



HAL
open science

Des problèmes pour enseigner la géométrie à l'école Des expériences spatiales aux objets géométriques

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

► **To cite this version:**

Marie-Jeanne Perrin-Glorian. Des problèmes pour enseigner la géométrie à l'école Des expériences spatiales aux objets géométriques. Journée IREM-APMEP-IUFM-CRDP sur la géométrie en primaire. Centre Régional de Documentation Pédagogique Nord-Pas-de-Calais., 2001. ⟨hal-02428982⟩

HAL Id: hal-02428982

<https://hal.science/hal-02428982v1>

Submitted on 6 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Des problèmes pour enseigner la géométrie à l'école

Des expériences spatiales aux objets géométriques

Marie-Jeanne Perrin-Glorian
Université d'Artois, centre IUFM d'Arras.

La première question qu'on pose parfois est celle de l'intérêt de l'enseignement de la géométrie à l'école. J'espère que l'ensemble de la journée a déjà convaincu ceux qui ne l'étaient pas de l'importance de cet enseignement et vous a donné des pistes pour le pratiquer de façon à la fois utile et intéressante pour les élèves. Je vais quand même revenir un peu sur les objectifs de l'enseignement de la géométrie dans le primaire avant d'illustrer mon propos par quelques problèmes qui me semblent représentatifs de ce qu'on peut faire pour les atteindre.

1. Utilité de l'enseignement de la géométrie à l'école

Le premier argument qui vient en général à l'esprit pour justifier l'utilité de la géométrie est la connaissance de l'espace : percevoir l'espace proche et plus lointain, apprendre à se repérer, à s'orienter, à évaluer les distances. Certes, la géométrie n'est pas la seule discipline qui va permettre de structurer l'appréhension de l'espace, les activités physiques et sportives, la géographie, les arts plastiques vont y contribuer aussi. Mais l'appréhension de l'espace passe aussi par des représentations qui vont aider à recoller une vue locale et une vue globale, ce qui n'est pas facile. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à voir les difficultés qu'ont souvent les adultes à expliquer un itinéraire ou à se repérer dans un espace inconnu : par exemple le nombre d'adultes qui ont du mal à se repérer dans les couloirs du campus de Jussieu qui a pourtant un plan très simple en forme de quadrillage est impressionnant. Il est vrai que le plan ne se voit pas quand on marche dans des couloirs fermés. On rencontre bien là le problème du recollement d'une vision locale qu'on a de l'intérieur avec une vue de l'ensemble qu'on a de l'extérieur. Quel lien y a-t-il entre la géométrie et l'orientation dans l'espace ?

Un autre argument qui vient souvent à propos de la géométrie, surtout à partir du collège il est vrai, est qu'elle est le lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement. Mais, au collège, en géométrie, l'apprentissage du raisonnement est souvent identifié à l'apprentissage de la démonstration. Or je voudrais justement bien distinguer raisonnement et démonstration : la démonstration est la mise en forme d'un raisonnement sur des objets géométriques théoriques dans un cadre axiomatique, elle ne se conçoit qu'avec une certaine maîtrise de ces objets théoriques en même temps qu'une compréhension du raisonnement déductif et une bonne maîtrise du français dans lequel ce raisonnement s'exprime, elle se met en place progressivement au cours des années de collège. Elle est tout à fait hors de propos ici, alors que le raisonnement sur des figures ou des solides, lui, concerne parfaitement l'école primaire, et dès le plus jeune âge. Je pense même que le développement du raisonnement sur ces objets, qui sont très concrets pour les élèves, facilite l'appréhension des objets géométriques théoriques et du raisonnement sur ces objets théoriques. Avant de savoir faire des démonstrations, il faut apprendre à regarder et à analyser une figure, à dépasser la perception qu'on en a au premier coup d'œil, et cela commence très tôt.

De plus, nous sommes dans une civilisation où les schémas, graphiques... prennent de plus en plus d'importance. Il suffit d'acheter un meuble ou un appareil qui nécessite un quelconque montage pour s'en rendre compte. Il est vrai que le dessin est un langage universel et qu'il évite des problèmes de traduction. Encore faut-il être capable de lire ces

schémas qui demandent parfois des capacités d'analyse de figures et d'isolement de sous-figures, qui ne sont pas toujours si évidentes.

Mais la géométrie est aussi un domaine où on peut prendre du plaisir à produire de belles réalisations, développant simultanément, en liaison avec les arts plastiques, le sens esthétique et les capacités d'analyse d'une figure. Je ne parle pas de l'utilité de la géométrie pour de nombreuses professions, du charpentier au menuisier en passant par les dessinateurs industriels ... ou les couturières comme en témoigne le petit livre que m'a prêté une amie : "

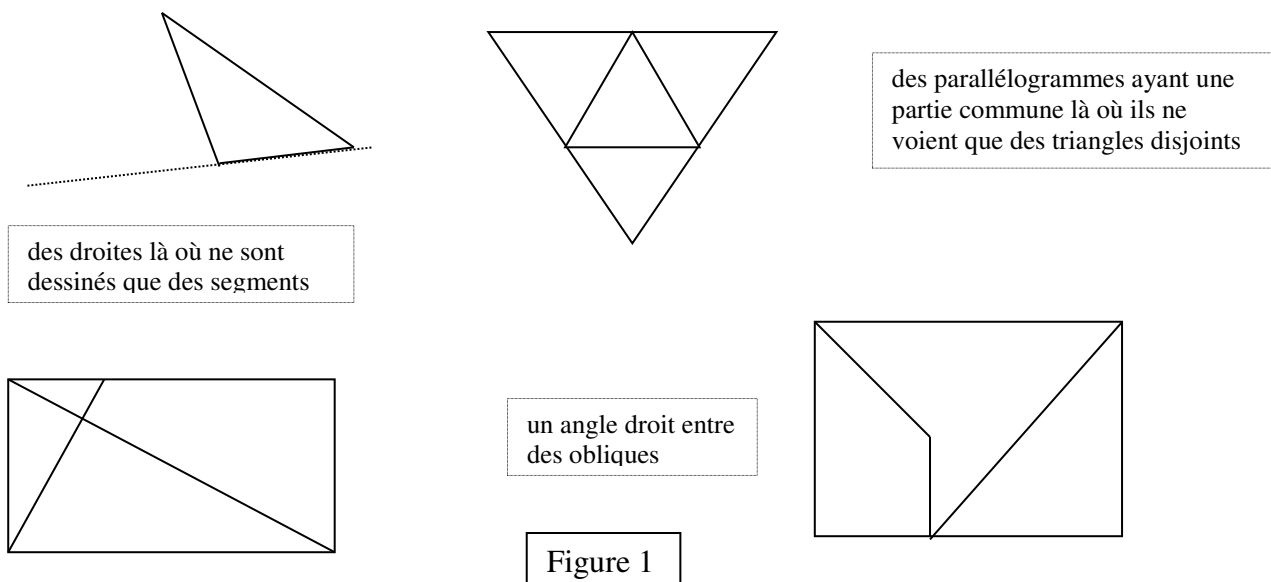
2. Quelle géométrie à l'école ?

La maîtrise de l'espace est citée en bonne place dans les programmes de maternelle mais semble disparaître en tant que telle ensuite, subsistant dans les questions de repérage, notamment sur quadrillage. La géométrie à l'école est souvent identifiée à l'apprentissage d'un vocabulaire, la reconnaissance de formes et la maîtrise d'instruments de tracé. Ces points sont importants mais la question qui se pose est celle de l'usage que les élèves peuvent en faire : comment enseigner la géométrie pour

- qu'elle puisse aider à la maîtrise de l'espace ?
- qu'elle puisse faciliter la lecture de schémas et graphiques ?
- qu'elle puisse servir de point d'ancrage pour d'autres apprentissages plus abstraits ?
- qu'elle soit un terrain d'exercice du raisonnement ?
- qu'elle puisse préparer le passage à une géométrie plus abstraite et à la démonstration ?

Je ne parlerai pas ici des problèmes de déplacement et d'orientation qui concernent aussi bien l'éducation physique que la géographie ou les mathématiques : la construction de plans, leur utilisation et leur orientation sont autant de problèmes dont la résolution contribue grandement à l'acquisition de la maîtrise de l'espace et dont les rapports avec la géométrie sont complexes. Je renvoie sur ce point notamment aux situations d'apprentissage des plans construites par R.Berthelot et M.H.Salin (1993). Je ne parlerai pas non plus des questions de formulation qui sont une occasion de travailler mathématiques et français. Dans cet exposé, je m'intéresserai uniquement à la connaissance des formes géométriques dans l'espace et dans le plan.

Ce n'est pas parce que les élèves de collège rencontrent des difficultés en géométrie, en particulier pour démontrer, qu'il faut anticiper ce qui relève du collège, ce n'est pas en mettant l'accent à l'école élémentaire sur les définitions et les notations qu'on aidera les élèves à appréhender la démonstration au collège. En effet, les difficultés des élèves de collège avec la démonstration viennent autant de ce qu'ils ne voient pas sur la figure et qu'ils auraient besoin de voir que de ce qu'ils lisent sur la figure sans le démontrer :



Le rôle de l'école élémentaire est de développer la perception géométrique et en même temps le raisonnement pour arriver à une perception raisonnée des objets de l'espace ou des figures du plan.

Comment, en s'appuyant sur la perception, développer cette perception, l'affiner jusqu'à rencontrer les questions qui amèneront à s'en écarter pour définir les objets et raisonner de façon plus sûre à partir de propriétés ? L'usage d'un vocabulaire précis est nécessaire pour communiquer, et il aide à la conceptualisation. Cependant, la conceptualisation et l'acquisition du vocabulaire se font de façon dialectique : le vocabulaire ne peut venir que pour identifier des objets qu'on distingue déjà clairement. Mais les objets désignés par le vocabulaire vont évoluer au long de l'école primaire. Un rectangle est d'abord un objet en bois, en carton ou en plastique qu'on peut manipuler avant d'être une forme dessinée sur une feuille de papier, d'abord en utilisant la forme comme gabarit, et plus tard encore c'est un quadrilatère qui a quatre angles droits et quelques autres propriétés qui permettront d'en concevoir plusieurs constructions avec les instruments de géométrie qui sont eux-mêmes porteurs de propriétés. C'est déjà une grande abstraction de pouvoir considérer que les dessins qu'on a obtenus en repassant dans des positions variées le contour d'un même rectangle en plastique ont la même forme et sont tous des rectangles : un mémoire de PE2 en cours (C. Fort) atteste que c'est hors de portée de la plupart des élèves de GS. Les élèves se laissent convaincre juste après la manipulation parce qu'ils n'ont effectivement qu'un gabarit dans la main, mais la semaine suivante, ils ne sont plus convaincus. Reconnaître un carré dans toutes les positions reste une difficulté en quatrième. De même, il faut bien commencer par différencier les carrés des rectangles avant de pouvoir concevoir les carrés comme des rectangles particuliers.

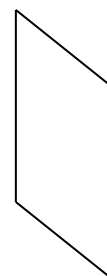
Dans la suite, je vais proposer quelques grands types de problèmes. Je n'ai pas du tout recherché l'originalité : j'ai trouvé la plupart des idées dans des travaux existants, voire dans des manuels de l'école. Mon propos est de regarder ce qu'ils peuvent apporter en regard des objectifs que je viens de définir.

3. Des problèmes spatiaux

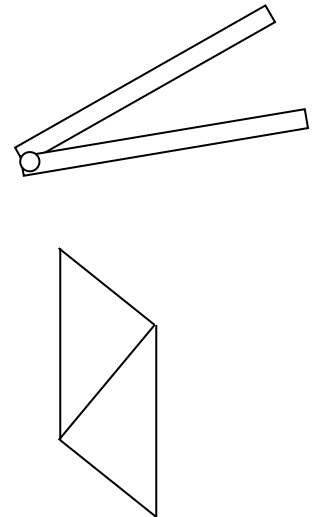
Si l'on veut que les élèves puissent par la suite utiliser des connaissances géométriques pour traiter des problèmes dans l'espace, il faut peut-être que, dans l'enseignement, ils puissent rencontrer des situations où les connaissances géométriques servent à traiter ce genre de problèmes. Des chercheurs de Bordeaux, M.H. Salin et R. Berthelot, ont travaillé sur cette question avec G. Brousseau et qualifié cette problématique de spatio-géométrie : le problème posé est un problème spatial portant sur l'espace sensible, dans une problématique pratique, la solution sera évaluée sur des critères spatiaux mais une stratégie purement spatiale est en défaut ou trop coûteuse et la résolution du problème nécessite la mise en œuvre de connaissances géométriques. Ce sera par exemple le cas si on veut mesurer une grandeur inaccessible.

Pour expliquer la différence faite ici entre connaissances géométriques et connaissances spatiales, je reprendrai leur exemple du vitrier qui veut poser dans un endroit difficile d'accès une vitre en forme de parallélogramme. Il peut envisager plusieurs solutions, par exemple faire un cadre de bois respectant les longueurs des côtés, avec une vis à chaque coin qu'il ne serre pas de façon que le parallélogramme puisse se déformer, il ajuste ensuite les côtés sur place et serre les vis pour avoir la forme de la vitre. Il devra alors prendre deux fois des mesures : une pour les longueurs des côtés, une autre fois pour ajuster l'angle. Il peut

Figure 2



aussi prévoir qu'il aura besoin des longueurs des côtés et de l'angle et prendre du premier coup ces trois informations, par exemple en reportant l'angle avec une fausse équerre, un instrument composé de deux barres réunies à une extrémité par une vis qu'on peut plus ou moins serrer. Ce faisant, il a en fait déterminé un triangle moitié du parallélogramme cherché. S'il sait que la diagonale partage le parallélogramme en deux triangles identiques et qu'il peut déterminer un triangle par les longueurs de ses côtés, il pensera peut-être qu'il lui suffit de mesurer trois longueurs pour caractériser le parallélogramme : une diagonale en plus des longueurs des côtés. Quand le vitrier ajuste le cadre sur la fenêtre, il met en œuvre des connaissances spatiales, quand il mesure la diagonale en plus des côtés, il met en œuvre des connaissances géométriques.



Une variable importante des problèmes posés dans l'espace physique est la taille de l'espace. La géométrie du microespace de la feuille de papier permet de voir les figures d'un seul coup d'œil et la perception donne des résultats souvent assez bons, du moins pour les figures familières. Dans une publication de l'APMEP, René Berthelot rapporte l'expérience suivante, réalisée avec des élèves de CM2 : il s'agit de prévoir à l'aide de pastilles de couleur les positions des 4 coins d'un tapis de 1,5 m sur 60 cm quand on le déplacera à l'autre bout de la pièce (dans un endroit où il est impossible de se repérer sur un mur droit ou un meuble. Presque tous les élèves mesurent les dimensions du tapis, placent 2 pastilles et ajustent les autres par tâtonnement pour respecter les longueurs, moins de 10% pensent spontanément à utiliser une équerre. La mise en œuvre des connaissances géométriques pour résoudre un problème pratique dans l'espace sensible suppose le plus souvent des allers et retours entre l'espace et sa représentation qui pourra être un modèle géométrique du problème pratique.

Voici un autre exemple tiré des travaux de Salin et Berthelot et étudié dans une thèse en cours par S. Cassan pour illustrer ces deux aspects des rapports entre espace et géométrie : c'est le problème de la barre posé entre deux murs adjacents d'un court de tennis fermé. Comment mesurer la barre sans entrer dans le court de tennis ?

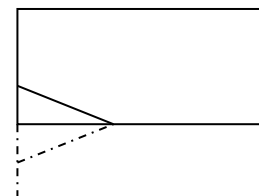


Figure 3

On peut penser à prolonger les côtés et utiliser la symétrie orthogonale. Mais se posera le problème pratique du prolongement d'un segment en respectant l'alignement. Et si l'angle n'est pas droit ? Et s'il n'y a pas de place à côté du court ?

Pour résoudre ce problème, on peut avoir recours à une représentation à l'échelle ou sortir de l'espace délimité a priori par le problème. Sortir de l'espace donné, par exemple prolonger des segments, est une difficulté résistante qu'on peut travailler dès le cycle 2, y compris dans l'espace de la feuille de papier. Nous y reviendrons et je pense que certains d'entre vous en ont déjà parlé en atelier.

4. Des constructions dans l'espace ou dans le plan

Une source de problèmes géométriques intéressants et motivants est la fabrication d'objets de l'espace ou du plan. C'est de plus l'occasion de travailler plusieurs disciplines : une telle

activité permet de viser des apprentissages non seulement en mathématiques mais aussi en technologie ou arts plastiques. On peut ici trouver de nombreux exemples et, en jouant sur les variables didactiques des situations, les adapter à tous les niveaux du cycle 2 et du cycle 3. Je me contenterai de quelques exemples que je développerai inégalement.

Le premier porte sur la fabrication d'un cube au CE2. Je m'appuie sur les observations du mémoire professionnel d'E. Carlier, que je dirige en ce moment et dont M. Delforge est le tuteur. La suite de séances nécessaires pour aboutir à une réalisation satisfaisante d'un cube par les élèves permet de couvrir la plus grande partie du programme de géométrie. Après observation et manipulation de cubes, situés parmi d'autres solides qu'ils ont eu à classer, les élèves disposent, par groupes de deux, d'une feuille de papier fort et d'un cube et ils doivent essayer de fabriquer un cube identique. Le premier problème auquel s'intéressent les élèves est celui du passage de l'espace au plan, très peu prennent en compte les faces elles-mêmes. Beaucoup d'élèves ont déjà rencontré des patrons de cubes, au centre aéré ou ailleurs et essaient de faire un patron en T ou en croix mais sans toujours tenir compte des contraintes sur les faces. On obtient des productions variées (figure 4). Deux groupes seulement ont respecté la forme et la taille des faces en prenant le cube comme gabarit pour les reproduire.

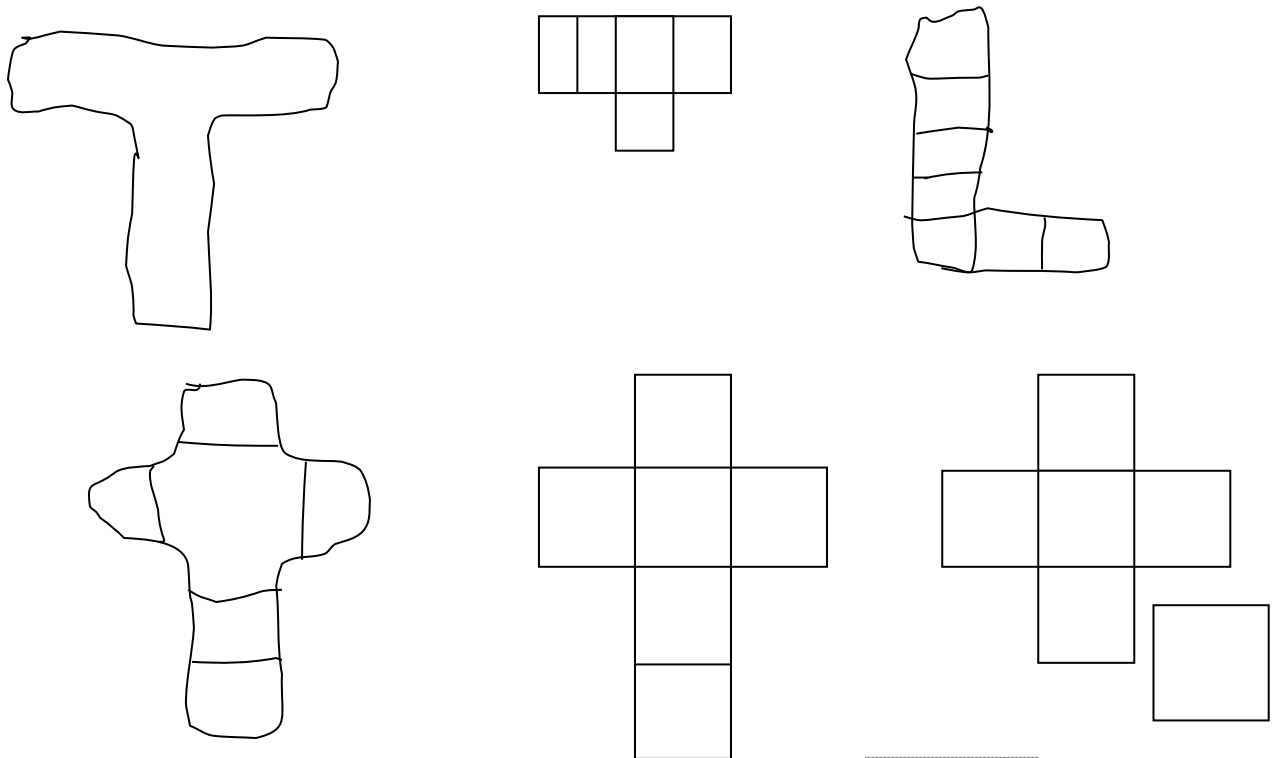


Figure 4

Un groupe a plié la feuille autour du cube.

Il a fallu une autre séance pour se mettre d'accord sur le fait que, pour construire le cube, il fallait construire des carrés identiques. Deux séances ont été nécessaires pour identifier les contraintes de construction d'un carré, différencier le carré d'autres quadrilatères particuliers et élaborer une procédure de construction. Le principal problème est la reconnaissance et la fabrication des angles droits. La manipulation de l'équerre est une difficulté résistante pour les élèves de l'école élémentaire et du début du collège. Elle tient peut-être à un déficit dans le travail de la notion d'angle. J'ai imaginé quelques activités sur ce sujet que je vous présenterai dans un instant. Auparavant, examinons les variables de cette situation qui permettent de l'adapter à différents niveaux :

Pour le cycle 2, on peut fabriquer des cubes à partir de carrés tout faits, soit en carton, soit en

plastique avec système d'accrochage type polydron. On peut fournir des carrés tous de la même taille laissant à la charge des élèves de choisir le bon nombre de carrés et de les assembler, on peut aussi fournir différentes tailles de carrés, voire des carrés et des rectangles laissant le soin aux élèves de choisir six carrés superposables.

Pour le cycle 3, on peut remplacer le cube par un parallélépipède : il y aura en plus à tenir compte des dimensions des rectangles pour bien les disposer. On peut aussi fabriquer des prismes ou des pyramides, ce qui amènera à construire des triangles et d'autres polygones, par exemple des hexagones réguliers.

On peut fabriquer d'autres boîtes, par exemple la boîte cadeau décrite dans la brochure des aides pédagogiques de géométrie écrite par la COPIRELEM et publiée par l'APMEP en 1986.

On peut déplier la boîte pour obtenir son patron (avec les marques de pliage) puis demander

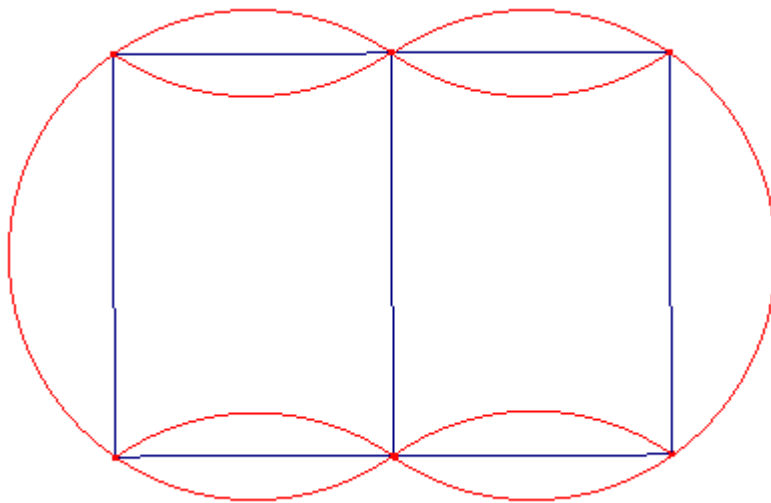


Figure 5

de fabriquer une autre boîte du même type mais à une taille différente, ce qui obligera à construire le patron à partir des propriétés géométriques. Quand on se donne les dimensions du rectangle, le reste est déterminé.

A propos de l'angle droit et des angles en général.

Les enfants ont beaucoup de mal à placer correctement leur équerre qui est en fait un triangle avec trois angles. Pourquoi ne pas fabriquer des gabarits d'angles droits qui n'ont qu'un angle, deux côtés droits et un bord arrondi ou irrégulier, le gabarit d'angle droit étant un gabarit parmi d'autres gabarits d'angles ? On peut l'obtenir en pliant une feuille en quatre et en découpant les autres bords de façon irrégulière. En plus les équerres du commerce sont graduées, mais pas à partir du bord de l'angle droit, ce qui amène des erreurs de mesure, si les élèves, en construisant un rectangle par exemple, veulent mesurer les longueurs des côtés sans déplacer leur équerre.

On trouve d'ailleurs assez peu d'activités demandant de mettre en jeu les angles parmi celles couramment proposées à l'école élémentaire, pourtant les angles sont perçus aussi facilement que les différences de longueur des côtés. On peut fabriquer des triangles avec des pailles de différentes longueurs (du moins si les longueurs ne sont pas trop mal choisies). On peut aussi fabriquer des triangles ou des quadrilatères avec des gabarits d'angles et s'intéresser à la possibilité de les construire et aux différentes figures qu'on obtient. Si on veut fabriquer des triangles et des quadrilatères à partir de gabarits d'angle, on s'aperçoit qu'il y a des contraintes. Pour un triangle, si j'ai choisi un premier gabarit, je ne peux pas prendre le deuxième trop grand sinon les droites que j'obtiens se coupent du mauvais côté ou ne se coupent pas du tout. Il en est de même avec un quadrilatère quand j'ai choisi deux gabarits d'angles.

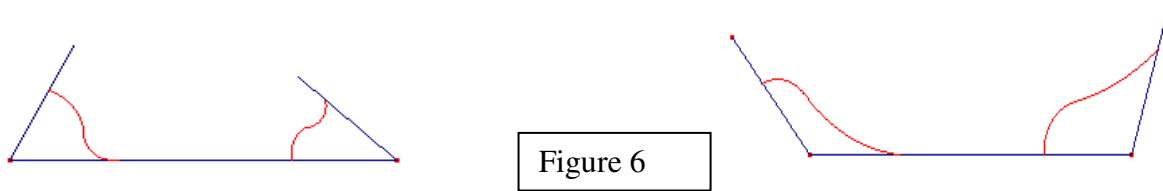


Figure 6

Si on découpe un triangle en 3 pièces séparant les 3 angles ou un quadrilatère en quatre pièces, on peut assembler les angles et découvrir une propriété et en déduire des pavages du plan avec des triangles quelconques ou des quadrilatères quelconques.

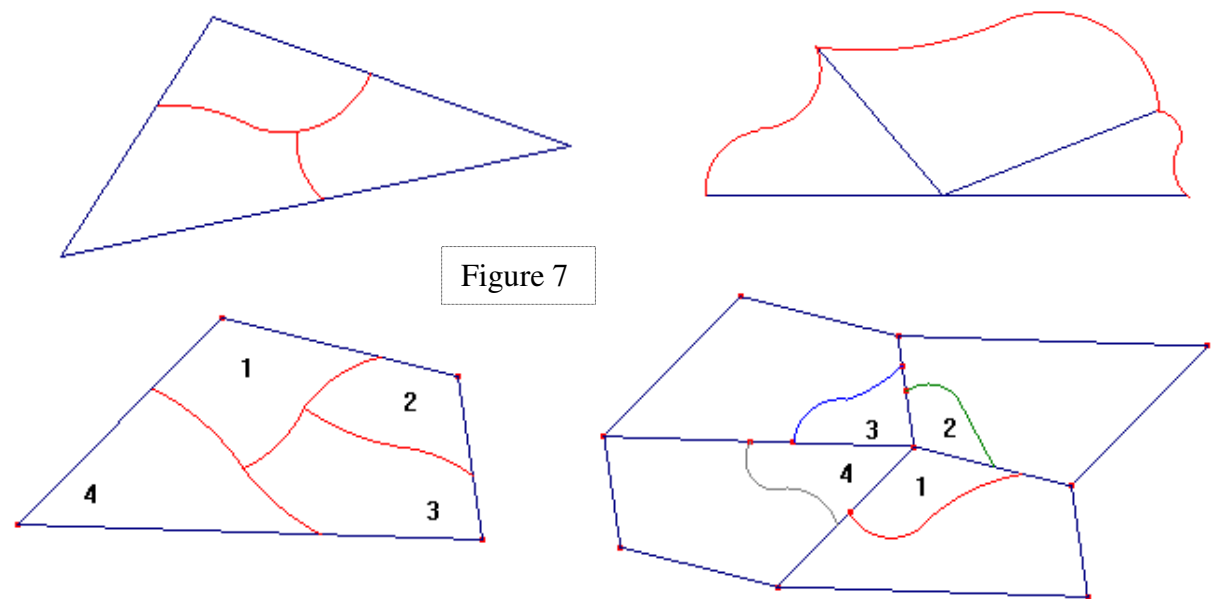


Figure 7

Si j'ai choisi deux gabarits d'angle qui me permettent de compléter un triangle, j'ai choisi la longueur du côté entre les deux angles, mais ensuite, je n'ai plus le choix, le triangle est déterminé. Le troisième angle se forme de lui-même, je peux fabriquer son gabarit. De plus, tous les triangles que j'obtiens avec ces deux gabarits ont la même forme, ce sont des agrandissements d'un même triangle, ce que je peux vérifier en superposant les angles égaux.

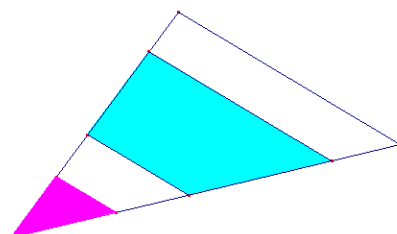


Figure 8 :
4 triangles
superposés

Si je dispose d'un seul gabarit d'angle, et s'il n'est pas trop grand (angle aigu), je peux choisir la longueur d'un côté et quand j'ai reporté mon gabarit à chaque extrémité du segment, j'obtiens un triangle isocèle, qui a un axe de symétrie, je peux superposer les angles par pliage et en déduire que deux côtés sont de même longueur. Si je veux un triangle avec trois angles égaux, il faudra donc qu'il ait aussi des côtés égaux. Si je veux un quadrilatère avec quatre

angles égaux, je pourrai les obtenir par pliage, ce sont des angles droits. Il est ainsi facile de fabriquer une équerre. On peut aussi déchirer le coin de l'angle droit, cela n'empêche pas de fabriquer des angles droits à condition de disposer aussi d'une règle (figure 9)

On peut d'ailleurs aussi fabriquer un angle de 60° par pliage (figure 10).

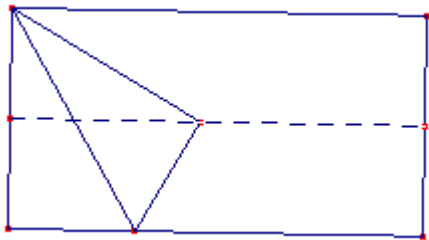


Figure 10



Figure 9

Ces activités ne sont pas à proprement parler des problèmes mais elles fournissent des expériences et des observations qui suscitent la réflexion et sur lesquelles on peut raisonner même si on n'a pas encore tous les moyens d'une preuve complète.

On peut trouver d'autres pliages dans des livres (Boursin et Larose par exemple) ou des magazines mathématiques pour les lycéens ou les collégiens comme Tangente ou Hypercube.

5. Reproduction de figures planes

La reproduction de figures planes est aussi une source de problèmes riches pour les élèves qui permet de mettre en œuvre beaucoup de notions mathématiques et permet de travailler mathématiques et arts plastiques mais aussi mathématiques et français. Cependant, je ne parlerai pas ici de l'articulation entre le texte et la figure. Je laisse donc de côté les tâches de description ou d'élaboration d'un programme de construction (passage d'une figure à un texte) et de construction (passage d'un texte à une figure) pour ne regarder que les tâches de reproduction qui demandent de passer d'une figure à une figure. Ce n'est nullement parce que je considère les autres tâches comme moins importantes, au contraire j'estime que le cours de mathématiques est un lieu d'apprentissage du français parce qu'on y fait un usage très précis de la syntaxe et des déterminants par exemple, mais, dans les limites de cet exposé, j'ai voulu me concentrer sur la partie visuelle de la géométrie. Je ne m'occuperai donc pas de la formulation mais seulement de l'analyse de la figure. Les élèves de collège ont souvent beaucoup de difficultés à percevoir dans une figure les sous-figures pertinentes pour utiliser les théorèmes qu'ils connaissent, particulièrement quand il faut les isoler alors qu'elles chevauchent d'autres éléments de la figure, ils ont aussi beaucoup de mal à imaginer des éléments non tracés qui seraient utiles au raisonnement. La reproduction de figures, pour peu que l'on choisisse adroitement les figures est l'occasion d'exercer la perception dans ce domaine, pour créer les bases de la vision et de l'intuition géométriques. Cette fois encore, les valeurs qu'on donne aux variables du problème, en plus du choix de la figure, par exemple reproduire à l'identique ou à une taille différente, papier blanc ou papier quadrillé, instruments autorisés, changent considérablement la tâche et les connaissances géométriques à mettre en jeu pour réussir.

Je prendrai quelques exemples :

D'abord une figure extraite du manuel Objectif Calcul CM2 : la rose des vents. Il s'agit dans le manuel de reproduire cette figure (figure 11) d'abord sur papier quadrillé puis sur papier blanc. On demande auparavant de retrouver les lignes ayant servi à la construction et qui ont été effacées. Ces lignes sont bien sûr les carrés qui joignent les sommets des quatre branches d'une même couleur de la rosace.

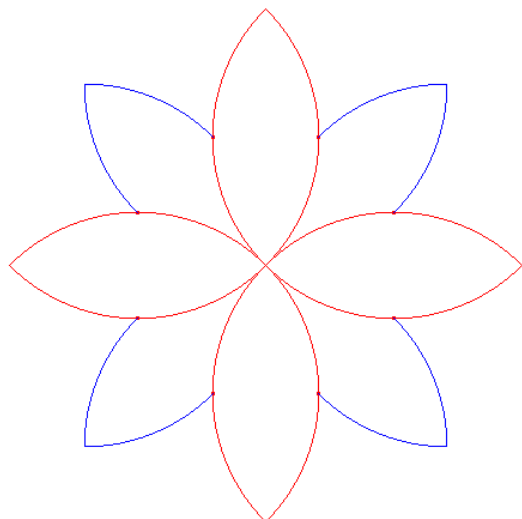


Figure 11

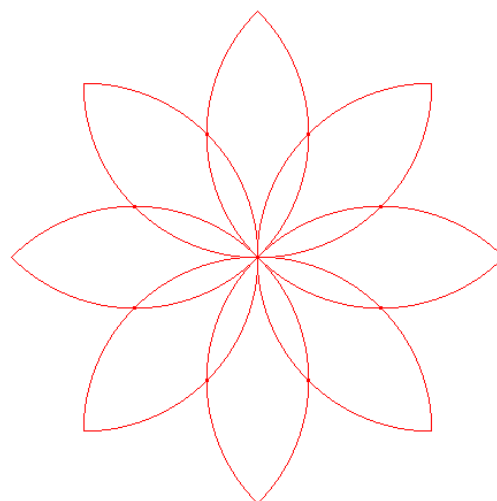


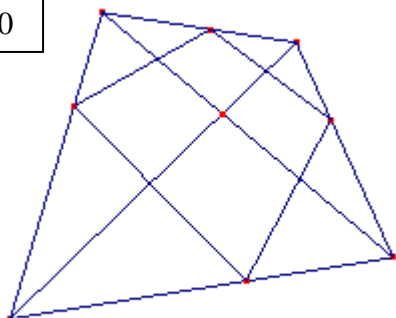
Figure 12

Les demi-cercles sont centrés aux milieux des côtés de ces carrés. L'utilisation de deux couleurs et de deux plans aide à percevoir ces carrés mais cache les demi-cercles bleus alors qu'une présentation monochrome et sur le même plan (figure 12) fait plutôt percevoir le cercle circonscrit et risque de laisser penser que les arcs de cercle sont centrés sur le cercle circonscrit. Le papier quadrillé favorise l'utilisation des axes de symétrie de la figure et notamment des axes horizontaux et verticaux. Si on choisit la longueur de l'axe vertical, sans doute un nombre entier de carreaux, il faudra prendre la même longueur sur les autres axes, ce qui sera plus difficile sur les axes obliques et nécessitera le report au compas. On supposera ici qu'on demande de reconstruire cette figure à une autre échelle de façon qu'on ne puisse pas prélever les mesures directement sur la figure. Le choix d'une longueur, le côté du carré, le rayon du cercle circonscrit ou la longueur d'une diagonale, détermine le reste.

On peut fournir des aides en conseillant de chercher des carrés ou en dévoilant certaines lignes de construction (figures 13, 14, 15, 16 en annexe). D'autres figures familières cachées dans la figure comme le cercle circonscrit (figure 17) risquent au contraire de mener à des fausses pistes par analogie avec la rosace à 6 branches. On peut aussi demander simplement aux élèves de chercher des cercles et des carrés cachés dans la figure (figure 18). Ils peuvent aussi trouver l'octogone régulier, voire l'octogone régulier étoilé (figure 19). Ici le jeu peut se poursuivre à l'infini. (Les figures 13 à 19 sont en annexe).

Dans cet exemple, toutes les figures cachées font intervenir des points déjà présents sur la figure et il s'agit de trouver des lignes qui les relient. Pour apprendre à sortir des limites de la figure de départ, on peut proposer de reproduire des figures qui, dans leur construction, font intervenir des points cachés qui sont extérieurs à la figure et qu'on peut obtenir comme intersection de lignes appartenant à la figure. C'est le cas dans la figure suivante :

Figure 20



Si l'on donne le quadrilatère extérieur comme point de départ de la reproduction à une autre échelle, il faut prolonger les côtés, joindre le point d'intersection obtenu au point d'intersection des diagonales pour trouver les sommets du quadrilatère intérieur. Même chose si l'on donne comme point de départ le quadrilatère intérieur mais cette fois les diagonales ne sont pas tracées, et ce sont les supports des côtés que l'on détermine au lieu des sommets. Le problème est a priori plus difficile.

Au cycle 2, et même avant, on peut travailler la reproduction de figures à l'aide de pièces toutes construites qu'on déplace, type tangram. Quand on pense au tangram, on pense souvent à des pièces disjointes, mais on peut aussi reproduire des superpositions de pièces, ce qui aide à imaginer des pièces partiellement cachées, et, plus tard, la reconnaissance de figures simples à extraire d'une figure plus complexe où il y a superposition. Dès le début du cycle 2, on peut faire reproduire des figures avec des gabarits dont on a cassé les coins (figure 21). On peut par la suite travailler la recherche d'éléments cachés (cercles et carrés cachés dans la figure 22) et retrouver des lignes pour compléter des figures comme dans cet exercice inspiré d'Objectif calcul CE1 (figure 23).

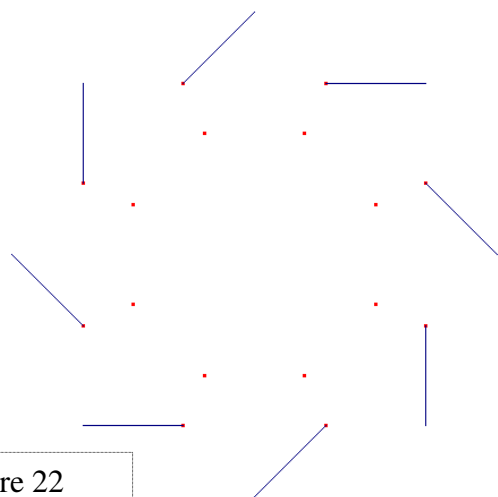


Figure 22

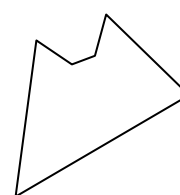
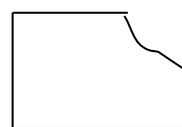
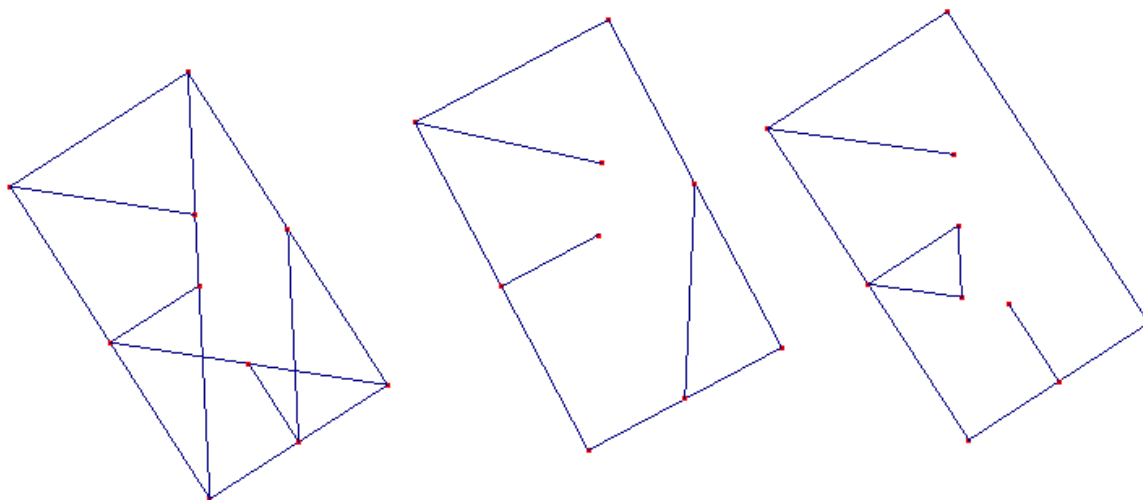


Figure 21

Figure 23



La construction de figures, et en particulier le fait de se heurter à des impossibilités amène à raisonner et à rencontrer le caractère de nécessité de la rationalité mathématique. Le problème suivant, emprunté à la thèse de Henri-Claude Argaud, me paraît particulièrement bien choisi pour illustrer ce point : il demande à des élèves de CM2 de construire un quadrilatère ayant 3 angles droits. Malgré tous leurs efforts, ceux-ci n'arrivent pas à construire un quadrilatère n'ayant que 3 angles droits.

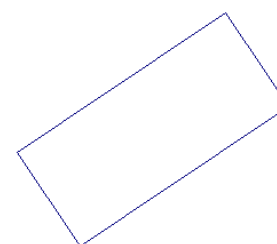


Figure 24

Ce problème constitue une excellente introduction aux théorèmes étudiés en sixième concernant les parallèles et perpendiculaires : si deux droites sont perpendiculaires à une troisième droite, elles sont parallèles entre elles ; si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

6. Grandeurs géométriques : les aires

J'ai souligné dans plusieurs articles l'importance qu'il y a à travailler sur l'aire d'un point de vue géométrique, indépendamment de toute mesure ainsi que sur des formes quelconques, sans se ramener aux angles droits. Les enfants ne peuvent pas conceptualiser la notion d'aire parce qu'on l'assimile très vite à un nombre et au comptage de carreaux sur un quadrillage à mailles carrées. Le découpage-recollement et le pavage avec des formes variées sont des outils très utiles pour raisonner et résoudre sans calcul de nombreux problèmes de comparaison d'aires et notamment de partages. Je vais illustrer cela en établissant quelques résultats sur le partage en deux du parallélogramme et du triangle qui permettent de traiter une grande partie de la géométrie du collège.

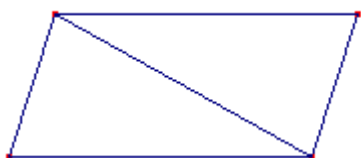


Figure 25

Premier résultat : une diagonale d'un parallélogramme coupe ce parallélogramme en deux triangles de même aire.

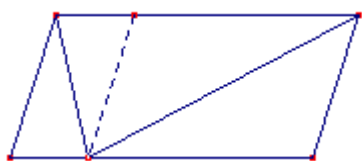


Figure 26

Deuxième résultat : un triangle ayant un côté confondu avec un côté d'un parallélogramme et comme sommet opposé un point du côté opposé du parallélogramme a une aire moitié du parallélogramme.

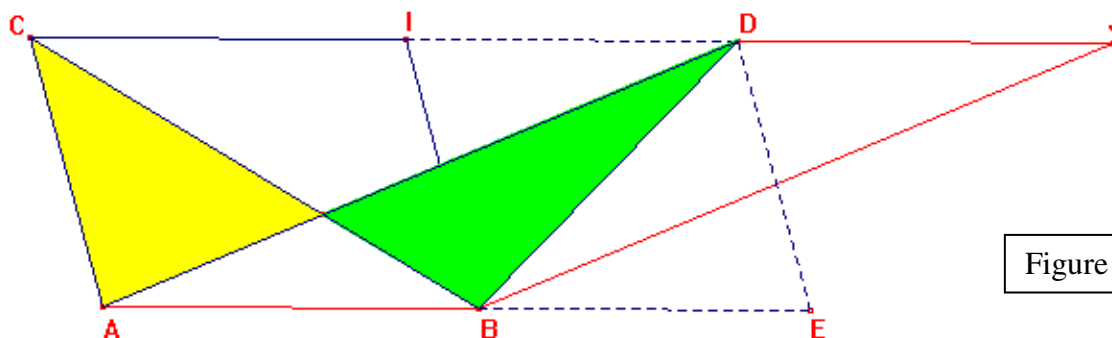


Figure 27

Troisième résultat : Deux triangles qui ont même base et des sommets situés sur une parallèle à la base ont même aire. Il en est de même pour des parallélogrammes.

Les triangles ABC et ABD ont même aire. Pour le montrer, il suffit de montrer que les aires jaunes et vertes sont égales. Pour cela, il suffit de remarquer que les triangles CAD et CBD sont tous les deux la moitié du parallélogramme ACDE.

On en déduit que les parallélogrammes ABIC et ABJD qui sont doubles respectivement des triangles ABC et ABD ont aussi même aire.

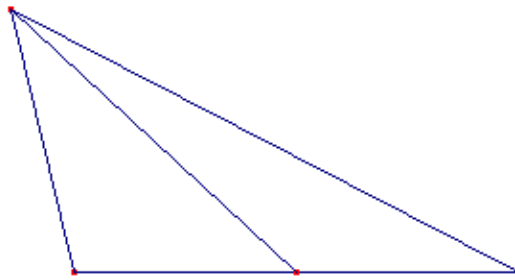


Figure 28

Quatrième résultat : une médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire. C'est une conséquence du résultat précédent, il suffit de faire glisser la base d'un triangle pour la faire coïncider avec celle de l'autre triangle.

Les résultats 3 et 4 sont des conséquences directes de la formule de calcul d'aire d'un triangle, mais on n'a pas besoin de la formule pour les établir.

Regardons maintenant le problème suivant : partage d'un triangle en deux parties de même aire par un segment à partir d'un point quelconque d'un côté qu'on appellera P sur la figure (on peut imaginer le partage d'un terrain).

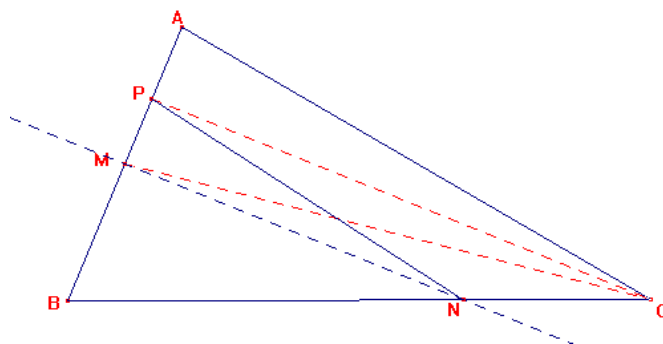


Figure 29

Le segment CM partage le triangle ABC en deux mais ne passe pas par P, le segment PC passe par P mais le triangle APC est trop petit et le triangle BPC trop grand. Il faut ajouter à APC un triangle de même aire que PMC. On fait glisser M sur une parallèle à PC jusqu'à ce qu'on rencontre BC de façon à ne pas changer l'aire. Si on mène donc par M la parallèle au segment PC, elle coupe le segment BC en N, le triangle PNC a même aire que PMC et le segment PN est celui que l'on cherche.

On peut facilement partager un quadrilatère en deux parties de même aire à partir d'un sommet (ici D) par une ligne brisée, on peut ensuite la rectifier.

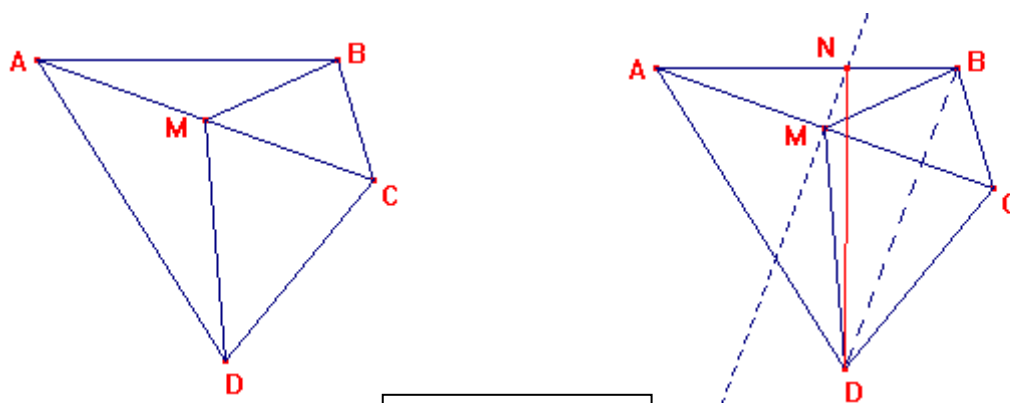
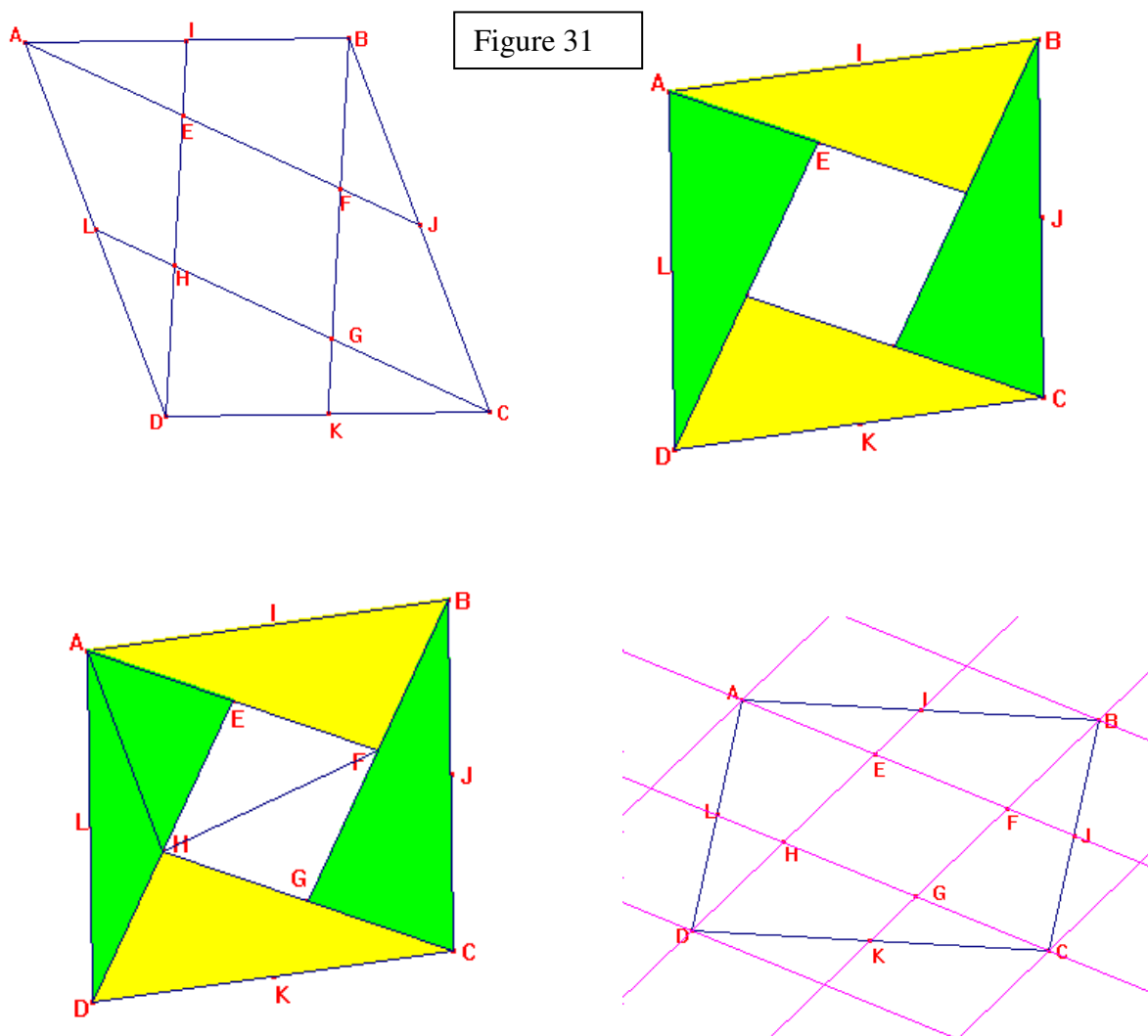


Figure 30

Si M est le milieu du segment AC, la ligne brisée DMB partage le quadrilatère en deux quadrilatères de même aire. Cela résulte du partage des triangles ABC et ADC. Il faut donc ramener sur le bord le point M en le déplaçant sur une parallèle au segment BC de façon à conserver l'aire du triangle DMB. On obtient un point N sur le bord et le segment DN convient.

Si on veut partager le quadrilatère à partir d'un autre point du bord, c'est plus laborieux mais on y arrive en utilisant le même type de procédure et en distinguant plusieurs cas de figures.

Un autre exemple nous est fourni par le problème du concours blanc 1999 de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais. Il s'agissait de comparer les aires des parallélogrammes ABCD et EFGH.



Divers découpages et coloriages de la figure peuvent aider à voir le rapport des aires des parallélogrammes. Pour la démonstration, on peut rester à l'intérieur de la figure tracée et voir que l'aire de ADE est double de celle de AHE et que l'aire de AHE est la même que celle de HEF qui est la moitié de celle du parallélogramme EFGH, donc chacun des triangles a même aire que le parallélogramme EFGH et l'aire de ABCD vaut donc 5 fois l'aire de EFGH.

On peut aussi sortir de la figure et la plonger dans un quadrillage de maille EFGH. Il est alors

clair que les triangles AED, AFB, BGC et CDH ont tous même aire que le parallélogramme.

7. Des supports divers : des logiciels de géométrie dynamique dès l'école ?

Nous avons déjà évoqué à propos des rosaces les différences dans les connaissances à mettre en jeu suivant que les élèves disposent de papier blanc ou de papier quadrillé. Le papier quadrillé favorise les angles droits et prend en charge leur tracé si on utilise les lignes du quadrillage. Si on a une figure qui ne respecte pas les nœuds du quadrillage le papier quadrillé peut au contraire apporter une difficulté supplémentaire. Le support et les instruments autorisés sont des variables importantes de toutes les tâches concernant la reproduction ou la construction de figures. Parmi les instruments, il faut maintenant considérer les logiciels de construction géométrique qui donnent une vision dynamique des figures, permettent une approche expérimentale des problèmes et peuvent forcer l'utilisation de propriétés géométriques. Je donnerai deux exemples d'utilisation, qui, malheureusement, ne donneront sur le papier que des images fixes. Il faudra imaginer le mouvement.

Premier exemple d'utilisation du logiciel : pour expérimenter et faire des conjectures.

a) illustration de l'invariance de l'aire d'un triangle quand on déplace le sommet sur une parallèle à la base.

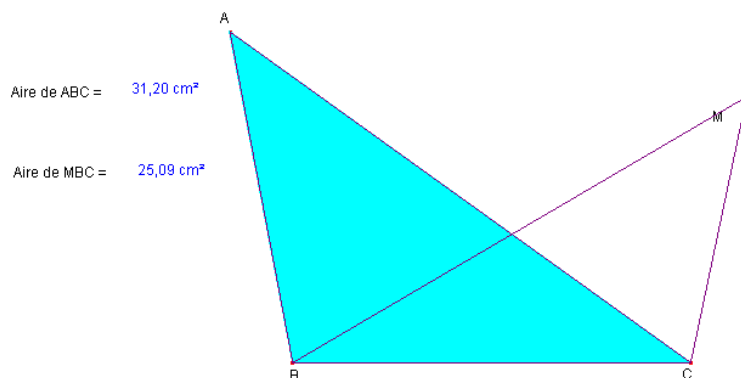
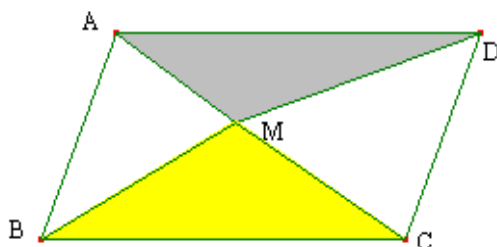


figure 32

Quand on déplace M, l'affichage de l'aire de MBC change. Si l'on astreint M à se déplacer sur la parallèle à (BC) passant par A, l'aire de MBC reste égale à celle de ABC, l'affichage reste fixe.

b) Conséquence : quand on déplace M à l'intérieur du parallélogramme de la figure 33, les aires de AMD et BMC changent, la somme reste constante et égale à la moitié de ABC.



$$\text{Aire de AMD} = 2,88 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire de ABCD} = 13,33 \text{ cm}^2$$

$$\text{Somme des aires} = 6,67 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire de BMC} = 3,78 \text{ cm}^2$$

Figure 33

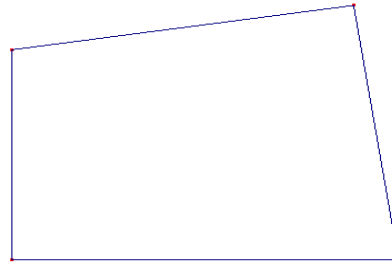
Deuxième exemple d'utilisation du logiciel : s'appuyer sur la perception, mais la bloquer pour obliger l'élève à utiliser les instruments de construction géométrique dans le logiciel au lieu de construire à vue.

Des rectangles sont tracés avec Cabri, sans respecter toutes les propriétés dans la construction : on utilise la perception pour tester la validité de la construction. Suivant le

mode de construction, on peut ou non déplacer des sommets du rectangle. Dans le déplacement, seules les propriétés géométriques utilisées dans la construction sont conservées. Le déplacement va donc permettre d'invalider les constructions erronées dans le cas où on peut bouger des sommets ; on peut aussi observer les propriétés conservées (figure 34). Dans le cas où on ne peut rien bouger, il faut des tracés auxiliaires (figure 35).



Avant déplacement



Après déplacement

Figure 34

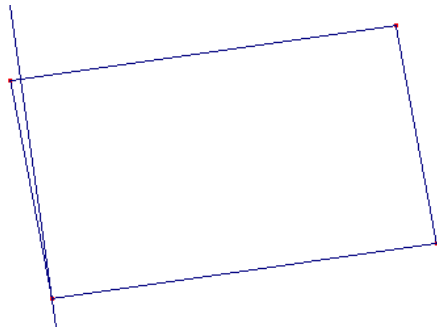


Figure 35 : aucun sommet du rectangle n'est déplaçable. On peut tracer avec le logiciel la perpendiculaire à un côté passant par un sommet pour vérifier si on a ou non un angle droit.

L'utilisation de logiciels de tracé dans l'enseignement élémentaire est encore à un stade expérimental. Mais c'est sûrement un instrument qu'il faudra bientôt ajouter à la règle, à l'équerre et au compas pour penser la formation des élèves en géométrie.

Cet exposé se veut surtout une recueil de pistes à explorer. J'espère qu'il aura montré la richesse de la géométrie pour fournir aux élèves de l'école élémentaire des problèmes intéressants et formateurs, et pas seulement pour leur permettre d'aborder facilement la géométrie du collège.

Bibliographie succincte.

ARGAUD H.C. (1998) *Intérêts et limites de l'environnement Cabri-géomètre en géométrie plane pour l'enrichissement de l'espace des problèmes et dans la constitution des milieux pour la validation dans des situations d'apprentissage à l'école élémentaire autour des relations de parallélisme, de perpendicularité et d'égalité.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BERTHELOT R. SALIN M.H.(1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse. Université de Bordeaux 1.

BERTHELOT R. SALIN M.H (1993) Conditions didactiques de l'apprentissage des plans et cartes dans l'enseignement élémentaire in *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*, coordonné par A. Bessot et P. Vérillon, La pensée sauvage, Grenoble.

BERTHELOT R. SALIN M.H (1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire
Revue *Grand N* n°53, pages 39-56, IREM de Grenoble.

BERTHELOT R. SALIN M.H (1995) Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la
géométrie, in *Différents types de savoirs et leur articulation*, 187-204, La Pensée Sauvage
Editions, Grenoble.

BOURSIN D. et LAROSE V. (1997) *Pliages et Mathématiques* (ACL éditions)

CARLIER E.
Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (2000) Rapport d'étape sur
la géométrie et son l'enseignement.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche
géométrique. *Repères-IREM* n°17. 121-138. Topiques éditions.

FORT C.
Helayer J. et Bertotto A.

PADILLA S.V (1990) Les figures aident-elles à voir en géométrie ? *Annales de Didactique et
de Sciences Cognitives*. Vol3. 223-252. IREM de Strasbourg.

PECHEUX Marie-Germaine (1990) *Le développement des rapports des enfants à l'espace*,
Nathan

PIAGET J. et INHELDER B. (1947) *La représentation de l'espace chez l'enfant*, PUF

RAUSCHER J.C. (1993) *L'hétérogénéité des profs face à des élèves hétérogènes : cas de
l'enseignement de la géométrie en début de collège*. Thèse Strasbourg.

ROYE

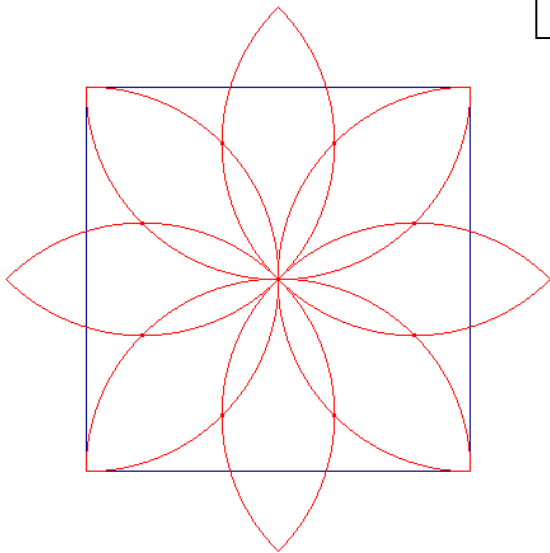


Figure 13

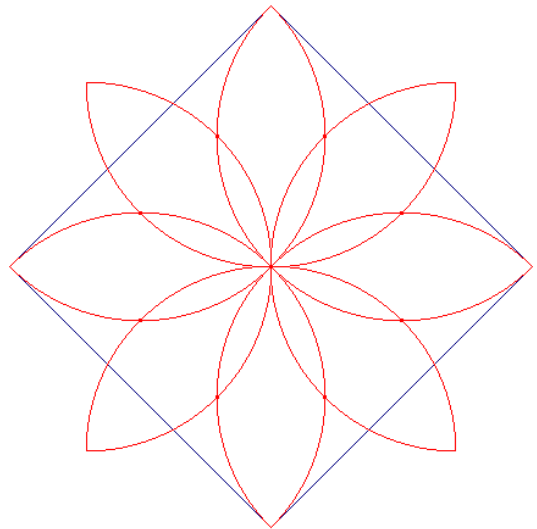


Figure 14

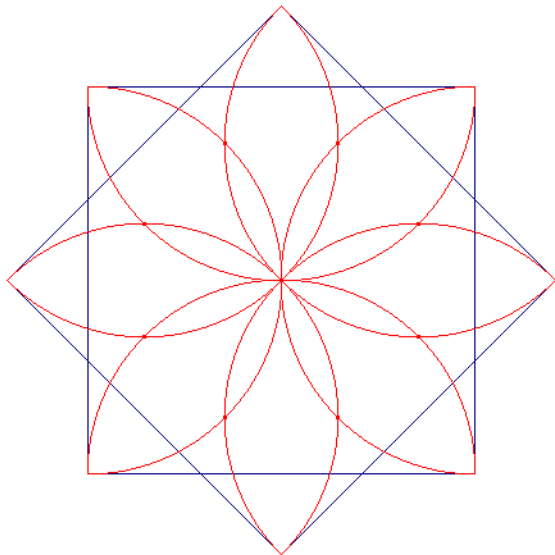


Figure 15

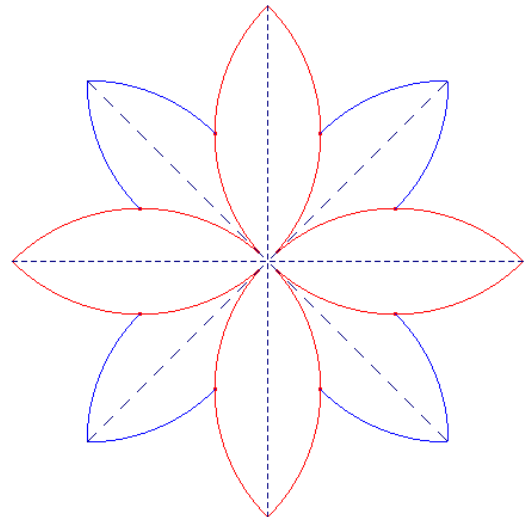


Figure 16

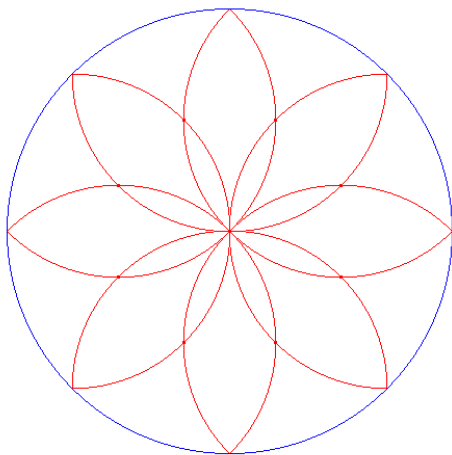


Figure 17

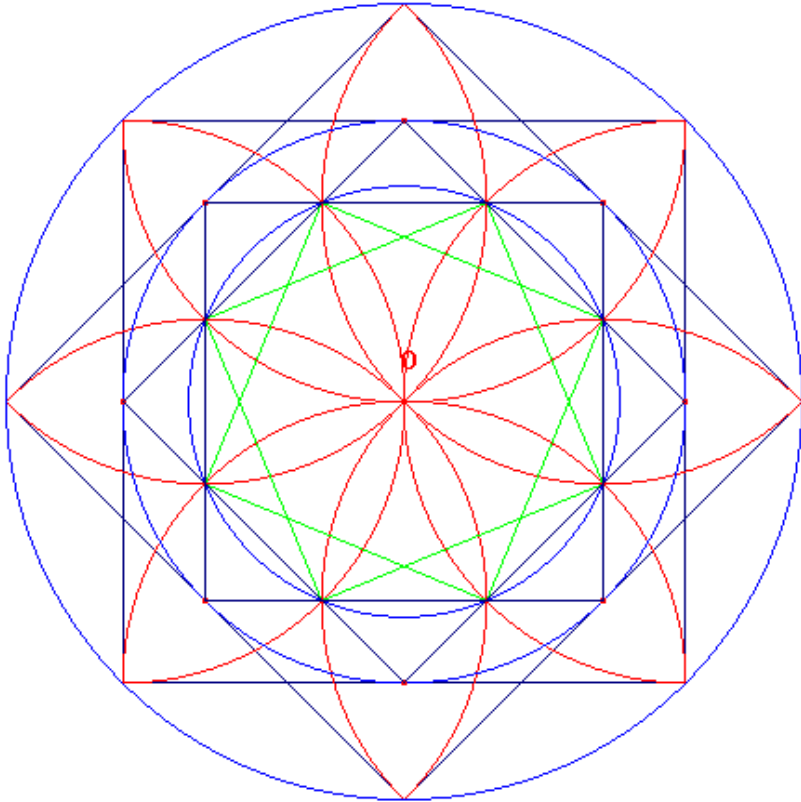


Figure 18

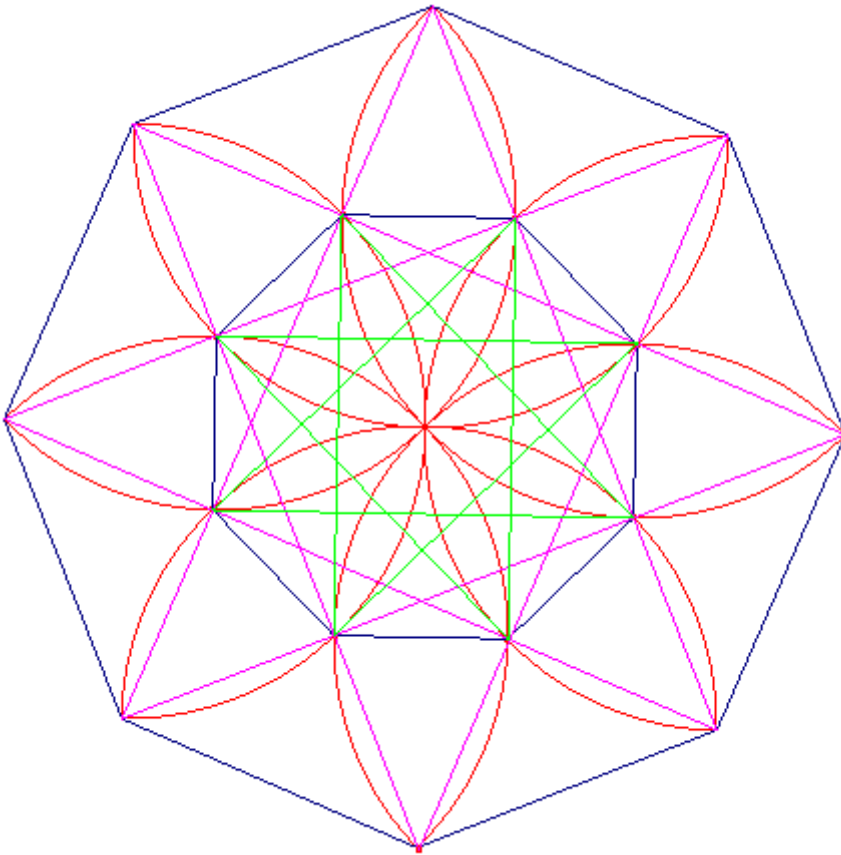


Figure 19