



HAL
open science

Couplages Multiphysiques

Thomas Heuzé

► **To cite this version:**

| Thomas Heuzé. Couplages Multiphysiques. École d'ingénieur. France. 2020. hal-02448292v1

HAL Id: hal-02448292

<https://hal.science/hal-02448292v1>

Submitted on 22 Jan 2020 (v1), last revised 27 Jan 2023 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Couplages Multiphysiques

Thomas HEUZÉ Notes de cours

Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)

École Centrale de Nantes

1, rue de la Noë BP 92101

44321 Nantes Cedex 3

Table des matières

Introduction

Chapitre 1 Systèmes couplés

1.1 Définitions	2
1.2 Types de couplages	2
1.3 Modélisation mathématique	3
1.4 Contractivité d'un système différentiel	3
1.5 Schémas de résolution numériques	4
1.5.1 Intégration temporelle	4
1.5.2 Propriétés des algorithmes	5
1.5.3 Couplage algorithmique	6
1.5.4 Approche monolithique	7
1.5.5 Approches étagées	9
1.5.6 Approche séquentielle	10
1.5.7 Résumé et comparaison des approches	10

Chapitre 2 Thermomécanique en transformations infinitésimales

2.1 Bilan d'énergie interne pour un matériau à variables internes	14
2.1.1 Équation de la chaleur en thermoélastoplasticité	15
2.1.2 Coefficient de Taylor–Quinney	17
2.1.3 Résumé	17
2.2 Couplages faibles possibles	18
2.3 Transformation adiabatique	18
2.4 Thermoélasticité linéaire	19
2.5 Thermoélasticité en régime stationnaire	22

Chapitre 3 Stratégies de résolution numérique en thermoélasticité linéaire

3.1 Rappel des équations de la thermoélasticité linéaire	26
3.2 Approche monolithique	26
3.2.1 Discrétisation par éléments finis	27
3.2.2 Discrétisation temporelle	30
3.2.3 Approche de type Gauss-Seidel	31

3.3 Approches étagées	32
3.3.1 Approche étagée isotherme	32
3.3.2 Approche étagée adiabatique	33
3.3.3 Approche séquentielle pour le quasi-statique	37

Bibliographie

Introduction

Le domaine du *multiphysique* est une branche de la physique dont l'objet est de coupler au moins deux *systèmes physiques*, chacun étant gouverné par ses propres principes d'évolution ou d'équilibre, comme des lois de bilan ou des lois constitutives [1]. De nombreux problèmes de l'ingénieur ainsi que de nombreux phénomènes physiques ne peuvent être décrits correctement qu'en couplant des domaines de la physique qui ont historiquement été développés et enseignés séparément. Certains phénomènes physiques impliquent en effet des échanges d'énergies que l'histoire des sciences a classé en différents types au sein de différents sous-domaines des sciences physiques. Ces problèmes nécessitent d'une part une bonne compréhension de chaque domaine physique régissant les phénomènes en présence, mais surtout une analyse des mécanismes de couplage de ces domaines physiques, pour en proposer un modèle pertinent, capable de rendre compte de ces phénomènes observés.

Le premier défi de l'ingénieur qui travaille dans le domaine du *multiphysique* est la construction de modèles multiphysiques couplés à partir d'observations expérimentales, ainsi que l'analyse de leurs propriétés mathématiques. La construction du couplage au sein d'un modèle peut se faire via un terme source, un terme de couplage sur le bord du domaine, une dépendance à certains paramètres dans une loi de comportement, ou bien via des relations cinématiques, etc. Ensuite, l'analyse mathématique du modèle couplé doit pouvoir montrer le caractère bien posé du problème aux valeurs limites et initiales défini. Cette analyse doit conduire à des résultats d'existence et d'unicité de la solution, ainsi qu'aux propriétés de régularité de cette solution.

Une fois le modèle multiphysique construit, le second défi de l'ingénieur consiste à faire parler ces équations couplées sur un cas d'analyse précis, c'est-à-dire à trouver explicitement une solution à ces équations. Pour des cas simples, des solutions analytiques peuvent être trouvées. Mais pour l'immense majorité des problèmes de l'ingénieur, on a recours à la simulation numérique. L'objet de la simulation numérique est de faire « des expérimentations sur un modèle » [2]. Elle permet de reproduire artificiellement, c'est-à-dire au travers du prisme d'un modèle, les phénomènes qu'on souhaite observer. Enfin, elle permet de combler les « no man's land expérimentaux », c'est-à-dire d'avoir accès à des données, des champs locaux auxquels aucune instrumentation expérimentale ne permet d'accéder dans la vie réelle. Bien simuler, c'est donc « se donner les moyens de mieux comprendre, de mieux concevoir et de mieux agir » [2].

La simulation des problèmes multiphysiques pose à cet égard de nombreux défis pour les ingénieurs, lesquels ont su à l'aide des mathématiques appliquées proposer des stratégies numériques proposant différents niveaux de compromis entre précision, coût de calcul, coût d'implémentation dans des codes existants et réutilisation astucieuse de l'existant. En effet, bien qu'une simulation suffisamment précise des phénomènes d'intérêt soit nécessaire, l'implémentation d'approches monolithiques conduit à des coûts de calcul qu'il n'est pas toujours judicieux d'assumer en fonction du type de couplage des équations du modèle. Coupler deux physiques peut en effet coûter bien plus cher que la somme des coûts de simulation associés à chaque physique. Par ailleurs, ces approches ne permettent pas de réutiliser les codes de

calcul existants, et nécessitent un effort d'implémentation important, parfois dans des codes existants dont l'architecture initiale n'a pas du tout été pensée pour ce couplage de différentes physiques. Dès lors, des approches dites partitionnées [3, 4], étagées [5, 6], ou séquentielles ont été développées et proposent différents niveaux de couplage algorithmique de systèmes physiques. Ces dernières permettent en général une réutilisation plus facile des codes de calcul existants, moyennant une surcouche algorithmique assez simple de mise en oeuvre.

Enfin, les domaines d'application des analyses multiphysiques sont larges et variés. Les domaines liés aux techniques d'assemblage ou de fabrication sont très concernés par ces analyses, comme le soudage [7, 8, 9, 10, 11, 12] ou la fabrication additive [13]. D'autres applications sont liées au domaine de l'énergie comme l'amélioration des batteries Lithium-ion [14], ou l'amélioration de l'extraction des énergies marines. Cependant les applications peuvent plus largement concerner la météorologie, l'astrophysique, la construction de tokamak pour la fusion nucléaire, etc. Ces problèmes impliquent le couplage de différentes physiques, pour lesquels on construit des modèles qui n'incluent que tout ou partie des physiques en présence en fonction des objectifs de l'analyse et de son domaine d'investigation associé. Parmi les couplages qui sont usuellement rencontrés dans nos domaines de l'ingénieur, on peut citer les couplages thermique-mécanique, thermique-mécanique-électromagnétisme, thermique-métallurgie, diffusion-mécanique, ou encore thermique-magnéto-hydrodynamique, etc.

Les objectifs de ce cours se veulent à la fois ambitieux, mais tout de même raisonnables compte tenu du volume horaire alloué à cette intervention (12h). L'objectif de ce cours est de pouvoir d'une part analyser la formulation d'un type de couplage multiphysique, et d'autre part de traiter les stratégies numériques disponibles pour pouvoir résoudre un tel problème. Ce cours se concentre sur le couplage thermique-mécanique, bien que certains éléments d'analyse qui y sont développés peuvent être réutilisés pour d'autres couplages multiphysiques. Ce cours comporte trois chapitres.

- Le premier chapitre traite des systèmes couplés, dont le couplage entre deux physiques apparaît comme un cas particulier. Une présentation des méthodes classiques de résolution numérique y est proposée.
- Le second chapitre rappelle les équations de la thermomécanique en transformations infinitésimales. Dans un premier temps, les équations de la thermoélastoplasticité sont détaillées, puis des simplifications conduisent à celles de la thermoélasticité linéaire.
- Le troisième chapitre traite des stratégies de résolution numérique pour la thermoélasticité linéaire. Les approches monolithique, étagées isotherme et adiabatique sont traitées.

Le cours proposé aux élèves se scinde en deux parties. La première décrit un résumé de ces notes de cours. La seconde est constituée d'un mini-projet (6h) au cours duquel les élèves peuvent coder dans le langage de leur choix les trois stratégies numériques détaillées au chapitre 3 pour la thermoélasticité sur l'exemple de la barre vibrante amortie thermiquement proposé dans [6].

1

Ce chapitre définit les notions et propriétés de base concernant les systèmes couplés, ainsi que les approches de résolution numérique conventionnelles.

Systemes couplés

Table des matières

1.1 Définitions	2
1.2 Types de couplages	2
1.3 Modélisation mathématique	3
1.4 Contractivité d'un système différentiel	3
1.5 Schémas de résolution numériques	4
1.5.1 Intégration temporelle	4
1.5.2 Propriétés des algorithmes	5
1.5.3 Couplage algorithmique	6
1.5.4 Approche monolithique	7
1.5.5 Approches étagées	9
1.5.6 Approche séquentielle	10
1.5.7 Résumé et comparaison des approches	10

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 On appelle système un ensemble d'entités qui interagissent et évoluent (au cours du temps). Les entités peuvent être des champs continus ou discrets. Leur évolution est régie par des équations différentielles (EDO ou EDP).

Définition 1.1.2 Un système couplé est constitué de plusieurs sous-systèmes qui interagissent. Ils peuvent être différenciés par le modèle (loi de conservation, loi de comportement, etc.) ou les méthodes numériques utilisées.

Définition 1.1.3 Les sous-systèmes interagissent au travers d'interfaces. Géométriquement, une interface peut correspondre à une frontière ou à une partie ou à la totalité du domaine spatial.

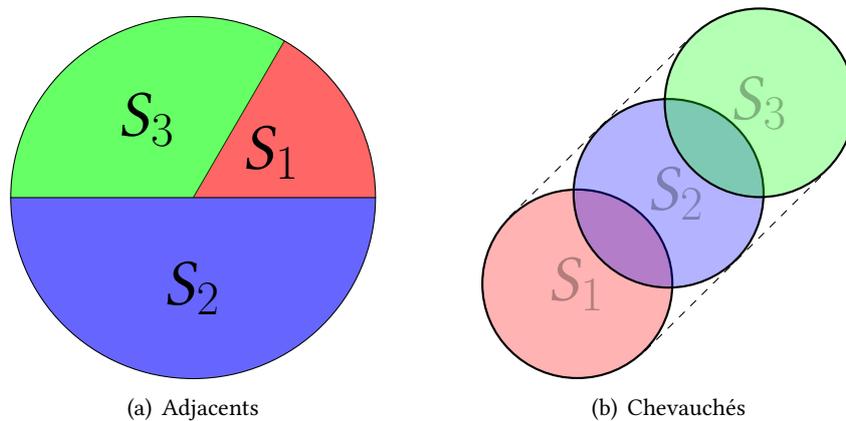


FIGURE 1.1 – Agencement des sous-systèmes

Des sous-systèmes peuvent être adjacents (fluide–structure, dynamique des corps solides), ou chevauchés. Des chevauchements partiels sont aussi possibles (ex : électromagnétique–mécanique).

1.2 Types de couplages

Le type de couplage entre deux sous-systèmes (chaque physique par exemple) peut être qualifié de « fort » ou « faible ».

Couplage fort : il existe une influence significative des deux sous-systèmes l'un sur l'autre.

Couplage faible : seul un sous-système influence de façon significative l'autre sous-système.



FIGURE 1.2 – Types de couplage

La « force » du couplage est déterminée par les équations du modèle mathématique. Une écriture adimensionnée des équations du modèle permet de faire apparaître quelques nombres adimensionnés [6], dont la valeur renseigne sur la « force » du couplage entre les sous-systèmes.

1.3 Modélisation mathématique

Considérons un système dynamique dont l'état est décrit par le vecteur $\mathbf{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$, et régi par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathcal{F}(\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Le couplage entre les deux sous-systèmes décrits par leur entité respectives $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sera dit *couplage fort* si le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mathcal{F}_1(u_1, u_2, t) \\ \dot{u}_2 = \mathcal{F}_2(u_1, u_2, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où les composantes \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont toutes les deux fonction de $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Si seul le sous-système 1 possède une influence significative sur le second, alors le couplage sera considéré *faible* :

$$\mathcal{F}_1(u_1, u_2, t) \approx \mathcal{F}_1(u_1, t) \quad (1.3)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{F}_1(u_1, t) \\ \mathcal{F}_2(u_1, u_2, t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Ci-dessous quelques exemples.

Thermique de Fourier
L'équation de la chaleur

$$\dot{T} = \frac{1}{\rho C} (\text{div}(\lambda \nabla T) + r) \quad (1.5)$$

se met sous la forme (1.1), avec $u \equiv T$.

Elastodynamique infinitésimale

Les équations du mouvement combinées à la loi d'élasticité infinitésimale s'écrivent :

$$\text{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.6)$$

où \mathbf{C} est le tenseur d'élasticité. Les équations du mouvement peuvent se réécrire sous la forme d'un système (1.1) tel que :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{v} \\ \frac{1}{\rho} (\text{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{f}) \end{cases} \quad (1.7)$$

1.4 Contractivité d'un système différentiel

L'opérateur \mathcal{F} sera dit contractif s'il existe une norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\| \leq \|\mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0\|, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.8)$$

pour toute solution perturbée $\tilde{\mathbf{u}}(t)$. Ceci assure, en un certain sens, la stabilité physique du système. Cette propriété est très importante pour la construction de schémas étagés (voir chapitre 3), et notamment pour assurer leur stabilité numérique.

Diffusion

Prenons l'exemple de la diffusion dont l'équation de bilan de masse s'écrit

$$\dot{c} = \operatorname{div}(D\Delta c) = \mathcal{F}(c, t) \quad (1.9)$$

La norme d'intérêt est la norme 2 associée aux fonctions de carré sommable :

$$\|\cdot\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} (\cdot)^2 d\Omega} \quad (1.10)$$

On a donc, pour tout instant $t \in [0, T]$, l'équivalence suivante

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|c - \tilde{c}\|_2^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|c - \tilde{c}\|_2 \leq \|c_0 - \tilde{c}_0\|_2 \quad (1.11)$$

Développons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (c - \tilde{c})^2 d\Omega &= \int_{\Omega} (\dot{c} - \dot{\tilde{c}})(c - \tilde{c}) d\Omega \stackrel{\text{EDP}}{=} \int_{\Omega} [D(c, i - \tilde{c}, i)]_{,i} (c - \tilde{c}) d\Omega \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \int_{\Omega} \underbrace{D(c, i - \tilde{c}, i) n_i}_{(q_i - \tilde{q}_i)} (c - \tilde{c}) dS - \int_{\Omega} \underbrace{D}_{\geq 0} \underbrace{(c, i - \tilde{c}, i)^2}_{> 0} d\Omega \leq 0 \end{aligned}$$

où on note que $(q_i - \tilde{q}_i) = 0$ si on considère des conditions de Neumann homogènes, et $D \geq 0$ par application du second principe de la thermodynamique.

1.5 Schémas de résolution numériques

1.5.1 Intégration temporelle

La discrétisation temporelle s'effectue par différences finies. L'intervalle de temps d'étude $[0, T]$ est discrétisé en un nombre fini d'incrément de temps, tel qu'il contienne un nombre fini d'instant de calcul :

$$\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, T\}, \quad (1.12)$$

le pas de temps étant défini comme

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n, \quad (1.13)$$

de sorte que le champ calculé au $n^{\text{ième}}$ pas de calcul approxime la solution à l'instant t_n

$$\mathbf{u}_n \approx \mathbf{u}(t_n). \quad (1.14)$$

Plusieurs schémas aux différences finies sont disponibles à cet effet [15].

Trapèzes généralisés

Les trapèzes généralisés approximent la dérivée de l'approximation sur le pas de temps par une combinaison linéaire des taux du champ définis aux instants t_n et t_{n+1} :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} &= (1 - \alpha)\mathcal{F}(\mathbf{u}_n, t_n) + \alpha\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}, t_{n+1}) \\ &= (1 - \alpha)\dot{\mathbf{u}}_n + \alpha\dot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{aligned}$$

avec $\alpha \in [0, 1]$.

Différences généralisées

Les différences généralisées approximent la dérivée de l'approximation à l'instant $t_{n+\alpha} = t_n + \alpha\Delta t$, tel que

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_{n+\alpha}$$

$$\mathbf{u}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{u}_n + \alpha\mathbf{u}_{n+1}$$

avec $\alpha \in [0, 1]$.

Les deux familles de schémas précédents partagent le résultat suivant :

Proposition 1.5.1 Si $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, alors le système est inconditionnellement stable. Si $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, alors le système est conditionnellement stable.

Ces familles de schémas font partie des schémas *one-step* [16] : la solution au pas de temps $n + 1$ ne dépend que de l'état au pas précédent n . Cette famille de schémas *one-step* inclut aussi (entre autres) la famille des schémas Runge-Kutta. Enfin, d'autres familles peuvent prendre en compte plusieurs pas, comme notamment la famille des schémas BDF (Backward Difference Formula) [16].

1.5.2 Propriétés des algorithmes

On effectue ici un bref rappel de quelques propriétés des algorithmes d'intégration *one-step*.

Intégration sur le pas de temps en une étape

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{K}_{\Delta t}(\mathbf{u}_n) \quad (1.15)$$

où $\mathbf{K}_{\Delta t}$ est un opérateur discret dépendant du pas de temps Δt .

Cohérence ^a

Lorsque le pas de temps tend vers 0, l'opérateur discret doit tendre vers l'opérateur continu :

opérateur discret $\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0}$ opérateur continu

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{K}_{\Delta t}}{d\Delta t} = \mathcal{F}(\mathbf{u}, t) \quad \forall \mathbf{u} \quad (1.16)$$

^a Consistency en anglais, cohérence en français.

Erreur de cohérence

Soit $\mathbf{w}(t)$ la solution exacte, alors l'erreur de cohérence est donnée par :

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{w}(t_{n+1}) - \mathbf{K}_{\Delta t}(\mathbf{w}(t_n)) \quad (1.17)$$

et correspond à l'erreur de troncature du schéma, générée par l'approximation discrète des opérateurs différentiels, laquelle est précise à l'ordre p si

$$\mathbf{d}_n = O(\Delta t^p) \quad (1.18)$$

avec p un entier positif.

Stabilité

L'écart entre deux solutions initialement proches reste borné.

$$\begin{aligned} \exists c > 0, \exists \varepsilon > 0 \quad & \| \mathbf{u}_n^{(1)} - \mathbf{u}_n^{(2)} \| \leq c\varepsilon \quad \forall n > 0 \\ & \forall \| \mathbf{u}_0^{(1)} - \mathbf{u}_0^{(2)} \| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Si l'opérateur est linéaire, la condition de A -stabilité s'applique, où $[A]$ désigne la matrice d'amplification du système :

$$\mathbf{u}_{n+1} = [A]\mathbf{u}_n \tag{1.19}$$

La condition de stabilité porte alors sur le rayon spectral de $[A]$:

$$\max_i |\lambda_i([A])| \leq 1 \tag{1.20}$$

et λ_i est la $i^{\text{ième}}$ valeur propre de $[A]$.

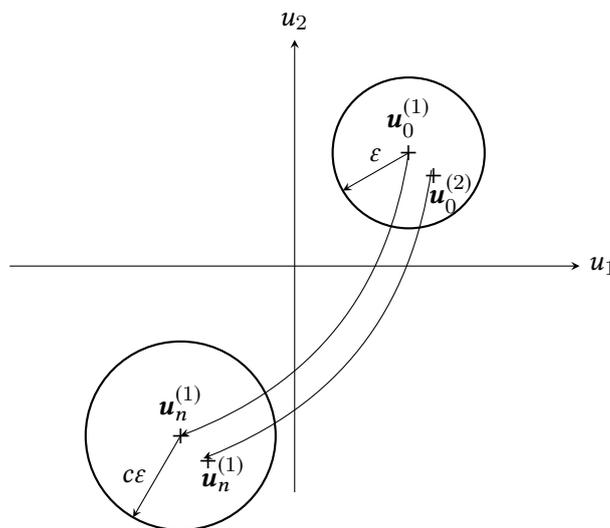


FIGURE 1.3 – Stabilité de l'algorithme

Convergence

Le théorème de Lax [16] nous dit que tout schéma stable et cohérent à l'ordre p est convergent d'ordre p :

$$| \mathbf{e}_n | \leq K \max_j | \mathbf{d}_j | = \mathcal{O}(\Delta t^p) \quad p > 0 \tag{1.21}$$

où \mathbf{e}_n est l'erreur globale définie à chaque instant comme

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{w}(t_n) - \mathbf{u}_n. \tag{1.22}$$

1.5.3 Couplage algorithmique

Le *couplage algorithmique* [1] concerne la procédure numérique de résolution des équations couplées du modèle mathématique. Il a trait aux relations entre les inconnues discrètes

apparaissant dans l'algorithme de résolution du système discret. Le couplage algorithmique et le couplage des équations du modèle continu sont donc deux notions de couplage *différentes*. Trois niveaux de couplage algorithmique sont généralement considérés :

- le *tight coupling* (ou couplage « serré ») est un algorithme qui ne donne pas de privilège particulier à une quelconque inconnue. Toutes les inconnues sont résolues de façon simultanée. On parle d'approche monolithique.
- le *mild coupling* (ou couplage doux) est un algorithme qui consiste à partitionner le système d'équations discrètes en différents sous-ensembles pour en faire une résolution asynchrone. Cependant, la solution numérique obtenue peut être similaire à celle obtenue avec un *tight coupling*. Ce type de couplage algorithmique nécessite une boucle de feedback entre les différentes partitions choisies du système discret.
- le *loose coupling* partitionne aussi le système discret en sous-ensembles, mais la résolution est effectuée en boucle ouverte, sans retour à une partition une fois celle-ci résolue.

Dans ce cours, nous ne traiterons que les approches monolithiques (*tight coupling*), étagées (*loose coupling* à l'échelle du pas de temps) et séquentielle (*loose coupling* sur l'intervalle d'étude).

1.5.4 Approche monolithique

L'approche monolithique consiste à résoudre tous les champs u_i *simultanément*, à chaque pas de temps. Si un schéma de type différences généralisées est retenu, le système discret en temps s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_n + \Delta t \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_1(u_1, u_2, t) \\ \mathcal{F}_2(u_1, u_2, t) \end{Bmatrix}_{n+\alpha} \quad (1.23)$$

Quant à la famille des trapèzes généralisés, elle conduit au système discret suivant :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_n + \Delta t \left[(1 - \alpha) \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{Bmatrix}_n + \alpha \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{Bmatrix}_{n+1} \right] \quad (1.24)$$

Si $\alpha > 0$, l'algorithme est implicite, si $\alpha = 0$, l'algorithme est explicite, auquel cas les différentes équations sont découplées. On développe à présent pour le cas implicite en fonction du type de système dynamique qui peut être ou bien linéaire, ou bien non linéaire.

1.5.4.1 Système linéaire

Une discrétisation temporelle implicite d'un système dynamique linéaire conduit à résoudre un système d'équations algébriques à chaque pas de temps de la forme :

$$[K]\{u_{n+1}\} = \{F_{n+1}\} \quad (1.25)$$

où $[K] \equiv [K(\Delta t)]$ est la matrice premier membre qui peut dépendre du pas de temps Δt .

Exemple fil rouge

Considérons le système linéaire suivant [4] :

$$\begin{cases} \dot{x} + ax + cy = f(t) \\ \dot{y} + bx + dy = g(t) \end{cases} \quad (1.26)$$

avec les conditions initiales associées

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Une discrétisation de type Euler implicite donne l'approximation :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t \dot{x}_{n+1} \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t \dot{y}_{n+1} \end{cases} \quad (1.28)$$

et donc le système discret s'écrit

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_n + \Delta t \begin{Bmatrix} f(t_{n+1}) - ax_{n+1} - y_{n+1} \\ g(t_{n+1}) - bx_{n+1} - dy_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (1.29)$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 1 + a\Delta t & c\Delta t \\ b\Delta t & 1 + d\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} x_n + \Delta t f(t_{n+1}) \\ y_n + \Delta t g(t_{n+1}) \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

Remarques

- Le pas de temps critique Δt doit être choisi avec la condition de A -stabilité : ceci donne des bornes sur les valeurs de a, b, c, d ;
- Dans un système couplé, chaque champ a son propre pas de temps critique, il convient donc de prendre $\Delta t_c \leq \min(\Delta t_{c,1}, \Delta t_{c,2})$.

1.5.4.2 Système non linéaire

Tenant compte d'une discrétisation temporelle de type Euler implicite, on définit le résidu évalué à l'instant t_{n+1} par :

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} - \mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}, t_{n+1}) \quad (1.31)$$

La résolution à chaque pas de temps doit se faire de façon itérative. On construit alors une séquence de vecteurs $\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$, $k = 1, \dots, N$ convergente. La méthode Newton est une façon parmi d'autres de construire une séquence convergente d'approximations de la solution. Le résidu formé à l'instant t_{n+1} est linéarisé à l'itération k du calcul. En omettant les indices de pas de temps, il vient :

$$\mathbf{r}^{(k+1)} \simeq \mathbf{r}^{(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \right|^{(k)} \cdot \delta \mathbf{u}^{(k)} \underbrace{=}_\text{Newton} 0 \quad (1.32)$$

avec $\delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}$ un incrément de l'approximation de la solution entre deux itérations de calcul. Il vient alors un système linéaire à résoudre à chaque itération de calcul

$$[K]^{(k)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} \quad (1.33)$$

défini avec la matrice tangente

$$[K]^{(k)} = - \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \right|^{(k)} \quad (1.34)$$

Remarques

- La matrice tangente s'exprime en fonction des champs des deux sous-systèmes comme

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (1.35)$$

et n'est *a priori* pas symétrique : $[K_{12}] \neq [K_{21}]$. Le coût de calcul lié à la factorisation de la matrice et le stockage seront donc plus importants que pour une matrice symétrique.

- Des approches partitionnées avec itérations de point fixe sont aussi possibles si on souhaite éviter une telle factorisation. Un exemple consiste à résoudre le système découplé suivant à chaque itération :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (1.36)$$

pour lequel plus d'itérations de calcul seront nécessaires, mais chaque itération est moins chère. Il faut rappeler que seul le résidu conditionne la précision de la solution, la matrice n'influe que sur la vitesse de convergence.

1.5.5 Approches étagées

L'idée est de trouver/proposer une décomposition de l'opérateur \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}(u_1, u_2, t) = \mathcal{F}_I(u_1, u_2, t) + \mathcal{F}_{II}(u_1, u_2, t) \quad (1.37)$$

Cette décomposition additive de l'opérateur continu conduit à chaîner les opérateurs discrétisés :

$$K = K_{II} \circ K_I \quad (1.38)$$

où K_I et K_{II} correspondent aux opérateurs discrets des première et seconde étapes de calcul de l'approche étagée respectivement. En pratique, si une décomposition additive en deux sous-opérateurs est définie :

- la résolution de la première étape de calcul est réalisée à partir de champs prédits (qui peuvent coupler les différents sous-systèmes ou pas, c'est selon).
- cette prédiction est actualisée à chaque pas de temps.
- la seconde étape est effectuée en tenant compte des champs calculés à la première étape.
- une fois les deux étapes de calcul effectuées, la procédure passe au pas de temps suivant. Aucune 'rétroaction' n'est envisagée au moyen d'une boucle de type point fixe.

Considérons un exemple simple pour lequel chaque sous-opérateur continu est associé à un champ d'un sous-système :

$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_1(u_1, u_2, t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathcal{F}_2(u_1, u_2, t) \end{Bmatrix} \quad (1.39)$$

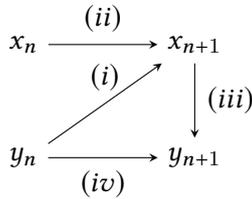
Alors une discrétisation temporelle de type différences généralisées conduit à la résolution du système suivant :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_n + \Delta t \begin{Bmatrix} \mathcal{F}_1(u_1, u_2^{\text{prédit}}, t) \\ \mathcal{F}_2(u_1^{\text{substitué}}, u_2, t) \end{Bmatrix}_{n+\alpha} \quad (1.40)$$

Reprenons l'exemple fil rouge précédent

$$\begin{bmatrix} 1 + a\Delta t & 0 \\ b\Delta t & 1 + d\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} x_n + \Delta t f(t_{n+1}) - c\Delta t y^{\text{prédit}} \\ y_n + \Delta t g(t_{n+1}) \end{Bmatrix} \quad (1.41)$$

Voici une idée de l'algorithme :



i. prédiction. Plusieurs types de prédiction sont possibles :

$$\begin{aligned} y^{\text{prédit}} &= y_n + \Delta t y_n \\ (y^{\text{prédit}} &= y_n) \end{aligned}$$

FIGURE 1.4 – Illustration de l'algorithme

ii. avance x

$$x_{n+1}^{\text{prédit}} = \frac{x_n + \Delta t f_{n+1} - c\Delta t y^{\text{prédit}}}{1 + a\Delta t}$$

iii. substitution

$$x_{n+1} = x_{n+1}^{\text{prédit}}$$

iv. avance y

$$y_{n+1} = \frac{y_n + \Delta t g_{n+1} - b\Delta t x_{n+1}}{1 + d\Delta t}$$

Remarque

Le système s'écrit aussi sous la forme

$$\begin{bmatrix} 1 + a\Delta t & 0 \\ b\Delta t & 1 + d\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & -c\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_n + \Delta t \begin{Bmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (1.42)$$

Dès lors, la matrice d'amplification liée à ce système est différente de celle du système précédent. La condition de A -stabilité s'écrit :

$$\max_i \left| \lambda_i \left(\begin{bmatrix} 1 + a\Delta t & 0 \\ b\Delta t & 1 + d\Delta t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -c\Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right| \leq 1 \quad (1.43)$$

1.5.6 Approche séquentielle

L'idée d'une approche séquentielle est de découpler la résolution des deux sous-systèmes. Tout d'abord, on résout $\dot{u}_1 = \mathcal{F}_1(u_1, u_2^{(0)}, t)$ à $u_2^{(0)}$ constante, puis $\dot{u}_2 = \mathcal{F}_2(u_1, u_2, t)$, u_1 connu $\forall t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} S_1 : u_1^{(0)} &\rightarrow \dots \rightarrow u_1^{(n)} \rightarrow \dots \rightarrow u_1^{(N)} \\ S_2 : u_2^{(0)} &\rightarrow \dots \rightarrow u_2^{(n)} \rightarrow \dots \rightarrow u_2^{(N)} \end{aligned}$$

1.5.7 Résumé et comparaison des approches

Approches	Avantages	Inconvénients
Monolithique	Couplage fort bien traité Précision Contrôle de la stabilité numérique	Coût (taille, mémoire, solveur LU) K non symétrique $\neq \Delta t$ ne sont pas exploités Convergence (parfois difficile)
Étagée	Taille et coût Matrices symétriques (solveur LL^T) Prise en compte des différentes échelles spatiales et temporelles (utilisation de différents maillages) Couplage de codes existants	Précision moindre Perte potentielle de stabilité Influence de l'historique de chaînage des sous-systèmes
Séquentielle	Pas cher Couplage de codes très facile	Précision raisonnable pour couplage faible uniquement

TABLE 1.1 – Résumé des différentes approches

2

Ce chapitre décrit dans un premier temps les équations de la thermomécanique des matériaux à variables internes dans le cadre des transformations infinitésimales, puis se focalise sur la thermoélasticité infinitésimale.

Thermomécanique en transformations infinitésimales

Table des matières

2.1 Bilan d'énergie interne pour un matériau à variables internes	14
2.1.1 Équation de la chaleur en thermoélastoplasticité	15
2.1.2 Coefficient de Taylor–Quinney	17
2.1.3 Résumé	17
2.2 Couplages faibles possibles	18
2.3 Transformation adiabatique	18
2.4 Thermoélasticité linéaire	19
2.5 Thermoélasticité en régime stationnaire	22

2.1 Bilan d'énergie interne pour un matériau à variables internes

L'énergie totale d'un système se décompose en la somme d'une énergie interne E et d'une énergie cinétique K :

$$\mathcal{E} = E + K \tag{2.1}$$

Pour ce système, le Premier Principe de la Thermodynamique (PPT) et le Théorème de l'Energie Cinétique (TEC) (c'est-à-dire le Principe des Puissances Virtuelles écrit avec le mouvement réel) s'écrivent :

$$\begin{array}{l} \text{PPT} \\ \text{TEC} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \dot{Q} \\ \frac{dK}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} \end{array}$$

La soustraction de ces deux équations conduit à l'écriture du Bilan d'Energie Interne (BEI) du système

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{int}} + \dot{Q} \tag{2.2}$$

qui exprime la variation temporelle de l'énergie interne d'un système comme la somme d'une puissance mécanique liée à la déformation du milieu et d'une puissance liée à un apport (ou un retrait) de chaleur. Cette équation s'écrit aussi de façon locale comme

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} + r - \text{div} \boldsymbol{q} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{2.3}$$

où e est l'énergie interne spécifique, c'est-à-dire par unité de masse, \boldsymbol{q} est le vecteur densité de flux de chaleur, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, \boldsymbol{D} est le taux de déformation eulérien, et r est un terme source de chaleur par unité de volume.

Hypothèse de transformations infinitésimales

Considérons dans un premier temps l'hypothèse de transformations infinitésimales :

- $\|\nabla \boldsymbol{u}\| \ll 1$: petites déformations ;
- $\frac{\|\boldsymbol{u}\|}{L} \ll 1$: petits déplacements, L longueur caractéristique ;
- $\alpha(T - T_0) \ll 1$: faibles variations de températures conduisant à de faibles dilatations thermiques.

Sous cette hypothèse, toutes les mesures de déformation se réduisent au tenseur linéarisé des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, de sorte que le taux de déformation s'écrive $\boldsymbol{D} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Matériaux à variables internes : Méthode de l'état local

La méthode de l'état local postule que l'état thermomécanique d'un milieu matériel en un point et à un instant donné est complètement défini par la connaissance des valeurs à cet instant d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré (c'est le principe de l'action locale). Les dérivées temporelles n'intervenant pas pour définir l'état, cette hypothèse implique que toute évolution puisse être considérée comme une succession d'états d'équilibre. Les phénomènes très rapides pour lesquels les échelles de temps seraient de l'ordre des temps de relaxation de retour à l'équilibre thermostatique sont donc exclus du champ d'application de cette théorie.

C'est par le choix de la nature et du nombre des variables d'état que l'on décrit plus ou moins finement les phénomènes physiques. Un processus sera qualifié de thermodynamiquement admissible si à chaque instant de l'évolution, le second principe est satisfait.

Ces variables d'état sont généralement de deux sortes :

- les variables observables : la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, la température T ;
- les variables internes : les déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, ainsi que d'autres variables internes additionnelles V_k , $1 \leq k \leq N$, lesquelles peuvent contenir des variables liées aux écrouissements, à l'endommagement ou autres : $\{V\} = \{\boldsymbol{\alpha}, r, d, \dots\}$.

On postule une partition additive de la déformation en parties thermoélastique et plastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.4)$$

inspirée de l'observation expérimentale sur des essais unidimensionnels. On postule par ailleurs l'existence d'une énergie libre d'Helmholtz ψ jouant le rôle d'un *potentiel thermodynamique*. La partition additive de la déformation permet d'écrire

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T; \boldsymbol{\varepsilon}^p, V_k) \equiv \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T; V_k) \quad (2.5)$$

que l'on introduit dans l'inégalité de Clausius–Duhem (ICD), c'est-à-dire le second principe de la thermodynamique^a. On en déduit les lois d'états :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \\ s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \\ A_k = \frac{\partial(\rho \psi)}{\partial V_k}; \quad 1 \leq k \leq N \end{cases} \quad (2.6)$$

La dissipation totale s'écrit alors :

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - A_k \cdot \dot{V}_k - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (2.7)$$

On s'intéresse à présent à l'écriture du bilan d'énergie interne (2.3), exprimée avec ces lois d'état et ce potentiel $\psi = e - Ts$, il vient :

$$\begin{aligned} \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s + T\dot{s}) &= \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k + \dot{T}s + T\dot{s} \right) \\ &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + A_k \cdot \dot{V}_k + \rho T \dot{s} \\ &\stackrel{\text{BEI}}{=} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \text{div} \mathbf{q} \end{aligned}$$

Ce bilan d'énergie devient un bilan entropique : la variation temporelle de la densité d'entropie est égale aux apports d'énergie mécanique et de chaleur (externe et interne) :

$$\rho T \dot{s} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - A_k \cdot \dot{V}_k}_{\mathcal{D}_{\text{int}}} + r - \text{div} \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.8)$$

^a Pour plus de détails sur cette partie, on pourra consulter [17]

2.1.1 Équation de la chaleur en thermoélastoplasticité

Nous cherchons dans cette sous-section à réécrire le bilan d'énergie sous la forme d'une équation de la chaleur. À cet effet, il faut exprimer le taux d'entropie du précédent bilan en fonction de ses variables argument, et notamment en fonction d'un taux de température. En

combinant l'expression de l'entropie en fonction de l'énergie libre et sa dérivée totale :

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T; V_k)$$

$$\dot{s} = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}\dot{T} + \frac{\partial^2\psi}{\partial V_k\partial T}\dot{V}_k\right),$$

le bilan entropique s'écrit

$$\rho \underbrace{\left(-T\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}\right)}_{c_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k}(T)=T\frac{\partial s}{\partial T}} \dot{T} = T \underbrace{\frac{\partial^2\rho\psi}{\partial T\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}}_{\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial T}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + T \underbrace{\frac{\partial^2\rho\psi}{\partial T\partial V_k}}_{\frac{\partial A_k}{\partial T}} \dot{V}_k + \mathcal{D}_{\text{int}} + r - \text{div}\mathbf{q} \quad (2.9)$$

où $c_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k}$ est une capacité calorifique à déformation élastique et variables internes additionnelles constantes, et les sensibilités des contraintes $\partial\boldsymbol{\sigma}/\partial T$ et des variables internes additionnelles $\partial A_k/\partial T$ par rapport à la température sont apparues comme source/puis de chaleur. L'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$\rho c_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k} \dot{T} = T \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k + \mathcal{D}_{\text{int}} + r - \text{div}\mathbf{q} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.10)$$

2.1.1.1 Interprétation

La variation de température au cours du temps est liée à une puissance provenant de la mécanique :

$$T \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k + \mathcal{D}_{\text{int}},$$

à l'apport de chaleur extérieure, et à de la chaleur évacuée par conduction.

2.1.1.2 Termes de couplage

1. La dissipation mécanique ou intrinsèque $\mathcal{D}_{\text{int}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - A_k \dot{V}_k \geq 0$ doit être non-négative par application du second principe combiné avec l'hypothèse découplage des dissipations [17].
 - (a) la puissance plastique $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq 0$ contribue à l'élévation de la température s'il y a écoulement plastique ;
 - (b) le terme $-A_k \dot{V}_k$ correspond à une puissance associée à une *énergie bloquée*, stockée dans l'élément de volume, éventuellement récupérable ;
2. le terme $T \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ correspond au *couplage thermoélastique*, qui représente l'influence de la partie élastique du comportement mécanique sur la température au travers des effets de dilatations thermiques. Il contribue à une chute de la température, de façon analogue à une détente de gaz. Cette puissance est généralement d'un ordre de grandeur inférieur à celui de la puissance plastique, s'il y a écoulement plastique. Aussi dans ce dernier cas, il est négligé au regard de la puissance plastique qui tend elle à élever la température de l'élément de volume.
3. le terme $T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k$ correspond au *couplage thermoplastique*, lequel caractérise la dépendance de la limite d'élasticité à la température, via le phénomène d'adoucissement thermique. Ce terme peut devenir non négligeable dans des zones d'écoulement plastique intense comme c'est le cas pour des bandes de cisaillement adiabatiques [18]. Dans ce cas, un bilan d'énergie correct ne peut négliger ce terme.

2.1.2 Coefficient de Taylor–Quinney

Classiquement, on introduit le *coefficient de Taylor–Quinney* (1934) [19], qui quantifie la fraction d'énergie dissipée en chaleur lors de la déformation. Soit \mathcal{E}_s l'énergie stockée et W^P le travail plastique, on définit les fractions d'énergies suivantes :

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - f && \text{fraction d'énergie dissipée en chaleur,} \\ f &= \frac{d\mathcal{E}_s}{dW^P} && \text{fraction instantanée d'énergie stockée dans l'élément de volume.} \end{aligned}$$

Le coefficient de Taylor–Quinney s'écrit alors

$$\beta = \frac{dW^P - d\mathcal{E}_s}{dW^P} = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P - A_k \dot{V}_k}{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P} \quad (2.11)$$

c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P - A_k \cdot \dot{V}_k = \beta \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P \quad (2.12)$$

Ce coefficient est inférieur ou égal à l'unité. Il est égal à l'unité si toute la puissance plastique est convertie en chaleur, ou à zéro si aucune fraction de la puissance plastique n'est convertie en chaleur. En toute rigueur, le coefficient β dépend de $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et T , qui sont des quantités qui ne sont pas facilement accessibles. L'approximation souvent effectuée consiste à le considérer constant, et égal à 0.9 (ou 0.8, selon les ouvrages), c'est-à-dire qu'on considère que 90% de la puissance plastique est dissipée en chaleur et que 10% de cette puissance plastique est stockée dans l'élément de volume.

Si on néglige les couplages thermoplastique et thermoélastique, l'équation de la chaleur se réécrit

$$\rho c_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k} \dot{T} = \beta \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P + r - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.13)$$

2.1.3 Résumé

Les phénomènes mécaniques et thermiques sont couplés et interagissent l'un avec l'autre :

– Mécanique

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathcal{F}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{v}(\tau), \tau \leq t), T) \\ &+ \text{Conditions aux limites et initiales} \end{aligned}$$

– Thermique

$$\begin{aligned} \rho c_{\boldsymbol{\varepsilon}^e, V_k} \dot{T} &= T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k + \mathcal{D}_{\text{int}} + r - \operatorname{div} \mathbf{q} \\ &+ \text{Loi de Fourier} \\ &+ \text{Conditions aux limites et initiales} \end{aligned}$$

La mécanique influence la thermique en générant une puissance calorifique conduisant à une modification de l'évolution de la température. La thermique influence la mécanique d'une part au moyen de paramètres mécaniques qui peuvent être thermo-dépendants, et d'autre par le biais d'un couplage cinématique via les effets de dilation thermiques.

2.2 Couplages faibles possibles

La mécanique et la thermique peuvent être couplés, et ce de façon plus ou moins importante. Par exemple, une déformation peut entraîner un échauffement, tout comme des effets thermiques peuvent générer des contraintes au sein d'une structure.

Étant donné que la résolution complète de ce système d'équations d'une part est difficile, et d'autre part contient des termes de couplages qui peuvent être d'ordres de grandeur bien différents en fonction des situations considérées, il est intéressant de négliger certains termes de plus faibles influences pour affaiblir le couplage des équations quand c'est possible, et ainsi simplifier la résolution. Deux cas évidents se présentent :

1. Si le comportement mécanique dépend peu de la température, par exemple pour de faibles variations de température, ou si l'adoucissement thermique est négligeable, la thermique n'influence que faiblement la mécanique. En revanche, il peut exister une influence significative de la mécanique sur la thermique, par exemple par le biais d'une dissipation non négligeable. Alors, en fonction des ordres de grandeur des termes en présence, on pourra envisager une procédure de résolution qui consiste d'abord à résoudre la partie mécanique, puis la partie thermique.

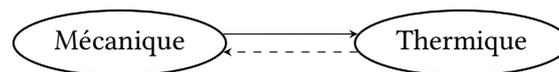


FIGURE 2.1 – Faible influence de la thermique

2. Si les sources de chaleur produites par la mécanique sont négligeables devant les sources externes de chaleur ou le terme de conduction thermique (par exemple si de très faibles déformations ont lieu), la thermique ne dépend que faiblement de la mécanique. En revanche, il peut exister une influence significative de la thermique sur la mécanique, par exemple par le biais d'un comportement mécanique thermo-dépendant. Alors, en fonction des ordres de grandeur des termes en présence, on pourra envisager une procédure de résolution qui consiste d'abord à résoudre la partie thermique, puis la partie mécanique.



FIGURE 2.2 – Faible influence de la mécanique

2.3 Transformation adiabatique

Pour les problèmes dynamiques impliquant des sollicitations rapides de type impact, la déformation peut s'opérer si rapidement que la chaleur n'a pas le temps de s'évacuer de l'élément de matière par conduction thermique. L'hypothèse de *transformation adiabatique* peut alors être retenue. Cette dernière revient à négliger le terme de conduction thermique devant celui lié aux effets transitoires $\rho C \dot{T}$. Si on mène une analyse dimensionnelle sur une équation de la chaleur simplifiée (n'incluant que les termes transitoires et de conduction), il

vient :

$$\rho C \dot{T} \sim \rho C \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (2.14)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \sim \lambda \frac{\Delta T}{L^2} \quad (2.15)$$

où Δt et L sont des temps et longueur caractéristiques du système, et λ est la conductivité thermique du milieu. On définit le nombre de Fourier comme le ratio de ces deux termes

$$\mathcal{F}_o = \frac{\lambda \Delta t}{\rho C L^2} \quad (2.16)$$

Trois cas peuvent alors être envisagés :

1. si $\mathcal{F}_o = O(1)$: il faut inclure les deux termes à l'équation de la chaleur.
2. si $\mathcal{F}_o \gg 1$: l'évolution s'apparente à une isotherme. Le terme transitoire peut être négligé.
3. si $\mathcal{F}_o \ll 1$: l'évolution s'apparente à une transformation adiabatique. Le terme de conduction thermique peut être négligé.

2.4 Thermoélasticité linéaire

Pour un matériau thermoélastique, les simplifications suivantes peuvent être réalisées :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.17)$$

$$\{V\} = \emptyset \quad (2.18)$$

et donc $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$. La dissipation thermique s'écrit alors :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\text{th}} = -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (2.19)$$

Un matériau thermoélastique n'est pas réversible ; en effet il est *dissipatif*, thermiquement. Il faut donc se donner une loi complémentaire pour décrire l'avancée de ce phénomène dissipatif, par exemple écrite pour le vecteur densité de flux de chaleur \mathbf{q} , notamment en supposant l'existence d'un pseudo-potentiel $\phi(\mathbf{q})$ ou plutôt de son conjugué $\phi^* \left(-\frac{\nabla T}{T_0} \right)$ obtenu par la transformée de Legendre :

$$\mathbf{q} = \frac{\partial \phi^*}{\partial \left(-\frac{\nabla T}{T_0} \right)} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T \quad \text{Loi de Fourier} \quad (2.20)$$

avec $\phi^* = T_0 \frac{\nabla T \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T}{2T_0^2}$, ϕ^* convexe, $\phi^* \geq 0$ et contient le zéro ($\phi^*(0) = 0$), $\boldsymbol{\lambda}$ est le tenseur des conductivités thermiques. La loi complémentaire obtenue est la loi de Fourier bien connue, ici écrite dans la cas des faibles variations de température avec $-\nabla T/T_0$, T_0 étant une température de référence.

La thermique de Fourier est une *thermique dissipative*. L'équation de la chaleur s'écrit pour la thermoélasticité :

$$\underbrace{\rho \left(-T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \right)}_{c_\varepsilon(T)} \dot{T} = T \frac{\partial^2 (\rho \psi)}{\partial T \partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \text{div} \mathbf{q} \quad (2.21)$$

soit en tenant compte des lois d'état et de la loi complémentaire (loi de Fourier)

$$c_\varepsilon = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}; \quad \mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T, \quad (2.22)$$

l'équation de la chaleur devient donc

$$\rho c_\varepsilon \dot{T} = T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r + \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.23)$$

Commentaires

1. On reconnaît dans l'équation de la chaleur le terme de couplage thermoélastique $T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, dont on montrera plus tard qu'il se comporte de façon analogue à une détente de gaz.
2. Dans l'équation de la chaleur, les lois d'état et complémentaire interviennent à la fois dans les termes transitoire et elliptique. En mécanique, la loi d'état n'intervient que dans le terme elliptique du bilan de la quantité de mouvement :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \mathbf{f} = \rho \boldsymbol{\gamma} \quad (2.24)$$

3. La capacité calorifique à déformation constante $c_\varepsilon(T)$ est *a priori* une fonction de la température; elle est défini au moyen de ψ .
4. Pour écrire l'équation de la chaleur associée à la thermoélasticité linéaire, il faut se donner une forme particulière d'énergie libre ψ , puis linéariser.

Soit l'énergie libre suivante

$$\rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}(T - T_0) - \rho \frac{c(T - T_0)^2}{2T_0} + \rho\psi_0 - \rho s_0(T - T_0) \quad (2.25)$$

avec \mathbf{C} le tenseur des rigidités élastiques, $\boldsymbol{\alpha}$ le tenseur des dilatations thermiques, T_0 une température de référence et c une capacité calorifique *constante*. Plusieurs formes d'énergie libre ont été proposées dans la littérature pour la thermoélasticité. Nous présentons ici celle avec une forme quadratique pour le terme transitoire (une forme en logarithme existe aussi [5]). À partir de cette forme d'énergie libre, les lois d'état s'écrivent

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}(T - T_0)) \quad (2.26)$$

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial T} = s_0 + \frac{c(T - T_0)}{T_0} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}}{\rho} \quad (2.27)$$

$$c_\varepsilon = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} = T \frac{\partial s}{\partial T} = c \frac{T}{T_0} \quad (2.28)$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors

$$\rho c \frac{T}{T_0} \dot{T} = r + \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) - T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha} \quad (2.29)$$

Cette équation est *non linéaire* (à cause du produit $T\dot{T}$); on peut la linéariser en considérant de faible variation de température et de vitesse de température :

$$T\dot{T} = T_0\dot{T} + \dots$$

$$T\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = T_0\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dots$$

Auquel cas, l'équation de la thermoélasticité linéaire s'écrit

$$\rho c \dot{T} = r + \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) - T_0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha} \quad (2.30)$$

Cette équation peut encore être simplifiée en considérant un milieu isotrope mécaniquement et thermiquement. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \lambda \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \boldsymbol{\alpha} &= \alpha \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \mathbf{C} &= [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned}$$

où δ_{ij} est le symbol de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$, 0 sinon. Il vient pour un milieu isotrope

$$\rho c \dot{T} = r + \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) - 3k T_0 \alpha \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.31)$$

avec $k = \lambda + \frac{2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ le coefficient de compressibilité élastique.

Exemple d'une barre adiabatique en traction

On considère une barre (le coefficient de Poisson est nul : $\nu = 0$), adiabatique, et soumise à un chargement de traction. L'équation locale de la chaleur s'écrit

$$\rho c \dot{T} = -T_0 E \alpha \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.32)$$

On observe que si $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0$ alors $\dot{T} < 0$. Ce phénomène est analogue à celui d'une détente de gaz adiabatique. En combinant la loi des gaz parfaits avec la loi de transformation adiabatique d'un gaz entre deux états d'équilibre A, et B il vient :

$$\left. \begin{aligned} PV^\gamma &= \text{cste} \\ PV &= nRT \end{aligned} \right\} nRT_A V_A^{\gamma-1} = nRT_B V_B^{\gamma-1} \quad (2.33)$$

soit

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} \quad (2.34)$$

Étant donné que $\gamma > 1$, si $V_B > V_A$ (détente adiabatique), alors $T_B < T_A$.

Commentaire

Il est aussi possible de définir une capacité calorifique à *contrainte constante* c_σ à partir de la capacité thermique à *déformation constante* c_ε . Il faut pour cela remplacer $\operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ au second membre de l'équation de la chaleur par $\operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ en utilisant la loi d'élasticité. La loi d'élasticité isotrope s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - 3k\alpha (T - T_0) \mathbf{I} \quad (2.35)$$

où

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \boldsymbol{\sigma} &= (3\lambda + 2\mu) \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} - 9k\alpha (T - T_0) \\ \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \underbrace{(3\lambda + 2\mu)}_{3k} \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - 9k\alpha \dot{T} \\ \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{3k} + 3\alpha \dot{T} \end{aligned}$$

L'équation de la chaleur (2.31) devient donc

$$\rho c \dot{T} = r + \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) - 3kT_0\alpha \left(\frac{\operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{3k} + 3\alpha \dot{T} \right) \quad (2.36)$$

c'est-à-dire

$$\rho c_\sigma \dot{T} = r + \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) - T_0\alpha \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.37)$$

où on a posé

$$c_\sigma = c_\varepsilon + \frac{9T_0\alpha^2 k}{\rho} \quad (2.38)$$

qui définit la *relation de Mayer*, analogue pour un milieu solide de la relation liant les capacités calorifiques C_p et C_v pour un gaz. Cette relation a pour intérêt de montrer que *tout matériau incompressible est thermiquement indilatable*. En effet, la limite d'incompressibilité est donnée pour $k \rightarrow +\infty$, or sachant que c_σ doit rester fini, cela implique nécessairement que $\alpha \rightarrow 0$. Pour une question de compatibilité thermodynamique, l'incompressibilité d'un milieu implique son absence de dilatabilité.

2.5 Thermoélasticité en régime stationnaire

La stationnarité se traduit par $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, soit $\dot{T} = 0$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ et $\boldsymbol{\gamma} = 0$. Le problème thermoélastique linéaire et stationnaire s'écrit alors :

– Mécanique

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}(T - T_0)) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{F}} & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F \end{aligned}$$

– Thermique

$$\begin{aligned} r - \operatorname{div} \mathbf{q} &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{q} &= -\lambda \nabla T & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ T &= \bar{T} & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_T \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= -\bar{q} & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_q \end{aligned}$$

La résolution du problème thermique est indépendante de la mécanique. Le couplage est faible. La résolution est effectuée de façon séquentielle : thermique puis mécanique. Le couplage thermomécanique apparaît ici dans la loi d'élasticité, dans laquelle des contraintes d'origine thermique souvent abusivement appelées « contraintes thermiques » apparaissent comme un champ de précontrainte dépendant d'un différentiel de température :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{th}} \\ \boldsymbol{\sigma}^{\text{th}} &= -\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}(T - T_0) \quad (\text{contraintes d'origine thermique}) \end{aligned}$$

Deux exemples classiques

1. Problème de dilatation libre (voir figure 2.3) : $T(x) = T_1 \quad \forall x \in [0, L]$. La barre se dilate librement de sorte que $\varepsilon = \alpha(T_1 - T_0)$ à contrainte nulle $\sigma = 0$.
2. Barre encastrée-encastrée (voir figure 2.4) : $T(x) = T_1 \quad \forall x \in [0, L]$. La barre ne se dilate pas ($\varepsilon = 0$), il y a développement de contraintes internes d'origine thermique $\sigma = -E\alpha(T_1 - T_0)$.

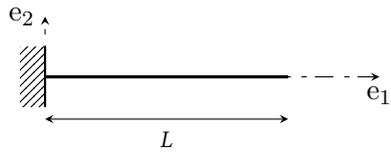


FIGURE 2.3 – Encastré/libre.

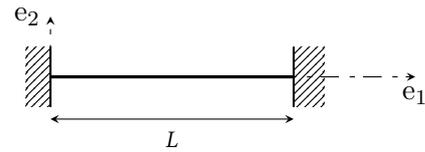


FIGURE 2.4 – Encastré/encastré.

3

Ce chapitre décrit les stratégies de résolution monolithique et étagées des équations de la thermoélasticité linéaire.

Stratégies de résolution numérique en thermoélasticité linéaire

Table des matières

3.1 Rappel des équations de la thermoélasticité linéaire	26
3.2 Approche monolithique	26
3.2.1 Discrétisation par éléments finis	27
3.2.2 Discrétisation temporelle	30
3.2.3 Approche de type Gauss-Seidel	31
3.3 Approches étagées	32
3.3.1 Approche étagée isotherme	32
3.3.2 Approche étagée adiabatique	33
3.3.3 Approche séquentielle pour le quasi-statique	37

3.1 Rappel des équations de la thermoélasticité linéaire

Rappelons tout d'abord les équations de la thermoélasticité linéaire établies au chapitre précédent :

Thermique

$$\begin{aligned} \rho c \dot{T} &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) + r - T_0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\beta} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ T(\mathbf{x}, t) &= \bar{T} & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_T \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= -\bar{q}; \quad \bar{q} > 0 & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_q \\ T(\mathbf{x}, t = 0) &= T_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

Mécanique

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}(T - T_0)) + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{F}} & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t = 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

où on a posé $\boldsymbol{\beta} := \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}$. Ces équations se réécrivent sous la forme d'un système différentiel d'ordre un en temps :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{1}{\rho} [\operatorname{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}(T - T_0)) + \mathbf{f}] \\ \frac{1}{\rho c} [\operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) - T_0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\beta} + r] \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

En posant $\theta = T - T_0$ avec T_0 une température de référence, $\bar{c} := \frac{c}{T_0}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}} := \frac{\boldsymbol{\lambda}}{T_0}$ et $\bar{r} := \frac{r}{T_0}$, le système se met alors sous la forme du système différentiel linéaire non homogène suivant

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} \quad (3.2)$$

avec

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \theta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{1}{\rho} [\operatorname{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\theta)] \\ \frac{1}{\rho \bar{c}} [\operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \nabla \theta) - \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathbf{f}}{\rho} \\ \frac{\bar{r}}{\rho \bar{c}} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Remarque :

La contractivité de ce système est assurée par la norme suivante [6] :

$$\|\mathbf{X}\|^* = \sqrt{\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \rho \mathbf{v}^2 + \rho \bar{c} \theta^2) \, d\Omega} \quad (3.4)$$

3.2 Approche monolithique

Dans cette approche, on résout tous les X_i simultanément à chaque pas de temps. La discrétisation par éléments finis nécessite d'écrire la formulation faible des équations :

$$\int_{\Omega} (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{X}^* \, d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{X}^* \text{ admissible à zéro} \quad (3.5)$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}^* \\ \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}^* + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* : (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta} \theta) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^* \\ \rho \bar{c} \dot{\theta}^* + \nabla \theta^* \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \nabla \theta + \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \theta^* - \bar{r} \theta^* \end{array} \right\} d\Omega - \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \int_{\partial\Omega_F} \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{v}^* dS \\ \int_{\partial\Omega_q} \bar{q} \theta^* dS \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\forall (\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \theta^*) \in (\mathcal{U}_{\text{ad}}^0 \times \mathcal{V}_{\text{ad}}^0 \times \Theta_{\text{ad}}^0) \quad (3.6)$$

La seconde équation correspond au principe des puissances virtuelles, et la troisième à la forme faible de l'équation de la chaleur. La première équation $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ va en réalité être résolue de façon forte, et pas de façon faible, au travers d'un schéma de discrétisation temporelle.

3.2.1 Discrétisation par éléments finis

On discrétise cette forme faible par la méthode des éléments finis. Les approximations des champs de déplacement et de vitesse s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \sum_p N_p \mathbf{v}^{(p)*} & \mathbf{v}^* &= [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{v}^*\} \\ \mathbf{v} &= \sum_q N_q \mathbf{v}^{(q)} & \mathbf{v} &= [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{v}\} \\ \mathbf{u} &= \sum_q N_q \mathbf{u}^{(q)} & \mathbf{u} &= [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{u}\} \end{aligned}$$

avec N_p fonction de forme associée au noeud p , et $\mathbf{u}^{(p)}$ les inconnues du déplacement liées au noeud p . On écrit aussi ces approximations sous forme matricielle avec la matrice $[\mathbf{N}]$ contenant les fonctions de forme des noeuds d'un élément fini. Quant aux champs de température, ils s'écrivent de façon analogue, tel que

$$\begin{aligned} \theta^* &= \sum_p N_p^\theta \theta^{(p)*} & \theta^* &= [\mathbf{N}_\theta]^T \{\theta^*\} \\ \theta &= \sum_q N_q^\theta \theta^{(q)} & \theta &= [\mathbf{N}_\theta]^T \{\theta\} \end{aligned}$$

où N_p^θ est la fonction de forme associée au noeud p pour le champ thermique.

Commentaire

Le degré polynomial des fonctions de forme utilisées pour la thermique et la mécanique sont *a priori* différents. En simulation numérique du soudage par exemple [7, 8, 9], le degré polynomial des fonctions de forme utilisée pour la mécanique sont généralement d'un ordre plus élevé que celui utilisé pour la température. Ceci provient du fait que, dans la partition additive de la déformation en une partie élastique et une partie thermique, on note que la partie thermique est liée à la température alors que la déformation totale est liée au gradient du champ de déplacement.

Équations semi-discrètes mécaniques

L'introduction des approximations précédentes dans la formulation faible mécanique

donne :

$$\sum_e \left\{ v_i^{(p)*} \left[\underbrace{\int_{\Omega_e} \rho N_p N_q d\Omega \delta_{ij} \dot{v}_j^{(q)}}_{[M_{\nu\nu}^e]_{ij}^{pq}} + \underbrace{\mathbf{e}_i^T \int_{\Omega_e} [B_p]^T [C] [B_q] d\Omega \mathbf{e}_j}_{[K_{\nu\nu}^e]_{ij}^{pq}} \right. \right. \\ \left. \left. - \underbrace{\mathbf{e}_i^T \int_{\Omega_e} [B_p]^T \{\beta\} N_q^\theta d\Omega}_{[K_{\nu\theta}^e]_{ij}^{pq} \theta^{(q)}} - \underbrace{\int_{\Omega_e} f_i N_p d\Omega - \int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_F} \bar{F}_i N_p dS}_{-\{F_\nu^e\}_i^p} \right] \right\} = 0$$

ou la matrice $[B_p]$ contient les gradients des fonctions de forme associée au noeud p , tel que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(N_p \mathbf{e}_i) = [B_p] \mathbf{e}_i \quad (3.7)$$

et une matrice $[B]$ peut être formée par assemblage des contributions nodales des sous-matrices $[B_p]$ tel que

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [B] \{\mathbf{u}\}; \quad [B] = [B_1 \dots B_p \dots B_n] \quad (3.8)$$

Les matrices de masse et de raideur élémentaires obtenues par discrétisation éléments finis ont quatre indices, deux de noeuds, et deux d'espace. Ces matrices sont converties en matrices à deux indices en utilisation le processus de « vectorisation » [20]. Définissons

$$a = \text{nb}_{\text{ddl}/\text{noeud}}(p - 1) + i \\ b = \text{nb}_{\text{ddl}/\text{noeud}}(q - 1) + j$$

de sorte que les composantes de la matrice de raideur s'écrivent

$$[K_{\nu\nu}^e]_{ij}^{pq} \equiv [K_{\nu\nu}^e]_{ab} = \int_{\Omega_e} B_{da} C_{dc} B_{cb} d\Omega \quad (3.9)$$

soit matriciellement

$$[K_{\nu\nu}^e] = \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega \quad (3.10)$$

La matrice de raideur élémentaire $[K_{\nu\nu}^e]$ est définie par blocs $[k_{pq}^e]$ associés à un couple de noeuds p, q , au sein desquels les indices d'espace i, j définissent des composantes :

$$[K_{\nu\nu}^e]_{ab} = \mathbf{e}_i^T [k_{pq}^e] \mathbf{e}_j \quad (3.11)$$

de sorte que

$$[K_{\nu\nu}^e] = \begin{bmatrix} [k_{11}^e] & & \dots & & [k_{1n}^e] \\ & \ddots & & & \\ & & [k_{pq}^e] & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & [k_{nn}^e] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La matrice élémentaire de couplage thermoélastique $[K_{\nu\theta}^e]$ est définie par bloc de vecteurs $\{k_{\nu\theta}^{pq}\}$ tel que

$$[K_{\nu\theta}^e]_{ab} = \mathbf{e}_i^T \{k_{\nu\theta}^{pq}\} \quad (3.13)$$

de sorte que

$$[K_{v\theta}^e] = \begin{bmatrix} \{k_{v\theta}^{11}\} & & \dots & \{k_{v\theta}^{1n}\} \\ & \ddots & & \\ & & \{k_{v\theta}^{pq}\} & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & \{k_{v\theta}^{nn}\} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Les équations semi-discrètes s'écrivent alors sous forme matricielle

$$\sum_e \{ \langle v^e \rangle^* [M_{vv}^e] \{ \dot{v}^e \} + [K_{vu}^e] \{ u^e \} + [K_{v\theta}^e] \{ \theta^e \} - \{ F_v^e \} \} = 0 \quad (3.15)$$

soit après assemblage, et tenant compte de l'arbitrarité du champ test, on obtient les équations semi-discrètes mécaniques

$$[M_{vv}] \{ \dot{v} \} + [K_{vu}] \{ u \} + [K_{v\theta}] \{ \theta \} = \{ F_v \}. \quad (3.16)$$

Équations semi-discrètes thermiques

Le même processus de discrétisation est conduit pour la forme faible thermique. Il vient

$$\sum_e \left\{ \theta^{*(p)} \left[\underbrace{\int_{\Omega_e} \rho \bar{c} N_p N_q d\Omega}_{[M_{\theta\theta}^e]^{pq}} \dot{\theta}^{(q)} + \underbrace{\int_{\Omega_e} \nabla N_p^\theta \cdot \bar{\lambda} \cdot \nabla N_q^\theta d\Omega}_{[K_{\theta\theta}^e]^{pq}} \theta^{(q)} \right. \right. \\ \left. \left. + \underbrace{\int_{\Omega_e} [\beta] [B_q] N_p^\theta d\Omega}_{[K_{\theta v}^e]^{pq}} \mathbf{e}_j v_j^{(q)} - \underbrace{\int_{\Omega_e} \bar{r} N_p^\theta d\Omega - \int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_F} \bar{q} N_p^\theta dS}_{\{F_\theta^e\}} \right] \right\} = 0$$

c'est-à-dire sous forme matricielle

$$\sum_e \{ \langle \theta^e \rangle^* [M_{\theta\theta}^e] \{ \dot{\theta}^e \} + [K_{\theta\theta}^e] \{ \theta^e \} + [K_{\theta v}^e] \{ v^e \} - \{ F_\theta^e \} \} = 0 \quad (3.17)$$

soit après assemblage, et quelque soit le champ test, on obtient le système d'équations thermiques semi-discrètes

$$[M_{\theta\theta}] \{ \dot{\theta} \} + [K_{\theta\theta}] \{ \theta \} + [K_{\theta v}] \{ v \} = \{ F_\theta \}. \quad (3.18)$$

La formulation faible (3.6) donne lieu à un système d'équations semi-discrètes qui s'écrit de façon succincte de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_{vu} & 0 & K_{v\theta} \\ 0 & K_{\theta v} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_v \\ F_\theta \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

soit un système de la forme

$$[M] \{ \dot{X} \} + [K] \{ X \} = \{ F \} \quad (3.20)$$

Commentaire

La matrice de rigidité $[K]$ n'est pas symétrique. On peut en effet observer que

$$[K_{v\theta}] = -\mathbf{A} \left(\int_{\Omega_e} [B]^T [\beta] [N] d\Omega \right) = -[K_{\theta v}]^T \quad (3.21)$$

Ceci va conduire, après discrétisation temporelle, à la résolution à chaque pas de temps d'un système $[A]\{X\} = \{B\}$ dont la matrice premier membre $[A]$ n'est pas symétrique. Une décomposition LU et non pas de Cholesky sera nécessaire. Ceci augmente le coût de calcul ainsi que la place mémoire nécessaire au stockage.

L'existence d'une matrice non symétrique provient du fait que l'écriture des formes faibles thermique et mécanique ne donne pas lieu à un principe variationnel. Cette idée est connue depuis fort longtemps, d'autres formulations de la thermoélasticité [21] ont été proposées historiquement conduisant à l'existence d'un principe variationnel. L'existence d'un principe variationnel permet de « resymétriser » l'ensemble des équations thermomécaniques et conduit, après discrétisation à une matrice premier membre symétrique.

3.2.2 Discrétisation temporelle

On discrétise de façon temporelle le système d'équations semi-discrètes (3.19) avec le schéma des différences généralisées. Considérons un incrément $[t_n, t_{n+1}]$, ces équations sont résolues à l'instant $t_{n+\alpha} = t_n + \alpha\Delta t$, où $\alpha \in [0, 1]$ est le paramètre du schéma temporel. Par application du schéma, les champs sont évalués à cet instant par combinaison linéaire de leurs valeurs respectives aux extrémités du pas de temps, soit :

$$\mathbf{v}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{v}_n + \alpha \mathbf{v}_{n+1} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{u}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{u}_n + \alpha \mathbf{u}_{n+1} \quad (3.23)$$

$$\theta_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\theta_n + \alpha\theta_{n+1}$$

Il est ici supposé sans perte de généralité que la même valeur de α est retenue pour les équations thermique et mécanique. La vitesse est approximée par

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \mathbf{v}_{n+\alpha}$$

soit

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_{n+\alpha}. \quad (3.24)$$

En injectant (3.24) dans (3.23), il vient

$$\mathbf{u}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{u}_n + \alpha\mathbf{u}_n + \alpha \Delta t \mathbf{v}_{n+\alpha}$$

soit, avec (3.22), on obtient l'évaluation du déplacement à l'instant $t_{n+\alpha}$

$$\mathbf{u}_{n+\alpha} = \mathbf{u}_n + \alpha^2 \Delta t \mathbf{v}_{n+1} + \alpha \Delta t (1 - \alpha) \mathbf{v}_n.$$

Les équations discrètes s'écrivent à l'instant $t_{n+\alpha}$ comme

$$\begin{cases} [M_{vv}] \left(\frac{\{v_{n+1}\} - \{v_n\}}{\Delta t} \right) + [K_{vu}] \{u_{n+\alpha}\} \\ \quad + [K_{v\theta}] ((1 - \alpha)\{\theta_n\} + \alpha\{\theta_{n+1}\}) = \{F_v\}_{n+\alpha} \\ [M_{\theta\theta}] \left(\frac{\{\theta_{n+1}\} - \{\theta_n\}}{\Delta t} \right) + [K_{\theta\theta}] ((1 - \alpha)\{\theta_n\} + \alpha\{\theta_{n+1}\}) \\ \quad + [K_{\theta v}] ((1 - \alpha)\{v_n\} + \alpha\{v_{n+1}\}) = \{F_\theta\}_{n+\alpha} \end{cases} \quad (3.25)$$

c'est-à-dire

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{[M_{vv}]}{\Delta t} + \alpha^2 \Delta t [K_{vu}] & \alpha [K_{v\theta}] \\ \alpha [K_{\theta v}] & \frac{[M_{\theta\theta}]}{\Delta t} + \alpha [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \{v_{n+1}\} \\ \{\theta_{n+1}\} \end{Bmatrix}}_{\{X\}_{n+1}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{[M_{vv}]}{\Delta t} \{v_n\} - [K_{vu}] (\{u_n\} + \alpha(1-\alpha)\Delta t \{v_n\}) - (1-\alpha)[K_{v\theta}] \{\theta_n\} + \{F_v\}_{n+\alpha} \\ \frac{[M_{\theta\theta}]}{\Delta t} \{\theta_n\} - (1-\alpha)[K_{\theta\theta}] \{\theta_n\} + [K_{\theta v}] \{v_n\} + \{F_\theta\}_{n+\alpha} \end{Bmatrix}}_{\{B\}_{n+\alpha}}$$

soit sous la forme du système linéaire suivant

$$[A]\{X\}_{n+1} = \{B\}_{n+\alpha} \quad (3.26)$$

Commentaires :

1. la matrice $[A]$ n'est pas symétrique.
2. les sous-matrices de masse et de raideur sont indépendantes du pas de temps : on peut les calculer à l'avance, hors de la boucle temporelle.
3. si le pas de temps est choisi constant, la matrice premier membre $[A]$ peut être calculée et factorisée une fois pour toute hors de la boucle temporelle.

3.2.3 Approche de type Gauss-Seidel

La résolution du système (3.26) peut aussi s'effectuer par une approche de type Gauss-Seidel. Ceci revient à appliquer la méthode de résolution itérative de Gauss-Seidel à un système couplé, de sorte que la résolution à chaque itération de calcul se fasse par bloc associé à une physique. Posons

$$[A] = [M] - [N] \quad (3.27)$$

En introduisant (3.27) dans (3.26), une méthode de type point fixe donne à une itération k du calcul :

$$[M]\{X\}^{(k+1)} = [N]\{X\}^{(k)} + \{B\} \quad (3.28)$$

qui est convergente si le rayon spectral $\rho([M]^{-1}[N]) \leq 1$ et si $[A]$ est à diagonale dominante. La méthode de Gauss-Seidel consiste à poser :

$$\begin{aligned} [M] &= [D] - [L] \\ [N] &= [U] \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $[D]$, $[L]$ et $[U]$ sont des matrices respectivement diagonale, triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. L'application de cette méthode au système couplé (3.26) conduit à la résolution par bloc suivante

$$\begin{bmatrix} A_{vv} & 0 \\ A_{\theta v} & A_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -A_{v\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix}_{n+1}^{(k)} + \begin{Bmatrix} B_v \\ B_\theta \end{Bmatrix}_{n+\alpha} \quad (3.30)$$

Commentaires :

1. La résolution à chaque itération de calcul se fait via une descente par bloc. Aussi, la procédure ne nécessite de stocker qu'un seul vecteur solution, ce qui permet un gain de stockage et de coût de calcul.

2. Cette approche est bien adaptée pour les problèmes non linéaires, et facile de mise en oeuvre.
3. En revanche, cette approche ne permet pas une résolution parallèle comme la méthode de Jacobi par exemple.
4. À noter qu'on peut travailler avec la matrice triangulaire supérieure à la place de la matrice triangulaire inférieure. Ce pose la question de savoir si la thermique est résolue avant la mécanique ou si la mécanique doit être résolue en premier.

3.3 Approches étagées

Une approche étagée propose une décomposition additive de l'opérateur continu $\mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)$ en deux opérateurs $\mathcal{F}_I(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)$ et $\mathcal{F}_{II}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)$ pour ensuite résoudre de façon successive les sous-opérateurs définis.

3.3.1 Approche étagée isotherme

L'approche isotherme [5, 6] consiste d'abord à résoudre la mécanique à température constante, puis à résoudre la thermique à géométrie fixée. Cette décomposition est effectuée au niveau de l'incrément de temps, chaque étape pouvant faire l'objet d'une procédure itérative si les équations sont non linéaires. Le schéma étagé isotherme revient à effectuer la décomposition suivante de l'opérateur continu :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{1}{\rho} [\text{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\theta)] + \frac{\mathbf{f}}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_I(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho c} [\text{div}(\bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \nabla\theta) - \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] + \frac{\bar{r}}{\rho c} \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_{II}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)} \quad (3.31)$$

où l'opérateur $\mathcal{F}_I(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)$ correspond à l'étape mécanique à température fixée, et $\mathcal{F}_{II}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)$ correspond à l'étape thermique à géométrie fixée. Cette décomposition des opérateurs du système continu se traduit par une composition des opérateurs discrets, de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \theta \end{pmatrix}_{n+1} = K_{II} \circ K_I \left(\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \theta \end{pmatrix}_n \right) \quad (3.32)$$

Étape 1

Résolution de $\{v_{n+1}\}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{[M_{vv}]}{\Delta t} + \alpha^2 \Delta t [K_{vu}] \right) \{v_{n+1}\} &= \frac{[M_{vv}]}{\Delta t} \{v_n\} - [K_{vu}] (\{u_n\} \\ &+ \alpha(1 - \alpha)\Delta t \{v_n\}) - [K_{v\theta}] \{\theta_n\} + \{F_v\}_{n+\alpha} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Étape 2

Résolution de $\{\theta_{n+1}\}$:

$$([M_{\theta\theta}] + \alpha[K_{\theta\theta}]) \{\theta_{n+1}\} = \frac{[M_{\theta\theta}]}{\Delta t} \{\theta_n\} - (1 - \alpha)[K_{\theta\theta}] \{\theta_n\} - [K_{\theta v}] \{v_{n+1}\} + \{F_\theta\}_{n+\alpha} \quad (3.34)$$

Ce qui revient au premier membre suivant :

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{[M_{vv}]}{\Delta t} + \alpha^2 \Delta t [K_{vu}] \right] & 0 \\ \alpha [K_{\theta v}] & \left[\frac{[M_{\theta\theta}]}{\Delta t} + \alpha [K_{\theta\theta}] \right] \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Commentaires

1. Ce schéma étagé est similaire à une approche de type Gauss-Seidel avec une seule itération de calcul.
2. Les opérateurs \mathcal{F}_I et \mathcal{F}_{II} ne sont pas contractifs : il s'ensuit une perte de stabilité potentielle du schéma étagé. L'algorithme est conditionnellement stable, même si $\alpha \geq 1/2$.
3. On montre par une analyse de stabilité linéaire [6] que la condition de stabilité s'écrit en fonction du nombre CFL de la façon suivante :

$$\text{CFL} = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} \quad (3.36)$$

avec a la célérité des ondes de pression élastique et ϵ est défini comme

$$\epsilon = \frac{\|\boldsymbol{\beta}\|^2}{\|\mathbf{C}\| \rho \bar{c}} = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 T_0}{(\lambda + 2\mu)} \rho c = \frac{\beta^2}{E \rho \bar{c}} \quad (3.37)$$

pour une barre isotrope.

3.3.2 Approche étagée adiabatique

Le schéma adiabatique a été introduit dans [6], et consiste à faire une première étape élastodynamique adiabatique, au cours de laquelle la température varie, suivi d'une seconde étape thermique à géométrie fixée. De la même manière, cette décomposition est effectuée au niveau de l'incrément de temps, chaque étape pouvant faire l'objet d'une procédure itérative si les équations sont non linéaires. Le schéma étagé adiabatique revient à effectuer la décomposition suivante de l'opérateur continu :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{1}{\rho} [\text{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}\theta)] + \frac{f}{\rho} \\ -\frac{\boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\rho \bar{c}} \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_I(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho \bar{c}} [\text{div}(\bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \nabla \theta)] + \bar{r} \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_{II}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)} \quad (3.38)$$

où l'opérateur $\mathcal{F}_I(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)$ correspond à l'étape mécanique adiabatique, et $\mathcal{F}_{II}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta)$ correspond à l'étape thermique à géométrie fixée.

Bilan d'énergie adiabatique

À partir du bilan d'énergie écrit sous forme entropique (2.8), la condition d'adiabaticité s'écrit

$$\rho T \dot{s} = 0 \quad (3.39)$$

L'entropie doit rester constante. En exprimant le taux d'entropie avec l'énergie libre du

système, il vient :

$$\rho \left(-T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) = 0 \quad (3.40)$$

En notant que

$$c_\varepsilon = T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} = c \frac{T}{T_0} \quad ; \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial T}, \quad (3.41)$$

on obtient

$$\rho c \frac{T}{T_0} \dot{T} = T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = T \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.42)$$

dont la linéarisation donne

$$\rho C \dot{T} = -T_0 \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.43)$$

En posant $\theta = T - T_0$ et $\bar{c} = \frac{c}{T_0}$, on trouve finalement

$$\dot{\theta} = -\frac{\boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\rho \bar{c}} \quad (3.44)$$

Deux implémentations du schéma étagé peuvent être réalisées. La première est simple mais peu efficace. La seconde est plus efficace, et fait apparaître le tenseur élastique adiabatique.

3.3.2.1 Implémentation rustique

Étape 1

Résolution de $\{v_{n+1}\}$: la première étape fait apparaître une température intermédiaire dite 'adiabatique' θ_{adia} :

$$\left(\frac{[M_{vv}]}{\Delta t} + \alpha^2 \Delta t [K_{vu}] \right) \{v_{n+1}\} = \frac{[M_{vv}]}{\Delta t} \{v_n\} - [K_{vu}] (\{u_n\} + \alpha(1 - \alpha)\Delta t \{v_n\}) - [K_{v\theta}] ((1 - \alpha)\{\theta_n\} + \alpha\{\theta_{\text{adia}}\}) + \{F_v\}_{n+\alpha} \quad (3.45)$$

laquelle peut être calculée en utilisant une discrétisation éléments finis

$$[M_{\theta\theta}] \left(\frac{\{\theta_{\text{adia}}\} - \{\theta_n\}}{\Delta t} \right) = -[K_{\theta v}] ((1 - \alpha)\{v_n\} + \alpha\{v_{n+1}\}) \quad (3.46)$$

La combinaison des deux précédents systèmes d'équations discrètes donne le système actualisant les vitesses nodales au cours de l'étape adiabatique ce qui donne

$$\left[\frac{[M_{vv}]}{\Delta t} + \alpha^2 \Delta t \underbrace{([K_{vu}] - [K_{v\theta}][M_{\theta\theta}]^{-1}[K_{\theta v}])}_{\geq 0} \right] \{v_{n+1}\} = \left[\frac{[M_{vv}]}{\Delta t} - \alpha(1 - \alpha)\Delta t [K_{vu}] + \alpha(1 - \alpha)\Delta t [K_{v\theta}][M_{\theta\theta}]^{-1}[K_{\theta v}] \right] \{v_n\} - [K_{vu}]\{u_n\} - [K_{v\theta}]\{\theta_n\} + \{F_{n+\alpha}\} \quad (3.47)$$

Étape 2

Résolution de $\{\theta_{n+1}\}$

$$\left(\frac{[M_{\theta\theta}]}{\Delta t} + \alpha[K_{\theta\theta}] \right) \{\theta_{n+1}\} = \frac{[M_{\theta\theta}]}{\Delta t} \{\theta_{\text{adia}}\} - (1 - \alpha)[K_{\theta\theta}] \{\theta_{\text{adia}}\} + \{F_{\theta}\}_{n+\alpha} \quad (3.48)$$

Commentaire

Les opérateurs \mathcal{F}_I et \mathcal{F}_{II} sont contractifs pour le schéma étagé adiabatique. Aussi, si le paramètre de l'intégrateur temporel $\alpha \geq \frac{1}{2}$, alors le pas de temps n'est pas limité et le système est inconditionnellement stable. On montre que ce résultat est valide pour un pas de temps constant [6].

3.3.2.2 Implémentation efficace

Une implémentation plus efficace du schéma étagé adiabatique fait en sorte de résoudre l'équation (3.44) de façon forte, et non de façon faible via une discrétisation éléments finis [6]. La discrétisation temporelle de (3.44) donne :

$$\theta_{\text{adia}} = \theta_n - \frac{\boldsymbol{\beta} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n)}{\rho \bar{c}} \quad (3.49)$$

L'introduction de (3.49) dans la formulation faible du bilan de la quantité de mouvement (le Principe des Puissances Virtuelles) (3.6)₂ donne $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{\Omega} (\rho \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{C}_{\text{ad}} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbf{F}) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \bar{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{v}^* \, dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{v}^* \in \mathcal{V}_{\text{ad}}^0 \quad (3.50)$$

où \mathbf{C}_{ad} est le tenseur d'élasticité adiabatique

$$\mathbf{C}_{\text{ad}} = \mathbf{C} + \frac{\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}}{\rho \bar{c}} \quad (3.51)$$

et le chargement \mathbf{F} est apparu :

$$\mathbf{F} = \left(\theta_n + \frac{\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon}}{\rho \bar{c}} \right) \boldsymbol{\beta}. \quad (3.52)$$

Étape 1

La discrétisation par éléments finis de la forme faible (3.50) permet de s'affranchir d'une 'température adiabatique'. Le champ de vitesse est actualisé en résolvant le système linéaire suivant :

$$\left(\frac{[M_{vv}]}{\Delta t} + \alpha^2 \Delta t [K_{vu}^{\text{adia}}] \right) \{v_{n+1}\} = \frac{[M_{vv}]}{\Delta t} \{v_n\} - [K_{vu}^{\text{adia}}] (\{u_n\} + \alpha(1 - \alpha)\Delta t \{v_n\}) \\ + [K_{v\theta}^{\text{F}}] \{\theta_n\} + [K_{vu}^{\text{F}}] \{u_n\} + \{F_v\}_{n+\alpha} \quad (3.53)$$

avec

$$\begin{aligned}
 [K_{vu}^{\text{adia}}] &= \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_e} [B]^T [C_{\text{adia}}] [B] \, d\Omega \right) \\
 [K_{v\theta}^{\text{F}}] &= \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_e} [B]^T [N_\theta] \, d\Omega \right) \\
 [K_{vu}^{\text{F}}] &= \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_e} [B]^T \frac{[\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}]}{\rho \bar{c}} [B] \, d\Omega \right)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Étape 2

La seconde étape consiste à actualiser le champ de température à géométrie fixée. Une façon efficace de réaliser cette actualisation est de s'affranchir de l'utilisation directe d'une température intermédiaire θ_{adia} . À cet effet, on peut tirer profit du fait que la première étape de ce schéma étagé conserve l'entropie, c'est-à-dire :

$$s_n \equiv s(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \theta_n) = s(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \theta_{\text{adia}}) \tag{3.55}$$

Aussi, la forme faible de l'équation d'énergie écrite pour cette seconde étape peut être formulée sous forme entropique, avec la condition initiale écrite à l'instant t_n :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{s(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \theta_{n+1}) - s(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \theta_n)}{\Delta t} \right) \theta^* + \nabla \theta \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \nabla \theta^* - \bar{r} \theta^* \right] \, d\Omega \\
 - \int_{\partial\Omega_q} \bar{q} \theta^* \, dS = 0 \quad \forall \theta^* \in \Theta_{\text{ad}}^0 \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

Cette équation peut être résolue sur θ_{n+1} en utilisant l'expression linéarisée de (2.27), soit :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\bar{c} \theta_{n+1} + \frac{\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}{\rho} - \bar{c} \theta_n + \frac{\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\varepsilon}_n}{\rho} \right) \theta^* + \nabla \theta \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \nabla \theta^* - \bar{r} \theta^* \right] \, d\Omega \\
 - \int_{\partial\Omega_q} \bar{q} \theta^* \, dS = 0 \quad \forall \theta^* \in \Theta_{\text{ad}}^0 \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

La discrétisation par éléments finis de la forme faible (3.57), combinée avec un intégrateur temporel de type Euler implicite ($\alpha = 1$), donne le système linéaire suivant :

$$\left(\frac{[M_{\theta\theta}]}{\rho \Delta t} + [K_{\theta\theta}] \right) \{\theta_{n+1}\} = \frac{[M_{\theta\theta}]}{\rho \Delta t} \{\theta_n\} - \frac{[K_{\theta v}]}{\rho} \left(\frac{\{\mathbf{u}_{n+1}\} - \{\mathbf{u}_n\}}{\Delta t} \right) + \{F_{n+1}\} \tag{3.58}$$

Remarques

- Un algorithme de différences généralisées ($\alpha \in [0, 1]$) impliquerait la présence de $\nabla \theta_{\text{adia}}$, dont on souhaite s'affranchir. Ceci justifie l'emploi d'Euler implicite.
- Bien que le schéma d'Euler implicite ne présente un taux de convergence que du premier ordre, il ne dégrade pas la précision de la solution du schéma étagé puisque ce schéma fractionné implique de toute façon une solution avec un taux de convergence de un.

3.3.3 Approche séquentielle pour le quasi-statique

En quasi-statique, le système d'équations discrètes se découple. La thermique est résolue en premier, générant un chargement pour la mécanique via les effets de dilatation thermique :

1. Thermique : $[K_{\theta\theta}]\{\theta\} = \{F_\theta\}$
2. Mécanique : $[K_{uu}]\{u\} = \{F_u\} + [K_{u\theta}]\{\theta\}$ et

$$[K_{uu}] = \mathbf{A}_e \left(\int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega \right)$$

$$[K_{u\theta}] = \mathbf{A}_e \left(\int_{\Omega_e} [B]^T \{\beta\} [N_\theta] d\Omega \right)$$

Le chargement mécanique d'origine thermique apparaît au second membre via le vecteur force $[K_{u\theta}]\{\theta\}$.

Bibliographie

- [1] David E KEYES et al. « Multiphysics simulations : Challenges and opportunities ». In : *The International Journal of High Performance Computing Applications* 27.1 (2013), p. 4-83.
- [2] Etienne KLEIN. « Comprendre, concevoir, agir : Les trois finalités de la simulation ». In : *Clefs CEA* 47 (2002), p. 6-8.
- [3] C.A. FELIPPA, K.C. PARK et C. FARHAT. « Partitioned analysis of coupled mechanical systems ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), p. 3247-3270.
- [4] C. BOUERY. « Contribution to algorithmic strategies for solving coupled thermo-mechanical problems by an energy-consistent variational approach ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes, 2012.
- [5] Simo J.C. et Miehe C. « Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 98 (1992), p. 41-104.
- [6] F. ARMERO et J.C. SIMO. « A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35 (1992), p. 737-766.
- [7] L.E. LINDGREN. « Finite element modeling and simulation of welding ». In : *Journal of Thermal Stresses* 24 (2001). Parts 1, 2 & 3, p. 141-334.
- [8] L.E. LINDGREN. « Numerical modelling of welding ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), p. 6710-6736.
- [9] J.M. BERGHEAU. « Modélisation numérique des procédés de soudage ». In : *Techniques de l'Ingénieur* (2004). BM7758.
- [10] T. HEUZÉ, J.B. LEBLOND et J.M. BERGHEAU. « Modélisation des couplages fluide solide dans les procédés d'assemblage à haute température ». In : *Mécanique & Industries* 12 (2011), p. 183-191.
- [11] Thomas HEUZÉ, Adrien LEYGUE et Guillaume RACINEUX. « Parametric modeling of an electromagnetic compression device with the proper generalized decomposition ». In : *International Journal of Material Forming* 9.1 (2016), p. 101-113.
- [12] E. FEULVARCH, V. ROBIN et J.M. BERGHEAU. « Resistance spot welding simulation : a general finite element formulation of electrothermal contact conditions ». In : *Journal of Materials Processing Technology* 153-154 (2004), p. 436-441.
- [13] William E FRAZIER. « Metal additive manufacturing : a review ». In : *Journal of Materials Engineering and Performance* 23.6 (2014), p. 1917-1928.
- [14] Rui FANG et al. « A monolithic, mortar-based interface coupling and solution scheme for finite element simulations of lithium-ion cells ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 114.13 (2018), p. 1411-1437.

- [15] J.M. BERGHEAU et R. FORTUNIER. *Finite element simulation of heat transfert*. Wiley, 2008.
- [16] Uri M ASCHER et Linda R PETZOLD. *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*. T. 61. Siam, 1998.
- [17] J. LEMAITRE et al. *Mécanique des matériaux solides*. 2nde édition. Dunod, 2009.
- [18] N. RANC. « Couplages thermomécaniques ». In : *Techniques de l'Ingénieur* (2003). af5042.
- [19] Geoffrey Ingram TAYLOR et H QUINNEY. « The latent energy remaining in a metal after cold working ». In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 143.849 (1934), p. 307-326.
- [20] T.J.R. HUGHES. *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. 1st edition. Dover, 1989.
- [21] Qiang YANG, Laurent STAINIER et Michael ORTIZ. « A variational formulation of the coupled thermo-mechanical boundary-value problem for general dissipative solids ». In : *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 54.2 (2006), p. 401-424.