



HAL
open science

Une lettre de Joseph Boussinesq à Robert de Montessus de Ballore, 1908

Hervé Le Ferrand

► **To cite this version:**

Hervé Le Ferrand. Une lettre de Joseph Boussinesq à Robert de Montessus de Ballore, 1908. 2020.
hal-02434493

HAL Id: hal-02434493

<https://hal.science/hal-02434493>

Preprint submitted on 10 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une lettre de Joseph Boussinesq à Robert de Montessus de Ballore, 1908 *travail en cours, 2020*

Hervé Le Ferrand*

10 janvier 2020

Table des matières

1	Introduction	1
2	Une suggestion de Pierre Duhem à Robert de Montessus	2
3	Résolution approchée d'équations	3
4	Le texte de la lettre de Joseph Boussinesq à Robert de Montessus	4
5	Fac-similé de la lettre	6

1 Introduction

Nous reproduisons et annotons une lettre, datée du 16 Décembre 1908, de Joseph Boussinesq (1842-1929) à Robert de Montessus de Ballore (1870-1937). Cette lettre se trouve dans le fonds Robert de Montessus, à la bibliothèque MIR (Jussieu), Sorbonne Paris Université.

Joseph Boussinesq répond à une lettre de Robert de Montessus. La lettre de Robert de Montessus, datée du 14 Décembre 1908, est conservée à la Bibliothèque de l'Institut de France, collection des Manuscrits, fonds *Papiers de Joseph Boussinesq*. C'est Pierre Duhem (1861-1916), professeur à l'Université de Bordeaux, qui a conseillé à Robert de Montessus d'écrire à Joseph Boussinesq¹.

*Institut de Mathématiques de Bourgogne, Université de Bourgogne, leferran@u-bourgogne.fr

1. Robert de Montessus mentionne Pierre Duhem dans sa lettre à Joseph Boussinesq.

2 Une suggestion de Pierre Duhem à Robert de Montessus

Robert de Montessus suit le conseil de Pierre Duhem que ce dernier lui a donné dans une lettre datée du 12 Décembre 1908, autographe conservé dans le fonds Robert de Montessus (Jussieu). Pierre Duhem écrit :

Je ne connais guère qu'un homme qui ait eu, sans doute, de fréquents rapports avec ces êtres analytiques ; c'est M. Boussinesq. Si vous lui adressiez la demande que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser, il pourrait sans doute vous satisfaire mieux que moi.

Robert de Montessus travaille sur la question de la résolution numérique d'équations transcendantes, « ces êtres analytiques » de la lettre de Duhem. Dans sa lettre à Joseph Boussinesq, Robert de Montessus pose alors la question :

Existe-t-il, à votre connaissance, des équations numériques transcendantes, plus ou moins analogues à celles indiquées, dont les physiciens auraient intérêt à connaître les racines, ces racines n'ayant pas encore été calculées ?

En 1908, Robert de Montessus est professeur à l'Université Catholique de Lille. Il y enseigne les mathématiques et la mécanique rationnelle. Ses travaux dans le domaine des fractions continues algébriques (approximants de Padé) sont déjà bien connus et ont été récompensés en 1906 par un Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris. Robert de Montessus a notamment démontré en 1902 un résultat important de convergence d'approximants de Padé d'une fonction méromorphe analytique à l'origine.

En 1905, il publie dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* (tome 33 (1905), pages 26-33.), *La résolution numérique des équations*. Dans cet article, Robert de Montessus met en évidence les travaux de Wronski (1778-1853) sur la résolution des équations numériques en comparant la démarche de Wronski (utilisation des fonctions aleph) à celle de Jacques Hadamard (1865-1963), telle que celui-ci la développe dans son remarquable ouvrage *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Scientia, No 12, Paris, 1901). Il s'agit de généraliser la méthode classique de Daniel Bernoulli².

Puis en 1909 et 1910, Robert de Montessus publie plusieurs articles sur la question de la résolution approchée d'équations. Citons : *Recherche effective des racines réelles des séries hypergéométriques* (Bull. Soc. Math. France 37 (1909)) ; *Sur le calcul des racines des équations numériques* (C. R. 148, 1749-1752, 1909) ; *La recherche des racines de certaines équations numériques transcendantes* (C. R. 148, 468-470, 1909) ; *De l'usage pratique du théorème de Sturm* (Nouv. Ann. (4) 9, 235-243, 1909) ; *Méthode générale de détermination des racines des équations numériques* (Brux. S. sc. 34, A, 94-103, (1910)).

2. Voir par exemple le livre Chabert J.-L. and, *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

Quant à Joseph Boussinesq³, il occupe en cette même année 1908 la chaire de Physique théorique et de Calcul des Probabilités à la Faculté des Sciences de Paris⁴. Il a été professeur à la Faculté (d'état) des Sciences de Lille de 1873 à 1886, année de son installation à Paris et de sa nomination comme membre de l'Académie des Sciences de Paris. Joseph Boussinesq est célèbre pour ses contributions en Mécanique des fluides et en Hydrodynamique. Dans un article récent, *Joseph Boussinesq's legacy in fluid mechanics (in A century of fluid mechanics : 1870–1970 / Un siècle de mécanique des fluides : 1870–1970)*, Olivier Darrigol analyse la portée des travaux de Jules Boussinesq dans ce domaine, et évoque notamment la « découverte » de l'équation KdV (pour Diederik Korteweg (1848-1941) et Gustav de Vries (1866-1934), deux mathématiciens hollandais).

3 Résolution approchée d'équations

Robert de Montessus cherche donc à appliquer une méthode qu'il développe pour la résolution approchée d'équations transcendantes à des problèmes issus de la Physique. Mais en fait de quelle méthode s'agit-il ? Nous avons indiqué plus haut différents articles de Robert de Montessus parus dans la période 1905-1910. On peut distinguer trois types de méthodes :

- méthode de type Bernoulli (théorie des fonctions méromorphes, singularités polaires, fractions continues algébriques)
- méthode de type Sturm (constructions de suites de Sturm)
- méthode de point fixe.

Auparavant dans son *Cours d'Analyse Infinitésimale*⁵, paru en 1890, Joseph Boussinesq propose des méthodes pour évaluer des fonctions de Bessel : page 308, « Idée des fonctions de Fourier et de Bessel ou fonctions cylindriques : leurs expressions en intégrales définies et en séries ». Puis, pages 320 et 321, Joseph Boussinesq s'attache à la recherche des zéros de la fonction de Bessel :

$$J_0(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{64}r^4 - \frac{1}{2304}r^6 + \dots$$

et de sa dérivée

$$J_0'(r) = -\frac{1}{2}r + \frac{1}{16}r^3 - \frac{1}{384}r^5 + \dots$$

C'est cette question qui intéresse particulièrement Robert de Montessus. Ce dernier écrit en effet à Joseph Boussinesq⁶ :

3. Le lecteur pourra consulter l'article de Jean-Claude Saut : *Boussinesq, un savant atypique*, <http://www.breves-de-maths.fr/boussinesq-un-savant-atypique/>

4. Joseph Boussinesq succède, à ce poste, à Henri Poincaré en 1896.

5. Tome II *Calcul Intégral, Fascicule 2 Compléments*, Gauthier-Villars, 1890.

6. Lettre du 14 Décembre 1908.

Vous dites dans votre traité d'analyse tome II, p. 321 du fasc. 2, que Saint-Venant a fait travailler deux calculateurs pendant un mois pour obtenir, sous certaines conditions, les 9 premières racines d'une équation. Cette équation revient à celle-ci :

$$0 = 1 - x + \frac{x^2}{1.3} - \frac{x^3}{1.3.6} + \frac{x^4}{1.3.6.10} - \dots$$

Or je peux calculer en quelques heures les dix premières racines et avec une approximation bien supérieure à celle que Saint-Venant a obtenue.

La série ci-dessus s'obtient à partir du développement de $J'_0(r)$ en le multipliant par $-\frac{2}{r}$ puis en faisant la substitution $r = \sqrt{8x}$. On peut alors affirmer que Robert de Montessus applique à l'équation ci-dessus la méthode qu'il développe dans ses deux articles parus en 1909, « Recherche effective des racines réelles des séries hypergéométriques » et « La recherche des racines de certaines équations numériques transcendentes », c'est-à-dire une méthode de type Sturm. Robert de Montessus, dans le prolongement de travaux de Adolf Hurwitz (1859-1919)⁷, construit des suites de Sturm associées à des fonctions hypergéométriques pour la localisation de leurs zéros. De plus, on peut rappeler que la fonction de Bessel J_0 s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique :

$$J_0(r) = {}_0F_1\left(\ ; 1; -\frac{z^2}{4}\right).$$

4 Le texte de la lettre de Joseph Boussinesq à Robert de Montessus

Monsieur et cher collègue,

Votre travail sur la résolution des équations transcendentes⁸ ne peut être que fort intéressant pour les analystes et même pour les physiciens ou autres praticiens. Toutefois, ceux-ci ont rarement besoin de méthodes aussi savantes que la vôtre. Car, les observations exactes au millième près étant extrêmement rares, non seulement chez les ingénieurs, mais aussi chez les physiciens, il suffit aux uns et aux autres d'avoir des méthodes rapides de calcul propres à donner trois ou au plus quatre chiffres significatifs, telles que ce procédé, sans grande prétention scientifique, indiqué au tome II, p.321, que vous citez⁹.

7. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe, Math. Ann. XXXVIII. 452-458, 1891.

8. Il s'agit donc des travaux de Robert de Montessus sur la recherche des zéros de séries hypergéométriques (de type Gauss).

9. Le livre en question est le Cours d'Analyse Infinitésimale, Tome II, Calcul Intégral, Fascicule 2, Compléments, de Joseph Boussinesq, publié en 1890 chez Gauthier-Villars. En effet Robert de Montessus cite cet ouvrage dans sa lettre à Boussinesq.

Mais il en est autrement au point de vue des Mathématiques pures. Là, les méthodes complètes, permettent d'obtenir un grand nombre de décimales, ont une véritable beauté, et, par exemple, j'apprécie vivement sous ce rapport, les trois volumes de Legendre sur les intégrales elliptiques et eulériennes¹⁰.

Peut-être trouveriez-vous, vers la fin de la récente thèse de doctorat d'un de mes élèves, de M. Rousier¹¹ (agrégé des Lycées, et professeur au Collège Stanislas), *Sur les ondes liquides par émersion, quelques équations auxquelles votre procédé s'appliquerait avantageusement*. Si votre Faculté n'a pas encore cette thèse, vous pourriez demander de ma part à M. Boulanger¹², professeur adjoint à la Faculté des sciences de l'Etat, à Lille, et excellent esprit, non moins sagace qu'actif, de vous prêter pour quelques jours l'exemplaire dont je crois qu'il est pourvu.

Agréez, Monsieur et cher Collègue, l'assurance de ma considération la plus distinguée et de mes sentiments dévoués.

J. Boussinesq

P.S. St Venant¹³, qui ne reculait pas devant les plus longs calculs, avait eu beaucoup de peine à évaluer les racines auxquelles vous faites allusion, parce que la série entière exprimée par le premier membre de son équation, était une de ces fonctions qui ne grandissent pas pour les plus grandes valeurs de leur variable, à raison de la quasi destruction continue des termes d'un même signe par ceux de signe contraire ; en sorte qu'il faut, quand la variable devient un peu grande, une énorme approximation sur chacune de ces deux catégories de termes, pour obtenir une suffisante sur leur différence. La méthode de calcul des ce séries, par leur évaluation terme à terme, était donc des plus mauvaises.

10. Adrien Legendre (1752-1833), dans son *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, 1825-1828, propose des tables pour en faciliter le calcul numérique.

11. On peut se référer ici au *Dictionnaire des Professeurs de Spéciales* de Roland Brasseur. Georges Rousier (1875-1958) est licencié ès-sciences mathématiques (1898) et ès-sciences physiques (1902). Reçu à l'agrégation en 1904, il soutient une thèse en mathématiques en Mars 1908. Il enseigne au collège Stanislas et à l'école Violet. Il participe à la Première Guerre mondiale comme officier dans un régiment d'artillerie.

12. Auguste Boulanger (1866-1923), polytechnicien (X 1885), est professeur à la Faculté des Sciences de Lille et à l'Institut Industriel du Nord de 1898 à 1914. Il sera ensuite directeur des études à l'Ecole Polytechnique et professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers.

13. Adhémar Jean Claude Barré de Saint Venant (1797-1886), polytechnicien (X 1813) est l'auteur de travaux importants en Mécanique, Elasticité, Hysdrostatique et Hydrodynamique. Le lecteur pourra consulter en premier lieu la notice de Barré de Saint Venant sur MacTutor. Barré de Saint Venant s'est notamment intéressé à l'équation de Navier-Stokes. Quand Boussinesq et Saint Venant se sont-ils contactés ?

5 Fac-similé de la lettre

Nous reproduisons la lettre de Joseph Boussinesq qui se trouve dans le fonds Robert de Montessus. Un brouillon de cette lettre se trouve dans les *Papiers de Joseph Boussinesq* à l'Académie des Sciences de Paris.

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Paris, le 16 Novembre 1908.

Monsieur et cher Collègue,

Votre travail sur la résolution des équations transcendentes ne peut être que fort intéressant pour les analystes et même pour les physiciens ou autres praticiens. Toutefois, ceux-ci ont rarement besoin de méthodes aussi savantes que me paraît devoir être la vôtre. Car, les observations exactes au millièmes près étant extrêmement rares, non seulement chez les ingénieurs, mais aussi chez les physiciens, il suffit aux uns et aux autres d'avoir des méthodes rapides de calcul propres à donner trois ou au plus quatre chiffres significatifs, telles que ce procédé, sans grande prétention scientifique, indiqué au tome II, p. 321* que vous citez.

Mais il en est autrement au point de vue des Mathématiques pures. Là, les méthodes complètes, permettant d'obtenir un grand nombre de décimales, ont une véritable beauté, et, par exemple, j'apprécie vivement, sous ce rapport,

Les trois volumes de Legendre sur les intégrales elliptiques et esclériennes.

Je n'ai peut-être pas trouvé, vers la fin de la récente thèse de doctorat d'un de mes élèves, de M. Rouvier (agrégé des Lycées, et professeur au Collège Stanislas), sur les ondes liquides par émission, quelques équations auxquelles votre procédé s'appliquerait avantageusement. Si votre Faculté n'a pas encore cette thèse, vous pourriez demander de ma part à M. Boulanger, professeur adjoint à la Faculté des sciences de l'Etat à Lille, et excellent esprit, non moins sage que actif, de vous prêter pour quelques jours l'exemplaire dont je crois qu'il est pourvu. Agréez, Monsieur et cher Collègue, l'assurance de ma considération la plus distinguée et de mes sentiments dévoués.

J. B. Soussine

P.S. — Et venant, qui ne reculait pas devant les plus longs calculs, avait eu beaucoup de peine à évaluer les racines auxquelles vous faites allusion, parce que la série entière exprimée par le premier membre de son

équation, était une de ces fonctions qui ne grandissent pas pour les plus grandes valeurs de leur variable, à raison de la quasi-destruction continue des termes d'un même signe par ceux de signe contraire, en sorte qu'il faut, quand la variable devient un peu grande, une énorme approximation sur chacune de ces deux catégories de termes, pour en obtenir une suffisante sur leur différence. La méthode de calcul de ces séries, par leur évaluation terme à terme, était donc des plus mauvaises.