



Análise Fisicamente Não-Linear de Vigas Metálicas no Contexto da GBT

Miguel Abambres, Dinar Camotim, Nuno Silvestre

► To cite this version:

Miguel Abambres, Dinar Camotim, Nuno Silvestre. Análise Fisicamente Não-Linear de Vigas Metálicas no Contexto da GBT. VIII Congresso de Construção Metálica e Mista, Nov 2011, Guimarães, Portugal. hal-02450456

HAL Id: hal-02450456

<https://hal.science/hal-02450456>

Submitted on 23 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Análise Fisicamente Não-Linear de Vigas Metálicas no Contexto da GBT

Miguel Abambres, Dinar Camotim e Nuno Silvestre

*Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, ICIST, Instituto Superior Técnico, UTL, Av. Rovisco Pais,
1049-001 Lisboa, Portugal*

Resumo. Neste artigo apresenta-se uma formulação da GBT para análises elasto-plásticas de 1ª ordem e ilustra-se a sua aplicação a uma viga simplesmente apoiada com secção em I, constituída por um material elástico-perfeitamente plástico e submetida a cargas concentradas a meio vão. Os resultados da GBT são validados por comparação com os resultados obtidos através de um modelo de elementos de casca utilizando o programa ABAQUS. Constatase uma excelente correlação entre os resultados da GBT e do ABAQUS, em particular no que respeita a trajectórias de equilíbrio e configurações deformadas. No que respeita a diagramas de tensões, os resultados da GBT são bastante satisfatórios no que respeita a tensões axiais, de corte e de *Von Mises*, mas distintos dos resultados do ABAQUS no que diz respeito a tensões normais transversais. No entanto, as distribuições 3D de tensões normais transversais são qualitativamente semelhantes em todo o domínio da barra.

1. Introdução

Devido às elevadas rigidez, resistência e ductilidade do aço e ao seu preço de mercado, os elementos estruturais metálicos são normalmente bastante otimizados. Esta optimização conduz geralmente a elementos estruturais esbeltos, i.e., com secção de parede fina. No entanto, o seu comportamento estrutural é fortemente influenciado por fenómenos de deformação local e global, bem como pela ocorrência de cedência do aço e consequente espalhamento de plasticidade. Como consequência, a fiabilidade de modelos numéricos para simular o colapso de elementos estruturais de aço com secção de parede fina só pode ser alcançada se o comportamento material for rigorosamente considerado.

A Teoria Generalizada de Vigas (GBT) é uma teoria de peças prismáticas de parede fina que se caracteriza pelo facto de a configuração deformada do elemento ser obtida por uma combinação linear de modos de deformação da sua secção transversal, cujas amplitudes ao longo do seu eixo axial são as incógnitas do problema. A GBT tem sido utilizada sobretudo no estudo do comportamento de estabilidade elástica de elementos estruturais metálicos [1], sendo actualmente apontada pela comunidade científica como uma teoria robusta, versátil e muito eficiente. A primeira contribuição desta teoria para a análise de elementos constituídos por materiais elasto-plásticos surge em 2004 por Gonçalves e Camotim [2], no âmbito de análises de bifurcação elasto-plásticas. Em 2005, Gonçalves e Camotim [3] formularam um

elemento finito fisicamente não-linear baseado na GBT, validado no caso da existência de tensões normais axiais. Contudo, os mesmos autores [4] desenvolveram recentemente duas formulações de um elemento finito fisicamente não-linear, uma (i) baseada em tensões e na teoria de escoamento J_2 -flow, e outra (ii) baseada em resultantes de tensões e na função de cedência de Ilyushin modificada, tendo sido validadas através de várias análises envolvendo vários tipos de tensões e deformabilidade (global e/ou local). Neste primeiro estudo mais aprofundado de uma formulação elasto-plástica da GBT, concluiu-se que a formulação baseada em tensões conduz geralmente a soluções mais precisas mas é computacionalmente mais exigente. O presente trabalho visa dar continuidade ao trabalho já desenvolvido anteriormente por Abambres *et al.* [5], o qual consistiu numa formulação elasto-plástica de 1ª ordem da GBT que permitiu obter bons resultados no caso da existência de um único tipo componente de tensão predominante. Para eliminar as limitações desta formulação, os autores apresentam neste trabalho uma formulação para materiais isotrópicos baseada na teoria de escoamento J_2 , a qual foi implementada computacionalmente utilizando o software Matlab [6].

2. Resumo da formulação para análises elasto-plásticas de 1ª ordem

Considere-se uma barra prismática com uma secção transversal de parede fina, formada por n paredes rigidamente ligadas entre si através dos bordos longitudinais. Em cada parede (Fig. 1), considere-se um sistema de eixos local (x, s, z) , onde x , s e z correspondem respectivamente à coordenada longitudinal ($0 \leq x \leq L$, L é o comprimento do elemento estrutural), à coordenada da linha média da secção transversal ($0 \leq s \leq b$, b é a largura total da linha média), e à coordenada segundo a direcção da espessura da placa ($-e/2 \leq z \leq e/2$, e é a espessura da parede).

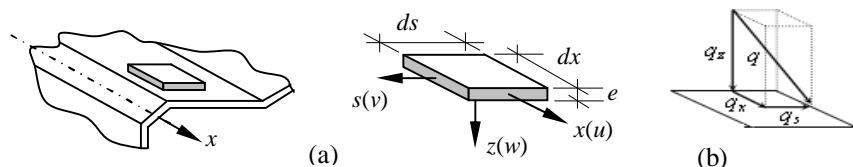


Fig. 1: (a) Sistema local de eixos e (b) componentes de força exterior distribuída $q(x,s)$ [1].

A análise da secção utilizada neste artigo foi a desenvolvida por Silva *et al.* [7], a qual subdivide os modos “não-convencionais” em 3 tipos: (i) modos de corte, (ii) modos de extensão transversal e (iii) modos de fluxo de corte celular. No entanto, Abambres *et al.* [5] propuseram uma modificação original a essa formulação que consiste na introdução de uma rotação perpendicular ao plano médio da parede como grau de liberdade adicional, a qual permite aproximar variações não lineares do empenamento.

Nesta secção apresenta-se muito resumidamente a formulação da GBT para análises elasto-plásticas de 1ª ordem de barras com secção de parede fina arbitrária. Por motivo de limitação de espaço, o leitor interessado poderá encontrar informação mais detalhada no trabalho de Abambres *et al.* [5]. Como é reconhecido, a obtenção da solução de problemas não-lineares (análises elasto-plásticas com espalhamento) requer o estabelecimento das equações de equilíbrio incremental da barra [8] em torno de uma certa configuração de equilíbrio. No caso da presente formulação, desenvolveu-se um elemento finito (EF) baseado na GBT [5]. O sistema de equações de equilíbrio incremental do EF é dado por

$$K_{\tan} \Big|_j \Delta d = \Delta f, \quad K_{ik,\tan} \Big|_j = K_{ik,\tan}^{xx} + K_{ik,\tan}^{ss} + K_{ik,\tan}^{xs}, \quad (1)$$

onde a componente i - k (sub-matriz 4x4) da matriz de rigidez tangente K_{\tan} , associada a uma configuração de equilíbrio (“instante”), j , é definida por

$$\begin{aligned}
K_{ik,tan}^{xx} &= \int_{V_e} \left\{ \left(\Psi_{H,xx}^i \right)^T \left(E_{(xx)i} E_{(xx)k} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \varepsilon_{xx}} \Big|_j \right) \Psi_{H,xx}^k + \left(\Psi_{H,xx}^i \right)^T \left(E_{(xx)i} E_{(ss)k} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \varepsilon_{ss}} \Big|_j \right) \Psi_H^k + \right. \\
&\quad \left. + \left(\Psi_{H,xx}^i \right)^T \left(E_{(xx)i} E_{(xs)k} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \gamma_{xs}} \Big|_j \right) \Psi_{H,x}^k \right\} dV \\
K_{ik,tan}^{ss} &= \int_{L_e} \int_b \int_e \left\{ \left(\Psi_H^i \right)^T \left(E_{(ss)i} E_{(xx)k} \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \varepsilon_{xx}} \Big|_j \right) \Psi_{H,xx}^k + \right. \\
&\quad \left. + \left(\Psi_H^i \right)^T \left(E_{(ss)i} E_{(ss)k} \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \varepsilon_{ss}} \Big|_j \right) \Psi_H^k + \right. \\
&\quad \left. + \left(\Psi_H^i \right)^T \left(E_{(ss)i} E_{(xs)k} \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \gamma_{xs}} \Big|_j \right) \Psi_{H,x}^k \right\} dz ds dx, \quad (2) \\
K_{ik,tan}^{xs} &= \int_{V_e} \left\{ \left(\Psi_{H,x}^i \right)^T \left(E_{(xs)i} E_{(xx)k} \frac{\partial \sigma_{xs}}{\partial \varepsilon_{xx}} \Big|_j \right) \Psi_{H,xx}^k + \left(\Psi_{H,x}^i \right)^T \left(E_{(xs)i} E_{(ss)k} \frac{\partial \sigma_{xs}}{\partial \varepsilon_{ss}} \Big|_j \right) \Psi_H^k + \right. \\
&\quad \left. + \left(\Psi_{H,x}^i \right)^T \left(E_{(xs)i} E_{(xs)k} \frac{\partial \sigma_{xs}}{\partial \gamma_{xs}} \Big|_j \right) \Psi_{H,x}^k \right\} dV
\end{aligned}$$

onde V_e é o volume do EF, i e k são índices relativos aos modos de deformação, $E_{(xx)}$, $E_{(ss)}$ e $E_{(xs)}$ são componentes de deformação seccionais associadas às deformações ε_{xx} (extensão longitudinal), ε_{ss} (extensão transversal) e γ_{xs} (distorção), e Ψ_H^k são os polinómios de *Hermite* do EF. As restantes variáveis da Eq. (1) são vectores cuja componente k corresponde a um sub-vector 4x1, sendo

$$\Delta f = \Delta \lambda \bar{f} \quad , \quad (3)$$

onde \bar{f} é o vector de forças nodais equivalentes quando o parâmetro de carga λ é unitário. A componente k (sub-vector 4x1) do vector de forças internas para a configuração de equilíbrio j pode ser obtida através de

$$f_k^{\text{int}} \Big|_j = \int_{L_e} \left\{ F_{(xx)k} \left(\Psi_{H,xx}^k \right)^T + F_{(ss)k} \left(\Psi_H^k \right)^T + F_{(xs)k} \left(\Psi_{H,x}^k \right)^T \right\} dx \quad , \quad (4)$$

$$F_{(xx)k} = \int_b \int_e E_{(xx)k} \sigma_{xx} \Big|_j dz ds \quad F_{(ss)k} = \int_b \int_e E_{(ss)k} \sigma_{ss} \Big|_j dz ds \quad F_{(xs)k} = \int_b \int_e E_{(xs)k} \sigma_{xs} \Big|_j dz ds \quad , \quad (5)$$

onde k é um índice livre relativo ao modo de deformação. Importa referir que no procedimento incremental-iterativo se adoptou uma estratégia iterativa “caminho-independente” [9].

3. Teoria de escoamento J_2

Na formulação, adoptou-se a teoria de escoamento baseada no critério de cedência de *Von Mises*, o qual é função do 2º invariante (J_2) do tensor das tensões deviatóricas, tal que

$$f = F(\sigma_{ij}) - \sigma^y = 0$$

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{-3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{xx} - \sigma_{ss})^2 + (\sigma_{ss} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2) + 3\sigma_{xs}^2 + 3\sigma_{xz}^2 + 3\sigma_{sz}^2}, \quad (6)$$

onde F é a tensão equivalente (ou de *Von Mises*) e σ^y a tensão de cedência uniaxial. Por limitações de espaço, a formulação apresentada apenas é válida para materiais com uma lei constitutiva elástica (linear) – perfeitamente plástica (sem endurecimento).

Considere-se a regra de escoamento associada para um ponto genérico (σ) sobre a superfície de cedência dada pela equação *Prandtl-Reuss* [10]

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{\sigma}, \quad d\lambda \geq 0, \quad (7)$$

onde $d\varepsilon_{ij}^e$ e $d\varepsilon_{ij}^p$ são os incrementos de deformação elástica e plástica, respectivamente, $d\lambda$ é um factor de proporcionalidade, f é a função de cedência do material e $n = \partial f / \partial \sigma$ é o vector gradiente de f . Segundo a equação de consistência de *Prager* [8], se um ponto (σ) localizado na superfície de cedência estiver sujeito a escoamento plástico (infinitesimal), tem-se

$$df = f(\sigma + d\sigma) - f(\sigma) = \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{\sigma} d\sigma_{ij} = 0 \quad (8)$$

Qualquer que seja o comportamento material, é importante notar que um ponto localizado sobre a superfície de cedência e cuja deformação plástica seja não nula, segue a relação

$$\sigma = D^e \varepsilon^e = D^e (\varepsilon - \varepsilon^p), \quad D^e = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (9)$$

onde σ e ε são vectores que incluem, respectivamente, as componentes dos tensores 2º *Piolla-Kirchhoff* e *Green – Saint-Venant*, e D^e é a matriz elástica da GBT [1]. Atendendo às hipóteses simplificativas da GBT [1], $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{sz} = 0$ (válidas para deformações elásticas ou elasto-plásticas), e introduzindo a Eq. (9) em (8), obtém-se [8]

$$\left(\left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{\sigma} \right)^T d\sigma = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{\sigma} \right)^T D^e d\varepsilon - \left(\left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{\sigma} \right)^T D^e d\lambda \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{\sigma} = 0 \quad (10)$$

Para dar origem à relação incremental $d\sigma-d\varepsilon$, a relação (10) pode ser escrita em ordem a $d\lambda$,

$$d\sigma = \underbrace{\left(D^e - \frac{D^e n n^T D^e}{n^T D^e n} \right)}_{D^{ep}} d\varepsilon, \quad n = \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ss}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xs}} \end{bmatrix}^T \bigg|_{\sigma}, \quad (11)$$

a qual é válida para um ponto genérico (σ) sobre a superfície de cedência que entre em escoamento plástico, e onde D^{ep} se denomina de matriz constitutiva elasto-plástica convencional, a qual permitirá obter o gradiente $\partial \sigma / \partial \varepsilon$. Note-se ainda que o cálculo da relação (11) exige o conhecimento das tensões no ponto da trajectória de equilíbrio, sem as quais também não seria possível determinar o vector de forças internas do problema. Como tal, descreve-se de seguida o método utilizado para obtenção das tensões e parâmetro de endurecimento de um ponto genérico após sofrer escoamento plástico.

Com vista utilizar um algoritmo robusto para determinar o ponto de tensão final σ_{j+1} e respectivo parâmetro de endurecimento λ_{j+1} , a relação incremental da Eq. (11) foi integrada através do método de *Euler* regressivo. A sua aplicação requer a resolução numérica (utilizou-se o método de *Newton-Raphson*) do seguinte sistema de equações não-lineares [8]

$$\begin{cases} g(\sigma_{j+1}, \lambda_{j+1}) \\ f(\sigma_{j+1}, \lambda_{j+1}) \end{cases} = 0, \quad g(\sigma_{j+1}, \lambda_{j+1}) = \sigma_{j+1} - (\sigma_j + D^e \Delta \varepsilon) + (\lambda_{j+1} - \lambda_j) D^e n_{j+1} \quad , \quad (12)$$

onde j é o índice relativo ao “instante” anterior no qual o ponto se encontrava em equilíbrio e $j+1$ é um índice livre que indica que o vector gradiente n é avaliado no ponto σ_{j+1} . Note-se que o instante j pode corresponder a um ponto localizado na região elástica apenas no caso do material em causa se comportar linearmente em regime elástico. Caso contrário, esse “instante” tem de corresponder a um ponto sobre a superfície de cedência.

Finalmente, apresente-se a matriz constitutiva elasto-plástica consistente. Sabe-se [8] que o cálculo da matriz de rigidez tangente com base na matriz consistente (D^{ep*}), em detrimento da matriz convencional (D^{ep}), reduz significativamente a exigência computacional do processo incremental-iterativo. A matriz consistente é definida por [8]

$$D^{ep*} = \left(H - \frac{H n n^T H}{n^T H n} \right) \bigg|_{\sigma_j, \lambda_j}, \quad H = \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma} \bigg|_{(\sigma_j, \lambda_j)} \right]^{-1} D^e, \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma} = I + (\lambda_j - \lambda_{j-1}) D^e \frac{\partial n}{\partial \sigma} \quad , \quad (13)$$

onde os índices j indicam que as variáveis em causa se referem ao ponto sobre a superfície de cedência ($\sigma_j, \lambda_j, \varepsilon_j$), o índice $j-1$ se refere ao ponto da trajectória de equilíbrio anteriormente determinado e $\partial n / \partial \sigma$ é a matriz jacobiana relativa ao vector n .

4. Exemplo ilustrativo

Em seguida, ilustra-se a aplicação da formulação da GBT à análise fisicamente não-linear de uma viga simplesmente apoiada, com um comprimento $L=1500$ mm e uma secção transversal em I, cujas dimensões (linha média) se encontram representadas na Fig. 2(a). A viga é constituída por um material isotrópico elástico-perfeitamente plástico ($E=200000$ N/mm², $\nu=0.3$, $G=76923.08$ N/mm², $\sigma^y = 450$ N/mm²). A discretização da secção utilizada na GBT está representada na Fig. 2(a), conduzindo a um total de 60 modos de deformação. Na análise, foram utilizados 29 modos de deformação da GBT (modo global de flexão na maior inércia, todos os modos de corte e de extensão transversal). Refere-se que a utilização dos modos de extensão transversal é essencial. A sua exclusão não permitiria obter bons resultados, havendo diferenças mesmo na resposta elástica da barra e conduzindo a um parâmetro de carga último significativamente superior ao “real”. Na Fig. 3 apresentam-se alguns dos modos de deformação mais relevantes. Na discretização longitudinal, utilizaram-se 18 EF (4 em $x < 0.35L$, 10 em $0.35L \leq x \leq 0.85L$, e 4 em $x > 0.85L$) com funções de aproximação de *Hermite* [5], e foram utilizados 5 pontos de *Gauss* nas direcções x (em cada EF) e s (em cada sub-placa), e 6 pontos na direcção z (ver Fig. 1(a)). A carga vertical de 10000λ (λ é o parâmetro de carga), aplicada a meio vão da viga, foi distribuída através de um conjunto de 7 forças verticais, igualmente espaçadas e aplicadas ao longo da altura da alma ($F_1=833.33\lambda$, $F_2=1666.67\lambda$). Finalmente, refere-se que se efectuaram análises elasto-plásticas através do programa ABAQUS [11], utilizando elementos finitos de casca do tipo S4 com 5 pontos de integração de *Gauss* na sua espessura.

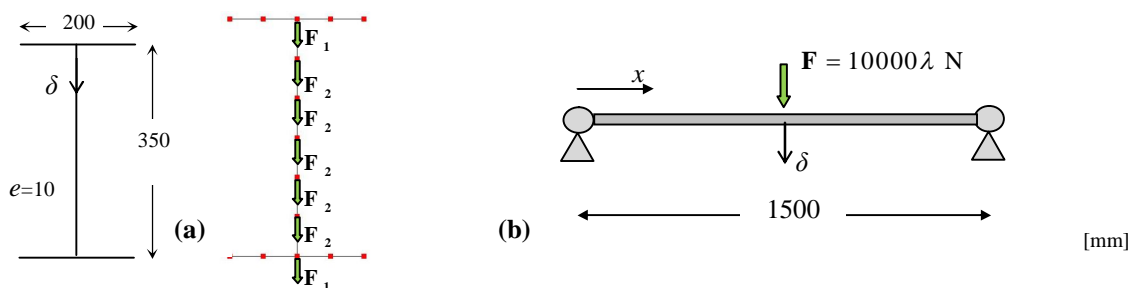


Fig. 2. (a) Geometria da secção e localização das cargas pontuais, e (b) modelo estrutural da barra.

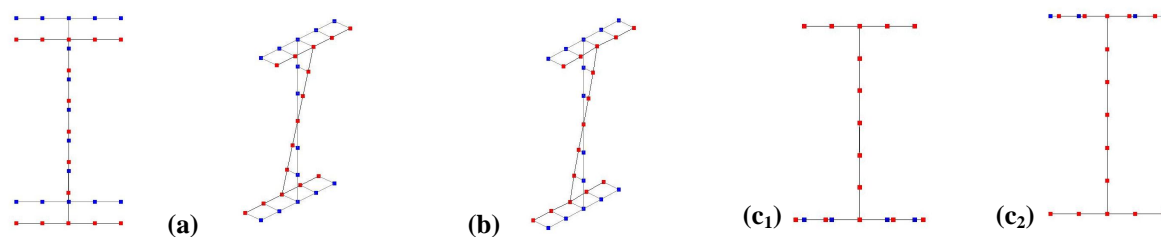


Fig. 3. Modos de deformação: (a) 2 (global), (b) 33 (corte), (c₁) 48 (ext. transv) e (c₂) 49 (ext. transv).

Na Fig. 4, apresentam-se as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\delta)$ obtidas através da GBT e do ABAQUS, onde δ é o deslocamento vertical do nó de ligação alma-banzo superior (Fig. 2). Como se observa, a concordância entre as duas curvas é perfeita em todo o domínio, com a maior diferença a atingir 1,6%. Nas configurações de equilíbrio A (elástica), B (elasto-plástica) e C (plástica), de agora em diante designadas por pontos A, B e C, tem-se: (A) $\lambda_{\text{GBT}}=64.39$, $\lambda_{\text{ABQ}}=64.00$, (B) $\lambda_{\text{GBT}}=109.57$, $\lambda_{\text{ABQ}}=110.00$ e (C) $\lambda_{\text{GBT}}=121.05$, $\lambda_{\text{ABQ}}=123$.

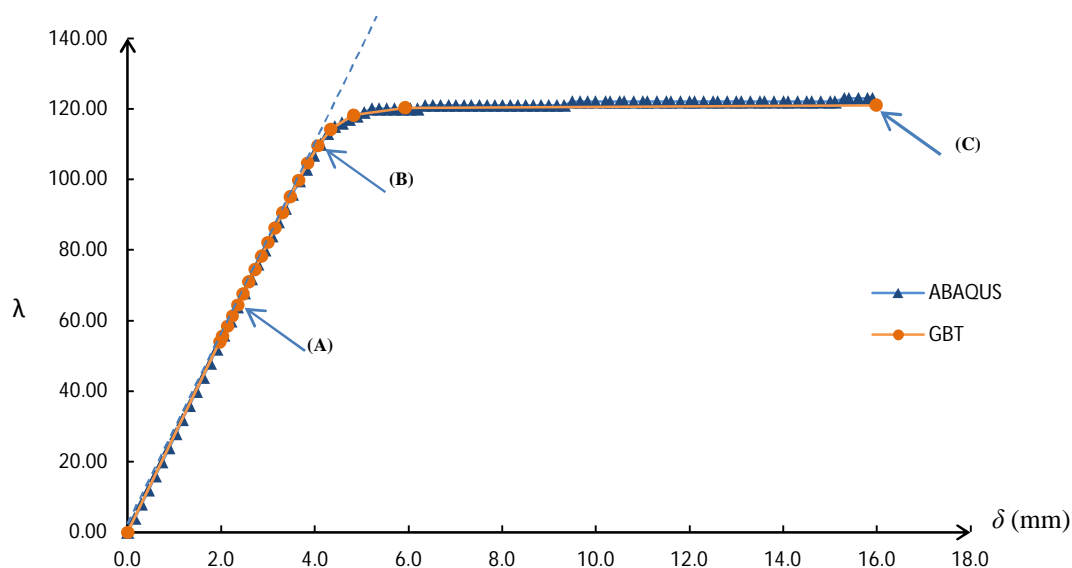


Fig. 4. Trajectória de equilíbrio.

Na Fig. 5(a) apresenta-se a variação longitudinal do deslocamento vertical do nó alma-banzo superior nos pontos A, B e C. Consta-se que a GBT e o ABAQUS fornecem resultados praticamente coincidentes. Na Fig. 5(b), apresentam-se os diagramas de tensões axiais de membrana σ_{xx} na alma da secção localizada em $x=695$ mm (Fig.2(b)), nos pontos A, B e C. As diferenças GBT vs. ABAQUS são quase sempre inexistentes, sendo apenas visíveis no ponto C e junto dos banzos (diferenças entre 10 e 15%). Como se explicará mais à frente, estas diferenças devem-se ao facto das tensões de corte obtidas pelo programa ABAQUS serem mais elevadas nessas zonas. Contrariamente ao que seria expectável, o diagrama σ_{xx} do ponto A (configuração elástica) não é intrinsecamente linear, resultando essa não linearidade da deformação por corte. Importa referir que todas as tensões apresentadas neste trabalho dizem respeito a tensões verdadeiras (*true stress*). Exceptua-se o caso das tensões de *Von Mises* da GBT, as quais foram calculadas com base nas componentes nominais de tensão, uma vez que toda a teoria de plasticidade foi formulada com base nestas. A conversão da tensão nominal σ_n para a tensão verdadeira σ_v é conseguida utilizando a extensão nominal ε_n , tal que

$$\sigma_v = \sigma_n (1 + \varepsilon_n) \quad . \quad (14)$$

Na Fig. 6 apresentam-se os diagramas de tensões de transversais de membrana σ_{ss} obtidos no ponto A (configuração elástica). Conclui-se que os resultados da GBT e do ABAQUS são completamente díspares, o que se deve ao facto de se terem utilizado poucos pontos intermédios no modelo da GBT, sendo que o modelo do ABAQUS apresenta um número de graus de liberdade (g.l.) claramente superior em todas as paredes da secção transversal. As singularidades observadas nos pontos de aplicação das cargas pontuais resultam das discontinuidades inerentes do diagrama de extensões transversais da GBT. Quanto ao declive dos vários troços de recta, este é obtido multiplicando as extensões axiais pela constante elástica do material ($D_{(2,1)}^e$). Tal como no ponto A, também os diagramas de σ_{ss} obtidos da GBT e do ABAQUS nos pontos B e C não apresentam qualquer semelhança. No entanto, por comparação das distribuições 3D de σ_{ss} no ponto C (ver Fig. 7), constata-se que os resultados são (i) qualitativamente semelhantes na zona de maior concentração de tensões e (ii) os seus valores máximos não diferem mais que 10 a 15%. No entanto, verifica-se que as discrepâncias encontradas para σ_{ss} têm pouca influência na globalidade dos resultados.

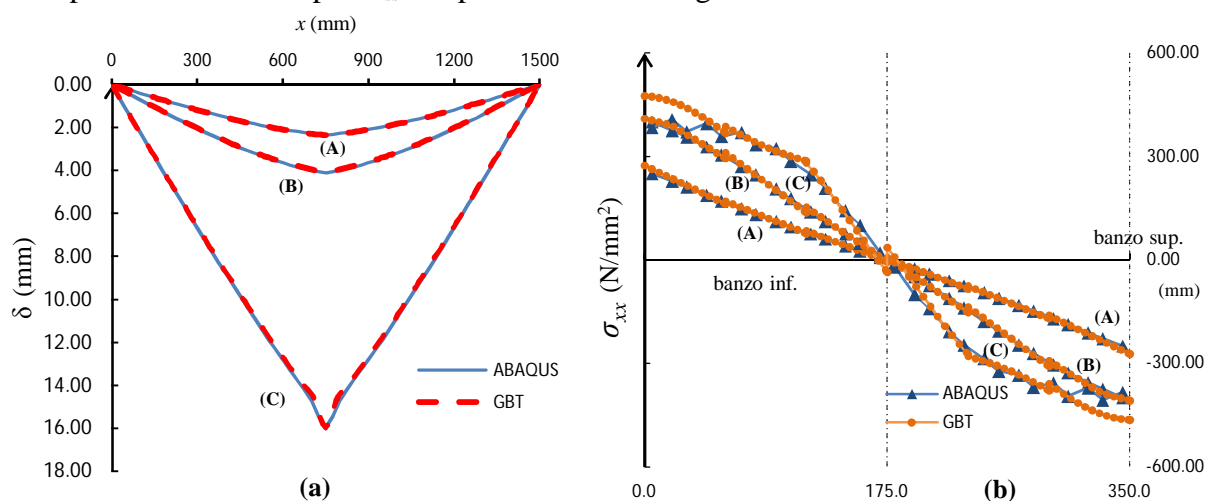


Fig. 5. (a) Deformada longitudinal e (b) tensões de membrana σ_{xx} na alma da secção ($x=695$ mm).

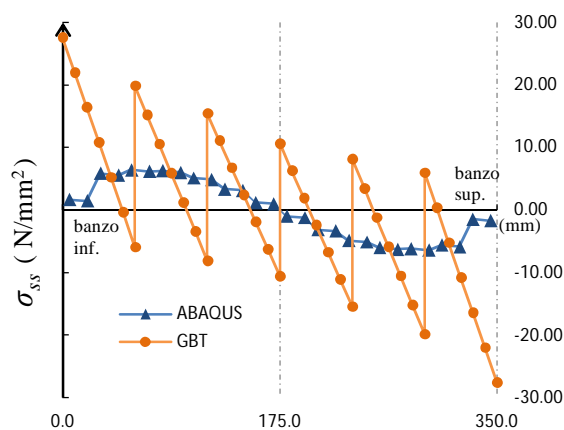


Fig. 6. Tensões de membrana σ_{ss} na alma da secção ($x=695$ mm) para o ponto A.

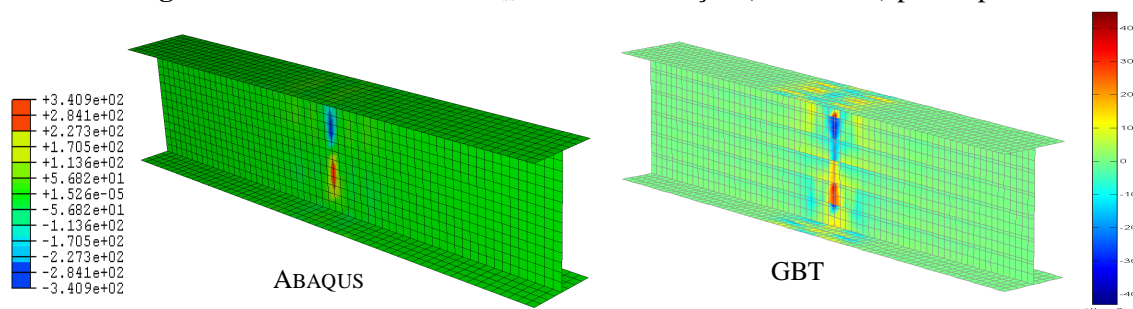


Fig. 7. Representação 3D das tensões transversais de membrana σ_{ss} para o ponto C.

Apresentam-se nas Figs. 8 (a)-(b) os diagramas de tensões de corte de membrana σ_{xs} na alma da secção ($x=695$ mm). Nos pontos A e B (Fig. 8(a)), os diagramas da GBT apresentam descontinuidades nos limites das sub-placas, o que se deve ao facto das distorções devidas ao empenamentos dos modos de corte serem predominantes face às distorções que resultam dos modos de extensão transversal. O contrário ocorre no ponto C (configuração plástica – Fig. 8(b)). Tais descontinuidades seriam evitadas caso se tivesse utilizado o g.l. de rotação de empenamento na determinação dos modos de corte. Note-se que no ponto C, contrariamente ao que se passa no ABAQUS, as tensões σ_{xs} nos nós de ligação banzo-alma obtidas da GBT são nulas, apesar dos modos de corte apresentarem valores não nulos de σ_{xs} nesses nós.

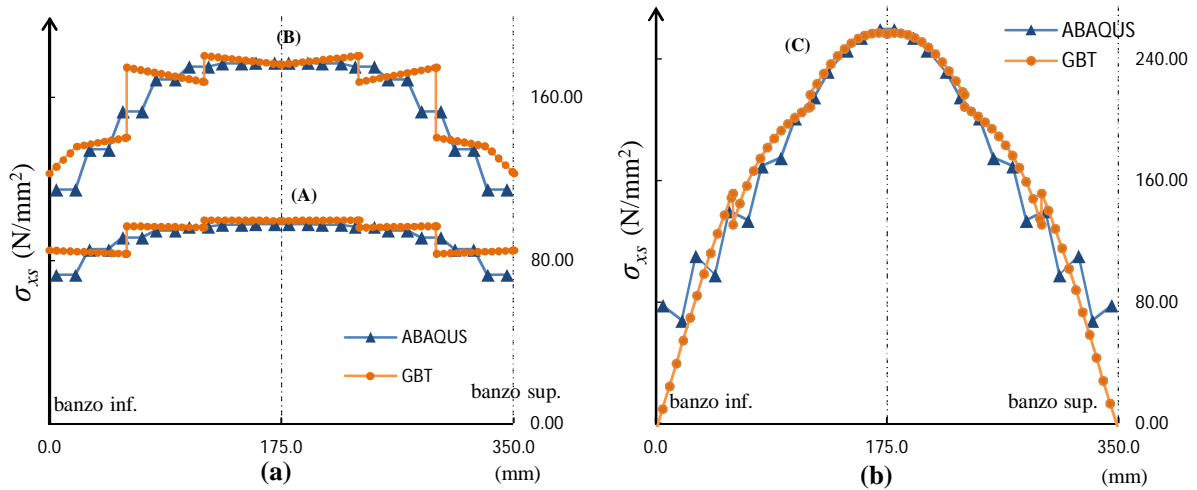


Fig. 8. Tensões de membrana σ_{xs} na alma da secção ($x=695$ mm), para os pontos (a) A e B, e (b) C.

Apesar das discrepâncias (algumas relevantes) encontradas entre os resultados da GBT e do ABAQUS em alguns diagramas de tensões, é possível constatar na Fig. 9 que tais diferenças pouco afectam a qualidade dos diagramas de tensões de membrana equivalentes (*Von Mises*). As diferenças entre os valores da GBT e do ABAQUS são mínimas, não ultrapassando 4,5%.

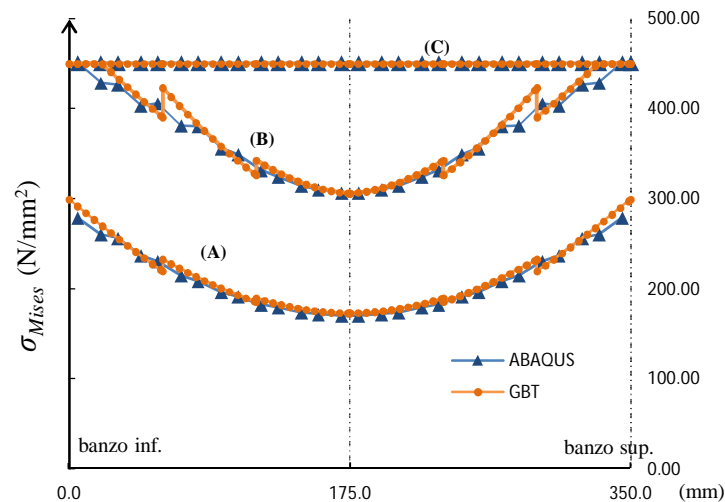


Fig. 9. Tensões de membrana σ_{Mises} na alma da secção ($x=695$ mm).

Nas Figs. 10-12 apresentam-se as distribuições 3D de tensões de membrana σ_{xx} , σ_{xs} e σ_{Mises} para o ponto C, existindo bastantes semelhanças qualitativas e quantitativas entre as distribuições da GBT e do ABAQUS. Na Fig. 13, comparam-se ainda as configurações do

mecanismo de colapso (no ponto C), sendo bem visíveis as semelhanças entre a GBT e o ABAQUS.

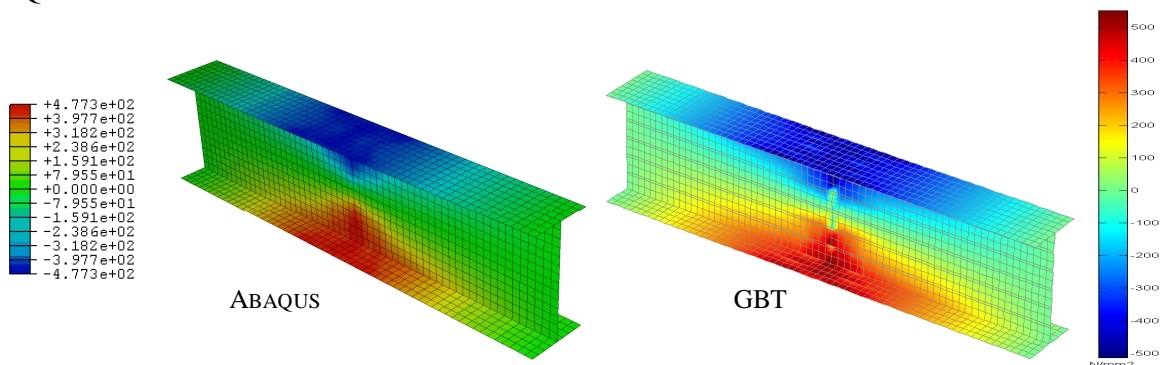


Fig. 10. Representação 3D das tensões axiais de membrana σ_{xx} para o ponto C.

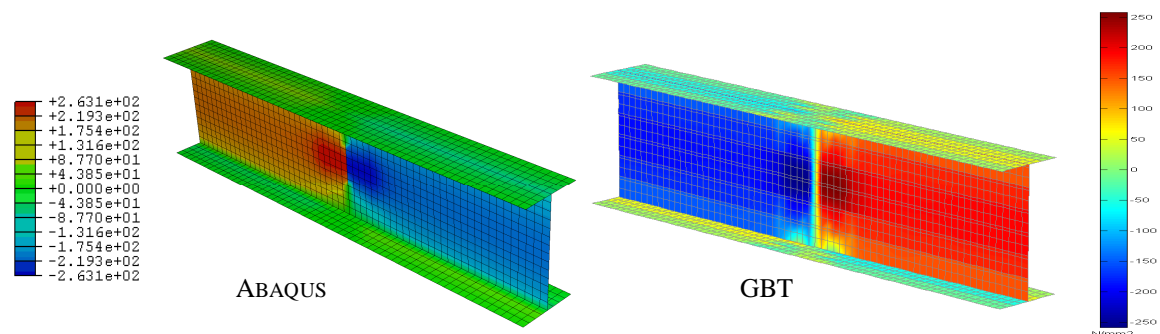


Fig. 11. Representação 3D das tensões de corte de membrana σ_{xs} para o ponto C.

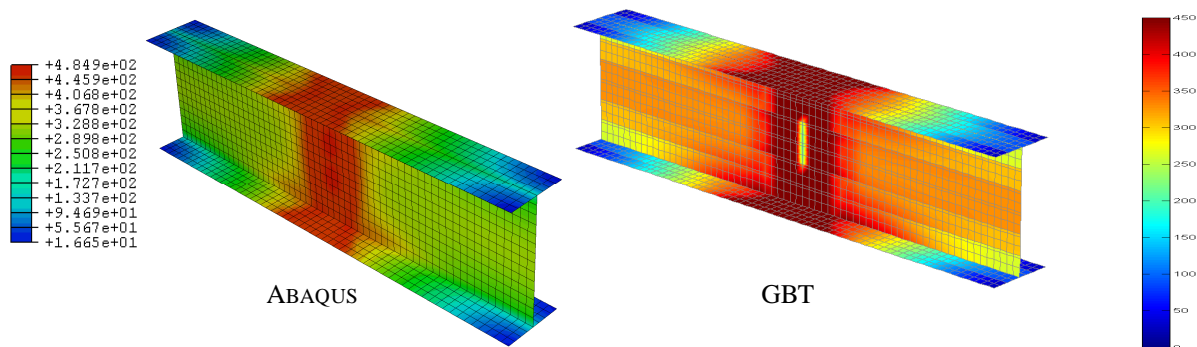


Fig. 12. Representação 3D das tensões de *Von Mises* de membrana σ_{Mises} para o ponto C.

Refere-se que é muito notória a deformação localizada na secção de meio vão, o que se deve à significativa plasticidade associada (i) à componente de flexão (em relação à linha média) da tensão σ_{xx} nos banzos (participação do modo 2 – Fig. 3(a)), (ii) à componente de membrana da tensão σ_{xs} na alma (participação do modo 33 – Fig. 3(b)) e (iii) à componente de membrana da tensão σ_{ss} nos banzos (participação dos modo 48 e 49 – Fig. 3(c)). Note-se que não foram utilizados quaisquer modos locais na análise da GBT.

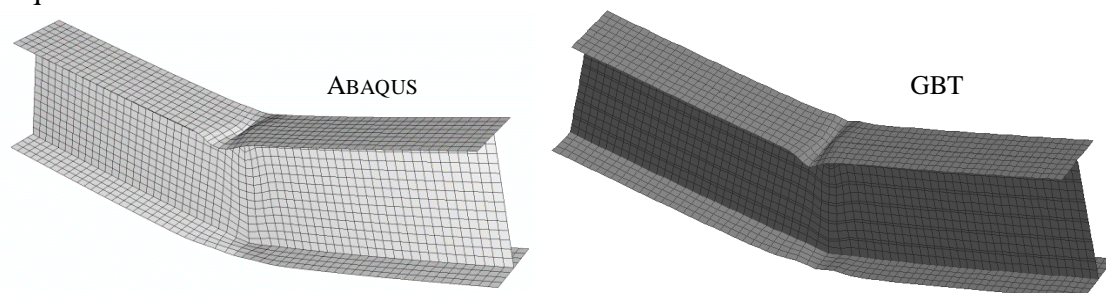


Fig. 13. Configuração deformada da barra para o ponto (C) – mecanismo plástico.

5. Conclusão

Neste artigo, desenvolveu-se uma formulação da GBT para análises elasto-plásticas de 1ª ordem e ilustrou-se a sua aplicação a uma viga simplesmente apoiada com secção em I, constituída por um material elástico-perfeitamente plástico e submetida a cargas concentradas a meio vão. Foram comparados os resultados da GBT com os obtidos através de um modelo de elementos de casca utilizando o programa ABAQUS.

Concluiu-se que os resultados (GBT e ABAQUS) relativos a trajetórias de equilíbrio e configurações deformadas são quase sempre coincidentes. No que respeita a diagramas de tensões numa secção específica, os resultados da GBT são bastante satisfatórios no que respeita a tensões axiais, de corte e de *Von Mises*, mas distintos dos resultados do ABAQUS no que diz respeito a tensões normais transversais. No entanto, as distribuições 3D de tensões normais transversais são qualitativamente semelhantes em todo o domínio da barra. Uma possível solução para evitar tais discrepâncias pode passar pela consideração de um maior número de nós intermédios no modelo da GBT.

A GBT constitui uma ferramenta com enorme potencial para simular o comportamento fisicamente não-linear de barras com secção de parede fina. Embora não tenha sido considerada neste artigo, a presente formulação também permite a incorporação de modos de deformação locais. Num futuro muito próximo, será também incorporada nesta formulação a não-linearidade geométrica com o objectivo de permitir analisar o comportamento intrinsecamente não linear de elementos estruturais de parede fina.

Referências

- [1] Silvestre, N. (2005). Teoria Generalizada de Vigas: Formulações, Implementação Numérica e Aplicações, Tese de Doutoramento em Engenharia Civil, IST, UTL.
- [2] Gonçalves, R., Camotim, D. (2004). GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns, *Computers and Structures*, 82, p. 1473-1484.
- [3] Gonçalves, R., Camotim, D. (2005). Formulation of a physically non-linear beam finite element using generalized beam theory, *Proceedings of the 4th European Conference on Steel and Composite Structures*, Vol. A, 1.2-53, Maastricht (The Netherlands).
- [4] Gonçalves, R., Camotim, D. (2011). Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members, *Thin-Walled Structures*, 49, p.1237-1245.
- [5] Abambres M, Camotim D, Silvestre N (2011). Análise Elasto-Plástica de Barras com Secção de Parede Fina no Contexto da Teoria Generalizada de Vigas, *Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia*, Coimbra, Portugal, 14-17 Junho.
- [6] Morais, V., Vieira, C. (2006). MATLAB 7 & 6, FCA – Editora de Informática, Lisboa.
- [7] Silva, N., Camotim, D., Silvestre, N. (2008). GBT Cross-Section Analysis of Thin-Walled Members with Arbitrary Cross-Sections: A Novel Approach, *Proceedings of the Fifth International Conference on Thin-Walled Structures*, Brisbane, Australia.
- [8] Borst, R. de., Sluys, L.J. (2007). *Computational Methods in Non-linear Solid Mechanics*, Koiter Institute, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [9] Powell, G., Simons, J. (1981). Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.17, pp. 1455-1467.
- [10] Wu, Han-Chin (2005). *Continuum Mechanics and Plasticity*, Chapman & Hall/CRC.
- [11] DS Simulia Inc. ABAQUS Standard (version 6.5), 2004.