



**HAL**  
open science

# ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA DE BARRAS COM SECÇÃO DE PAREDE FINA NO CONTEXTO DA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS

Miguel Abambres, D Camotim, N Silvestre

► **To cite this version:**

Miguel Abambres, D Camotim, N Silvestre. ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA DE BARRAS COM SECÇÃO DE PAREDE FINA NO CONTEXTO DA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS. CMNE 2011, Jun 2011, Coimbra, Portugal. hal-02450452

**HAL Id: hal-02450452**

**<https://hal.science/hal-02450452>**

Submitted on 23 Jan 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

## **ANÁLISE ELASTO-PLÁSTICA DE BARRAS COM SECÇÃO DE PAREDE FINA NO CONTEXTO DA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS**

**M. Abambres, D. Camotim e N. Silvestre**

Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura, ICIST/IST, Instituto Superior Técnico  
Universidade Técnica de Lisboa, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal  
e-mail: {abambres, dcamotim, nunos}@civil.ist.utl.pt

**Palavras-chave:** Teoria Generalizada de Vigas (GBT), Análise Elasto-Plástica, Espalhamento de Plasticidade, Flexão Não Uniforme, Flexão Composta, Torção Não Uniforme.

**Resumo.** *Neste artigo apresenta-se uma formulação da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) para a análise elasto-plástica de 1ª ordem de barras com secção de parede fina, submetidas a um carregamento e condições de fronteira arbitrários. Depois de apresentar a derivação das equações de equilíbrio e o desenvolvimento de um elemento finito de barra, aplica-se e ilustra-se a formulação para um conjunto de exemplos (casos 1 a 5). Nestes exemplos ilustrativos, consideram-se cinco vigas com secção em I ou tubular quadrada, utiliza-se uma lei constitutiva elástica-perfeitamente plástica, e considera-se unicamente fenómenos de deformação global da secção, nomeadamente flexão uniforme, flexão não uniforme, flexão composta com compressão, e torção não uniforme. Finalmente, validam-se os resultados da GBT por comparação com os resultados do programa Abaqus, utilizando elementos finitos de barra e de casca. Geralmente, obtém-se uma excelente correlação entre os resultados da GBT e do Abaqus, no que diz respeito a trajectórias não-lineares de equilíbrio, configurações deformadas e diagramas de tensões. Nos casos em que tal correlação não é tão boa, apontam-se possíveis causas para as diferenças observadas.*

## 1. INTRODUÇÃO

A utilização de materiais com comportamento não linear (e.g. metais) na indústria da construção (civil, mecânica e aeronáutica) é, actualmente, “uma necessidade” em virtude destes materiais assegurarem simultaneamente excelentes propriedades de rigidez, resistência ductilidade e tenacidade à fractura. O comportamento de elementos estruturais de parede fina constituídos por materiais elasto-plásticos é fortemente influenciado pela sua lei constitutiva, nomeadamente no que ao colapso diz respeito. Como consequência, a fiabilidade de modelos numéricos para simular o colapso de elementos estruturais de parede fina só pode ser alcançada se o comportamento material for rigorosamente considerado. A Teoria Generalizada de Vigas (GBT) é uma teoria de peças prismáticas de parede fina, que tem sido utilizada sobretudo no estudo do comportamento de estabilidade elástica de elementos estruturais metálicos [1], sendo actualmente apontada pela comunidade científica como uma teoria robusta, versátil e muito eficiente. No entanto, a aplicação da GBT à análise de barras constituídas por materiais elásticos não-lineares ou elasto-plásticos, foi até hoje pouco conseguida. A primeira contribuição para essas análises surge em 2004 por *Gonçalves e Camotim* [2], no âmbito de análises de bifurcação elasto-plásticas. Em 2005, *Gonçalves e Camotim* [3] formularam um elemento finito fisicamente não-linear baseado na GBT. No entanto, neste trabalho preliminar apenas se consideraram tensões normais (axiais), não tendo posteriormente sido desenvolvida a formulação com outras componentes de tensão. Este trabalho foi o primeiro e único contributo para o desenvolvimento de uma teoria completa de plasticidade integrada na GBT. O presente trabalho visa dar um importante contributo para que a curto prazo seja possível prever rigorosamente o comportamento elasto-plástico de elementos estruturais de parede fina.

## 2. FORMULAÇÃO DA GBT PARA ANÁLISES ELASTO-PLÁSTICAS

A execução de uma análise estrutural efectuada através da GBT envolve duas etapas principais: (i) a análise da secção e (ii) a análise da barra. Uma das características que melhor caracteriza esta teoria reside na sua natureza modal, isto é, no facto do campo de deslocamentos ser obtido pela combinação linear dos campos associados aos vários modos de deformação da secção transversal. Estes são caracterizados por aproximarem o campo de deslocamentos ao longo da superfície média das suas paredes de forma independente à variação do campo de deslocamentos na direcção longitudinal da barra. De modo a rever os aspectos fundamentais da formulação da GBT, considere-se uma barra prismática com uma secção transversal de parede fina, formada por  $n$  placas rigidamente ligadas entre si através dos bordos longitudinais. Em cada placa, considere-se um sistema de eixos local localizado no seu plano médio e designado por  $(x,s,z)$ , cujas respectivas componentes do campo de deslocamentos se designam por  $(u,v,w)$ , conforme se ilustra na Figura 1. A GBT foi originalmente desenvolvida recorrendo a hipóteses simplificativas que apenas a tornavam válida para análises de barras com secção aberta não-ramificada, denominando-se essas formulações de “GBT convencional” [1]. As duas hipóteses fundamentais da “GBT convencional” (extensão transversal nula,  $\varepsilon_{ss}=0$ , e distorção de membrana nula,  $\gamma_{xs}=0$ ) limitavam a aplicação da GBT a um domínio restrito, no que diz respeito às análises, carregamento e geometria da secção. Tendo em

vista ultrapassar esta limitação, foram desenvolvidas novas formulações da GBT que não consideram essas hipóteses (parcialmente ou totalmente) e que permitem determinar novos modos de deformação, obtidos a partir de um conjunto de modos elementares e da resolução de problemas de ortogonalização típicos da GBT.

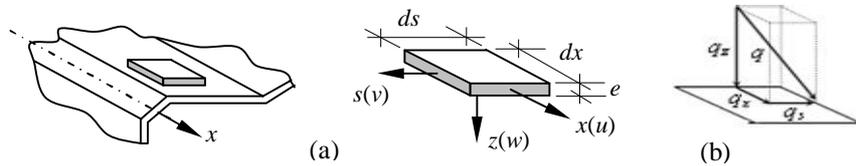


Figura 1. (a) Sistema local de eixos e deslocamentos e (b) componentes de força exterior distribuída  $q(x,s)$  [1].

A análise da secção utilizada neste trabalho baseou-se nos mesmos princípios de uma formulação desenvolvida por Silva et al. [4], a qual subdivide os modos “não-convencionais” em 3 tipos: (i) modos de corte, (ii) modos de extensão transversal e (iii) modos de fluxo de corte celular. Por limitações de espaço, não se explica neste artigo a análise da secção e a obtenção dos modos de deformação. No entanto, o leitor pode consultar a referência [4] para mais detalhes. Existe, no entanto, uma modificação relativamente a essa formulação e que consiste na consideração de 5 graus de liberdade (g.l.) por nó da secção. Para além dos g.l. utilizados correntemente na GBT (3 deslocamentos e uma rotação de flexão transversal), utilizou-se ainda uma rotação perpendicular ao plano médio da parede, a qual permite aproximar os empenamentos dos modos elementares por polinómios cúbicos de Hermite. A título de exemplo, ilustram-se na Figura 2 os modos elementares associados à contribuição dessa rotação para o empenamento  $u(s)$  do banzo superior de uma secção em I. Desta forma, e pela primeira vez na GBT, é possível considerar uma variação não linear de empenamento  $u(s)$ .

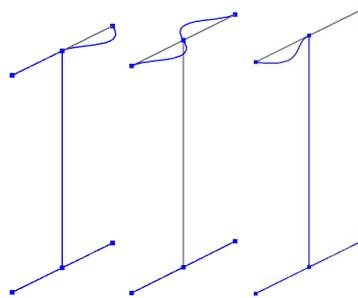


Figura 2. Modos de deformação elementares associados à imposição de rotações de empenamento no banzo superior de uma secção em I.

## 2.1. Equações de Equilíbrio e Formulação do Elemento Finito

Nesta secção, apresenta-se o desenvolvimento de uma formulação da GBT para análises estáticas geometricamente lineares de barras com secção de parede fina com geometria arbitrária e constituídas por materiais elasto-plásticos. Considere-se um sistema de eixos local  $(x, s, z)$ , onde  $x$ ,  $s$  e  $z$  correspondem respectivamente à coordenada longitudinal ( $0 \leq x \leq L$ ,  $L$  é o comprimento do elemento estrutural), à coordenada da linha média da secção transversal ( $0 \leq s \leq b$ ,  $b$  é a largura total

da linha média), e à coordenada segundo a direcção da espessura da placa ( $-e/2 \leq z \leq e/2$ ,  $e$  é a espessura da placa considerada). Por outro lado, (i)  $u$  é o deslocamento axial ou de empenamento (na direcção de  $x$ ), (ii)  $v$  é o deslocamento de membrana (na direcção de  $s$ ) e (iii)  $w$  é o deslocamento de flexão (na direcção de  $z$ ). Assim, o deslocamento de um ponto arbitrário localizado na linha média da secção transversal é dado por

$$u(x, s) = u_k(s) \zeta_{k,x}(x) \quad v(x, s) = v_k(s) \zeta_k(x) \quad w(x, s) = w_k(s) \zeta_k(x) \quad , \quad (1)$$

onde  $\zeta_k(x)$  representa a função de forma longitudinal associada ao modo de deformação  $k$ . Na definição da energia de deformação é necessário o conhecimento das deformações, dadas por

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} - z w_{,xx} \quad \varepsilon_{ss} = v_{,s} - z w_{,ss} \quad \gamma_{xs} = u_{,s} + v_{,x} - 2z w_{,xs} \quad , \quad (2)$$

onde  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{ss}$  e  $\gamma_{xs}$  são, respectivamente, as componentes de extensão longitudinal, extensão transversal e de distorção de membrana. Por conveniência e clareza de exposição, as relações deformações-deslocamentos são rescritas na seguinte forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= E_{(xx)k} \chi_{(xx)k} ; & E_{(xx)k} &= u_k - z w_k ; & \chi_{(xx)k} &= \zeta_{k,xx} \\ \varepsilon_{ss} &= E_{(ss)k} \chi_{(ss)k} ; & E_{(ss)k} &= v_{k,s} - z w_{k,ss} ; & \chi_{(ss)k} &= \zeta_k \\ \gamma_{xs} &= E_{(xs)k} \chi_{(xs)k} ; & E_{(xs)k} &= u_{k,s} + v_k - 2z w_{k,ss} ; & \chi_{(xs)k} &= \zeta_{k,x} \end{aligned} \quad , \quad (3)$$

onde  $E_k$  e  $\chi_k$  se denominam, respectivamente, por tensores de 1ª ordem de deformação seccional e longitudinal, associados ao modo de deformação  $k$ . Considere-se a primeira variação da energia de deformação dada por

$$\delta U = \int \int \int_{L b e} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{ss} \delta \varepsilon_{ss} + \sigma_{xs} \delta \gamma_{xs}) dz ds dx \quad , \quad (4)$$

onde  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{ss}$  e  $\sigma_{xs}$  são, respectivamente, as componentes de tensão normal longitudinal, normal transversal e tangencial (ou de corte). Inserindo em (4) as primeiras variações das deformações descritas em (3), obtém-se

$$\delta U = \int \int \int_{L b e} \left[ \sigma_{xx} \left( E_{(xx)k} \delta \chi_{(xx)k} \right) + \sigma_{ss} \left( E_{(ss)k} \delta \chi_{(ss)k} \right) + \sigma_{xs} \left( E_{(xs)k} \delta \chi_{(xs)k} \right) \right] dz ds dx \quad . \quad (5)$$

A primeira variação do potencial das forças exteriores,  $\delta II$ , igual à da formulação convencional da GBT para análises fisicamente lineares [1], é dada por

$$\delta II = - \int \int_{L b} \left[ (q_x u_k) \delta \chi_{(xs)k} + (q_s v_k + q_z w_k) \delta \chi_{(ss)k} \right] ds dx \quad . \quad (6)$$

onde  $q_x$ ,  $q_s$  e  $q_z$  são componentes de uma força distribuída no plano médio das paredes da barra (ver figura 1(b)). Porém, podem ainda considerar-se forças concentradas  $Q$ , cuja incorporação é conseguida nos termos de fronteira da equação de equilíbrio. Adicionalmente, considera-se que tanto as cargas distribuídas como também as cargas concentradas actuantes na barra, variam

proporcionalmente a um único parâmetro de carga  $\lambda$ . Na GBT, o sistema de equações de equilíbrio estático de corpos submetidos a um sistema de forças conservativas é frequentemente obtido recorrendo ao Princípio da Estacionariedade da Energia Potencial (PEEP), o qual se traduz na equação

$$\delta V = \delta U + \delta \Pi = 0 \quad , \quad (7)$$

onde  $\delta V$  representa a primeira variação da energia potencial, que resulta da soma da variação de energia de deformação  $\delta U$  com a variação do potencial das forças exteriores aplicadas  $\delta \Pi$ . Inserindo (5) e (6) em (7), obtém-se a equação geral de equilíbrio

$$\begin{aligned} \int \int \int_{L \ b \ e} \left[ \sigma_{xx} \left( E_{(xx)k} \delta \chi_{(xx)k} \right) + \sigma_{ss} \left( E_{(ss)k} \delta \chi_{(ss)k} \right) + \sigma_{xs} \left( E_{(xs)k} \delta \chi_{(xs)k} \right) \right] dz \ ds \ dx = \\ = \int \int_{L \ b} \left[ (q_x u_k) \delta \chi_{(xs)k} + (q_s v_k + q_z w_k) \delta \chi_{(ss)k} \right] ds \ dx \end{aligned} \quad , \quad (8)$$

a qual é válida para qualquer relação constitutiva do material (elástica linear, elástica não linear, elasto-plástica com ou sem endurecimento) e qualquer variação arbitrária das deformações cinemáticas. Enquanto na análise de uma barra com comportamento elástico linear os coeficientes das equações diferenciais de equilíbrio da GBT e as componentes da matriz de rigidez são constantes, isto é, não variam com o parâmetro de carga  $\lambda$ , em análises fisicamente não lineares essas componentes dependem do nível de carga a que a barra está sujeita. Tal dependência torna “não linear” o problema de primeira ordem. Desta forma, a obtenção da trajectória de equilíbrio associada à evolução de um determinado parâmetro de carga  $\lambda$  requer a utilização de um procedimento numérico incremental-iterativo para resolver as equações não lineares, o qual será posteriormente descrito em 2.3.

Para obter a solução deste problema não linear, requer-se o estabelecimento das equações de equilíbrio incremental em torno de uma dada configuração de equilíbrio da barra [5]. Essas equações obtêm-se pela “linearização” do sistema não linear de equações de equilíbrio dado por (8), traduzindo aproximadamente o comportamento da barra numa vizinhança muito próxima da referida configuração. Considere-se agora um troço elementar da barra a que corresponde um elemento finito de barra – de comprimento  $L_e$  e representado pelo índice superior ( $e$ ) – e adopte-se a seguinte equação incremental numa configuração de equilíbrio arbitrária (ponto genérico da trajectória de equilíbrio),

$$\Delta f^{(e)int} = \Delta f^{(e)} \Leftrightarrow K_{tan}^{(e)} \Delta d^{(e)} = \Delta f^{(e)} \quad , \quad (9)$$

onde  $f^{(e)int}$  é o vector de forças internas,  $f^{(e)}$  é o vector de forças nodais equivalentes devidas a um carregamento pontual e/ou distribuído (dependente de  $\lambda$ ), e  $K_{tan}^{(e)}$  é a matriz de rigidez tangente nesse ponto da trajectória<sup>1</sup>. O objectivo essencial consiste em determinar a forma de cálculo de  $K_{tan}$  tendo em consideração a equação de equilíbrio da GBT, dada por (8).

---

<sup>1</sup> Por motivo de simplicidade de notação, e visto que todas as expressões são “elementares”, omitir-se-á o expoente ( $e$ ) de aqui em diante.

Devido ao carácter não linear da relação tensão-deformação  $\sigma(\varepsilon)$ , a relação tensão-deslocamento  $\sigma(d)$  também é não linear. Em seguida, opta-se por obter a relação (9) com base na “linearização” da relação tensão-deslocamento  $\sigma(d)$ , tal que

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial d_i} \Delta d_i \quad \Delta\sigma_{ss} = \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial d_i} \Delta d_i \quad \Delta\sigma_{xs} = \frac{\partial\sigma_{xs}}{\partial d_i} \Delta d_i \quad , \quad (10)$$

Visto que (i) as componentes de tensão  $\sigma$  dependem das componentes de deformação  $\varepsilon$ , (ii) as componentes de deformação  $\varepsilon$  dependem das medidas de deformação longitudinal  $\chi$  e (iii) estas dependem dos deslocamentos  $d$ , pode rescrever-se (10) na forma

$$\Delta\sigma_{xx} = \left( \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{xx}} \frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial\chi_{(xx)k}} \frac{\partial\chi_{(xx)k}}{\partial d_i} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\varepsilon_{ss}} \frac{\partial\varepsilon_{ss}}{\partial\chi_{(ss)k}} \frac{\partial\chi_{(ss)k}}{\partial d_i} \right) \Delta d_i$$

$$\Delta\sigma_{ss} = \left( \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial\varepsilon_{xx}} \frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial\chi_{(xx)k}} \frac{\partial\chi_{(xx)k}}{\partial d_i} + \frac{\partial\sigma_{ss}}{\partial\varepsilon_{ss}} \frac{\partial\varepsilon_{ss}}{\partial\chi_{(ss)k}} \frac{\partial\chi_{(ss)k}}{\partial d_i} \right) \Delta d_i, \quad \Delta\sigma_{xs} = \left( \frac{\partial\sigma_{xs}}{\partial\gamma_{xs}} \frac{\partial\gamma_{xs}}{\partial\chi_{(xs)k}} \frac{\partial\chi_{(xs)k}}{\partial d_i} \right) \Delta d_i \quad , \quad (11)$$

onde  $k$  e  $i$  são índices mudos associados ao modo de deformação  $k$  da GBT e à componente  $i$  do vector de deslocamentos generalizados  $d$ . Os gradientes  $\partial\varepsilon/\partial\chi$  são obtidos com base em (3) e correspondem precisamente às medidas de deformação seccional  $E$ . Os gradientes  $\partial\chi/\partial d$  podem ser definidos com base no tipo de aproximação adoptada para o elemento finito de barra. Neste trabalho, optou-se por utilizar (i) polinómios de *Hermite* para aproximar  $\zeta_k$  em todos os modos de deformação que exibam deslocamentos no plano da secção ( $v$  e  $w$ ), e por (ii) funções lineares de *Lagrange* (graus de liberdade de deslocamento num elemento finito discretizado em 4 nós igualmente espaçados) para aproximar  $\zeta_{k,x}$  nos modos que só exibam empenamentos ( $u$ ) – modo axial e modos de corte. Desta forma, os gradientes  $\partial\chi/\partial d$  podem ser obtidos para todos modos (excepto o modo axial e modos de corte) através de

$$\frac{\partial\chi_{(xx)k}}{\partial d_i} = \begin{cases} \Psi_{Hj,xx}^k, & d_i = d_j^k \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad \frac{\partial\chi_{(ss)k}}{\partial d_i} = \begin{cases} \Psi_{Hj}^k, & d_i = d_j^k \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad \frac{\partial\chi_{(xs)k}}{\partial d_i} = \begin{cases} \Psi_{Hj,x}^k, & d_i = d_j^k \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad , \quad (12)$$

onde  $d_j^k$  é a componente  $j$  do vector elementar de deslocamentos generalizados relativo ao modo  $k$  (de dimensão  $4 \times 1$ ), e cuja imposição unitária origina o polinómio de *Hermite*  $\Psi_{Hj}^k$ <sup>ii</sup>. Uma vez que a variação longitudinal dos modos de deformação é aproximada por polinómios de *Hermite*, podem calcular-se as primeiras variações das medidas de deformação longitudinal

$$\delta\chi_{(xx)k} = \Psi_{H,xx}^k \delta d^k \quad \delta\chi_{(ss)k} = \Psi_H^k \delta d^k \quad \delta\chi_{(xs)k} = \Psi_{H,x}^k \delta d^k \quad , \quad (13)$$

onde  $k$  é um expoente livre. Por fim, introduzindo as expressões (11) e (13) em (8), o equilíbrio incremental do elemento finito traduz-se por

$$K_{\tan} \Big|_j \Delta d = \Delta f \quad , \quad (14)$$

---

<sup>ii</sup> O índice superior  $k$  serve apenas para identificar o modo  $k$ .

onde, após alguma manipulação matricial, a componente  $i$ - $k$  (sub-matriz 4x4) da matriz de rigidez tangente, associada a uma configuração de equilíbrio  $j$ , é definida por

$$K_{ik,\tan}|_j = K_{ik,\tan}^{xx} + K_{ik,\tan}^{ss} + K_{ik,\tan}^{xs} \quad , \quad (15)$$

$$k_{ik,\tan}^{xx} = \int_{L_e} \int_b \int_e \left\{ (\Psi_{H,xx}^i)^T \left( E_{(xx)i} E_{(xx)k} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \varepsilon_{xx}} \Big|_j \right) \Psi_{H,xx}^k + (\Psi_{H,xx}^i)^T \left( E_{(xx)i} E_{(ss)k} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \varepsilon_{ss}} \Big|_j \right) \Psi_H^k \right\} dz ds dx \quad , (16)$$

$$k_{ik,\tan}^{ss} = \int_{L_e} \int_b \int_e \left\{ (\Psi_H^i)^T \left( E_{(ss)i} E_{(xx)k} \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \varepsilon_{xx}} \Big|_j \right) \Psi_{H,xx}^k + (\Psi_H^i)^T \left( E_{(ss)i} E_{(ss)k} \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \varepsilon_{ss}} \Big|_j \right) \Psi_H^k \right\} dz ds dx \quad , (17)$$

$$k_{ik,\tan}^{xs} = \int_{L_e} \int_b \int_e \left\{ (\Psi_{H,x}^i)^T \left( E_{(xs)i} E_{(xs)k} \frac{\partial \sigma_{xs}}{\partial \gamma_{xs}} \Big|_j \right) \Psi_{H,x}^k \right\} dz ds dx \quad , (18)$$

onde  $i$  e  $k$  são índices livres que representam os modos de deformação  $i$  e  $k$ , e as deformações seccionais  $E$  são dadas por (3). Relativamente ao cálculo da matriz tangente, importa referir que foi tida em conta a possível ocorrência de descargas elásticas durante a estratégia incremental-iterativa. Nesses casos, os gradientes de tensões utilizados foram os correspondentes ao comportamento elástico linear. As restantes variáveis da equação incremental (14) são vectores cuja componente  $k$  corresponde a um sub-vector 4x1, sendo

$$\Delta f = \Delta \lambda \bar{f} \quad , \quad (19)$$

onde  $\bar{f}$  é o vector de forças nodais equivalentes quando o parâmetro de carga  $\lambda$  é unitário. É importante lembrar que as expressões (16) a (18) não são válidas no caso dos modos  $i$  e  $k$  serem os modos de corte ou o modo axial. Uma vez que nesses modos a aproximação é efectuada em  $\zeta_{k,x}$  por funções de *Lagrange*, quando  $i$  ou  $k$  corresponder a um desses modos há que substituir os vectores dos polinómios de *Hermite* e suas derivadas pelas funções de *Lagrange* com uma ordem de diferenciação inferior. Por fim, falta ainda definir o vector de forças internas para cada ponto da trajectória de equilíbrio, a obter com base em  $\Delta d$  (solução de (14)). Para qualquer variação arbitrária de  $d$ , a introdução de (13) em (8) permite obter

$$f^{\text{int}} = f \quad . \quad (20)$$

Para todos os modos (excepto o axial e os de corte), a componente  $k$  (sub-vector 4x1) do vector de forças internas para a configuração de equilíbrio  $j$  pode ser obtida através de

$$f_k^{\text{int}}|_j = \int_{L_e} \left\{ F_{(xx)k} (\Psi_{H,xx}^k)^T + F_{(ss)k} (\Psi_H^k)^T + F_{(xs)k} (\Psi_{H,x}^k)^T \right\} dx \quad , \quad (21)$$

$$F_{(xx)k} = \int_b \int_e E_{(xx)k} \sigma_{xx}|_j dz ds \quad F_{(ss)k} = \int_b \int_e E_{(ss)k} \sigma_{ss}|_j dz ds \quad F_{(xs)k} = \int_b \int_e E_{(xs)k} \sigma_{xs}|_j dz ds \quad , \quad (22)$$

onde  $k$  é um índice livre. Para os modos de corte e axial, a respectiva componente obtém-se como foi explicado para as componentes da matriz tangente que envolvam esses modos.

## 2.2. Critério de Cedência

A teoria da plasticidade permite reconhecer que os limites de elasticidade do material não são independentes do estado de tensão aplicado [6]. Num estado de tensão uniaxial, esses limites são facilmente determináveis através de um ensaio uniaxial de um provete, sendo a cedência do material caracterizada unicamente pela curva tensão-deformação obtida do ensaio. Quando o estado de tensão é multiaxial, como acontece na maioria das situações de interesse prático, o limite elástico do material é função do estado de tensão e influenciado pelo comportamento uniaxial em cada uma das três direcções e ao corte puro em cada um dos planos ortogonais em torno do ponto material, definindo-se esse limite como “superfície de cedência”. Entre as várias teorias de plasticidade desenvolvidas, existem vários “critérios de cedência”. Um dos critérios mais conhecidos é o de *Von Mises*, o qual é aplicável a materiais isotrópicos e é bastante adequado para modelar a plasticidade de metais. Não obstante o exposto anteriormente e o facto de a presente formulação ser aplicável a um estado plano de tensão genérico, decidiu-se definir uma superfície de cedência simplificada, tendo-se considerado que o limite de elasticidade de cada componente de tensão é igual ao obtido no ensaio uniaxial e ensaio de corte puro, não existindo qualquer interacção entre componentes de tensão. Tratando-se de relações constitutivas elásticas-perfeitamente plásticas, foi necessário considerar uma expressão analítica para a relação  $\sigma(\varepsilon)$  que pudesse ultrapassar a dificuldade numérica de ter um ponto de cedência não diferenciável. De forma a ter uma função continua e com derivadas continuas, utilizou-se a expressão proposta por *Ramberg-Osgood* [14],

$$\sigma = E\varepsilon / \left[ 1 + (E\varepsilon/\sigma^y)^n \right]^{1/n}, \quad (23)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material,  $\sigma^y$  é a tensão de cedência do material e  $n$  é um parâmetro que caracteriza o endurecimento do material. Uma inspecção da função para vários valores de  $n$ , permite concluir que esta se aproxima tanto mais da lei elástica-perfeitamente plástica quanto maior fôr esse parâmetro, tendo-se optado por  $n=70$ <sup>iii</sup>. Naturalmente que no caso da relação constitutiva ao corte puro, no lugar de  $E$  virá  $G$ , e no lugar de  $\sigma^y$  virá a tensão de cedência ao corte,  $\tau^y = \sigma^y/\sqrt{3}$ .

## 2.3. Estratégia Incremental-Iterativa

Após (i) efectuar a discretização da barra num número adequado de elementos finitos, (ii) calcular os sistemas de equações de equilíbrio incremental relativos a todos os elementos finitos, (iii) efectuar a assemblagem do sistema de equações de equilíbrio incremental da barra, e (iv) impor as condições de fronteira do problema (apoios da barra), a trajectória não-linear de equilíbrio deverá ser obtida através da estratégia incremental-iterativa denominada de “controlo de comprimento de arco” (*Arc-Length*, em língua inglesa) [5, 7]. Entre as diversas formas de aplicação existentes na

<sup>iii</sup> A função é também caracterizada por um decréscimo abrupto e assintótico para zero a partir de um certo limite de deformação, o qual corresponde a cerca de 3620% quando  $n=70$ , não afectando por isso a natureza da lei constitutiva pretendida.

literatura, optou-se por utilizar a forma desenvolvida por Crisfield [8] e complementada por Hellweg [9] no que diz respeito à escolha da raiz adequada da equação de constrangimento cilíndrica<sup>iv</sup>. Utilizou-se a estratégia de “variação de comprimento de arco” [7], caracterizada por um comprimento de arco constante em todas as iterações num dado incremento, mas variável de incremento para incremento [7, 10]. Resta referir que se utilizou o método do “caminho secante” [11] na determinação do sinal adequado da variação do parâmetro de carga para a 1ª iteração num dado incremento. Relativamente ao critério de convergência, assumiu-se que a convergência se obtém em qualquer iteração que satisfaça a seguinte condição,

$$\|f_{Rj}^{(n)}\|_2 \leq \max\left(\varepsilon \times \|f_{R1}^{(n)}\|_2, \varepsilon\right), 10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-3}, \quad (24)$$

onde  $f_{Rj}^{(n)}$  é o vector de forças residuais no final da iteração  $j$  do incremento  $n$ . Finalmente, resta referir que a formulação foi implementada computacionalmente utilizando o software Matlab [12].

### 3. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS E VALIDAÇÃO

Nesta secção, apresentam-se cinco exemplos ilustrativos que permitem validar a formulação apresentada. Considera-se uma secção em I (figura 3(a)) e uma secção tubular quadrada (figura 4(a)), adoptam-se vários tipos de condições de fronteira, e também diversos tipos de carregamento que conduzam exclusivamente à ocorrência de deformação global da barra, isto é, compressão, flexão e torção. Por esse motivo, apenas se incluíram na análise da barra os modos de deformação globais (e dois de corte) que se obtiveram da análise da secção efectuada na GBT. As figuras 3(b) e 4(b) mostram os modos da GBT considerados nas análises dos casos de estudo.

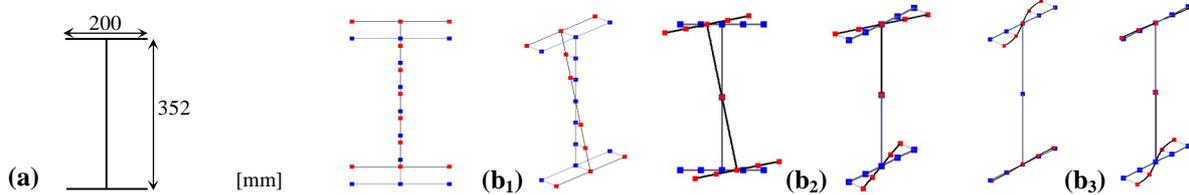


Figura 3. Secção em I: (a) dimensões e (b) modos globais utilizados nos casos 1,2,4,5 (b<sub>1</sub>) flexão na maior inércia, (b<sub>2</sub>) torção e (b<sub>3</sub>) corte.

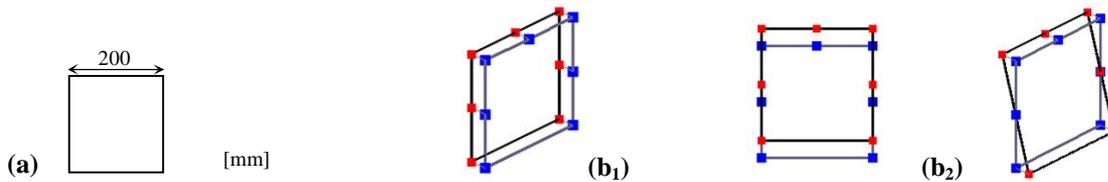


Figura 4. Secção tubular quadrada: (a) dimensões e (b) modos globais utilizados no caso 3 (b<sub>1</sub>) extensão axial e (b<sub>2</sub>) flexão.

<sup>iv</sup> Para a maioria dos problemas de análise estrutural [5, 7], considera-se que as equações de constrangimento tipo “cilíndrico” são mais robustas que as equações do tipo “esférico”.

Todas as barras são constituídas pelo mesmo material, o qual é elástico-perfeitamente plástico, simétrico (independente do sinal) e isotrópico, caracterizado por (i) um módulo de elasticidade  $E=200000 \text{ N/mm}^2$ , (ii) um coeficiente de Poisson  $\nu=0.3$ , (iii) um módulo de distorção  $G=76923 \text{ N/mm}^2$ , e (iv) uma tensão de cedência uniaxial  $\sigma^y=300 \text{ N/mm}^2$ . Os resultados numéricos obtidos da formulação proposta são validados por comparação com os resultados obtidos pelo programa de elementos finitos Abaqus [13]. É ainda importante referir que todas as tensões consideradas no programa Abaqus não correspondem à “tensão nominal” (força por unidade de área inicial) mas sim à tensão efectiva (força por unidade de área efectiva). Por este motivo, é necessário introduzir no Abaqus a relação constitutiva do material associada à tensão efectiva, a qual é dada por

$$\sigma_t = \sigma_n (1 + \varepsilon_n) \quad , \quad (25)$$

onde  $\sigma_t$  é a tensão efectiva,  $\sigma_n$  é a “tensão nominal” e  $\varepsilon_n$  é a respectiva “extensão nominal”.

### 3.1. Caso 1 - Viga simplesmente apoiada e submetida a flexão uniforme

O primeiro exemplo ilustrativo consiste no caso de estudo mais simples, isto é, uma viga submetida a flexão uniforme. A viga analisada está representada na figura 5, está simplesmente apoiada nas secções extremas, tem uma secção em I (Figura 3(a)) cujas paredes possuem uma espessura de 1 mm, tem um comprimento  $L=2000 \text{ mm}$ , e está submetida a um par de momentos  $M=1 \times 10^6 \lambda \text{ Nmm}$ , aplicados nas secções de apoio em torno do eixo de maior inércia ( $\lambda$  é o parâmetro de carga). No âmbito deste problema, considerou-se unicamente o modo de deformação por flexão em torno da maior inércia, ou modo 2 (Figura 3(b)). No que diz respeito à discretização da barra, utilizaram-se 10 elementos finitos igualmente espaçados, cada um com  $L_e=200\text{mm}$ . No caso do modelo utilizado no programa Abaqus, modelou-se a viga com uma malha uniforme de 10 elementos finitos B23 [13]. Para o traçado da trajectória de equilíbrio, monitorizou-se o deslocamento vertical  $d_v$  a meio vão da viga ( $x=1000 \text{ mm}$ ). Na figura 6, observam-se as trajectórias de equilíbrio obtidas através das análises elasto-plásticas da GBT e do Abaqus, nomeadamente as curvas  $\lambda(d_v)$ .

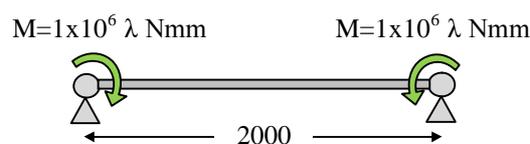


Figura 5. Modelo estrutural do caso 1.

Da análise da GBT, obteve-se um momento de cedência igual a  $M_c=25.95 \times 10^6 \text{ Nmm}$  e um momento plástico (momento último) igual a  $M_{pl}=30.28 \times 10^6 \text{ Nmm}$ . Como se pode observar na figura 6, as curvas da GBT e do Abaqus estão praticamente coincidentes, sendo a diferença entre elas inferior a 1.5%. Devido às diferentes estratégias de incrementação de carga e distintos comprimentos de arco utilizados nas duas análises (GBT e Abaqus), não é possível efectuar uma comparação directa entre os pontos de equilíbrio de ambas as curvas. Para três valores da abcissa  $d_v$ , assinalam-se na curva da GBT três pontos A, B e C de coordenadas  $(d_v; \lambda_{GBT})$ , com

$\lambda_{GBT}=25.95$ ,  $\lambda_{GBT}=28.51$  e  $\lambda_{GBT}=30.21$ . Para o mesmo valor da abcissa  $d_v$  e por interpolação, determinaram-se os pontos  $(d_v; \lambda_{ABQ})$  equivalentes na curva do Abaqus, obtendo-se  $\lambda_{ABQ}=26.43$ ,  $\lambda_{ABQ}=28.66$  e  $\lambda_{ABQ}=30.51$ . Como se constata, as diferenças existentes são mínimas.

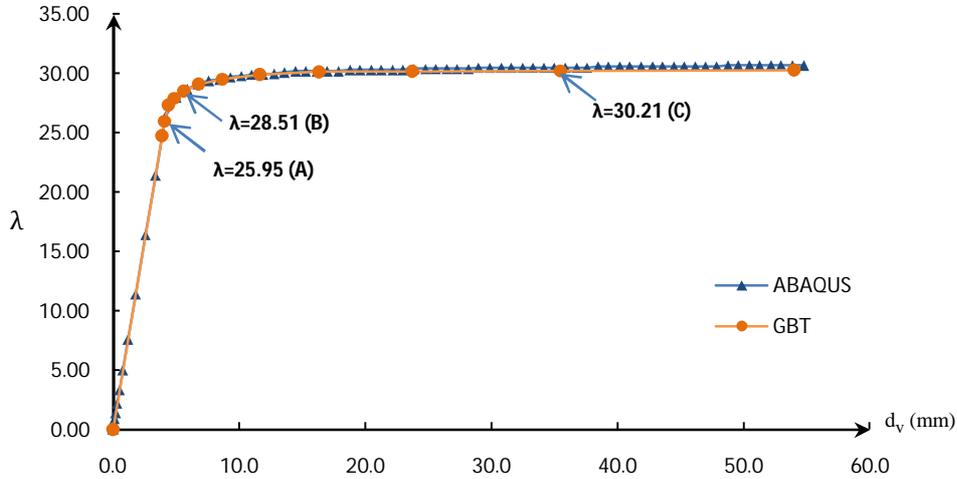


Figura 6. Trajectória de equilíbrio no caso 1.

A figura 7(a) permite ainda visualizar as configurações deformadas da viga ( $d_v(x)$ ) para os pontos A, B e C assinalados na curva da figura 6. A figura 7(b) permite observar as distribuições de tensões normais  $\sigma_{xx}(s)$  em qualquer secção da viga, também para A, B e C. Em ambos os casos se verifica uma boa concordância com os resultados do Abaqus. O aumento do parâmetro de carga faz reduzir a diferença percentual entre as curvas  $d_v(x)$  da GBT e do Abaqus, tendo-se obtido erros máximos de 5.5% (A), 4.2% (B) e 3.7% (C). Também no caso dos diagramas de tensões normais efectivas  $\sigma_{xx}$  (Figura 7(b)) não existem diferenças significativas entre os resultados da GBT e do Abaqus.

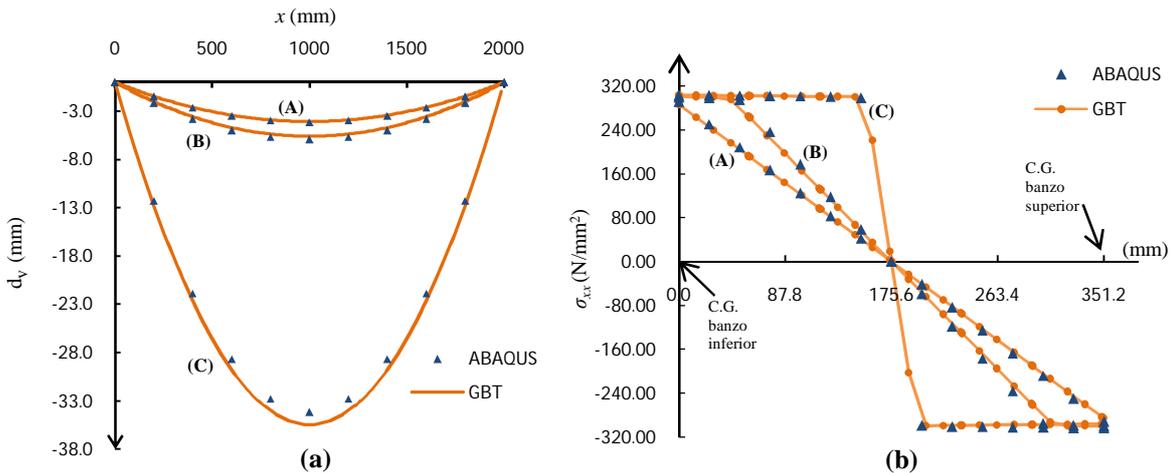


Figura 7. (a) Configuração deformada da viga e (b) distribuição de tensões efectivas  $\sigma_{xx}$  nas configurações de equilíbrio A, B e C.

Note-se que o diagrama A é inteiramente elástico (os banzos estão prestes a atingir a cedência), o diagrama B é elasto-plástico (os banzos e a zonas da alma mais afastadas do centro de massa estão plastificadas) e o diagrama C é quase inteiramente plástico (apenas dois pontos muito próximos do centro de massa da secção permanecem em regime elástico).

### 3.2. Caso 2 - Viga simplesmente apoiada e submetida a flexão não uniforme

O segundo exemplo ilustrativo é ligeiramente mais complexo que o do caso de estudo 1, uma vez que se considera uma viga submetida a flexão não uniforme. A geometria da viga e discretização utilizadas são semelhantes às do caso 1. Como se observa na figura 8, as únicas diferenças residem no comprimento da viga ( $L=1500$  mm) e na carga aplicada, que neste caso corresponde a uma carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento igual a  $q=20\times\lambda$  N/mm. Para o traçado da trajectória de equilíbrio, monitorizou-se o deslocamento vertical  $d_v$  a meio vão da viga ( $x=750$  mm). Na figura 9, observam-se as trajectórias de equilíbrio obtidas através das análises elasto-plásticas da GBT e do Abaqus, nomeadamente as curvas  $\lambda(d_v)$ . As figuras 10(a) e 10(b) permitem visualizar as configurações deformadas da viga ( $d_v(x)$ ) e as distribuições de tensões normais efectivas  $\sigma_{xx}(s)$  em  $x=675$  mm, relativas às configurações de equilíbrio (pontos A, B e C) assinaladas na figura 9. Tal como no caso 1, continua a existir uma concordância perfeita entre os resultados da GBT e do Abaqus, sendo a diferença inferior a 1.2%. Nas configurações de equilíbrio A, B e C (ver figura 9), os valores dos parâmetros de carga exibem uma excelente correlação:  $\lambda_{GBT}=4.51$  e  $\lambda_{ABQ}=4.50$  (A),  $\lambda_{GBT}=5.13$  e  $\lambda_{ABQ}=5.15$  (B) e  $\lambda_{GBT}=5.41$  e  $\lambda_{ABQ}=5.47$  (C).

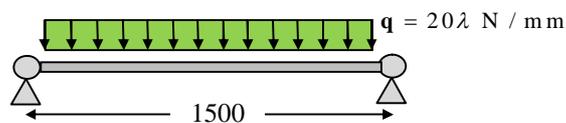


Figura 8. Modelo estrutural do caso 2.

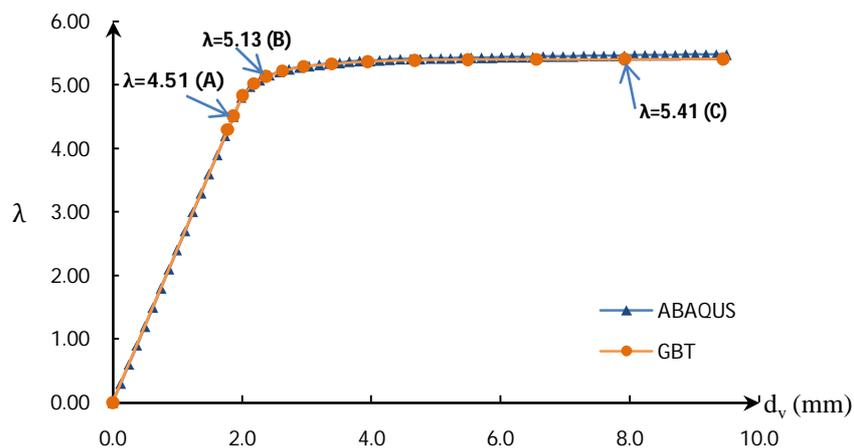


Figura 9. Trajectória de equilíbrio no caso 2.

As configurações deformadas da viga em A, B e C (figura 10(a)) têm diferenças insignificantes, sendo o erro inferior a 2.6 %. Note-se que na configuração deformada C existe uma curvatura de flexão muito superior na zona de meio vão do que nas restantes zonas da viga, o que se deve à plastificação dessa zona. Por outro lado, os diagramas de tensões normais efectivas  $\sigma_{xx}$  (Figura 10(b)) confirmam a boa concordância de resultados entre a GBT e o Abaqus. Finalmente, observa-se na Figura 11 uma representação tri-dimensional das distribuições de tensões nominais de membrana  $\sigma_{xx}$  obtidos pela GBT, para as configurações de equilíbrio A, B e C<sup>v</sup>. De A para B, é notório o espalhamento de plasticidade na zona de meio vão da viga. De B para C, evidencia-se a plastificação quase completa das secções de meio vão num comprimento de aproximadamente 500 mm (comprimento de rótula plástica) e ainda um espalhamento de plasticidade na direcção (sentido) das secções de apoio.

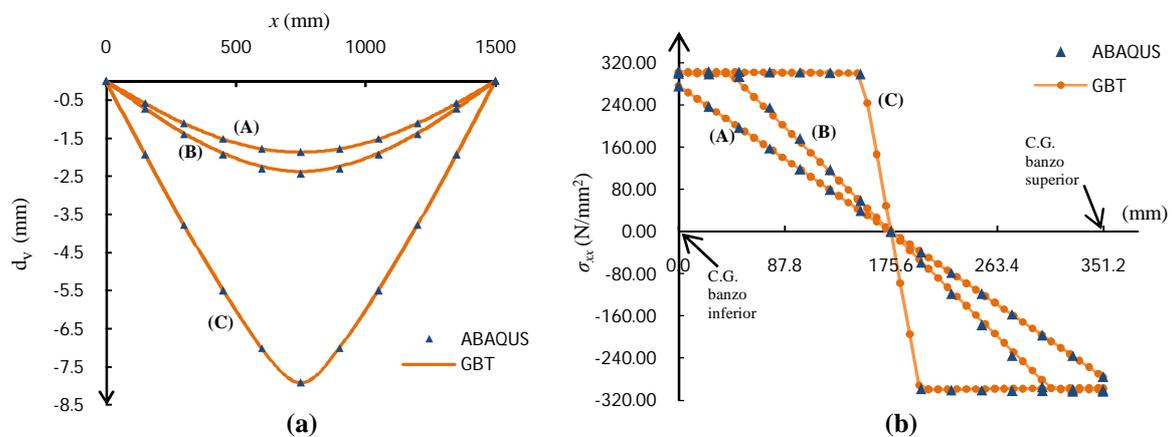


Figura 10. (a) Configuração deformada da viga e (b) distribuição de tensões  $\sigma_{xx}$  em  $x=675$  mm, nas configurações de equilíbrio A, B e C.

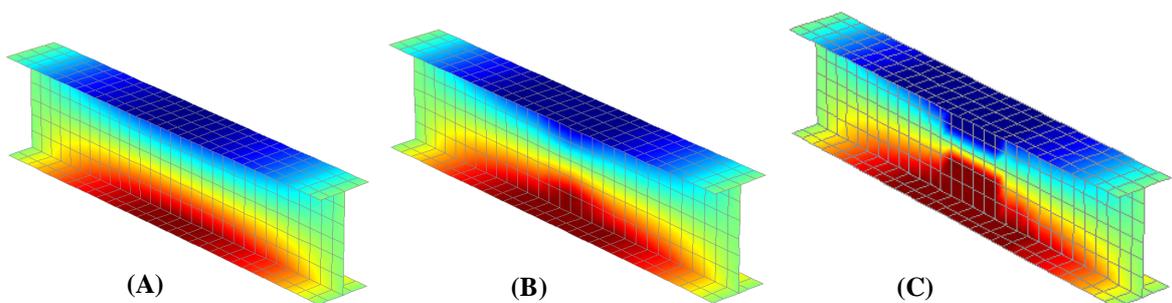


Figura 11. Representação tri-dimensional das tensões nominais  $\sigma_{xx}$  obtidas pela GBT para as configurações de equilíbrio A, B e C

<sup>v</sup> Note-se que se trata de uma visualização tri-dimensional dos resultados de uma teoria de vigas (GBT) e não de uma representação de resultados de elementos finitos de casca.

### 3.3. Caso 3 – Coluna-viga em consola submetida a compressão e flexão uniformes

O terceiro exemplo ilustrativo consiste numa viga em consola submetida a flexão composta com compressão. O elemento analisado está representado na figura 12, tem uma secção tubular quadrada com 0.4 mm de espessura (Figura 4(a)), tem um comprimento  $L=1500$  mm, e está submetido a um momento  $M=6.6 \times 10^8 \lambda$  Nmm e a um esforço normal de compressão  $N=24000 \lambda$  N, ambos aplicados na extremidade livre. No âmbito deste problema, considerou-se o modo de extensão axial e o modo de flexão (Figura 4(b)). A discretização da barra utilizada na GBT e no Abaqus são idênticas às do caso 1. Para o traçado da trajectória de equilíbrio, monitorizou-se o deslocamento vertical  $d_v$  na extremidade livre da consola. Na figura 13, observam-se as trajectórias de equilíbrio obtidas através das análises elasto-plásticas da GBT e do Abaqus, nomeadamente as curvas  $\lambda(d_v)$ .

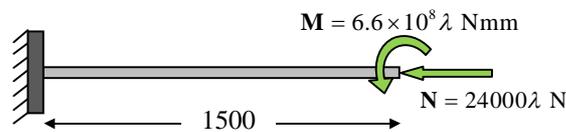


Figura 12. Modelo estrutural do caso 3.

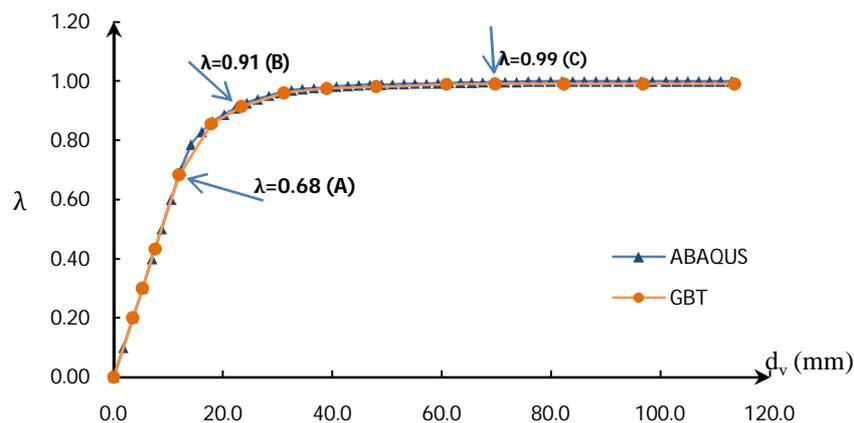


Figura 13. Trajectória não-linear de equilíbrio obtida no caso de estudo 3.

Como se pode observar na figura 13, as 2 curvas estão praticamente coincidentes, sendo o erro inferior a 1%. Nas configurações de equilíbrio A, B e C assinaladas na figura 13, os valores dos parâmetros de carga exibem uma excelente correlação:  $\lambda_{GBT}=0.68$  e  $\lambda_{ABQ}=0.70$  (A),  $\lambda_{GBT}=0.91$  e  $\lambda_{ABQ}=0.93$  (B) e  $\lambda_{GBT}=0.99$  e  $\lambda_{ABQ}=1.00$  (C). As figuras 14(a) e 14(b) permitem visualizar as configurações deformadas da barra ( $d_v(x)$ ) e as distribuições de tensões normais efectivas  $\sigma_{xx}(s)$  em qualquer secção transversal, relativas às configurações de equilíbrio assinaladas na figura 13 (A, B e C). Na figura 14(a), as curvas têm diferenças pouco significativas, sendo o erro inferior a 4%. Os diagramas de tensões normais efectivas ao longo das almas, apresentados na figura 14(b), confirmam a boa concordância de resultados entre a GBT e o Abaqus. Neste

caso, note-se a mudança da posição da linha neutra da configuração A (linha neutra elástica) para as configurações B e C (linha neutra elasto-plástica), verificando-se uma aproximação da mesma ao banzo inferior da secção.

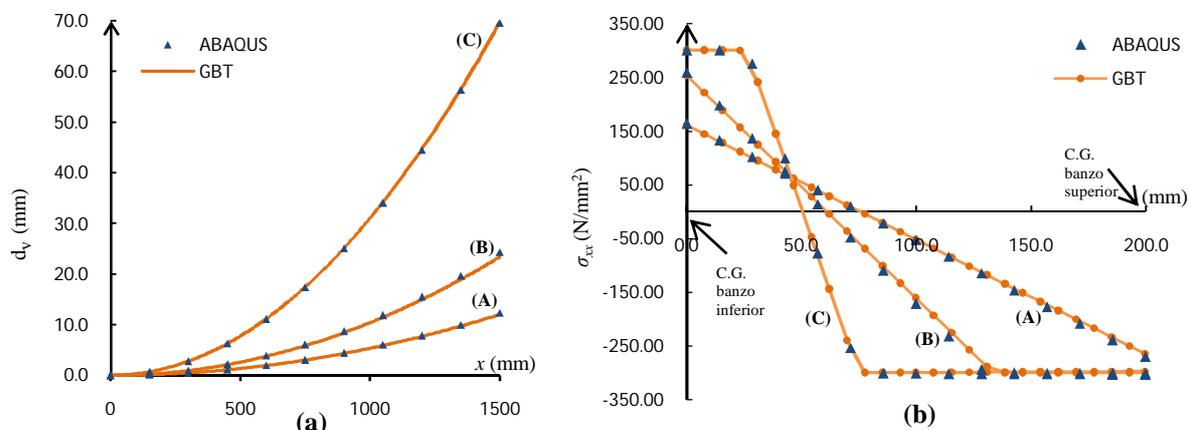


Figura 14. (a) Configuração deformada da barra e (b) distribuição de tensões  $\sigma_{xx}$  nas configurações A, B e C.

### 3.4. Caso 4 – Viga em consola submetida a torção não uniforme

Nos exemplos anteriores, consideraram-se vigas submetidas a flexão uniforme (caso 1), flexão não uniforme (caso 2) e flexão composta com compressão (caso 3). No quarto exemplo ilustrativo considera-se uma consola submetida a torção não uniforme. Trata-se de um caso mais complexo que os anteriores pois existe interação entre tensões de corte e tensões normais de empenamento associadas à torção. O elemento analisado está representado na figura 15, tem uma secção em I com 1 mm de espessura (Figura 3(a)), um comprimento  $L=1500$  mm, e está submetido a um momento  $T=10^5 \lambda$  Nmm aplicado na extremidade livre.



Figura 15. Modelo estrutural do caso 4.

No âmbito deste problema, considerou-se o modo de torção e dois modos de corte representados na figura 3(b). A necessidade de considerar estes 2 modos de corte, deve-se ao facto do modo de torção não exibir distorções de membrana, apesar de exibir empenamento. Uma vez que se trata de um problema de torção não uniforme (a secção encastrada está impedida de empenar), vão surgir fluxos de corte de membrana em equilíbrio com as tensões axiais de empenamento<sup>vi</sup>. O elemento foi modelado com uma malha (i) não-uniforme de 18 elementos na GBT (10 elementos em  $0 < x < L/4$  e 8 elementos em  $L/4 < x < L$ ), e (ii) uniforme com 30 elementos de viga do tipo B31OS [13] no Abaqus, impedindo todos os graus de liberdade no nó encastrado. Para o traçado

<sup>vi</sup> Estes modos de corte têm empenamentos não lineares ao longo da linha média da secção, em virtude de se ter utilizado a “rotação de empenamento” referida na secção 2.

da trajectória de equilíbrio, monitorizou-se o deslocamento horizontal  $d_h$  do banzo superior. Na figura 16, observam-se as trajectórias de equilíbrio obtidas através das análises elasto-plásticas da GBT e do Abaqus, nomeadamente as curvas  $\lambda(d_h)$ .

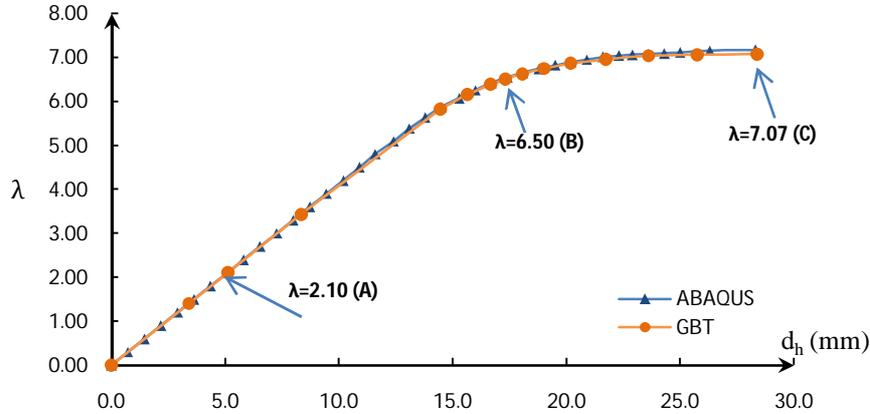


Figura 16. Trajectória não-linear de equilíbrio obtida no caso de estudo 4.

Como se pode observar na figura 16, as duas curvas quase coincidem e a máxima diferença é igual a 1.5 %. Nas configurações de equilíbrio A, B e C assinaladas na figura 16, os valores dos parâmetros de carga exibem uma correlação muito boa:  $\lambda_{GBT}=2.10$  e  $\lambda_{ABQ}=2.10$  (A),  $\lambda_{GBT}=6.50$  e  $\lambda_{ABQ}=6.54$  (B) e  $\lambda_{GBT}=7.07$  e  $\lambda_{ABQ}=7.17$  (C). As figuras 17(a) e 17(b) permitem visualizar (relativamente aos pontos A, B e C), as configurações deformadas da barra ( $d_h(x)$ ) e as distribuições de tensões normais efectivas de membrana, no banzo superior da secção em  $x=25$  mm. Na figura 17(a), as curvas têm diferenças insignificantes, sendo o erro inferior a 1.5%. Na figura 17(b), as distribuições de tensões normais efectivas confirmam a boa concordância de resultados entre a GBT e o Abaqus (as diferenças devem-se apenas a uma discretização menos refinada na análise do Abaqus).

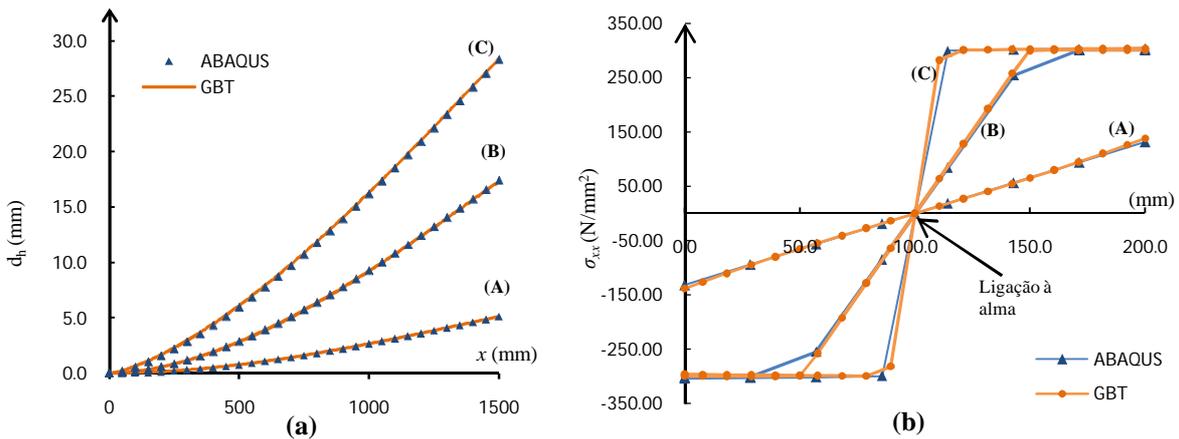


Figura 17. (a) Configuração deformada da barra e (b) tensões de membrana  $\sigma_{xx}$  no banzo superior em  $x=25$  mm, nas configurações de equilíbrio A, B e C.

### 3.5. Caso 5 – Viga em consola submetida a torção não uniforme

O quinto exemplo ilustrativo é semelhante ao anterior (caso 4) e está representado na Figura 15. Relativamente ao caso 4, as diferenças residem na espessura da secção em I, a qual vale agora 10 mm, e no vão da viga que passa a ser  $L=3000$  mm. Os únicos modos considerados na GBT foram, pelas mesmas razões, os mesmos que no caso 4. No entanto, é importante realçar que neste caso, devido ao facto da espessura ser 10 vezes superior à do caso 4, o momento torsor uniforme assume uma importância significativamente maior do que no caso anterior, quando comparado com o momento não uniforme. A viga foi modelada na GBT com a mesma malha utilizada no caso 4, e no Abaqus com elementos de casca de 4 nós do tipo S4 [13], tendo-se discretizado a secção com 16 nós (6 na alma e 5 em cada banzo) e a barra com 61 secções igualmente espaçadas. Optou-se neste caso por elementos finitos de casca uma vez que a elevada espessura das paredes da viga inibem possíveis deformações locais. Todos os deslocamentos e rotações foram impedidos no encastramento, e o momento torsor foi aplicado na extremidade da consola através de cargas concentradas com a direcção dos banzos e uma distribuição triangular. Para o traçado da trajectória de equilíbrio, monitorizou-se o deslocamento horizontal  $d_h$  do nó de ligação da alma ao banzo superior. Na figura 18, observam-se as trajectórias de equilíbrio obtidas pelas análises elasto-plásticas da GBT e do Abaqus, nomeadamente as curvas  $\lambda(d_h)$ .

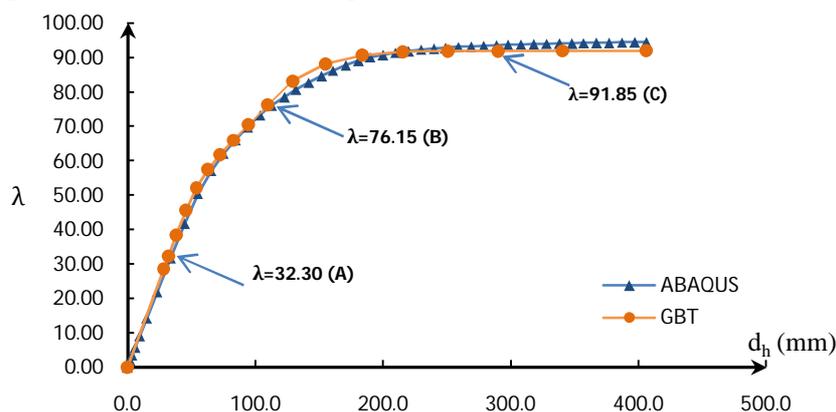


Figura 18. Trajectória não-linear de equilíbrio obtida no caso de estudo 5.

Como se observa na figura 18, as duas curvas diferem muito ligeiramente, sendo a diferença máxima de 4.4% (zona curva). Nas configurações de equilíbrio A, B e C assinaladas na figura 16, os valores dos parâmetros de carga exibem uma correlação moderadamente boa:  $\lambda_{GBT}=32.30$  e  $\lambda_{ABQ}=31.78$  (A),  $\lambda_{GBT}=76.15$  e  $\lambda_{ABQ}=76.08$  (B) e  $\lambda_{GBT}=91.85$  e  $\lambda_{ABQ}=93.54$  (C). As figuras 19(a) e 19(b) permitem visualizar (relativamente aos pontos A, B e C), as configurações deformadas da barra ( $d_h(x)$ ) e as distribuições de tensões normais efectivas de membrana, no banzo superior da secção em  $x=10$  mm. Na figura 19(a), as curvas têm diferenças irrelevantes na configuração A, com um erro máximo de 6% localizado na extremidade da consola, mas diferenças mais significativas nas configurações B e C na primeira metade da barra. Na configuração B, o erro atinge 25 % no intervalo  $0 < x < 1000$  mm mas não ultrapassa 3% de diferença em  $1000 < x < 3000$  mm. Na configuração C, o erro atinge 35% no intervalo  $0 < x < 1500$  mm mas decresce de 9.0 até 3.7% no intervalo  $1500 < x < 3000$  mm.

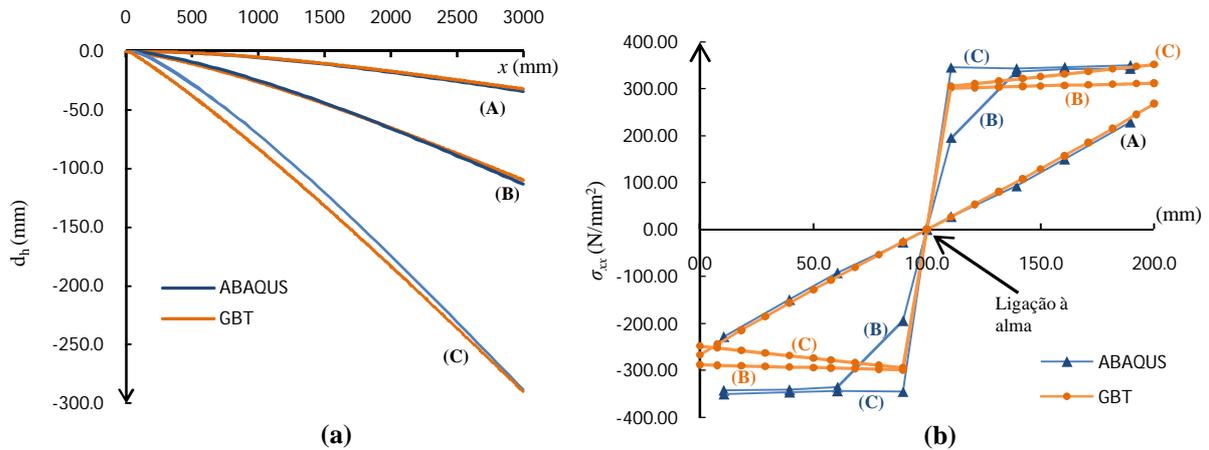


Figura 19. (a) Configuração deformada da barra e (b) tensões efectivas de membrana  $\sigma_{xx}$  no banzo superior em  $x=10$  mm, nas configurações de equilíbrio A, B e C.

As distribuições de tensões normais efectivas ao longo do banzo superior, apresentadas na figura 19(b), confirmam alguma discrepância entre os resultados da GBT e do Abaqus. Note-se ainda que no diagrama C da GBT, as partes de compressão e de tracção não são simétricas. Uma vez que os diagramas representam a tensão efectiva e a sua relação com a tensão nominal é dada por (25), essa diferença vai-se notar tanto mais quanto maior for a intensidade das extensões. Essa assimetria não se verifica nos resultados do Abaqus, uma vez que o programa considerou simetria em termos de tensões efectivas. No entanto, as diferenças só são significativas (maiores que 5%) para extensões cuja intensidade supere os 2.5%, o que apenas se verificou na configuração C do presente caso de estudo. Uma vez que no caso 4 (torção não uniforme) a concordância de resultados foi excelente, as diferenças registadas devem-se com certeza à influência que a espessura das paredes tem no comportamento elasto-plástico da viga sob torção. No caso presente (secção espessa), o momento torsor uniforme (de Saint Venant) é da mesma ordem de grandeza do momento torsor não uniforme (derivada do bi-momento), o que não acontecia no caso 4 (secção fina) onde o momento torsor uniforme era quase nulo. É possível que no caso presente (secção espessa) exista uma elevada interacção entre componentes de tensão normais e tangenciais na superfície de cedência de *von Mises* (adoptada no Abaqus). Como o critério de cedência utilizado nas análises da GBT não contabilizou qualquer interacção entre as componentes de tensão, é provável que essa interacção possa explicar as diferenças encontradas entre os resultados da GBT e do Abaqus. Apesar das diferenças, foi possível constatar grandes semelhanças entre as configurações deformadas da consola obtidas pela GBT e pelo Abaqus (figura 20), bem como entre as distribuições tridimensionais de tensões  $\sigma_{xx}$  de membrana obtidas pela GBT e pelo Abaqus (figura 21), para as três configurações de equilíbrio estudadas (A, B, C).

#### 4. CONCLUSÕES

Neste artigo apresentou-se uma formulação da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) para a análise elasto-plástica de 1ª ordem de barras com secção de parede fina, submetidas a um carregamento e condições de fronteira arbitrários. Depois de apresentar a derivação das equações de equilíbrio e o

desenvolvimento de um elemento finito de barra, a formulação foi validada por comparação entre os resultados da GBT e do programa Abaqus para um conjunto de exemplos ilustrativos. Utilizando uma lei constitutiva elástica-perfeitamente plástica, analisaram-se cinco casos envolvendo unicamente fenómenos de deformação global, nomeadamente flexão uniforme, flexão não uniforme, flexão composta com compressão, e torção não uniforme. No que diz respeito aos casos que envolveram flexão, obteve-se uma excelente correlação entre os resultados da GBT e do Abaqus (trajectórias não-lineares de equilíbrio, configurações deformadas e diagramas de tensões).

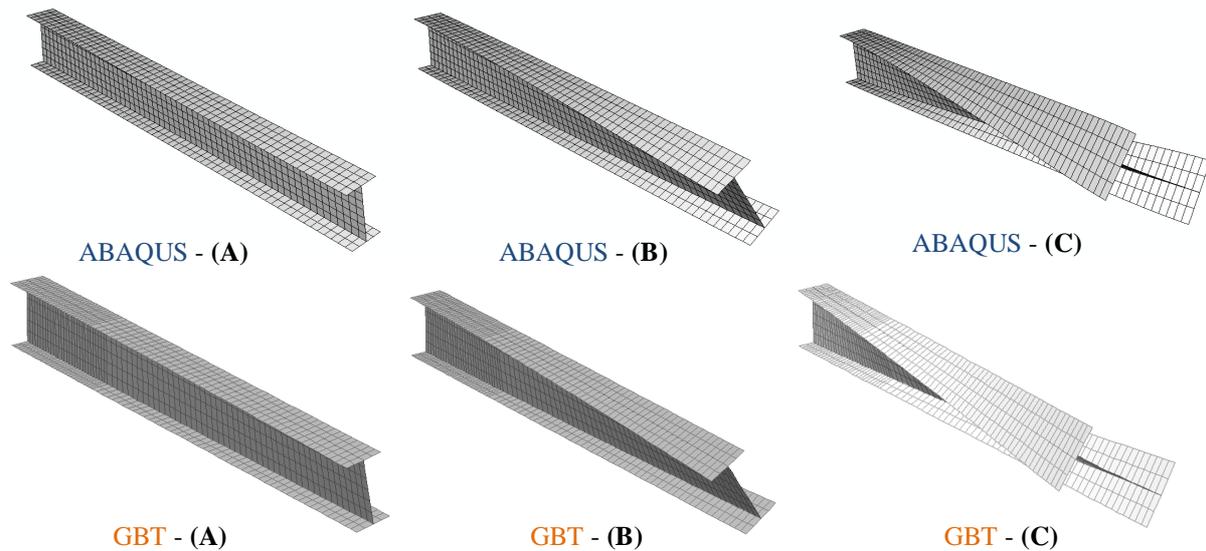


Figura 20. Configuração deformada: GBT vs Abaqus para as configurações de equilíbrio A, B e C.

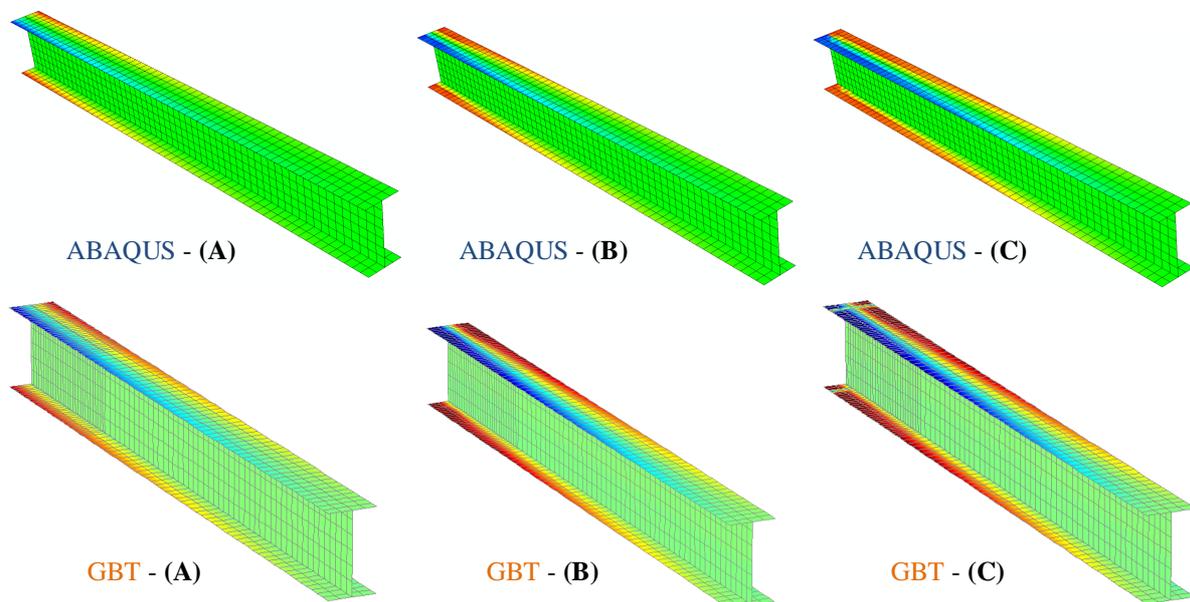


Figura 21. Tensões  $\sigma_{xx}$ : GBT (nominais) vs Abaqus (efectivas) para as configurações de equilíbrio A, B e C.

No que diz respeito à torção, os resultados da GBT compararam bastante bem com os do Abaqus no caso de uma secção de espessura fina. No caso da secção com parede espessa, existiram algumas discrepâncias entre os resultados da GBT e do Abaqus. Neste caso, o momento torsor uniforme revelou-se da mesma ordem de grandeza do momento torsor não uniforme (derivada do bi-momento), o que indicia uma forte interacção entre componentes de tensão tangenciais e normais na superfície de cedência de *von Mises*, adoptada no Abaqus e ignorada na GBT. Os resultados revelaram um enorme potencial da presente formulação da GBT para a análise elasto-plástica de barras sob deformação global (flexão e torção). Futuramente, prevê-se a utilização desta formulação para analisar o comportamento elasto-plástico de barras com deformação local e ainda sob a influência dos efeitos geometricamente não lineares.

## REFERÊNCIAS

- [1] Silvestre, N. (2005). Teoria Generalizada de Vigas: Formulações, Implementação Numérica e Aplicações, Tese de Doutoramento em Engenharia Civil, IST, Univ. Técnica de Lisboa.
- [2] Gonçalves, R., Camotim, D. (2004). GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns, *Computers and Structures*, 82, p. 1473-1484, Elsevier.
- [3] Gonçalves, R., Camotim, D. (2005). Formulation of a physically non-linear beam finite element using generalized beam theory, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> European Conference on Steel and Composite Structures*, Vol. A, 1.2-53, Maastricht (The Netherlands).
- [4] Silva, N., Camotim, D., Silvestre, N. (2008). GBT Cross-Section Analysis of Thin-Walled Members with Arbitrary Cross-Sections: A Novel Approach, *Proceedings of the Fifth International Conference on Thin-Walled Structures*, Brisbane, Australia.
- [5] Borst, R. de., Sluys, L.J. (2007). *Computational Methods in Non-linear Solid Mechanics*, Koiter Institute, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [6] Chen, W.F., Han, D.J. (1988). *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag New York Inc., United States of America.
- [7] Clarke, M. J., Hancock, G.J. (1990). A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear-Analysis, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.29, p.1365-1391.
- [8] Crisfield, M.A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through", *Computers and Structures*, 13, p. 55-62.
- [9] Hellweg, H.-B., Crisfield, M.A. (1998). A New Arc-Length Method for Handling Sharp Snap-Backs, *Computers & Structures*, Vol. 66, No. 5, p.705-709.
- [10] Sousa, C., Pimenta, P.M. (2010). A new parameter to arc-length method in nonlinear structural analysis, *Mecánica Computacional Vol. XXIX*, p.1841-1848, Asociación Argentina de Mecánica Computacional.
- [11] Neto, EA de S., Peric, D., Owen, D.R.J. (2008). *Computational Methods for Plasticity – Theory and Applications*, Wiley.
- [12] Morais, V., Vieira, C. (2006). *MATLAB 7 & 6*, FCA – Editora de Informática, Lisboa.
- [13] DS Simulia Inc. *ABAQUS Standard* (version 6.5), 2004.
- [14] Bogetti, T.A., Hoppel, C.P.R., Harik, V.M., Newill, J.F., Burns, B.P. (2004). Predicting the nonlinear response and progressive failure of composite laminates, *Composites Science & Technology*, 64, p.329-342.