[3] University of Abomey-Calavi, International Chair in Mathematical Physics and Applications (ICMPA-UNESCO Chair) 072 B.P. 050 Cotonou, Republic of Benin, norbert.hounkonnou@cipma.uac.bj

1. Les gouttes dans un moteur de fusée à ergols liquides

La figure 1 montre les phénomènes physiques mis en jeu dans une flamme d'injecteur coaxial cryotechnique. On injecte de l'oxygène liquide dans un jet d'hydrogène gazeux.

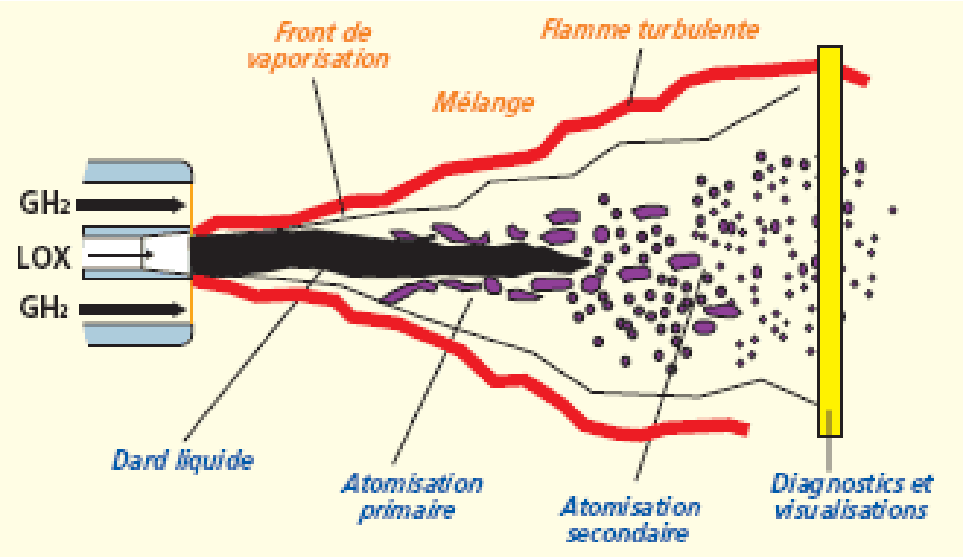


Figure 1 *Phénomènes physiques mis en jeu dans une flamme d'injecteur coaxial cryotechnique (schéma ONERA)*

Cette figure schématique montre la complexité des phénomènes physiques à prendre en considération si l'on veut par exemple modéliser une instabilité de combustion. Cela explique que l'on ait recours à des modèles simplifiés.

Il est connu que le phénomène de l'évaporation peut amplifier les perturbations acoustiques HF en provenance du moteur de fusée et lui causer des dommages. On va ainsi commencer par modéliser ce qui se passe au niveau des gouttes elles-mêmes lorsqu'elles sont soumises à une perturbation acoustique harmonique de fréquence et d'amplitude imposées. Au lieu d'étudier en détail l'écoulement diphasique on peut considérer une seule goutte représentative de ce qui se passe en moyenne. C'est ce qui motive les considérations qui suivent sur la goutte alimentée.

2. La goutte alimentée

Dans l'idée de Heidmann[i], la goutte alimentée représente en moyenne, ce qui se passe pour toutes les gouttes traversant la chambre de combustion d'un moteur fusée à propergol liquide. Elle est fixe en position, se situe au centre de la chambre et s'évapore dans le mélange gazeux environnant. La combustion a lieu loin de la goutte alimentée et la flamme qui se produit plutôt près des parois de la chambre (désignée par l'indice C sur la figure 2) produit des conditions de gaz brûlés T_C et p_C. Pour la goutte ces données représentent les conditions à l'infini. La figure 2a représente la chambre de combustion comme une sorte de réacteur chimique avec une entrée (flèche verte représentant l'injection) et une sortie (flèche orange représentant la sortie des gaz brûlés).

Le bilan de masse de la goutte alimentée est décrit par l'équation (1a) suivante :

$$\frac{dM}{dt} = -\dot{M} + \overline{\dot{M}} \qquad (1a)$$

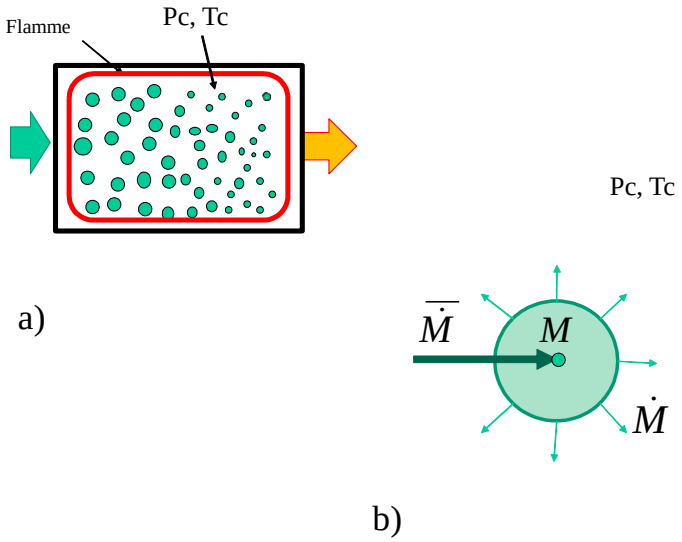


Figure 2 *a) Paquet de gouttes en combustion dans une chambre de combustion schématisée, chaque goutte étant en évaporation : à gauche injection de liquide et de gaz, à droite sortie des produits brûlés, dans la chambre de combustion on voit la flamme entourant l'ensemble des gouttes en évaporation de plus en plus petites vers la droite b) Goutte individuelle alimentée en évaporation : masse M, débit d'évaporation* $\dot{M}$ *, débit d'alimentation égal au débit d'évaporation moyen* $\overline{\dot{M}}$ *.*

La densité du liquide étant supposée constante et uniforme, on a

$$M = \frac{4}{3}\pi r_S^{\,3} \rho_L$$

Dans ce qui suit nous décrirons ce qui se passe pour la goutte alimentée, en premier lieu dans la phase gazeuse entourant la goutte de sa surface (indice S) à l'infini (indice C). En second lieu nous décrirons la phase liquide, c'est-à-dire l'intérieur de la goutte alimentée.

3. Equations du problème

3.1. Equations de la phase gazeuse

Selon la théorie de Spalding, le débit d'évaporation stationnaire d'une goutte sphérique s'écrit

$$\dot{M} = 4\pi \rho D r_S \ln(1 + B_M)$$

$$B_M = \frac{Y_{FS} - Y_F}{1 - Y_{FS}}, \quad Y_F = \frac{\mathcal{M}_F X_F}{\mathcal{M}_F X_F + \mathcal{M}_A X_A}$$

où les *X* désignent les fractions molaires alors que les *Y* sont des fractions massiques. Les $\mathcal{M}$ sont des masses molaires. B_M est le paramètre de Spalding de masse.

La fraction molaire X_{FS} de *F* gazeux à la surface de la goutte se calcule à l'équilibre d'évaporation selon la formule de la pression de vapeur saturante

$$p_C X_{FS} = p_L(T_S)$$

où $p_L(T_S)$ est une fonction connue de la température de surface T_S. Nous utiliserons pour cette fonction la formule classique : $p_L(T_S) = \exp\left(a - \frac{b}{T_S - c}\right)$, avec *a, b* et *c* constants.

Le débit de chaleur communiqué à la goutte sert en partie à l'évaporation de cette dernière et en partie à en réchauffer l'intérieur. Cette partie de chauffage interne Q_L s'écrit ainsi

$$Q_L = \dot{M}\left(\frac{c_p(T_C - T_S)}{B_T} - l\right) \qquad \text{(2a)}$$

avec : $l = \frac{bRT_S^{\ 2}}{\mathcal{M}_F(T_S - c)^2}$, et $\rho D \ln(1 + B_M) = \frac{k}{c_p}\ln(1 + B_T) \Rightarrow \ln(1 + B_M) = Le \ln(1 + B_T)$

B_T est le paramètre de Spalding thermique, *l* est la chaleur latente d'évaporation, *Le* est le nombre de Lewis, c_p est la chaleur massique du gaz à pression constante, ρ est sa masse volumique, *k* est la conduction thermique, *D* est le coefficient de diffusion binaire dans le gaz.

3.2. Equations de la phase liquide

Dans le modèle de Heidmann et Wieber[ii], la température T_l de la goutte est supposée uniforme et constante, c'est-à-dire que *la conductivité thermique est infinie*. La chaleur spécifique c_l du liquide est également uniforme et constante et nous la noterons c_L. Cela conduit aux deux équations suivantes

$$T_l = T_S$$
$$Mc_L \frac{dT_l}{dt} = Q_L$$

Aucune condition thermique n'est à définir au point d'alimentation qui est en principe le centre de la goutte, puisque celle-ci est isotherme. On sait seulement que le débit masse de l'alimentation est égal au débit moyen d'évaporation de la goutte stabilisée (non perturbée).

Notre modèle de goutte [iii iv, v] suppose toujours une chaleur spécifique uniforme et constante $c_l = c_L$ du liquide mais nous supposons aussi que *la conductivité thermique est finie et constante* $k_l = k_L$. *On néglige ici l'effet des mouvements de convection consécutifs à l'alimentation* sur les échanges thermiques à l'intérieur de la goutte.

Dans l'hypothèse de la symétrie sphérique les seules variables sont la distance au centre *r* et le temps *t*. Les équations aux dérivées partielles et les condition limites à la surface et au centre de la goutte s'écrivent comme suit si l'on suppose que le gradient thermique est nul au centre de la goutte.

$$\frac{\partial(rT_l)}{\partial t} - \kappa_L \frac{\partial^2(rT_l)}{\partial t^2} = 0$$

$$T_l(r_S,t) = T_S, \quad 4\pi r_S^{\,2} k_L \left.\frac{\partial T_l}{\partial r}\right|_{r=r_S} = Q_L \qquad \text{(3a)}$$

$$\left.\frac{\partial T_l}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$$

La dernière condition en r=0 signifie que l'on fait l'hypothèse d'une alimentation adiabatique au centre de la goutte.

4. Equations linéarisées

Pour étudier les effets d'une petite perturbation da pression p_C de chambre sur les milieux gazeux et liquide, on effectue d'abord la linéarisation des systèmes d'équations.

On pose, pour toute grandeur f, les définitions suivantes

$\bar{f}$: quantité non perturbée (état stabilisé de référence)

$f' = (f - \bar{f})/\bar{f} = \Delta f / \bar{f}$: petite perturbation relative.

Cette dernière définition est en défaut si la valeur de référence de la quantité considérée est nulle, ce qui est le cas pour la chaleur Q_L, qui est nulle en régime stabilisé pour lequel toute la chaleur en provenance de la phase gazeuse sert uniquement à l'évaporation

$$\frac{c_p(\bar{T}_C - \bar{T}_S)}{B_T} = l$$

Les équations linéarisées de la phase gazeuse s'écrivent, tous calculs faits

$$\frac{d\dot{M}'}{dt} + \frac{\dot{M}'}{3\bar{\tau}_v} = \alpha\left(\bar{b}\,\frac{dT'_S}{dt} - \frac{dp'_C}{dt}\right) \qquad \text{(1b)}$$

$$\Delta Q_L = \overline{\dot{M}}\,\bar{l}\,(\bar{a}\,p'_C - \mu T'_S) \qquad \text{(2b)}$$

Les divers coefficients sont explicités en annexe A1.

Pour le liquide de la goutte on trouve *pour la conductivité thermique infinie* (cas de Heidmann) $\overline{M}\,c_L\bar{T}_S\,\frac{dT'_S}{dt} = \Delta Q_L$. Mais *avec nos hypothèses*

$$\frac{\partial(rT'_l)}{\partial t} - \kappa_L \frac{\partial^2(rT'_l)}{\partial t^2} = 0$$

$$T'_l(r_S,t) = T'_S, \quad 4\pi r_S^{\,2} k_L \bar{T}_S \left.\frac{\partial T'_l}{\partial r}\right|_{r=r_S} = \Delta Q_L \qquad \text{(3b)}$$

$$\left.\frac{\partial T'_l}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$$

5. Equations linéarisées en petites perturbations harmoniques

On considère maintenant les petites perturbations de la forme

$$\begin{cases} f' = \hat{f}(r)e^{i\omega t} \\ \Delta Q_L = \Delta\hat{Q}_L(r)e^{i\omega t} \end{cases}$$

En posant $u = 3\bar{\tau}_v\,\omega$, il en résulte les équations vérifiées par les $\hat{f}(r)$ et $\Delta\hat{Q}_L(r)$

$$\hat{\dot{M}} = \alpha\frac{iu}{1+iu}\left(\bar{b}\,\hat{T}_S - \hat{p}_C\right) \tag{1c}$$

$$\Delta\hat{Q}_L = \overline{\dot{M}}\,\bar{l}\left(\bar{a}\,\hat{p}_C - \mu\hat{T}_S\right) \tag{2c}$$

$$\Delta\hat{Q}_L = -4\pi\,\bar{r}_S\,k_L E(u,\theta)\hat{T}_S \tag{3c}$$

Dans ce système on trouve

$$\begin{cases} \theta = 9\kappa_L\,\bar{\tau}_v/\bar{r}_S^2 = \bar{\tau}_v/\tilde{\tau}_T \\ E(u,\theta) = 1-(1+i)\sqrt{3u/2\theta}\coth\left[(1+i)\sqrt{3u/2\theta}\right] \end{cases}$$

6. Champ thermique dans la goutte en négligeant la convection interne

On introduit d'abord la fonction de transfert $Z = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\hat{\dot{M}}}{\hat{p}_C}$ qui donne la réponse complexe de la perturbation du débit d'évaporation par rapport à la perturbation de la pression de chambre.

Le facteur de réponse N est la partie réelle de $\hat{\dot{M}}/\hat{p}_C$. On trouve donc $N = \alpha\,\Re(Z)$. Selon le critère de Rayleigh les valeurs positives de N correspondent aux zones d'instabilité.

Avec une goutte de température uniforme (Heidmann), on trouve $Z_{Heidmann} = \dfrac{iu}{1+iu}\dfrac{A-iu}{B+iu}$, avec : $A = 3(\bar{a}\,\bar{b} - \mu)/\lambda$, $B = 3\mu/\lambda$, $\lambda = c_L\,\bar{T}_S/\bar{l}$. *Avec notre modèle à conduction thermique de valeur finie* et une alimentation adiabatique, on trouve

$$Z = \frac{iu}{1+iu}\frac{A+\theta E(u,\theta)}{B-\theta E(u,\theta)} \tag{4}$$

La température de surface intervient en variables "chapeau" dans les équations 1,2,3c.

La perturbation thermique dans la goutte est définie par $T'_l = \hat{T}_l\,e^{i\omega t}$ et l'on a

$$r\hat{T}_l = \bar{r}_S\,\hat{T}_S\,\frac{e^{s_0 r} - e^{-s_0 r}}{e^{s_0\bar{r}_S} - e^{-s_0\bar{r}_S}} = \bar{r}_S\,\hat{T}_S\,\frac{\sinh s_0 r}{\sinh s_0\,\bar{r}_S} \tag{5}$$

On utilisera les variables réduites suivantes : rayon réduit $\xi = \dfrac{r}{\bar{r}_S}$, temps réduit $\tau = \dfrac{t}{\bar{\tau}_v}$ et perturbation de température réduite complexe $T'_{l\,réd} = \dfrac{\bar{b}}{\hat{p}_L} T'_l$.

De la définition de *Z* et de 1c on tire $\hat{p}_C Z = \dfrac{iu}{1+iu}\left(\bar{b}\hat{T}_S - \hat{p}_C\right)$.

De la relation (4) on tire la température réduite complexe à la surface de la goutte $\hat{T}_{S\,réd} = \dfrac{A+B}{B-\theta E}$.

La perturbation de la température réduite intérieure à la goutte est, dans ce problème linéarisé, égale à la partie réelle de la température réduite complexe $T'_{l\,réd}$, et nous la noterons *X*. On a donc :

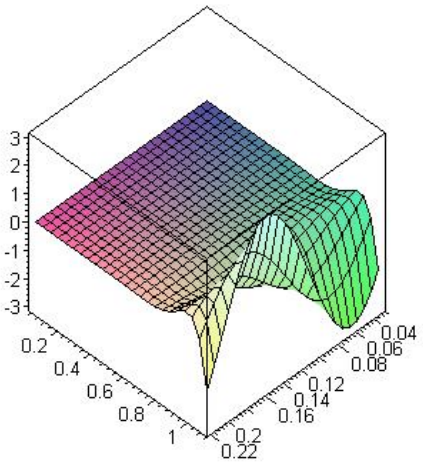
$$X = \Re\left(T'_{l\,réd}\right), \text{ avec : } \quad T'_{l\,réd} = \frac{A+B}{B-\theta\,E(u,\theta)} \frac{\sinh\left[(1+i)\sqrt{3u/2\theta}\,\xi\right]}{\sinh\left[(1+i)\sqrt{3u/2\theta}\right]} e^{\frac{iu}{3}\tau}.$$

Il est intéressant de représenter X en fonction de *ξ* et *τ* pour différentes valeurs de *u* et de θ :

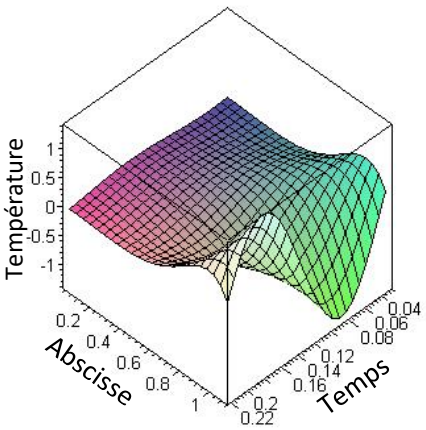
$$\begin{aligned} X(u,\theta,\xi,\tau) &= \Re\left[T(u,\theta,\xi,\tau)\right] \\ T(u,\theta,\xi,\tau) &= \frac{A+B}{B-\theta E(u,\theta)} \frac{\sinh\left[(1+i)\sqrt{3u/2\theta}\,\xi\right]}{\sinh\left[(1+i)\sqrt{3u/2\theta}\right]} \exp\left(\frac{iu}{3}\tau\right) \\ E(u,\theta) &= 1-(1+i)\sqrt{3u/2\theta}\,\coth\left[(1+i)\sqrt{3u/2\theta}\right] \end{aligned} \qquad (6)$$

Nous nous proposons donc de tracer les surfaces en 3D *(X, ξ, τ)*, sur une demi-période de temps d'oscillation par exemple, pour des valeurs fixes de *A, B* et *u* et pour des valeurs données du paramètre θ choisies entre 0 et l'infini :

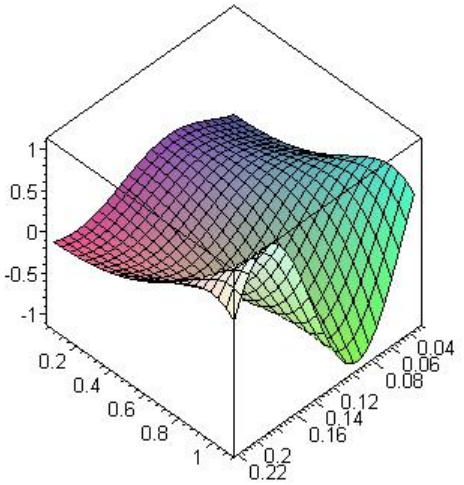
$$A = 10, B = 100, u = 10, \theta = 0{,}1;10;100, 0 < \xi < 1; \frac{\pi}{u} < \tau < \frac{7\pi}{u}.$$



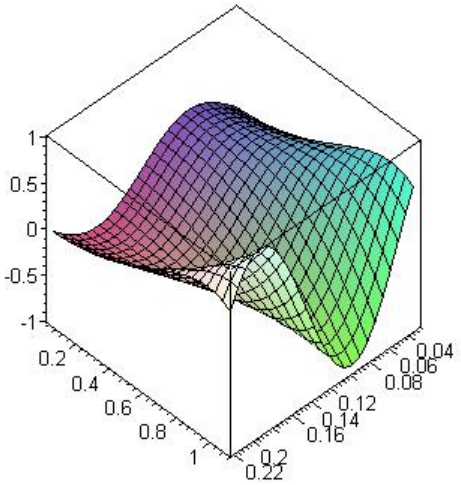
θ =1, u=100



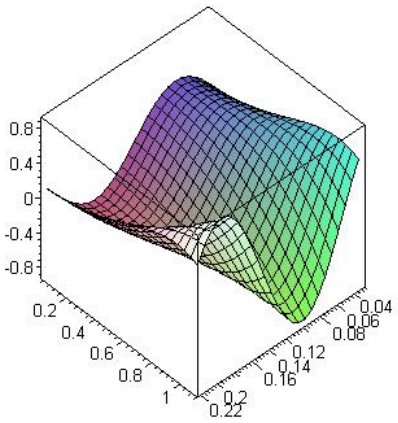
θ =5, u=100



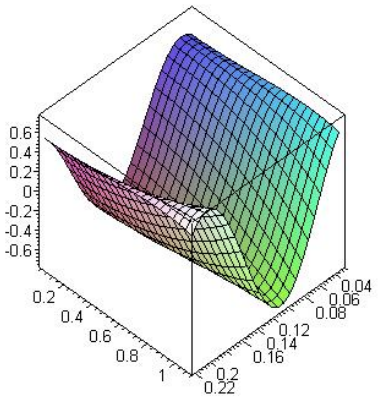
θ *=10, u=100*



θ *=15, u=100*



θ *=20, u=100*



θ *=50, u=100*

Figure 3. Goutte sphérique en alimentation adiabatique : l'influence de θ sur la perturbation thermique en fonction de l'espace et du temps

La représentation du cas - plus simple - de la goutte modélisée par une pastille[vi] est donnée en annexe A3, où l'on examine aussi les situations extrêmes de l'alimentation adiabatique et de l'alimentation isotherme.

La figure 3 représente en 3D, dans un cas d'une goutte sphérique en alimentation adiabatique, l'influence de θ sur la perturbation thermique en fonction de l'espace et du temps (ξ et τ). On peut remarquer qu'au niveau de l'injection, la pente spatiale de la perturbation $\left.\frac{\partial T'_l}{\partial r}\right|_{r=0}$ est toujours nulle, comme le prévoit l'équation (3b). C'est la même chose en configuration pastille avec une dérivée d'espace $\left.\frac{\partial T'_l}{\partial x}\right|_{x=0}$ nulle. A la limite des grandes valeurs de θ, la perturbation thermique à l'injection suit parfaitement la perturbation thermique de la surface avec un léger décalage de phase. Ces observations sont peut-être encore plus visibles sur la représentation 2D que nous avons portée en annexe A4.

On peut prévoir en revanche que, dans la situation extrême de l'alimentation isotherme[vii], la goutte se comportera comme la pastille, c'est-à-dire qu'au niveau de l'injection la perturbation thermique sera nulle à tout instant, car le liquide d'alimentation est imposé à la température moyenne $T_l(0,t) = \overline{T}_L$. La configuration sphérique est traitée de manière complètement analytique dans le cas de l'alimentation adiabatique.
Dans les autres cas on peut envisager un traitement analytique approché comme celui d'Anani *et al* (réf. vii) qui a fonctionné avec succès dans le cas de l'alimentation isotherme en tenant compte de la convection interne. Mais dans les cas intermédiaires, où l'injection est modélisable par une loi simplifiée $\left.\frac{\partial T_l}{\partial r}\right|_{r=0} = h\left(T - \overline{T}_S\right)$, cela reste à faire et les tentatives sont restées sans succès jusqu'à présent, à cause de l'apparition de singularités dans le calcul pour certaines valeurs du coefficient d'échange *h*. Il faut certainement préciser ce qui se passe dans le processus d'injection au centre de la goutte.

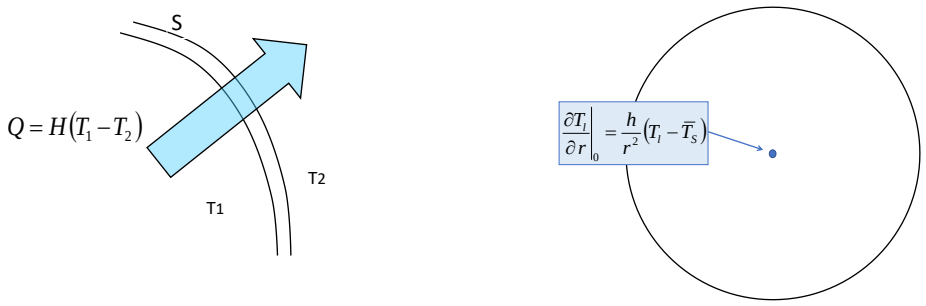
7. Le centre de la goutte.

Les conditions à la limite *r*=0 concernent une source de débit constant $\overline{\dot{M}} = 4\pi\, r^2\, \rho\, v$. Le centre est un point singulier sur le plan de la mécanique des fluides car la vitesse y est infinie.

Sur le plan des échanges thermiques par conduction, une loi du type $\partial T_l / \partial x|_0 = H\left(T_l - \overline{T}_S\right)$, qui convient au cas de la pastille, conduit à une divergence au centre de la sphère.

En fait, on veut exprimer le *flux de chaleur conductif* à l'injection par une loi linéaire de proportionnalité.

Le flux de chaleur à travers une surface de discontinuité d'aire S, - communiqué du côté 1 vers le coté 2 - est supposé obéir à une loi linéaire de la forme $Q = H\left(T_1 - T_2\right)$ où *H* est un coefficient constant.



a) b)

Figure 4. Echanges de chaleur a) à travers une discontinuité quelconque, b) lorsque cette discontinuité se situe au centre d'une goutte avec symétrie sphérique

Mais on a aussi $Q = -k_l\, S\left[\partial T_l / \partial x\right]_1^2$. Si le côté 1 est un fluide d'alimentation de température uniforme désigné par l'indice $_0$, et que le côté 2 est le fluide de la goutte d'indice $_l$, on a donc :

$Q = k_l\, S\, \partial T_l / \partial x = H\left(T_l - T_S\right)$, où k_l *est la conductivité thermique dans le liquide*

C'est ce qui est fait pour la pastille si on écrit $S\, k \partial T_l / \partial x\big|_0 = H\left(T_l - \overline{T}_S\right)$ où $S\, k_l$ est constant.

Mais pour la goutte sphérique on doit écrire : $4\pi r^2\, k\, \partial T_l / \partial r\big|_0 = H\left(T_l - \overline{T}_S\right)$, ce qui conduit à une loi de la forme :

$$\left.\frac{\partial T_l}{\partial r}\right|_0 = \frac{h}{r^2}\left(T_l - \overline{T}_S\right) \qquad [7]$$

L'utilisation de la relation [7] peut ouvrir de nouvelles perspectives à la détermination du champ thermique des gouttes alimentées à symétrie sphérique.

Annexes

A1. Coefficients intervenant dans les équations linéarisées.

$\overline{\tau}_v = \dfrac{\overline{M}}{\overline{\dot{M}}} = \dfrac{\rho_L\, c_p\, \overline{r}_S^{\,2}}{3k \ln\left(1 + \overline{B}_T\right)}$, temps caractéristique de passage du liquide injecté dans la goutte alimentée : c'est aussi en quelque sorte un temps de vie moyen pour les gouttes réelles.

$\tilde{\tau}_T = \dfrac{\overline{r}_S^{\,2}}{9\,\overline{\kappa}_L}$, temps caractéristique de conduction thermique.

$\alpha = \dfrac{\overline{B}_M}{\left(1 + \overline{B}_M\right)\ln\left(1 + \overline{B}_M\right)} \dfrac{\overline{Y}_{AC}\, Y_{FS}}{\overline{Y}_{AS}\left(Y_{FS} - Y_{FC}\right)} \dfrac{\mathcal{M}_F}{\mathcal{M}_F\, \overline{X}_{FS} + \mathcal{M}_A \overline{X}_{AS}}$, rappelons que *F* désigne le liquide de la goutte qui apparait ici sous forme vapeur, *A* désigne l'ensemble des autres espèces et est constitué principalement des produits de combustion. α est un nombre réel tout comme les autres coefficients qui suivent.

$\overline{a} = \dfrac{\overline{T}_C}{\overline{T}_C - \overline{T}_S} \dfrac{\gamma - 1}{\gamma} + \varphi$, on suppose une propagation isentropique dans le gaz avec le coefficient γ.

$$\varphi = \frac{\overline{B}_M}{Le} \frac{\left(1 + \overline{B}_M\right)^{\frac{1}{Le} - 1}}{\left(1 + \overline{B}_T\right)^{\frac{1}{Le}} - 1} \frac{\overline{Y}_{AC}\, Y_{FS}}{\overline{Y}_{AS}\left(Y_{FS} - Y_{FC}\right)} \frac{\mathcal{M}_F}{\mathcal{M}_F\, \overline{X}_{FS} + \mathcal{M}_A \overline{X}_{AS}}$$

$\mu = \dfrac{\overline{T}_S}{\overline{T}_C - \overline{T}_S} - \dfrac{2c}{\overline{T}_S - c} + \overline{b}\,\varphi,\ \overline{b} = \dfrac{b\overline{T}_S}{\left(\overline{T}_S - c\right)^2}$, les coefficients *b* et *c* interviennent dans les expressions de la chaleur latente d'évaporation et de la pression de vapeur saturante.

A2. Résolution de l'équation thermique

La perturbation thermique vérifie les équations (3b)

$$\frac{\partial\left(rT'_l\right)}{\partial t} - \kappa_L \frac{\partial^2\left(rT'_l\right)}{\partial t^2} = 0, \text{ avec} : T'_l\left(r_S, t\right) = T'_S, \quad 4\pi\, r_S^{\,2} k_L \overline{T}_S \left.\frac{\partial T'_l}{\partial r}\right|_{r=r_S} = \Delta Q_L, \left.\frac{\partial T'_l}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$$

Il s'agit de résoudre une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants dont les solutions élémentaires sont de la forme $rT'_l = r\hat{T}_l\, e^{i\omega t}$.

La fonction $r\hat{T}_l$ vérifie l'équation différentielle $i\omega r\hat{T}_l - \kappa_L \dfrac{d^2 r\hat{T}_l}{dr^2} = 0$, qui admet la solution générale $r\hat{T}_l = C\left(e^{s_0 r} - e^{-s_0 r}\right)$ vérifiant la condition $\hat{T}_l(0) = 0$. On trouve la valeur propre de l'équation caractéristique $s_0 = (1+i)\sqrt{\omega/2\kappa_L}$. La première condition aux limites donne la constante d'intégration $C = r_S\hat{T}_S \Big/ \left(e^{s_0 r_S} - e^{-s_0 r_S}\right)$. Avec la seconde condition aux limites (3c) en $r = r_S$, $\Delta\hat{Q}_L = -4\pi\,\bar{r}_S\, k_L E\,\hat{T}_S$ et avec l'approximation $r_S \approx \bar{r}_S$, on obtient $E = 1 - (1+i)s_0\bar{r}_S \coth s_0\bar{r}_S$. On établit aisément que $s_0\bar{r}_S = (1+i)\sqrt{3u/2\theta}$, d'où l'expression de $E(u,\theta)$ et l'expression de *Z* donnée par l'équation (4). La figure 3' correspond exactement aux mêmes conditions que la figure 3, mais en représentation 2D qui est, par définition, discontinue en temps.

A3. Cas de la pastille équivalente

La figure 5 donne un exemple de résultat obtenu pour le champ thermique d'une goutte non sphérique mais en forme de pastille[viii], appelée aussi goutte équivalente.

Cette pastille subit une injection continue de fluide en *x*=0 avec : $\left.\dfrac{\partial T_l}{\partial x}\right|_{x=0} = h\left(T - \bar{T}_S\right)$, où *h* est le coefficient d'échange thermique au niveau *x*=0 de l'alimentation. L'injection est adiabatique si *h*=0, elle est isotherme si *h* est infini. On tient compte cette fois du mouvement du liquide dans la goutte consécutif à l'alimentation.

Le problème a été traité ici avec un coefficient d'échange *h* égal à 10.

Dans le cas isotherme (Figure 7), on constate que la perturbation thermique est nulle en ξ=0 à tout instant, comme prévu. On peut prévoir qu'il en sera de même au centre de la goutte sphérique avec alimentation isotherme.

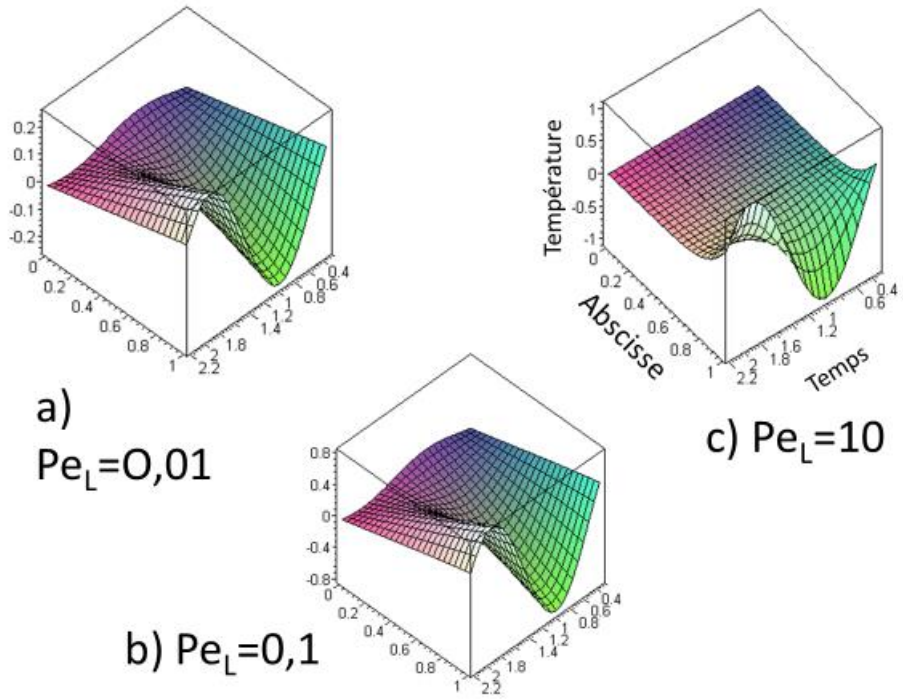
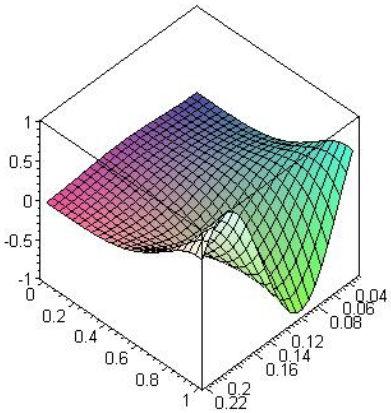
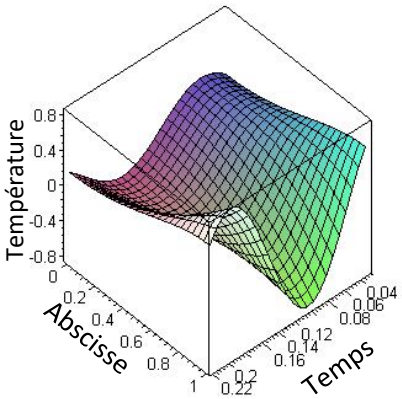


Figure 5. *Influence du nombre de Péclet* Pe_L *(inverse de* θ *) pour des valeurs identiques des autres paramètres* $\varepsilon = 1,\ h = 10,\ u = 10,\ A = 10, B = 100$ *Les axes correspondent à des coordonnées réduites : température X=*$T'_{l\,réd}$ *, abscisse* $\xi = x/x_S$ *, temps* $\tau = t/\bar{\tau}_v$ *.*

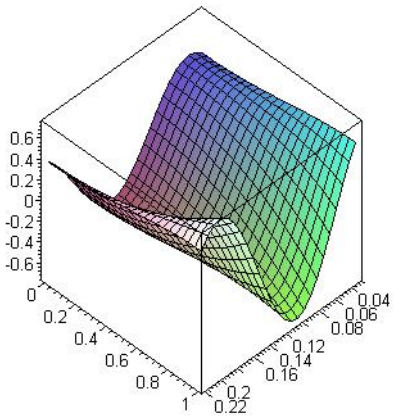
Les cas adiabatique et isotherme en fonction de θ, sont représentés sur les figures 6 et 7. On constate sur le cas adiabatique que la pénétration thermique s'effectue mieux dans la pastille que dans la sphère (Figure 3). Mais les tendances sont les mêmes en fonction de θ.



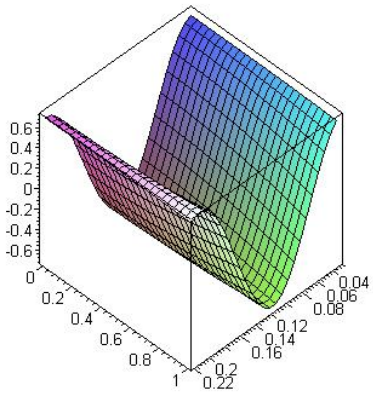
theta=1, u=100



theta=5, u=100

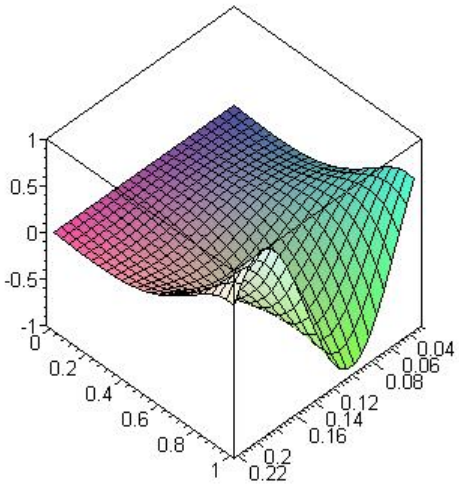


θ =10, u=100

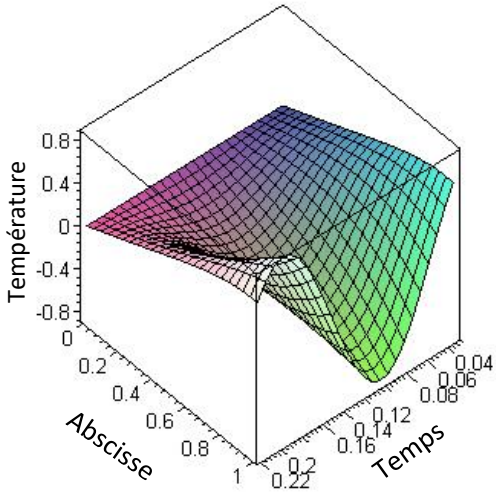


θ =50, u=100

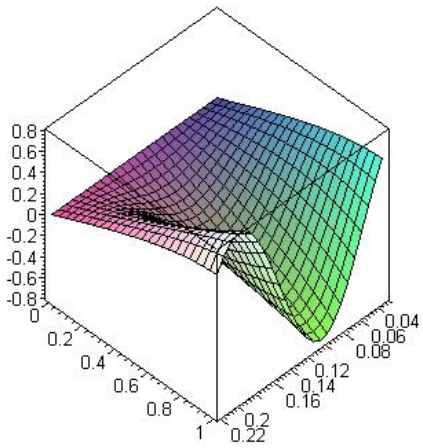
Figure 6. Pastille avec alimentation adiabatique (*h*=0)



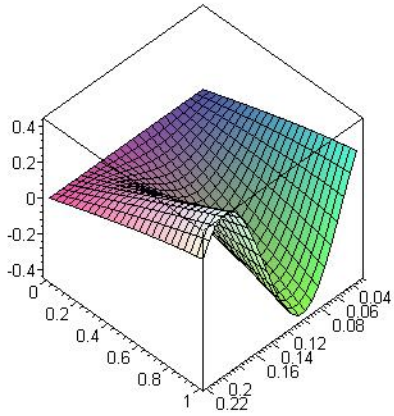
θ =1, u=100



θ =5, u=100



θ =10, u=100



θ =5, u=100

Figure 7. Pastille avec alimentation isotherme (*h* infini)

A4. Représentation 2D pour la goutte sphérique

La figure 8 reprend en les confirmant les résultats de la figure 3 en représentation 2D, pour la goutte sphérique en alimentation adiabatique.

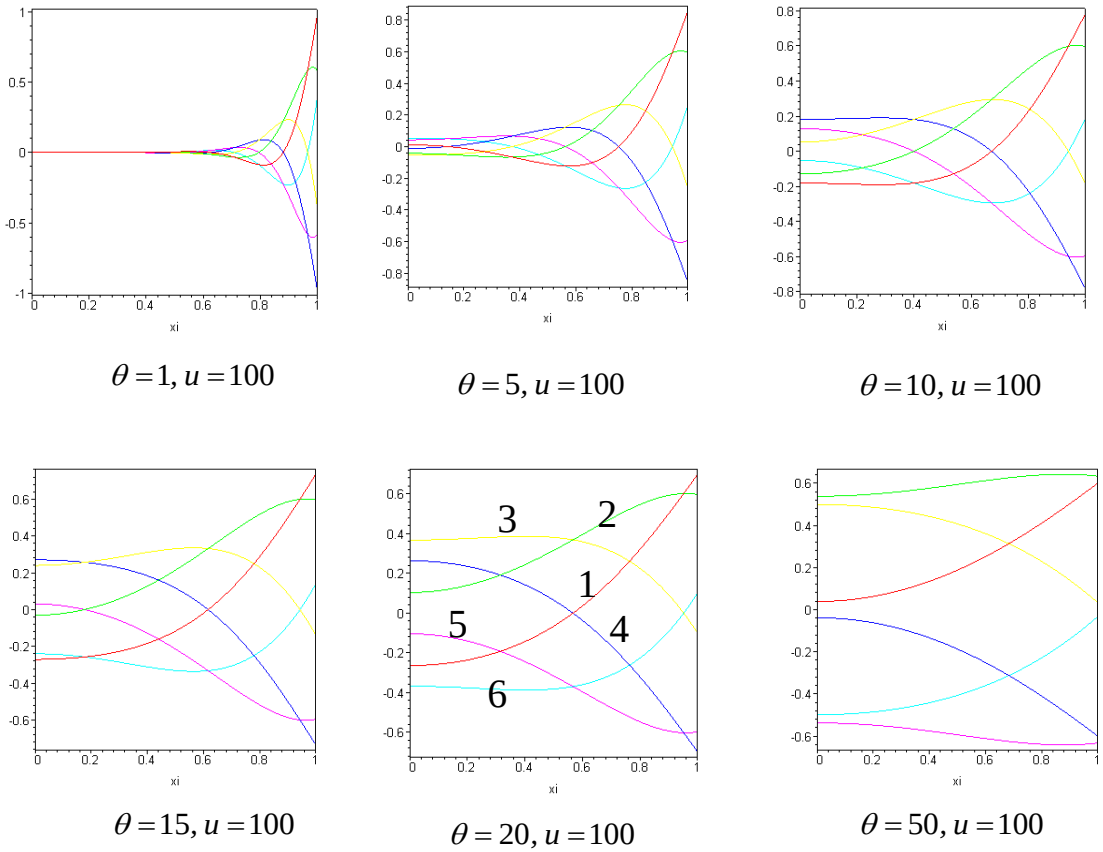


Figure 8. Goutte sphérique en alimentation adiabatique : l'influence de θ sur la perturbation thermique. Légende des couleurs. Chaque courbe correspond à un temps réduit τ pour les courbes 1 à 6 : $0, \pi/u, 2\ \pi/u, 3\pi/u, 4\pi/u, 5\pi/u$.

---

[i] Heidmann, M.F.: Frequency response of a vaporization process to distorded acoustic disturbances, NASA Tech. Note D-6806 (1972)

[ii] Heidmann, M.F., Wieber, P.R.: Analysis of frequency response characteristics of propellant vaporisation, NASA Tech. Note D-3749 (1966)

[iii] R. Prud'homme, Y. Mauriot, M. Habiballah: "Modelling of internal exchanges of a vaporizing droplet submitted to pressure oscillations", 6 th REST Scientific Workshop, Munich, March 29, 2007.

[iv] R. Prud'homme: Flows of reactive fluids - FMIA Series Vol. 94, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2010 (500 pages). ISSN 0926-5112, ISBN 978-0-8176-4518-2 (print), 978-0-8176-4592 (online), DOI 10.1007/ 978-0-8176-4659-2

[v] Prud'homme, R., Habiballah, M., Matuszewski, L., Mauriot, Y., Nicole, A (2010): Theoretical analysis of dynamic response of a vaporizing droplet to acoustic oscillations. *Journal of Propulsion and Power, a publication of the American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA)*, **26**, n°1, pages 74-83. https://doi.org/10.2514/1.39379

[vi] Anani K., Prud'homme R., D'Almeida A., Assiamoua K. (2011) Effect of thermal convection on frequency response of a perturbed vaporizing pastille-shaped droplet. *Mécanique & Industries*, **12**, N°4, p. 301-314.

[vii] Anani K., Prud'homme R., Hounkonnou M. N., (2018), Dynamic Response of a Vaporizing Spray to Pressure Oscillations: Approximate Analytical Solutions**,** *Combustion and Flame,* Volume 193, p. 295-305. https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2018.03.015

[viii] Prud'homme R., Anani K. (2018) Evaporation d'une pastille équivalente, Thermodynamique des interfaces et mécanique des fluides, ISTE OpenScience, 2018, 2 (1), DOI : 10.21494/ISTE.OP.2018.0240