



HAL
open science

Análise Inelástica de Pós-Encurvadura de Perfis Metálicos de Parede Fina Utilizando a Teoria Generalizada de Vigas

Miguel Abambres, Dinar Camotim, Nuno Silvestre

► **To cite this version:**

Miguel Abambres, Dinar Camotim, Nuno Silvestre. Análise Inelástica de Pós-Encurvadura de Perfis Metálicos de Parede Fina Utilizando a Teoria Generalizada de Vigas. CMN 2011, Nov 2011, Porto, Portugal. hal-02450454

HAL Id: hal-02450454

<https://hal.science/hal-02450454>

Submitted on 23 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License



IX CONGRESSO DE
Construção Metálica &
e Mista

I CONGRESSO
LUSO-BRASILEIRO DE
Construção Metálica Sustentável

Análise Inelástica de Pós-Encurvadura de Perfis Metálicos de Parede Fina Utilizando a Teoria Generalizada de Vigas

Miguel Abambres^{a,*}, Dinar Camotim^a e Nuno Silvestre^a

^a Departamento de Engenharia Civil, Arquitectura e Georecursos, ICIST, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa

* Autor para contacto. Tel.: +351 934529383; E-mail: miguel.abambres@ist.utl.pt

Resumo. Propõe-se neste trabalho uma formulação inelástica de 2ª ordem da Teoria Generalizada de Vigas (GBT), baseada na teoria de escoamento J_2 , e que constitui uma promissora alternativa ao MEF de casca. A sua aplicação é ilustrada na análise de uma viga em I e de uma coluna em C-reforçado. São validados resultados da GBT por comparação com os obtidos através do Abaqus (trajectórias de equilíbrio, configurações deformadas e perfis de deslocamentos), tendo-se concluído que a natureza modal da GBT permite (i) obter resultados precisos com apenas 22% do número de graus de liberdade usado no Abaqus, bem como (ii) compreender a mecânica comportamental do elemento em qualquer regime elasto-plástico (através da análise dos diagramas de participação modal).

1. Introdução

A elevada resistência e ductilidade dos metais (*e.g.*, aço, alumínio), bem como os recentes avanços na tecnologia de produção, têm permitido a construção de sistemas estruturais altamente eficientes (grandes rácios resistência/peso). Em particular, os elementos de parede fina constituem uma solução construtiva bastante económica (tempos de transporte e construção reduzidos) em diversas áreas das engenharias Aeronáutica, Civil, Mecânica, Química e *Offshore* [1]. A sua elevada esbelteza global e/ou local conduz a um comportamento estrutural dominado por uma forte interacção entre efeitos de plasticidade e de 2ª ordem, o que torna a sua análise uma tarefa bastante complexa. Uma vez que a investigação experimental é deveras limitada devido ao custo e duração bastante elevados, abordagens alternativas devem ser consideradas. A mais utilizada universalmente, recomendada como opção de dimensionamento para estruturas em aço (*e.g.*, [2, 3]), é a realização de análises (de pós-encurvadura) de elementos finitos de casca (AEFC) utilizando leis constitutivas não-lineares – importa lembrar que o conhecimento preciso do comportamento de uma estrutura requer também a simulação da resposta pós-colapso ao nível de cada elemento estrutural [4]. No entanto, as AEFC têm alguns inconvenientes, nomeadamente (i) o grande número de graus de liberdade (g.l.) envolvido e (ii) a natureza nodal dos resultados, em vez da mais tradicional e perceptível “linguagem modal” normalmente adoptada pela comunidade técnico-científica (*e.g.*, esforço normal/extensão axial, momento torsor/rotação de tor-

ção). Uma alternativa muito promissora aos métodos de análise mencionados, a qual permite eliminar os seus inconvenientes, é a utilização da Teoria Generalizada de Vigas (GBT). Apesar do domínio de aplicação corrente (membros prismáticos de parede fina, de eixo recto e sem perfurações) e disseminação serem bastante limitados, a GBT tem sido reconhecida internacionalmente como potente, versátil, elegante e eficiente para analisar elementos/sistemas estruturais de parede fina. A sua elegância e eficiência provêm sobretudo da sua natureza modal única – o campo de deslocamentos é expresso como uma combinação linear de modos de deformação da secção cujas amplitudes variam continuamente ao longo do comprimento da barra. Esta característica permite (i) adquirir um conhecimento aprofundado sobre a mecânica comportamental do elemento estrutural e (ii) judiciosamente excluir, em análises semelhantes, os modos de deformação que tenham um papel desprezável no comportamento em questão, reduzindo ainda mais o número de g.l. envolvidos na análise da GBT (i.e., aumentando a sua eficiência computacional). Formulações (e aplicações) da GBT têm sido extensamente desenvolvidas na Universidade Técnica de Lisboa [5]. Elementos finitos de viga (EFV) para análises elasto-plásticas de 1ª e 2ª ordem foram recentemente propostos por Gonçalves & Camotim [11, 12], baseados na teoria de escoamento J_2 . Em paralelo, Abambres et al. [8-13] desenvolveram e validaram formulações inelásticas alternativas, também baseadas na teoria J_2 mas distinguindo-se das anteriores no facto de (i) os modos de deformação serem determinados pelo procedimento proposto por Silva et al. [14], e (ii) existir um novo g.l. (rotação de empenamento). Muito recentemente, a GBT foi pela primeira vez aplicada (e validada) à análise de pós-encurvadura de elementos constituídos por materiais que exibem endurecimento, nomeadamente colunas tubulares em aço inoxidável [10].

Este trabalho visa (i) apresentar os principais aspectos da formulação inelástica da GBT para análises de 2ª ordem, e (ii) mostrar a sua aplicação e potencial através da discussão de resultados da análise de 2 perfis de parede fina – uma viga em I encastrada-apoiada, e uma coluna bi-encastrada com secção em C-reforçado. Apenas as imperfeições iniciais de carácter geométrico foram incorporadas nas análises – tensões residuais e o efeito dos cantos arredondados da secção foram desprezados. O carácter modal da GBT é realçado através da (i) análise de diagramas de participação modal e (ii) comparação de resultados para diferentes conjuntos de modos de deformação. Para efeitos de validação, alguns resultados da GBT (trajectórias de equilíbrio, configurações deformadas, perfis de deslocamentos) são comparados com os obtidos em AEFC do Abaqus [15].

2. Formulação elasto-plástica de 2ª ordem da GBT

Por questões de limitação de espaço, e uma vez que a formulação da GBT já foi devidamente descrita noutros trabalhos [8, 13, 16], apenas as suas principais linhas orientadoras são aqui apresentadas.

2.1 Cinemática e equação geral de equilíbrio

Considere-se o referencial local (x, s, z) na superfície media de cada parede de um perfil de parede fina, apresentado na Fig. 1, onde x , s e z são as coordenadas longitudinal ($0 \leq x \leq L - L$ é o comprimento do perfil), transversal ($0 \leq s \leq b - b$ é a largura da parede), e com a direcção da espessura ($-e/2 \leq z \leq e/2 - e$ é a espessura da parede), respectivamente – os deslocamentos correspondentes são u (axial ou empenamento), v (transversal) e w (flexão). A análise da GBT divide-se em duas etapas principais, as análises (i) da secção e (ii) da barra. Enquanto que na primeira se determinam os modos de deformação, i.e., os seus perfis de deslocamentos ao longo da linha média da secção ($z=0$) – $u_k(s)$, $v_k(s)$ e $w_k(s)$, onde k representa um modo genérico, na análise da barra determinam-se as funções que definem a variação longitudinal desses perfis, $\zeta_k(x)$, vindo o campo de deslocamentos de membrana dado pela combinação linear

$$u(x, s) = u_k(s) \zeta_{k,x}(x) \quad v(x, s) = v_k(s) \zeta_k(x) \quad w(x, s) = w_k(s) \zeta_k(x) \quad , \quad (1)$$

onde k é um índice mudo. A análise da secção implementada foi baseada na proposta de Silva et al. [14], a qual considera 4 famílias de modos de deformação: convencionais, corte, extensão transversal e fluxo de corte celular – informação detalhada sobre a sua determinação pode também ser obtida em [16]. As análises da secção da GBT propostas até então, (i) consideram três (u, v, w) ou quatro (u, v, w, θ_x – rotação em torno do eixo x) g.l. nodais, e (ii) requerem um nível de discretização elevado de modo a capturar as variações não-lineares dos perfis de deslocamentos axiais que resultam da deformação por corte e/ou espalhamento de plasticidade. Por este motivo, a análise da secção proposta neste trabalho adopta um novo g.l., o qual corresponde a uma rotação em torno do eixo local z (Fig. 1(a)), denominada “rotação de empenamento” (θ_z) – em cada nó, considera-se uma rotação independente por parede (direcção) convergente. A utilização deste g.l. permite aproximar cada perfil de empenamentos $u_k(s)$ através de polinómios cúbicos (em vez de funções lineares) em cada sub-placa da secção discretizada – ver as configurações dos modos de corte apresentadas na sub-secção 3.1.

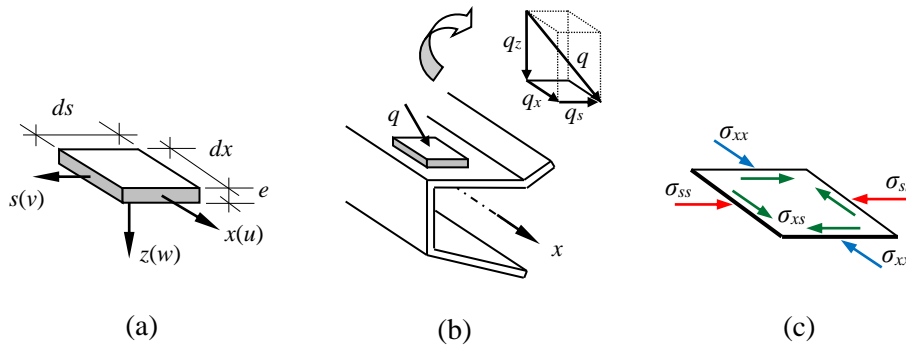


Fig. 1: (a) Referencial local na superfície média de cada parede, (b) carga exterior distribuída genérica $q(x,s)$ e (c) componentes de tensão não-nulas (hipótese de estado plano de tensão).

Com base na hipótese fundamental da GBT de estado plano de tensão, a equação geral de equilíbrio obtida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais vem dada por

$$\int \int \int_L \int_b \int_e (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{ss} \delta \varepsilon_{ss} + \sigma_{xs} \delta \gamma_{xs}) dz ds dx = \int \int_L \int_b [(q_x u_i) \delta \zeta_{i,x} + (q_s v_i + q_z w_i) \delta \zeta_i] ds dx \quad , \quad (2)$$

onde (i) σ_{xx} , σ_{ss} e σ_{xs} são as componentes de tensão axial, transversal e de corte do tensor 2° *Piola-Kirchhoff* (ver Fig. 1(c)), (ii) q_x , q_s e q_z são as componentes locais de uma força exterior distribuída genérica aplicada na superfície média da barra (ver Fig. 1(b)), e (iii) $\delta \varepsilon_{xx}$, $\delta \varepsilon_{ss}$ e $\delta \gamma_{xs}$ são as componentes virtuais de deformação do tensor *Green-Saint-Venant* (funções não-lineares dos deslocamentos u, v e w – ver Eq. (1)). Refira-se ainda que esta formulação permite considerar (i) imperfeições iniciais (geométricas e tensões residuais) e (ii) carregamentos arbitrários dependentes de um único parâmetro de carga (λ), incluindo forças/momentos concentrados.

2.2 Elemento finito de viga não-linear

A determinação rigorosa de configurações de equilíbrio numa análise não-linear requer a utilização de uma estratégia incremental-iterativa. O método do comprimento de arco cilíndrico [17] é adoptado e a sua implementação envolve (i) o estabelecimento de equações de equilíbrio incremental com base na matriz de rigidez tangente (K_{tan}), e (ii) a determinação do vectores de forças internas (f^{int}) – a estratégia iterativa adoptada denomina-se caminho independente [18]: os incrementos de deformação em cada ponto de integração de *Gauss* são calculados em relação à configuração de equilíbrio inicial do incremento corrente. Os resultados apresentados na secção 3 foram obtidos através de aproximações das funções de amplitude modais no domínio de

cada elemento finito de viga (EFV), definidas com base em polinómios cúbicos de *Hermite* através de

$$\zeta_{k,x}^{v,w=0}(x) = \Psi_H(x) d_k \quad \zeta_k^{v,w \neq 0}(x) = \Psi_H(x) d_k \quad , \quad (3)$$

onde (i) Ψ_H é o vector (1x4) dos polinómios de *Hermite*, (ii) d_k é o vector (4x1) de deslocamentos relativo à aproximação do modo k , (iii) a primeira expressão diz respeito apenas aos modos de extensão axial e de corte (sem deslocamentos no plano da secção: $v=w=0$), e (iv) a segunda expressão aplica-se a todos os restantes modos de deformação ($v \neq 0$ e/ou $w \neq 0$). Definida que está a aproximação do EFV, a sua introdução na Eq. (2) ($L=L_e$) origina

$$f^{\text{int}} = \lambda \bar{f} \quad , \quad (4)$$

onde \bar{f} é o vector de forças externas para $\lambda=1$. A i -ésima “componente” do vector de forças internas (sub-vector 4x1 associado ao modo de deformação i) pode ser obtida através de

$$f_i^{\text{int}} = f_{i(xx)}^{\text{int}} + f_{i(ss)}^{\text{int}} + f_{i(xs)}^{\text{int}}, \quad f_{i(mn)}^{\text{int}} = \int_{L_e} \int_b \int_e \sigma_{mn} F_{i(mn)}^{\text{int}} dz ds dx \quad (mn = xx, ss, xs) \quad , \quad (5)$$

onde $F_{i(mn)}^{\text{int}}$ é um vector 4x1 – note-se que todos os vectores de deslocamentos (ver Eq. (3)) e componentes de tensão (ver Eq. (5)) dizem respeito a uma “configuração de equilíbrio” genérica (enquanto o critério de convergência do processo iterativo não for verificado, esta configuração não satisfaz equilíbrio para o carregamento exterior aplicado). Uma vez definido o vector de forças internas, a equação de equilíbrio incremental do EFV para uma configuração deformada arbitrária (j) vem dada por

$$K_{\text{tan}} \Big|_j \Delta d = \Delta \lambda \bar{f} \quad , \quad (6)$$

onde (i) d é o vector de deslocamentos, e (ii) a (i, p) -ésima “componente” (sub-matriz 4x4) da matriz de rigidez tangente, associada aos modos de deformação i e p , vem definida por

$$K_{ip,\text{tan}} = \frac{\partial f_i^{\text{int}}}{\partial d_p}, \quad \frac{\partial f_i^{\text{int}}}{\partial d_{pl}} = \frac{\partial f_{i(xx)}^{\text{int}}}{\partial d_{pl}} + \frac{\partial f_{i(ss)}^{\text{int}}}{\partial d_{pl}} + \frac{\partial f_{i(xs)}^{\text{int}}}{\partial d_{pl}} \quad , \quad (7)$$

a qual corresponde à matriz Jacobiana da i -ésima componente do vector de forças internas em relação ao vector de deslocamentos do modo p , cujas componentes são d_{pl} ($l=1, \dots, 4$). As colunas dessa matriz são definidas pela segunda expressão da Eq. (7), vindo cada termo definido por (recorde a Eq. (5))

$$\frac{\partial f_{i(mn)}^{\text{int}}}{\partial d_{pl}} = \int_{L_e} \int_b \int_e \left\{ \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial d_{pl}} F_{i(mn)}^{\text{int}} + \sigma_{mn} \frac{\partial F_{i(mn)}^{\text{int}}}{\partial d_{pl}} \right\} dz ds dx, \quad (mn = xx, ss, xs) \quad , \quad (8)$$

com as tensões, gradientes de tensões e vectores de deslocamentos calculados na configuração de equilíbrio j . Para um material elasto-plástico arbitrário, os gradientes de tensões em qualquer ponto material são definidos por

$$\frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial d_{pl}} = \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{xx}} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial d_{pl}} + \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \varepsilon_{ss}} \frac{\partial \varepsilon_{ss}}{\partial d_{pl}} + \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial \gamma_{xs}} \frac{\partial \gamma_{xs}}{\partial d_{pl}} \quad , \quad (9)$$

onde os gradientes de deformação $\partial \varepsilon / \partial d_{pl}$ são obtidos após escrever as relações deformação-deslocamentos em função da aproximação do EFV dada pelas Eqs. (3). Os valores das componentes de tensão (Eqs. (5) e (8)) e dos gradientes $\partial \sigma / \partial \varepsilon$ (Eq. (9)) em regime elasto-plástico são obtidos através (i) da teoria de escoamento J_2 com escoamento associado e (ii) de um método de integração numérica implícito e/ou explícito – o método de *Euler* regressivo foi utilizado nas análises abordadas na secção 3. Uma vez que uma descrição detalhada do modelo de plasticidade implementado pode ser encontrada na literatura (e.g., [10, 11, 17, 19]), a correspondente formulação não é aqui apresentada.

Por último, no que respeita à imposição de condições de fronteira, foi concluído em análises de 2ª ordem que a melhor forma de minimizar o efeito de *shear locking* (para além do refinamento da

malha na zona afectada) em secções impedidas de empenar e sujeitas a tensões de corte (σ_{xs}) – resultante da incapacidade da GBT em garantir simultaneamente a compatibilidade cinemática e estática, consiste em satisfazer as condições de fronteira cinemáticas, i.e., impor $\zeta_{k,x}=0$ (ver Eq. (1)).

3. Exemplos ilustrativos

A aplicação da formulação elasto-plástica de pós-encurvadura da GBT, implementada em Matlab R2010b [20], é agora ilustrada através de dois exemplos numéricos, nomeadamente (i) uma viga em I encastrada-apoiada, sujeita a uma carga concentrada no banzo superior (ver Fig. 2) e caracterizada por uma imperfeição geométrica com a forma do modo crítico de instabilidade (flexão-torção – $\lambda_{cr}=3.10$) e amplitude (máximo deslocamento no plano) de 3.02 mm, e (ii) uma coluna bi-encastrada uniformemente comprimida com secção em C-reforçado (carga F está distribuída na secção – ver Fig. 3), a qual exhibe uma imperfeição geométrica dada pelo modo crítico de instabilidade (distorcional com 3 semi-ondas – $\lambda_{cr}=125.14$) com amplitude de 2.06 mm (foram desprezadas tensões residuais e cantos arredondados da secção em ambos os exemplos). O modelo material adoptado nos dois problemas é bi-linear, estando as propriedades indicadas na Tab. 1 (E – módulo de Young, E_{sh} – declive de endurecimento, ν – coeficiente de Poisson, σ_0^y – tensão de cedência inicial). Os resultados da GBT (trajectórias de equilíbrio, diagramas de participação modal, mecanismos de colapso e perfis de deslocamentos) são discutidos nas secções 3.2-3.3, e validados por comparação com resultados de AEFC do Abaqus, onde a curva tensão-deformação deve ser introduzida pelos valores da tensão e extensão plástica verdadeiras (σ^t e $\varepsilon^{(p)}$) relativas ao comportamento à compressão, obtidas em função dos valores absolutos da tensão e extensão nominais (σ^n e ε^n) por

$$\varepsilon^{(p)} = -\ln(1 - \varepsilon^n) - \frac{\sigma^t}{E} \quad \sigma^t = \sigma^n (1 - \varepsilon^n) \quad . \quad (10)$$

Tabela 1: Exemplos ilustrativos: propriedades materiais

Exemplo	E (N/mm ²)	E_{sh} (N/mm ²)	ν	σ_0^y (N/mm ²)
Viga em I	210000	$E/100$	0.3	235
Coluna em C	200000	0	0.3	450

Tabela 2: Exemplos ilustrativos: discretização das malhas de EF e n° de g.l.

Exemplo	GBT		ABAQUS		Número de g.l.		
	EFV	Sub-Placas	EFC (x)	EFC (s)	GBT	ABQ	GBT/ABQ (%)
Viga em I	68						
	6: $x \leq 0.04L$						
	25: $0.04L \leq x \leq 0.45L$	39	360	39	18659	86280	21.6
	12: $0.45L \leq x \leq 0.55L$						
	25: $x \geq 0.55L$						
Coluna em C	86 (uniforme)	42	244	42	13527	62953	21.5

No que respeita às malhas de EF adoptadas em cada modelo, a Tab. 2 indica o número de (i) sub-placas (ver discretização da secção na sub-secção 3.1) e EFV utilizados na GBT, (ii) EFC (tipo S4) utilizados no Abaqus nas direcções longitudinal (x) e transversal (s) – originando malhas praticamente uniformes, e (iii) g.l. utilizados na GBT e no Abaqus. Relativamente ao número de pontos de integração de Gauss utilizado na GBT por EFV, os valores (2, 5, 3) e (2, 3, 3) dizem respeito às direcções (s ,

z , x) de cada sub-placa (ver Fig. 1(a)) dos modelos da viga e da coluna, respectivamente (no Abaqus adoptaram-se os mesmos valores da GBT na direcção z).

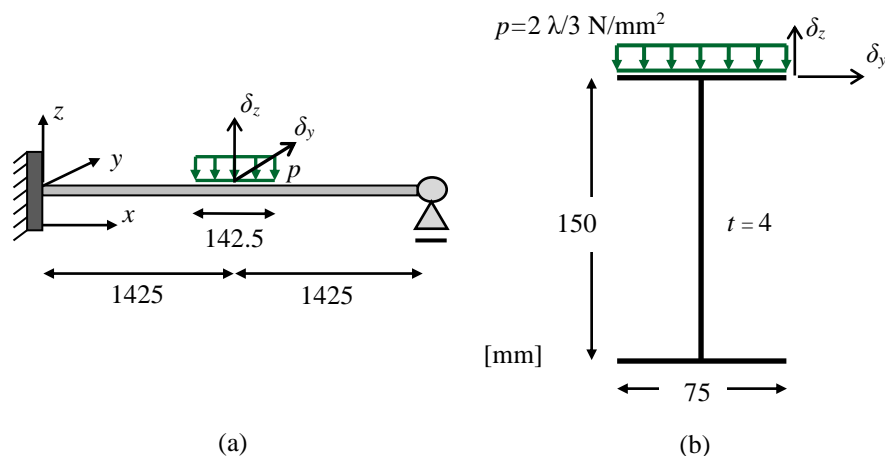


Fig. 2: Viga em I encastrada-apoiada: (a) vista geral e carregamento, e (b) dimensões da secção (linha média).

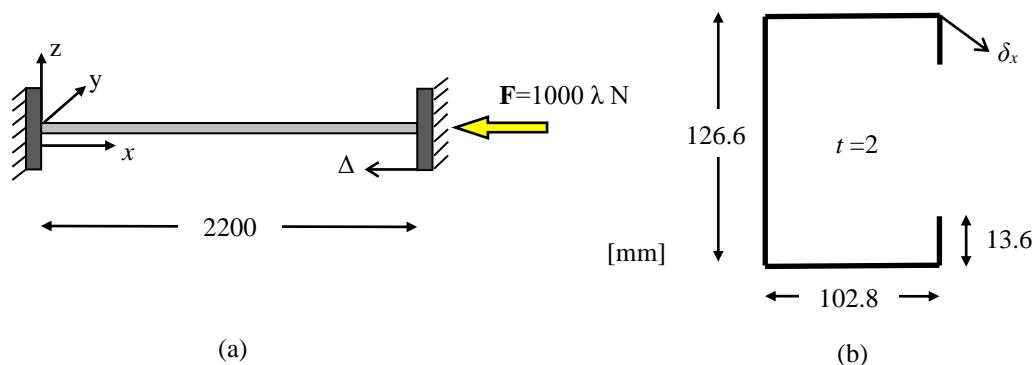


Fig. 3: Coluna em C bi-encastrada: (a) vista geral e carregamento, e (b) dimensões da secção (linha média).

Quanto aos resultados apresentados nas sub-secções 3.2-3.3, importa referir que: (i) dizem respeito a pontos localizados na superfície média do perfil, (ii) os pontos indicados nas trajectórias de equilíbrio como BP (*before peak*), P (*peak* – carga última) e AP (*after peak*) são estados de equilíbrio utilizados posteriormente na comparação de resultados, e (iii) o diagrama de participação modal da GBT (definição em [12]) traduz a evolução da configuração da secção mais deformada ao longo da trajectória de equilíbrio, sendo a contribuição de cada modo quantificada pelo rácio entre o seu deslocamento máximo e a soma de todos os deslocamentos modais máximos nessa secção (não necessariamente relativos ao mesmo ponto) – note-se ainda que as imperfeições geométricas não foram incluídas no diagrama.

3.1 Modos de deformação da GBT

No que respeita aos modos de deformação da GBT utilizados em cada análise, apresenta-se de seguida (i) o número de modos por tipo (ver Tab. 3): globais (G), distorcionais (D), locais (L), corte (C) e extensão transversal (ET), e (ii) as configurações no plano e perfis axiais dos modos mais relevantes (ver Figs. 4-5) – a discretização da secção está indicada junto da configuração dos modos de ET. Relativamente ao critério de selecção dos modos, importa referir que: (i) os modos globais, distorcionais e locais mais relevantes, são facilmente escolhidos em função do carregamento e imperfeição inicial, e

Tabela 3: Número de modos de deformação da GBT usados em cada análise.

Exemplo	G	D	L	C	ET	Usados/Total
Viga em I	4	0	13	81	39	137/202
Coluna em C	2	1	6	47	23	79 / 219

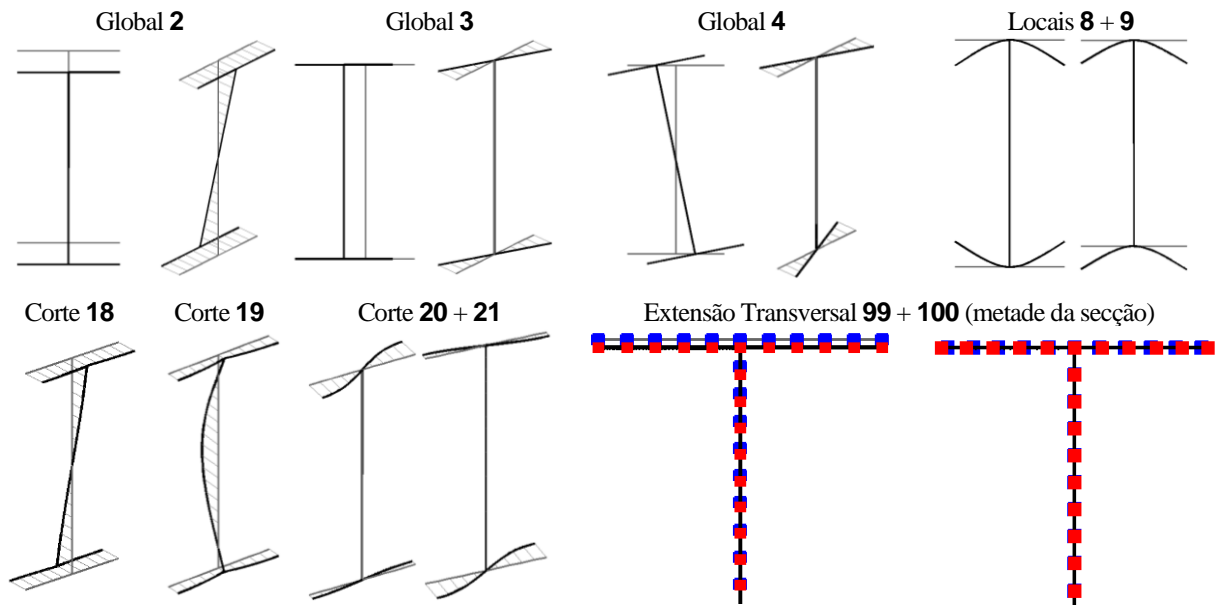


Fig. 4: Viga em I: Configurações no plano e perfis axiais dos 11 modos de deformação da GBT mais relevantes.

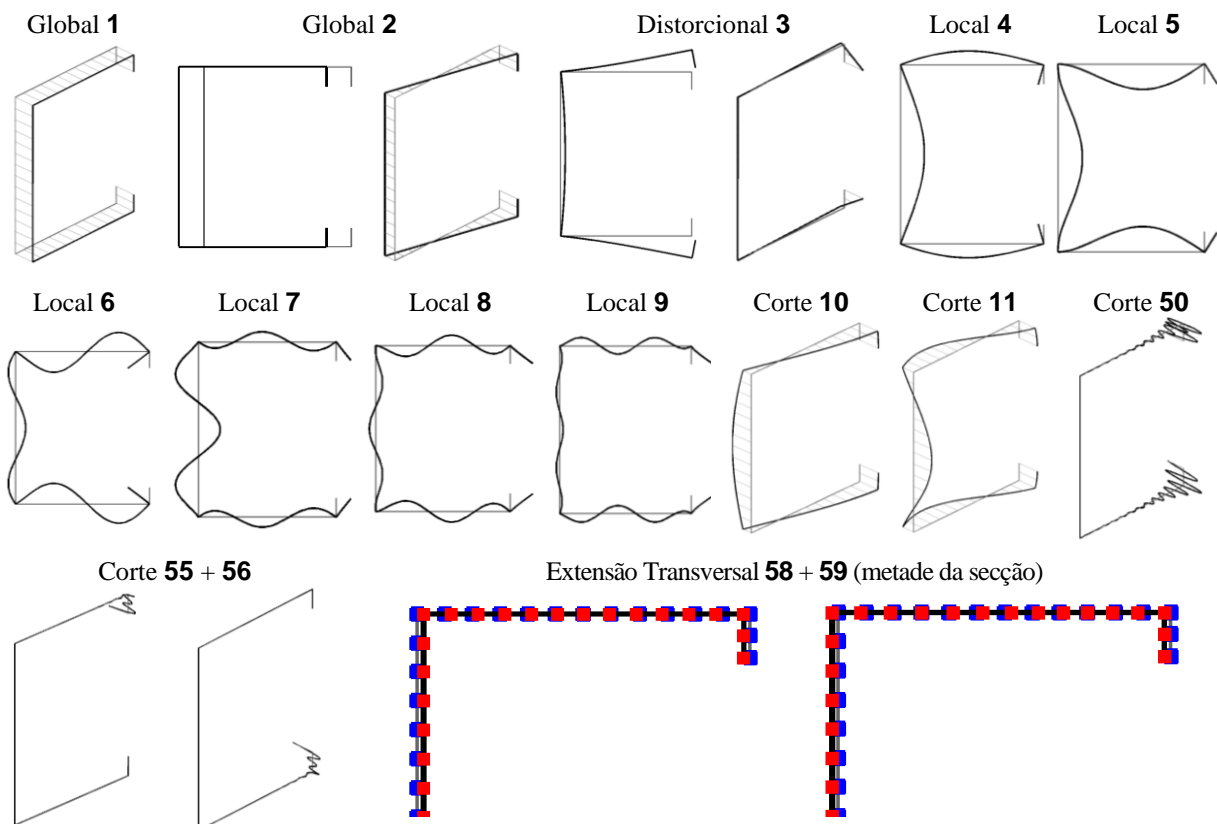


Fig. 5: Coluna em C: Configuração no plano e perfis axiais dos 16 modos de deformação da GBT mais relevantes.

(ii) os restantes modos, maioritariamente utilizados para captar efeitos física e/ou geometricamente não lineares “de ordem superior”, são seleccionados com base em (ii₁) bom senso, excluindo modos

com energia de deformação elevada, (ii₂) considerações de simetria (e.g., a maioria dos modos para a secção em C são simétricos em relação ao eixo horizontal – ver Fig. 5), e/ou (ii₃) experiência adquirida – e.g., os modos de corte associados a modos globais de flexão são facilmente identificados.

3.2 Viga em I

A Fig. 6(a) apresenta as trajectórias de equilíbrio $\lambda(|\delta_y|)$ da GBT e do Abaqus, onde $|\delta_y|$ é o deslocamento lateral a meio vão do ponto indicado na Fig. 2(b). As Figs. 6(b) e 7(a) representam o diagrama de participação modal da GBT e o mecanismo de colapso da viga (configuração de equilíbrio AP). A observação destes resultados permite tirar as seguintes conclusões:

(i) As curvas da GBT e do Abaqus apresentam uma concordância muito boa – a diferença máxima é de 4.8%, verificando-se num estado avançado de pós-colapso (ponto AP).

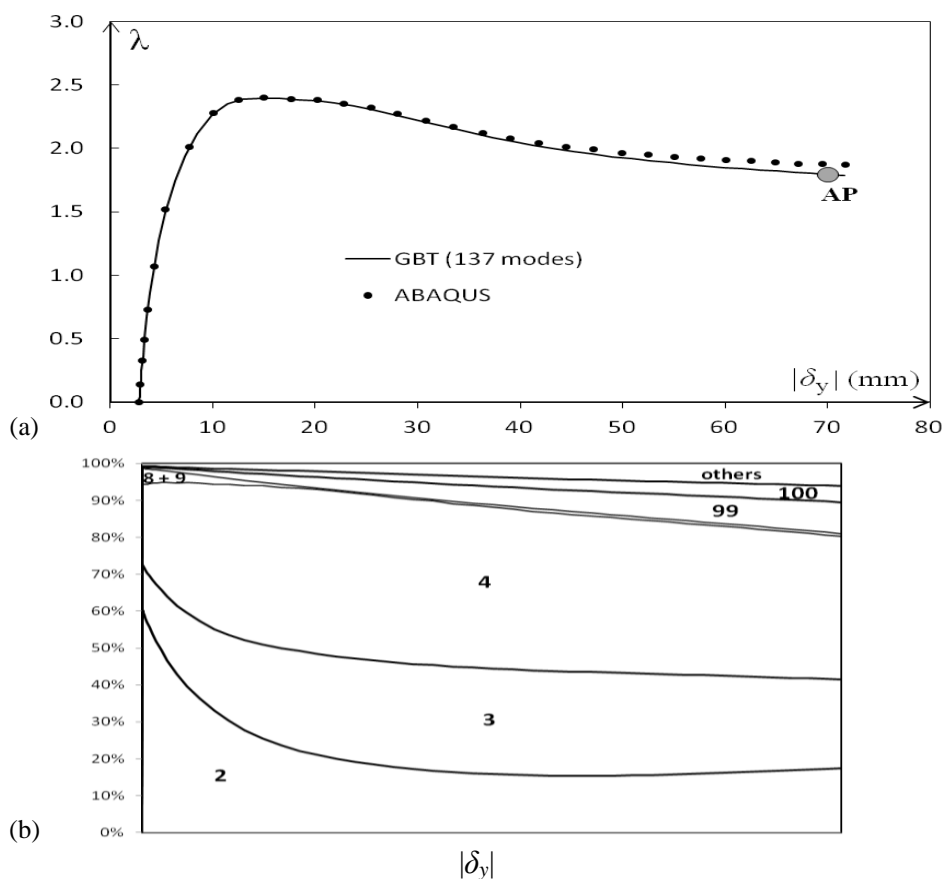


Fig. 6: Viga em I: (a) trajectória de equilíbrio λ vs. $|\delta_y|$, e (b) diagrama de participação modal da GBT.

(ii) O comportamento da viga é maioritariamente de natureza global, nomeadamente devido à participação dos modos 2 (flexão na maior inércia – 15.4-60.7%), 3 (flexão na menor inércia – 12.0-28.7%) e 4 (torção – 21.6-44.9%). Os modos de extensão transversal 99 (alma) e 100 (banzo superior) apresentam uma participação conjunta que cresce gradualmente ao longo da trajectória de equilíbrio até ao valor de 13% – a sua exclusão da análise conduziria a um aumento significativo de rigidez da resposta, devido à restrição que provocaria aos deslocamentos significativos da secção no seu plano (ver Fig. 7(a)). Quanto aos modos 8 e 9, associados à flexão transversal do banzo superior/carregado (ver Fig. 4 – note que os modos opõem-se no banzo inferior), apenas exibem alguma relevância na fase ascendente da trajectória (máxima participação conjunta de 4.3%).

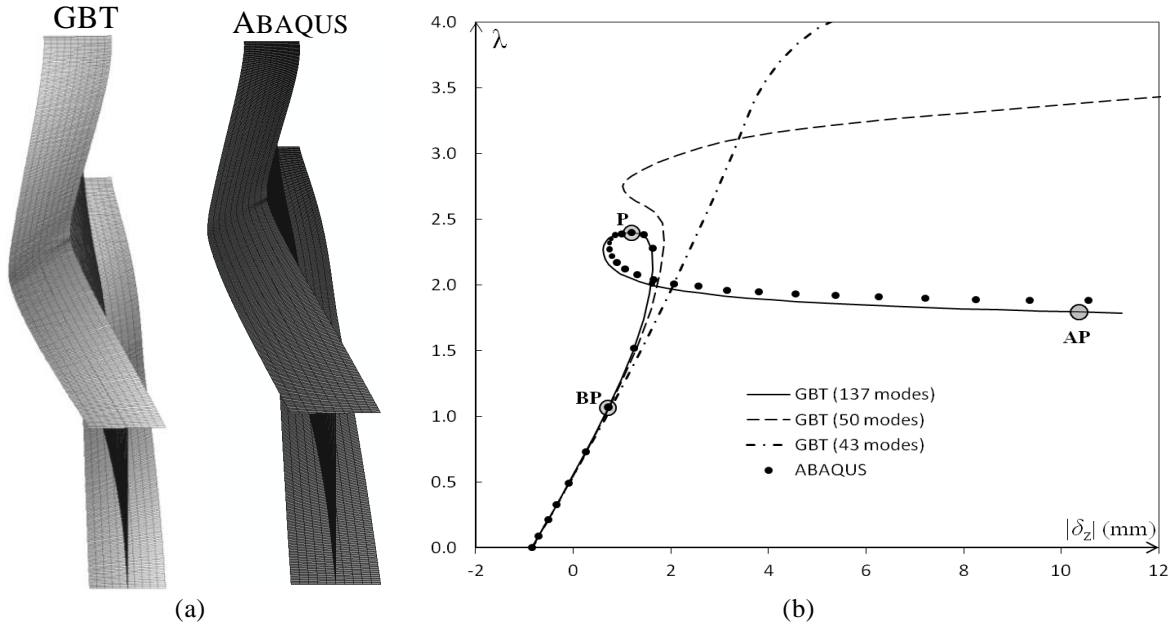


Fig. 7: Viga em I: (a) mecanismo de colapso (configuração AP), e (b) trajectórias de equilíbrio λ vs. $|\delta_z|$.

(iii) Para além da notável semelhança entre os mecanismos de colapso obtidos pela GBT e pelo Abaqus, note-se que (iii₁) surge uma linha de cedência no banzo superior da secção mais deformada, e (iii₂) ao contrário do banzo inferior, o banzo superior empena consideravelmente no apoio rotulado, consequência da oposição dos modos 3 e 4 no banzo inferior (ver Fig. 4).

No que respeita ao deslocamento vertical a meio vão ($|\delta_z|$) do ponto indicado na Fig. 2(b), a Fig. 7(b) mostra as trajectórias de equilíbrio obtidas pelo Abaqus e três análises da GBT, as quais adoptam (i) os 137 modos inicialmente seleccionados (ver Tab. 3), correspondendo a 18659 g.l., (ii) os 43 modos mais relevantes (4 globais, 3 locais, 15 de corte e 21 de extensão transversal), incluindo os representados na Fig. 4 e envolvendo 5837 g.l., ou (iii) 50 modos (6762 g.l.), incluindo todos os modos de extensão transversal e apenas 4 globais, 2 locais e 5 de corte (os mais relevantes do conjunto anterior). A comparação das quatro curvas mencionadas origina os seguintes comentários:

(i) As diferenças entre as curvas do Abaqus e da GBT (137 modos) não excedem os 4.9%. Os valores $\{|\delta_z|, \lambda\}$ correspondentes aos pontos BP, P e AP indicados são: (i₁) $\{0.71, 1.06\}_{GBT}$ e $\{0.72, 1.07\}_{ABQ}$, (i₂) $\{1.19, 2.40\}_{GBT}$ e $\{1.20, 2.40\}_{ABQ}$, e (i₃) $\{10.36, 1.79\}_{GBT}$ e $\{10.55, 1.88\}_{ABQ}$, respectivamente.

(ii) A tendência oposta da variação (aumento/redução) das participações dos modos 4 (torção) e 2 (flexão na maior inércia) até à carga última (ver Fig. 6(b)), é responsável pelo aumento de rigidez da resposta e subsequente reversão do deslocamento observados na Fig. 7(b).

(iii) A relevância dos modos de extensão transversal é traduzida pela melhoria clara da curva da GBT quando são usados 50 modos em vez de 43.

3.3 Coluna em C

A Fig. 8(a) exhibe as trajectórias de equilíbrio $\lambda(\Delta)$ do Abaqus e da GBT, onde Δ é o deslocamento axial da extremidade da coluna. Foram realizadas duas análises da GBT, incluindo (i) 128 modos inicialmente seleccionados (4 globais, 1 distorcional, 7 locais, todos os de corte e 27 de extensão transversal), totalizando 21941 g.l., ou (ii) os 79 modos especificados na Tab. 3 (13527 g.l.): os modos simétricos mais relevantes do conjunto anterior, e todos os de corte e de extensão transversal associados a deformações localizadas nos reforços dos banzos. A Fig. 8(b) representa o diagrama de participação modal da GBT (análise com 79 modos), concluindo-se da análise destas Figs. que:

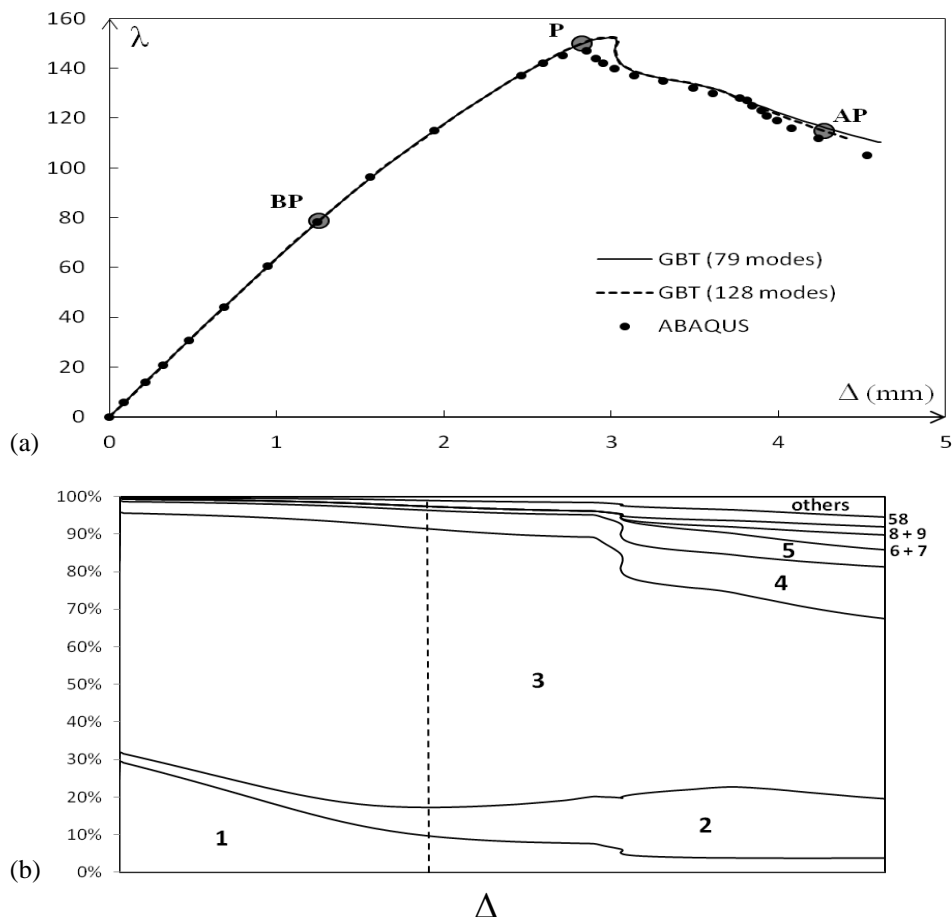


Fig. 8: Coluna em C: (a) trajectória de equilíbrio λ vs. Δ , e (b) diagrama de participação modal da GBT.

(i) A curva $\lambda(\Delta)$ da GBT obtida com 128 modos compara bastante bem com a obtida no Abaqus – p.e., as cargas últimas apenas diferem 3.7% ($\lambda_{u,GBT}=152.37$ e $\lambda_{u,ABQ}=147.00$), e os valores $\{\Delta, \lambda\}$ dos pontos BP, P e AP assinalados são: (i₁) $\{1.25, 78.83\}_{GBT}$ e $\{1.24, 78.40\}_{ABQ}$, (i₂) $\{2.82, 149.89\}_{GBT}$ e $\{2.85, 147.00\}_{ABQ}$, e (i₃) $\{4.27, 114.89\}_{GBT}$ e $\{4.24, 112.00\}_{ABQ}$, respectivamente.

(ii) As curvas da GBT obtidas com 128 e 79 modos, praticamente coincidem em quase todo o domínio – os 49 modos adicionais têm uma influência diminuta numa fase avançada de pós-colapso.

(iii) A Fig. 8(b) mostra claramente que os modos 1 (extensão axial – 3.8-29.4%), 2 (flexão na menor inércia – 2.3-18.9%), 3 (distorcional – 47.9-74.7%), 4 (local – 3.1-13.8%) e 5 (local – 0.7-5.8%) dominam o comportamento da coluna. A natureza distorcional é preponderante pelo facto do modo crítico de instabilidade ser distorcional (apesar da pequena contribuição de modos locais) e a sua carga ser consideravelmente inferior à do primeiro modo local ($\lambda_{cr,dist}=125.14$ vs $\lambda_{b,loc}=158.61$).

(iv) A participação do modo 2 (flexão na menor inércia) aumenta visivelmente um pouco antes da carga última, tendência que se estende para a trajectória descendente. Este comportamento é consequência da excentricidade de carga que surge devido ao deslocamento do centro de rigidez da secção em direcção à alma – há uma redistribuição de tensões normais associada à ocorrência de deformações locais e/ou distorcionais. A cedência da superfície média da coluna inicia-se na região dos reforços (sensivelmente a partir da linha vertical indicada na Fig. 8(b)), facto que também contribui para a referida excentricidade.

(v) Após início da cedência, participações crescentes dos modos 2 (flexão na menor inércia) e 4-9 (locais) substituem gradualmente a do modo 3 (distorcional) – o mecanismo de colapso da coluna ilustrado na Fig. 9(a), evidencia a ocorrência de instabilidade local da alma a meio vão.

Por último, a Fig. 9(b) ilustra os perfis de deslocamentos axiais referentes ao nó de ligação banzo superior-reforço (ver Fig. 3(b)), e para os estados de equilíbrio BP, P e AP – conclui-se que:

(i) Os perfis de deslocamentos da GBT obtidos com 128 e 79 modos de deformação estão praticamente coincidentes – a excepção é o estado AP, onde as diferenças não excedem os 2%. Consequentemente, a análise da GBT com 79 modos pode ser tomada como “exacta” (note-se a semelhança com os resultados do Abaqus).

(ii) A perda de rigidez axial na zona de meio vão quando se evolui na trajectória de equilíbrio, traduz o desenvolvimento do mecanismo de colapso apresentado na Fig. 9(a), o qual é caracterizado pela (ii₁) concentração de deformações plásticas na região central da coluna (note-se as linhas de cedência em ambos os banzos), e (ii₂) ocorrência de descargas elásticas nas zonas adjacentes (note-se a redução do declive dos perfis axiais entre os estados P e AP).

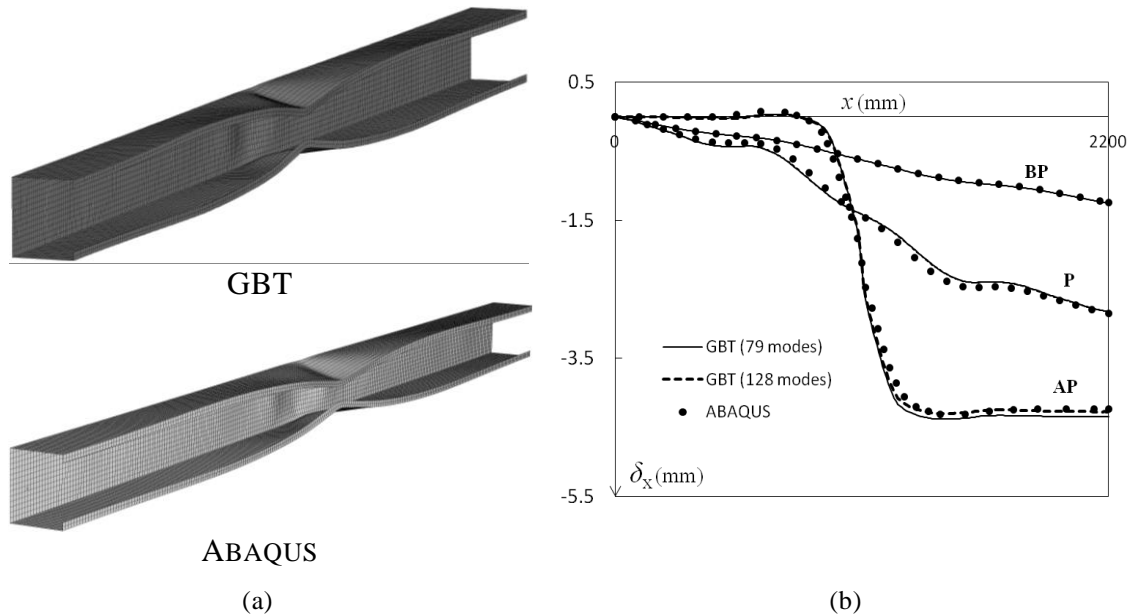


Fig 9: Coluna em C: (a) mecanismo de colapso (estado de equilíbrio AP), (b) perfis de deslocamentos axiais (δ_x) do nó de ligação banzo superior-reforço (configurações BP, P e AP).

4. Conclusões

Após apresentação de uma formulação da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) para análises inelásticas de pós-encurvadura, válida para materiais isotrópicos com endurecimento arbitrário, ilustrou-se o seu potencial através da análise de uma viga em I e de uma coluna em C-reforçada. Após discussão e validação dos resultados (trajectórias de equilíbrio, mecanismos de colapso e perfis de deslocamentos) por comparação com simulações de EF de casca do Abaqus, conclui-se que:

(i) A análise de diagramas de participação modal e de resultados da GBT obtidos com vários conjuntos de modos de deformação, permitem aprofundar o conhecimento sobre a mecânica comportamental da barra em qualquer regime elasto-plástico.

(ii) A GBT constitui uma alternativa muito promissora aos modelos de EF de casca na análise do comportamento estrutural de perfis de parede fina, uma vez que foram obtidos resultados muito precisos com apenas 22% do número de graus de liberdade requerido pelo Abaqus.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do projecto PTDC/ECM/108146/2008 (“Teoria Generalizada de Vigas – Desenvolvimentos, Aplicações e Disseminação”) e da bolsa de doutoramento atribuída ao primeiro autor (SFRH/BD/43271/2008).

Referências

- [1] Loughlan J (ed.). *Thin-Walled Structures - Advances in Research, Design and Manufacturing Technology*, Institute of Physics Publishing (Bristol), 2004.
- [2] Comité Européen de Normalisation (CEN). *Eurocode 3 - Design of Steel Structures - Part 1.5: General Rules and Supplementary Rules for Plated Structures*, EN1993-1-5, Brussels, 2006.
- [3] American Institute of Steel Construction (AISC). *Specification for Structural Steel Buildings*, ANSI/AISC 360-10, Chicago (IL), 2010.
- [4] Hiriyur BKJ, Schafer BW. “Yield-line Analysis of Cold-formed Steel Members”, *International Journal of Steel Structures*, 5(1), 43-54, 2005.
- [5] Camotim D, Basaglia C, Silva NF, Silvestre N. “Numerical analysis of thin-walled structures using Generalised Beam Theory (GBT): recent and future developments”, *Computational Technology Reviews*, 1, B. Topping *et al.* (eds.), Saxe-Coburg Publications (Stirlingshire), 315-354, 2010.
- [6] Gonçalves R, Camotim D. “Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members”, *Thin-Walled Structures*, 49(10), 1237-1245, 2011.
- [7] Gonçalves R, Camotim D. “Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled metal members”, *Thin-Walled Structures*, 51(February), 121-129, 2012.
- [8] Abambres M, Camotim D, Silvestre N. “Geometrically and physically non-linear GBT-based analysis of thin-walled steel members”, *Proceedings of Tenth International Conference on Advances in Steel Concrete Composite and Hybrid Structures* (ASCCS – Singapore, 2-4/7), J.R. Liew, S.C. Lee (eds.), Research Publishing (Singapore), 187-195, 2012.
- [9] Abambres M, Camotim D, Silvestre N. “GBT-based first-order analysis of elastic-plastic thin-walled steel members exhibiting strain-hardening”, *IES Journal A: Civil and Structural Engineering* (Singapore), 6(2), 119-134, 2013a.
- [10] Abambres M, Camotim D, Silvestre N. “GBT-based elastic-plastic post-buckling analysis of stainless steel thin-walled members”, *submetido para publicação*, 2013b.
- [11] Abambres M, Camotim D, Silvestre N. “Physically non linear GBT analysis of thin-walled members”, *Computers & Structures*, in press, 2013c.
- [12] Abambres M, Camotim D, Silvestre N. “Modal decomposition of elastic-plastic mechanisms”, *submetido para publicação*, 2013d.
- [13] Abambres M., Camotim D., Silvestre N., Rasmussen, K.J.R. GBT-based structural analysis of elastic-plastic thin-walled members, *submetido para publicação*, 2013.
- [14] Silva NF, Camotim D, Silvestre N. “GBT cross-section analysis of thin-walled members with arbitrary cross-sections: a novel approach”, *Proceedings of Fifth International Conference on Thin-Walled Structures* (ICTWS – Brisbane, 18-20/6), M. Mahendran (ed.), 1189-1196, 2008.
- [15] DS Simulia Inc.. *Abaqus Standard Manual* (version 6.7-5), 2008.
- [16] Abambres M. *Análises Elasto-plásticas de 1ª e 2ª Ordem de Perfis Metálicos de Parede Fina utilizando a Teoria Generalizada de Vigas*, Tese de Doutoramento em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa (submetida em 2013).
- [17] De Borst R, Crisfield M, Remmers J, Verhoosel CV. *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures* (2nd edition), John Wiley & Sons (Chichester), 2012.
- [18] Powell G, Simons J. “Improved iteration strategy for nonlinear structures”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(10), 1455-1467, 1981.
- [19] Wu HC. *Continuum Mechanics and Plasticity*, Chapman & Hall/CRC Press (Boca Raton), 2005.
- [20] MathWorks. *MATLAB documentation* (www.mathworks.com/help/matlab), 2010.