HAL open science

Reformulation quadratique convexe du problème d'affectation quadratique

Sourour Elloumi, Amélie Lambert

To cite this version:

Sourour Elloumi, Amélie Lambert. Reformulation quadratique convexe du problème d'affectation quadratique. ROADEF 2016, Feb 2016, Compiègne, France. hal-02455448

HAL Id: hal-02455448

https://hal.science/hal-02455448

Submitted on 21 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Reformulation quadratique convexe du problème d'affectation quadratique

Sourour Elloumi[1], Amélie Lambert[2]

[1] CEDRIC-ENSIIE, 1 square de la Résistance, 91000 Evry, France
{sourour.elloumi}@ensiie.fr

[2] CEDRIC-Cnam, 292 rue Saint Martin, 75003 Paris, France
{amelie.lambert}@cnam.fr

Mots-clés : *Programmation quadratique en variables binaires, Affectation quadratique, Linéarisation, Reformulation quadratique convexe*

1 Introduction

Le problème d'affectation quadratique (QAP) est connu dans la littérature depuis les années 50 où il a permis de modéliser un problème de localisation de n équipements sur n sites qui tient compte à la fois du coût d'affectation d'un équipement et de son interaction avec les autres équipements. Aujourd'hui, QAP est considéré comme un problème classique d'Optimisation Combinatoire par le nombre d'études et de publications auxquelles il a donné lieu. Il est également connu comme un modèle générique de plusieurs autres applications.

QAP est un problème NP-difficile. Sa résolution exacte reste aujourd'hui un défi important. De nombreuses modélisations de QAP existent dans la littérature mais la plus directe est la suivante :

$$\text{QAP :} \quad \min F(x) = \sum_{i,j,k,l} d_{ijkl} x_{ij} x_{kl} \tag{1}$$

s.t. :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

$$x \in \{0,1\}^{n \times n}$$

où d_{ijkl} est le coût découlant de l'affectation simultanée de i à j et de k à l, x_{ij} est la variable binaire valant 1 si i est affecté à j. Les contraintes linéaires (2) et (3) imposent la bijection entre les sites et les équipements. QAP se formule ainsi naturellement comme un programme quadratique en variables binaires. Les méthodes classiques de résolution reposent principalement sur deux approches : l'approche par linéarisation, c'est à dire la reformulations équivalente en programmes linéaires en variables entières ou mixtes, et l'approche basée sur des relaxations semi-définies ou quadratiques convexes. Cette dernière approche nécessite le développement de méthodes arborescentes spécifiques. Des références récentes sont [5], [4] et [1].

2 Reformulation quadratique convexe

La fonction objectif (1) n'est en général pas convexe. Ainsi, la résolution de la simple relaxation continue de QAP est un problème NP-difficile. La reformulation quadratique convexe

de QAP peut être définie comme sa reformulation en un programme quadratique équivalent, dont la relaxation continue est un problème convexe. En ce sens, la linéarisation peut être vue comme un cas particulier de reformulation quadratique convexe. On sait depuis longtemps, gâce à la relation $x^2 = x$ vérifiée par les variables binaires, qu'une telle reformulation est possible par exemple par un calcul de plus petite valeur propre. Mais, toutes ces reformulations ne sont pas efficaces du point de vue de la qualité des bornes qu'elles mettent en jeu. Nous avons montré, à travers plusieurs publications commencées par [2], qu'une reformulation optimale, au sens où elle fournit la meilleure borne possible dans une famille de reformulations, peut être obtenue à partir de la résolution d'une certaine relaxation semi-définie (SDP). Nous avons ainsi construit une méthode de résolution qui consiste d'abord à résoudre (SDP) pour construire un problème équivalent, puis à dérouler un algorithme de branch-and-bound pour le résoudre. A chaque noeud de l'algorithme de branch-and-bound, un problème quadratique convexe est résolu. Cette méthode est très générale. Nous l'avons, de proche en proche, étendue à des programmes quadratiques quelconques [3].

Le but de ce travail est de montrer les résultats de la reformulation quadratique convexe appliquée à QAP. Nous illustrons sur les instances QAPLIB, largement utilisées pour mesurer l'efficacité des différentes méthodes. Nous comparons les résultats avec certaines reformulations quadratiques convexes at à d'autres méthodes générales fournies par des logiciels d'optimisation comme Cplex et Couenne.

3 Conclusions et perspectives

Le but de ce premier travail est expérimental mais il s'inscrit dans un projet plus large où il faudra spécialiser la reformulation quadratique convexe à un problème aussi ardu que QAP.

Références

[1] K. M. Anstreicher and N. W. Brixius. A new bound for the quadratic assignment problem based on convex quadratic programming. *Mathematical Programming*, 89(3) :341–357, 2001.

[2] A. Billionnet and S. Elloumi. Using a Mixed Integer Quadratic Programming Solver for the Unconstrained Quadratic 0-1 Problem. *Mathematical Programming*, 109(1) :55–68, 2007.

[3] A. Billionnet, S. Elloumi, and A. Lambert. Exact quadratic convex reformulations of mixed-integer quadratically constrained problems. *Mathematical Programming*, to appear, 2015.

[4] M. Fischetti, M. Monaci, and D. Salvagnin. Three ideas for the quadratic assignment problem. *INFORMS Journal on Computing*, 60(4) :954–964, 2012.

[5] E. de Klerk, R. Sotirov, and U. Truetsch A New Semidefinite Programming Relaxation for the Quadratic Assignment Problem and Its Computational Perspectives. *INFORMS Journal on Computing*, 27(2) :378–391, 2015.