



HAL
open science

Quadratisation et reformulation convexe pour les polynômes de variables binaires

Sourour Elloumi, Amélie Lambert, Arnaud Lazare

► **To cite this version:**

Sourour Elloumi, Amélie Lambert, Arnaud Lazare. Quadratisation et reformulation convexe pour les polynômes de variables binaires. ROADEF 2019, Feb 2019, Le Havre, France. hal-02455585

HAL Id: hal-02455585

<https://hal.science/hal-02455585>

Submitted on 21 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quadratisation et reformulation convexe pour les polynômes de variables binaires

Sourour Elloumi¹, Amélie Lambert², Arnaud Lazare¹

¹ UMA-CEDRIC, ENSTA, Palaiseau, France

{sourour.elloumi, arnaud.lazare}@ensta-paristech.fr

² CEDRIC, CNAM, Paris, France

amelie.lambert@cnam.fr

Mots-clés : *Optimisation polynomiale en variables binaires, reformulation quadratique convexe, programmation semi-définie positive*

1 Introduction

Dans ce papier, nous nous intéressons aux problèmes d'optimisation polynomiale non contraints en variables binaires :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t.} \\ x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

où f est un polynôme de degré d . Pour résoudre ce problème efficacement, nous avons proposé une méthode de résolution appelée **PQCR** ([1]). Cette méthode fonctionne en 3 phases. Dans la première, nous appliquons à (P) un algorithme de quadratisation pour obtenir (QP) , un programme dont la fonction objectif est quadratique et les contraintes sont linéaires. Le problème (QP) équivaut à (P) lorsque $x \in \{0, 1\}^n$. Dans la deuxième phase, nous convexifions (QP) en utilisant des fonctions nulles issues de la phase de quadratisation. Nous calculons ensuite la meilleure convexification (QP^*) en utilisant la programmation semidéfinie positive. La troisième phase consiste à résoudre (QP^*) par un solveur standard.

2 Phase 1 : quadratisation

L'idée est d'ajouter des variables pour reformuler un produit de deux variables binaires jusqu'à obtenir un polynôme de degré 2.

Définition 1 On définit l'ensemble \mathcal{E}_i des indices des variables dont le produit est modélisé par x_i par induction de la manière suivante :

- $\{i\}$ si x_i est une variable initiale
- $\mathcal{E}_j \cup \mathcal{E}_k$ si x_i est la variable additionnelle reformulant le produit $x_j x_k$

Pour tout i, j, k tels que $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_j \cup \mathcal{E}_k$, l'égalité $x_i = x_j x_k$ (ou de manière équivalente $x_i = \prod_{p \in \mathcal{E}_j} x_p \prod_{q \in \mathcal{E}_k} x_q$) est linéarisée par les contraintes issues de [2] :

$$(F_{\mathcal{E}}) \begin{cases} x_i \leq x_j \\ x_i \leq x_k \\ x_i \geq x_j + x_k - 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Grâce à ces contraintes nous obtenons une reformulation quadratique $(QP_{\mathcal{E}})$ de (P) :

$$(QP_{\mathcal{E}}) \left\{ \begin{array}{l} \min f'(x) = \sum_{\substack{\text{monômes } p \\ \text{tels que} \\ \mathcal{M}_p = \mathcal{E}_j \cup \mathcal{E}_k}} c_p x_j x_k \\ \text{s.t.} \\ (F_{\mathcal{E}}) \\ x_i \in \{0, 1\} \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, N$$

Où N est le nombre total de variables après reformulation et \mathcal{M}_p l'ensemble des indices des variables du monôme p .

3 Phase 2 : reformulation quadratique convexe de $(QP_{\mathcal{E}})$

Le problème $(QP_{\mathcal{E}})$ n'est pas nécessairement convexe. Nous proposons de le convexifier en ajoutant à la fonction objectif des fonctions nulles pour toute solution réalisable. Une convexification est paramétrée par les coefficients multiplicateurs des fonctions nulles. Nous calculons ensuite les meilleurs paramètres qui rendent f' convexe et qui maximisent la valeur de la borne obtenue par relaxation continue. Ces paramètres sont calculés grâce à la programmation semidéfinie positive.

4 Discussion sur les quadratisations

Lors de la phase 2 (convexification), nous avons prouvé comment calculer la convexification la plus serrée possible (au sens de la borne par relaxation continue). Cependant, cette convexification dépend entièrement de la reformulation quadratique choisie, i.e. des ensembles \mathcal{E} . Nous proposons ici différentes quadratisations pour la première phase de PQCR et nous analysons leur impact sur la borne obtenue.

Références

- [1] Sourour Elloumi, Amélie Lambert, and Arnaud Lazare. Solving unconstrained 0-1 polynomial programs through quadratic convex reformulation. working paper or preprint, September 2018.
- [2] R. Fortet. L'algèbre de Boole et ses Applications en Recherche Opérationnelle. *Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle*, 4 :5–36, 1959.