



HAL
open science

Dérivation des équations de convergence dans le modèle de Solow : démarche mathématique

Jonas Kibala Kuma

► **To cite this version:**

Jonas Kibala Kuma. Dérivation des équations de convergence dans le modèle de Solow : démarche mathématique. 2020. <hal-02424875>

HAL Id: hal-02424875

<https://hal.science/hal-02424875v1>

Preprint submitted on 6 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

CER-3/CREQ

Centre de Recherches Economiques et Quantitatives
Collège d'Economistes pour le recyclage avec 3 outils

Université de Kinshasa-Faculté des Sciences Economiques et de Gestion
Département des Sciences Economiques
B.P. 832 Kinshasa XI

Note technique n°001/CER3/12-19

***Dérivation des équations de convergence dans le modèle de
Solow : démarche mathématique***

Par

Jonas KIBALA KUMA

(DEA en cours en Sciences Economiques, UNIKIN)

kibala.jonas@gmail.com

Citation de la note :

Kibala Kuma J. (2019), « Dérivation des équations de convergence dans le modèle de Solow : démarche mathématique », Note technique n°001/CER3/12-19 du CER-3/CREQ, décembre.

Décembre 2019

Note aux lecteurs

Cette note technique, qui présente quelques développements mathématiques liés au modèle de Solow, s'inscrit dans le cadre de travaux du CER-3. En effet, CER-3 est un collège d'Economistes qui s'approprient les outils quantitatifs, 3 essentiellement (mathématique, statistique/économétrie et informatique) comme le sigle l'indique, pour ainsi s'inscrire sur la frontière des connaissances en sciences économiques et être compétitifs à l'échelle internationale, autant pour la faculté de sciences économiques et de gestion de l'Université de Kinshasa. L'idée est de susciter un regain et remettre en avant plan les aspects quantitatifs dans la formation de l'économiste congolais (RDC), africain en général, pour une élite à la taille des exigences internationales. Pour y parvenir, nous nous occupons à :

- (i) Nous mettre à jour, soit nous (l'équipe) former continuellement sur les aspects théoriques et empiriques de techniques et méthodes quantitatives en sciences économiques (principalement en *mathématique, statistique et informatique*) ; et
- (ii) Mettre à la disposition du public scientifique les résumés (notes ou fiches techniques) de nos discussions et recherches.

Ce collège (CER-3) est un cadre qui prépare les chercheurs membres à être éligibles pour intégrer le Centre de Recherches Economiques et Quantitatives, soit CREQ en sigle. CREQ, dont le site internet va être lancé incessamment, se veut un espace de discussions au tour de techniques et méthodes quantitatives (mathématique, statistique, économétrie, etc.) en sciences économiques (finance, monnaie, macro et micro-économie, etc.), ou mieux un centre de recherche qui va regorger des Economistes rodés et équipés pour théoriser et apporter des réponses aux problèmes économiques que posent la RDC et le monde, pour l'avancement de la discipline (les sciences économiques).

Nous avons compris que les outils quantitatifs, aujourd'hui incontournables en sciences économiques, sont d'un grand apport dans l'évolution de cette discipline. Les problèmes économiques se posent de plus en plus, les outils d'analyse se complexifient sans frein, mais le programme de formation de l'Economiste congolais (l'Afrique en générale) ne suit pas le rythme : **il y a un gap**. Plus concrètement, il y a quelques années, le Laboratoire d'analyse-Recherche en Economie Quantitative/Lareq (www.lareq.com) estimait à 40 ans le retard de la République Démocratique du Congo (RDC), si pas l'Afrique, dans la modélisation macro-économétrique, partant de la critique de Lucas dans les années 70 (1976). Ne serait-on pas au-delà de 40 ans dans d'autres branches ? En attendant de répondre à cette question, le CER-3 se donne la mission de réduire, si pas combler, le gap dans la formation de l'économiste congolais pour constituer une élite à la taille des exigences internationales. C'est le sens de notes techniques que nous produisons, lesquelles seront directement accessibles en ligne, dans un site dédié (en construction), par le temps qui court.

*Jonas Kibala Kuma, initiateur du CER-3 et du CREQ.
Kinshasa, décembre 2019.*

Nous contacter : cer3.sec@gmail.com; copie à : kibala.jonas@gmail.com

Plan

- *Avant-propos*
 - *Un mot sur le modèle de croissance (exogène) de Solow*
 - *Objet du modèle*
 - *Structure du modèle*
 - *Dérivation de l'équation de la dynamique fondamentale du capital*
 - *Sentier temporel du capital*
 - *Equations d'équilibre*
 - *Equation de convergence*
 - *Concept de convergence*
 - *Sur le plan théorique*
 - *Sur le plan mathématique*
 - *Equation de convergence en général*
 - *Equation de la beta convergence conditionnelle*
 - *Equation de la beta convergence absolue*
 - *Sigma convergence*
 - *Club de convergence*
 - *Demi-vie et vitesse de convergence*
 - *Vitesse de convergence*
 - *Demi-vie*
-

0. Avant-propos

Loin de nous l'idée de consacrer cette note à la présentation du modèle de Solow dans tous ses aspects. En fait, seuls les aspects mathématiques des points énumérés dans le plan nous intéressent ici, bien que nous présentions quelques aspects théoriques au besoin. Toutefois, pour plus de détails sur le modèle de Solow, nous invitons le lecteur à consulter les différents documents – et bien d'autres d'ailleurs – qui nous ont servi de référence (bibliographie). Signalons aussi que, dans les prochains jours, nous mettrons en ligne deux de nos documents suivants (en cours de finalisation) : l'un intitulé « *Intégration régionale, externalités spatiales et convergence économique : cadre théorique, revue de littérature et modélisation (guide méthodologique des études sur la nouvelle synthèse géographie-croissance)* » ; et l'autre intitulé « *le modèle de croissance exogène de Solow : aspects théoriques et développements mathématiques* ». Ces deux documents, expliquant le modèle de Solow dans ses détails, pourront aussi aider le lecteur intéressé.

1. Un mot sur le modèle de croissance (exogène) de Solow

a) Objet du modèle

Face à la forte hétérogénéité des processus de croissance observés dans le monde, Solow (1956) construit un modèle appelé à répondre aux questions fondamentales suivantes : (i) Quels sont les déterminants de la croissance économique ou mieux pourquoi certains pays sont-ils riches et d'autres par contre pauvres ? (ii) Les pays les plus pauvres peuvent-ils espérer rattraper les pays plus riches en termes de niveau de vie ?

Suivant le modèle de Solow, les écarts de niveau de vie entre les riches et les pauvres – mesuré par leur PIB par tête – s'expliquent mieux par leurs différences structurelles ainsi que l'état initial de leurs niveaux de vie. Il s'en suit que les pays ayant des similitudes en termes de technologie, de préférence, de croissance de la population employée et d'épargne convergeront vers un même sentier de croissance équilibrée, tel que les plus pauvres rattrapent les plus riches à long terme. Il s'agit, bien entendu, de l'hypothèse de beta convergence conditionnelle ou relative. En revanche, l'étude de la convergence entre les pays dont les structures économiques sont différentes stipule que leur niveau initial des revenus par tête est déterminant, à tel enseigne qu'un pays à faible niveau de PIB par tête initial (pauvre) croît plus vite que celui disposant d'un PIB par tête initial très élevé (riche) – qui croît faiblement – ce qui justifie la convergence des uns vers les autres à long terme.

Dans les lignes qui suivent, nous présentons la structure du modèle de Solow suivant les aspects qui intéressent cette note.

b) Structure du modèle

Le modèle de Solow décrit une économie fermée concurrentielle, avec un bien unique (noté Y) produit par une technologie néoclassique F (celle à rendements d'échelle constant), supposée du type Cobb-Douglas pour raison de simplification. Le progrès technique, noté A , est neutre au sens de Harrod, c'est dire qu'il améliore l'efficacité de travail. Les variables endogènes sont : la production réelle (Y), L'investissement (I), la consommation (C) et le stock de capital physique (K). Et, l'évolution de l'emploi total (L), l'évolution de l'indice d'efficacité de l'input travail (A), le taux d'épargne (s) et le taux de dépréciation du capital physique sont supposés exogènes au modèle.

Comme tout modèle, le modèle de Solow se fonde sur les hypothèses suivantes :

- **H1** : La concurrence pure et parfaite : dans ce modèle, les agents sont price takers⁽¹⁾.
- **H2** : L'économie considérée est fermée, avec un bien unique qui sert à la fois à la production et à la consommation. Ce bien est produit selon la technique de production au sens de Harrod : $Y = F(K, AL)$, c'est l'équation (4). Il est supposé également l'équilibre sur le marché des biens et services : $Y_t = C_t + I_t$ (équation 1). De ce fait, la quantité produite de ce bien correspond à la quantité consommée et investie.
- **H3** : Le taux d'épargne (s) ne change pas avec le temps, il est exogène : $S_t = sY_t$. C'est la fraction constante du revenu après avoir consommé ($Y_t - C_t$).
- **H4** : Le marché des capitaux est supposé en équilibre tel que la coordination des stratégies des agents privés et le plein emploi des facteurs de production sont assurés. Dans une économie fermée, l'investissement est par définition la fraction non consommée de la production/l'épargne : $I_t = sY_t$ (équation 2).
- **H5** : L'investissement est tel qu'il accroît le stock de capital physique dans le temps : $I_t = \Delta K_t = dK_t$ ou \dot{K} . A long terme, le capital se déprécie au taux constant « δ », et l'accroissement net du capital est : $\Delta K_t = dK_t$ ou $\dot{K} = K_t - K_{t-1} = I_t - \delta K_t$ (équation 3). Parce que le marché des capitaux est en équilibre, ΔK_t devient :

$$\dot{K} = sY_t - \delta K_t = sF(K, AL) - \delta K_t$$

- **H6** : La population employée croît à un taux exogène constant « n » (avec A_0 , le niveau initial de l'emploi) :

$$L_t = L_0 e^{nt} \text{ (équation 5)}$$

- **H7** : La fonction de production est de type « néo-classique » ; de ce fait, elle vérifie des propriétés impliquant l'existence, l'unicité et la stabilité de l'équilibre. Ces propriétés sont :
 - *Rendements factoriels* : Les productivités marginales du capital ($F'_k = Pmk$) et du travail ($F'_l = Pml$) sont positives et décroissantes. Autant dire que lorsque la quantité d'un input augmente, la production s'accroît ; mais cet accroissement diminue au fur et à mesure que la quantité du facteur s'élève :

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$$

- *Rendements d'échelle constants* : soit $F(\eta K, \eta L) = \eta F(K, L)$. Suivant le *théorème d'Euler*, le degré d'homogénéité de $F(K, L)$ correspond à la somme des élasticités de l'output par rapport à tous les inputs qu'elle utilise, si la relation suivante est divisée par Y : $KF'_k + LF'_l = \eta F(K, L)$. Cette propriété permet de travailler avec la forme intensive de la fonction de production et les variables par tête efficaces suivantes :

$$\bar{k} = \frac{K}{AL} \text{ (équation 7) et } \bar{y} = \frac{Y}{AL} \text{ (équation 8)}$$

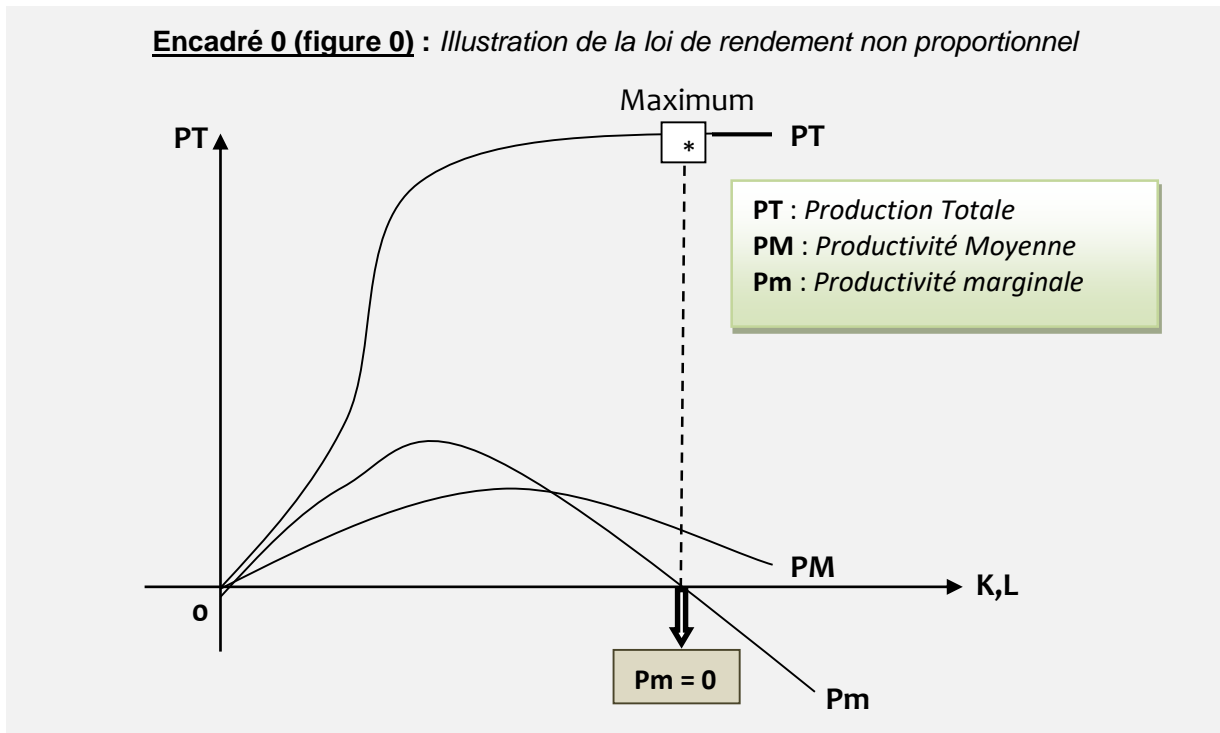
¹ Le prix est une donnée (exogène) du marché, les décisions des agents économiques ne jouent pas.

• Conditions d'Inada :

→ 1^{ère} Condition :

$$\lim_{k \rightarrow 0} F'_k = \lim_{l \rightarrow 0} F'_l = \infty \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} F'_k = \lim_{l \rightarrow \infty} F'_l = 0$$

L'augmentation progressive des facteurs de production a pour conséquence l'augmentation moins que proportionnelle de la production jusqu'à atteindre le maximum (ce qui correspond à la nullité de la productivité marginale). Graphiquement, cela peut s'illustrer comme suit :



→ 2^{ème} condition : $F(0, L) = F(K, 0) = 0$. Ceci implique que l'absence de l'un des facteurs a pour conséquence l'arrêt de la production d'autant plus qu'ils sont globalement complémentaires au sens d'Isidore EDGEWOLTH ($F_{KL} > 0$).

➤ **H9** : Le progrès technique est neutre au sens de Harrod augmentant l'efficacité du travail : $F(K, AL)$, c'est l'équation (4). Cela implique que le travail et le progrès technique jouent un rôle similaire. Comme pour l'augmentation implicite du travail, le progrès technique croît à un taux exogène constant (g) :

$$\frac{\dot{A}}{A} = g, \quad \text{avec : } A_t = A_0 e^{gt} \text{ (équation 6)}$$

A_0 (la valeur initiale de l'indice d'efficacité du travail) est normalisé à 1, ce qui fait que tout se passe comme si le facteur travail efficace (AL) croissait au taux :

$$(g + n) : AL = L_0 e^{nt} e^{gt} = L_0 e^{(g+n)t}$$

Tenant compte des hypothèses du modèle de Solow ci-haut, la structure théorique de ce modèle peut se résumer par les équations suivantes (identité, comportement de variables et relations techniques) :

$$Y_t = C_t + I_t \dots\dots\dots (1)$$

$$I_t = sY_t \dots\dots\dots (2)$$

$$\Delta K_t = dK_t \text{ ou } \dot{K} = K_t - K_{t-1} = I_t - \delta K_t \dots\dots\dots (3)$$

$$Y_t = F[K_t, A_t L_t] = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\Delta L_t}{L_t} = \frac{L_t - L_{t-1}}{L_t} = d \ln L_t = n \dots\dots\dots (5)$$

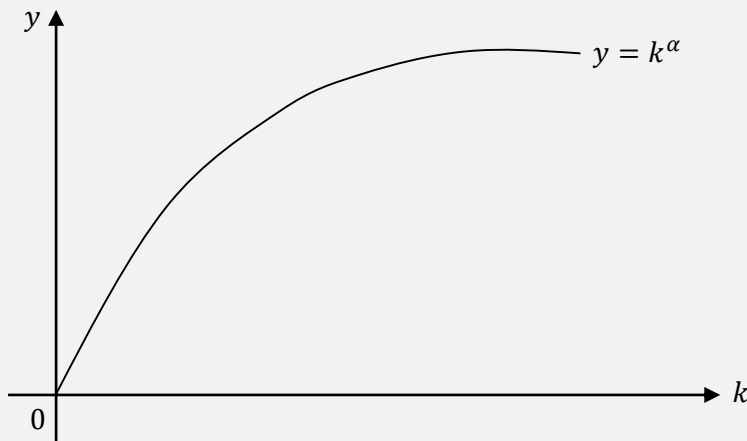
C'est-à-dire : $\int \frac{dL_t}{L_t} \cdot \frac{1}{dt} = n \leftrightarrow \int \frac{dL_t}{L_t} = \int n dt \rightarrow \ln L_t = nt + c \rightarrow$ L'exponentielle de ces deux membres nous donne ce qui suit (avec $L_0 = c, \forall t = 0$) : $L_t = L_0 e^{nt}$

$$\frac{\Delta A_t}{A_t} = \frac{A_t - A_{t-1}}{A_t} = d \ln A_t = g \rightarrow A_t = A_0 e^{gt} \text{ (Cfr développement précédent) } \dots\dots (6)$$

$$\bar{k} = \frac{K}{AL} \dots\dots\dots (7)$$

$$\bar{y} = \frac{Y}{AL} \dots\dots\dots (8)$$

Encadré 1 (figure 1) : Graphique de la fonction de production per capita du type Cobb-Douglas



Comme on peut le constater, la dynamique de la production par tête est expliquée par l'accumulation du capital, et le rendement est décroissant du fait que $\alpha < 1$ (C'est ce qui explique aussi la concavité de la courbe).

2. Dérivation de l'équation de la dynamique fondamentale du capital

Pour dériver l'équation de la dynamique fondamentale du capital dans le modèle de Solow, procédons comme suit (pour simplifier l'écriture, on fait abstraction de l'indice t lié au temps).

On sait que :

$$Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha} \dots \dots (4)$$

$$\bar{y} = \frac{Y}{AL} = \frac{K^\alpha (AL)^{1-\alpha}}{(AL)} = \left(\frac{K}{AL}\right)^\alpha = \bar{k}^\alpha \dots \dots (8)$$

$$\bar{k} = \frac{K}{AL} \Rightarrow \ln \bar{k} = \ln K - (\ln A + \ln L) \dots \dots (7)$$

$$\frac{d\bar{k}}{\bar{k}} = d \ln \bar{k} = \frac{dK}{K} - \frac{dA}{A} - \frac{dL}{L} \dots \dots (9)$$

Sachant que :

$$\frac{dA}{A} = g ; \frac{dL}{L} = n ; dK = I - \delta K = sY - \delta K$$

Alors, (9) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{k}}{\bar{k}} &= \frac{dK}{K} - (g + n) \Rightarrow d\bar{k} = \frac{dK}{K} \cdot \bar{k} - (g + n) \cdot \bar{k} = \frac{(sY - \delta K)}{K} \cdot \bar{k} - (g + n) \cdot \bar{k} \\ &\rightarrow d\bar{k} = \frac{sY}{K} \cdot \bar{k} - \frac{\delta K}{K} \cdot \bar{k} - (g + n) \cdot \bar{k} = \frac{sY}{K} \cdot \bar{k} - \delta \bar{k} - (g + n) \cdot \bar{k} \\ &\rightarrow d\bar{k} = \frac{sY}{K} \cdot \bar{k} - (\delta + g + n) \cdot \bar{k} \dots \dots (9a) \end{aligned}$$

Etant donné les expressions (4) et (7), soient :

$$Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha} ; \bar{k} = \frac{K}{AL}$$

L'expression « $(sY/K) \cdot \bar{k}$ » de (9a) peut se développer comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{sY}{K} \cdot \bar{k} &= \frac{s[K^\alpha (AL)^{1-\alpha}] \frac{K}{AL}}{K} = \frac{s[K^\alpha (AL)^{1-\alpha} \cdot K \cdot (AL)^{-1}]}{K} = \frac{s[K^\alpha (AL)^{-\alpha} \cdot K]}{K} = s \left(\frac{K}{AL}\right)^\alpha \\ &\rightarrow \frac{sY}{K} \cdot \bar{k} = s\bar{k}^\alpha \dots \dots (9b) \end{aligned}$$

(9b) dans (9a), cette dernière expression devient :

$$d\bar{k} = s\bar{k}^\alpha - (\delta + g + n) \cdot \bar{k}$$

Si l'on divise les deux membres par « \bar{k} », l'expression devient :

$$\frac{d\bar{k}}{\bar{k}} = \frac{s\bar{k}^\alpha}{\bar{k}} - (\delta + g + n) \cdot \frac{\bar{k}}{\bar{k}}$$

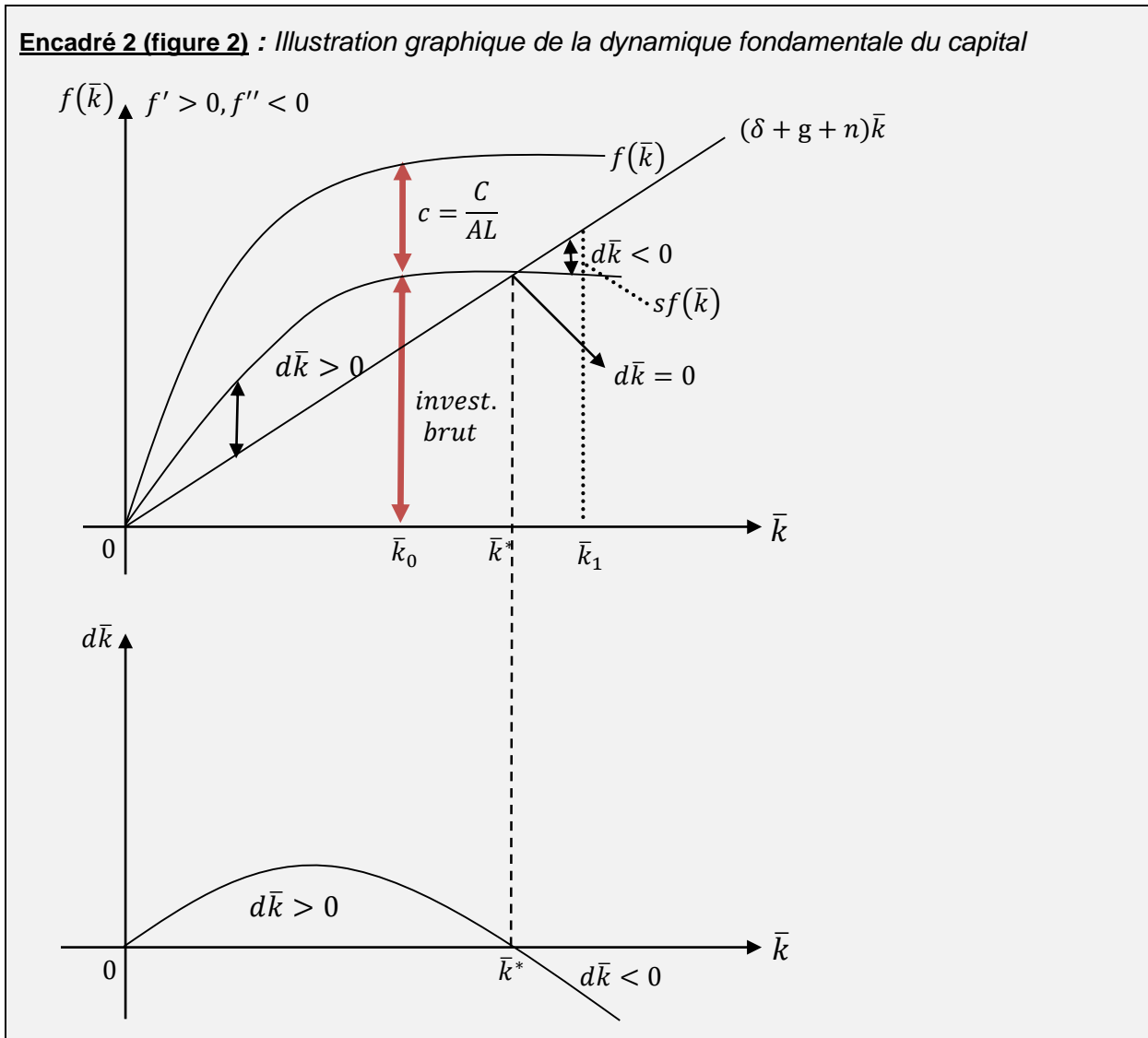
L'on a ainsi l'équation de la dynamique fondamentale du capital :

$$\frac{d\bar{k}}{\bar{k}} = s\bar{k}^{-(1-\alpha)} - (\delta + g + n) \dots \dots (9c)$$

Cette expression (9c) indique que le taux de dépréciation « effective » du capital par tête efficace est $(\delta + g + n)$. Autrement dit, le capital par tête efficace diminue dans le temps du fait de l'amortissement « δ » et de l'accroissement du nombre des travailleurs efficaces « $(g + n)$ ». A l'inverse, l'épargne par tête efficace « $sf(\bar{k})$ » accroît le stock de capital et s'égalise ou correspond, à l'équilibre, à l'investissement réalisé (Cfr H4).

Graphiquement, ces propos s'illustrent comme suit :

Encadré 2 (figure 2) : Illustration graphique de la dynamique fondamentale du capital

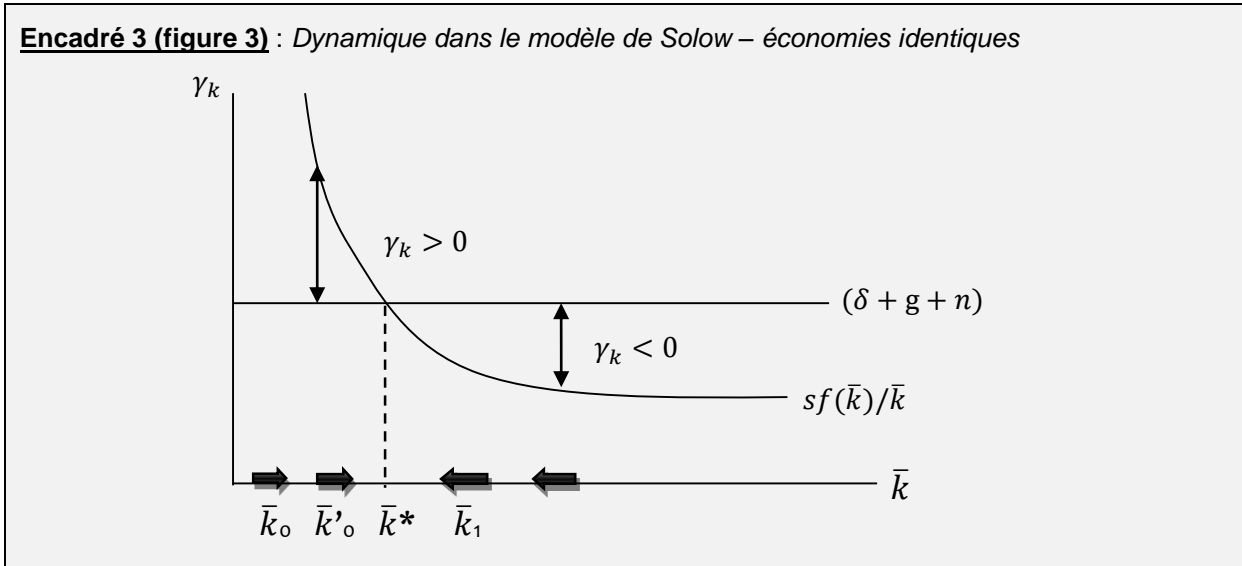


Le taux de croissance du capital par tête efficace « $d\bar{k}$ » correspond à la distance entre la courbe « $sf(\bar{k})$ » et la droite de dépréciation effective « $(\delta + g + n)\bar{k}$ ». Il est à préciser qu'étant donné que « \bar{k} » est constant à l'état stationnaire, $\gamma_k = \frac{d\bar{k}}{\bar{k}} = 0$; ce qui va impliquer l'égalisation entre l'investissement brut « $sf(\bar{k})$ » et le déclassement « $(\delta + g + n)\bar{k}$ » : $sf(\bar{k}) = (\delta + g + n)\bar{k}$. Il existe, de ce fait, une valeur critique du stock de capital par tête

efficace « \bar{k}^* » au-delà de laquelle un investissement supplémentaire n'est plus bénéfique (à ce point, l'accumulation du capital s'estompe).

Cela peut s'illustrer par le graphique ci-dessous (c'est une autre façon de représenter la figure 2 précédente) :

Encadré 3 (figure 3) : Dynamique dans le modèle de Solow – économies identiques



À l'équilibre, soit au point \bar{k}^* , l'investissement réalisé permet simplement de renouveler le stock du capital, car : $sf(\bar{k}) = (\delta + g + n)\bar{k}$. Pour un niveau de capital inférieur à \bar{k}^* (soit \bar{k}_0), l'investissement est bénéfique ($d\bar{k} > 0$), car $sf(\bar{k}) > (\delta + g + n)\bar{k}$. Par contre, tout accroissement du stock de capital au-delà de \bar{k}^* (soit \bar{k}_1) est moins profitable ($d\bar{k} < 0$), car $sf(\bar{k}) < (\delta + g + n)\bar{k}$. C'est ce qui justifie que l'équilibre soit stable dans le modèle de Solow, de sorte que quand on s'en écarte, l'on a tendance à y revenir (c'est l'état stationnaire).

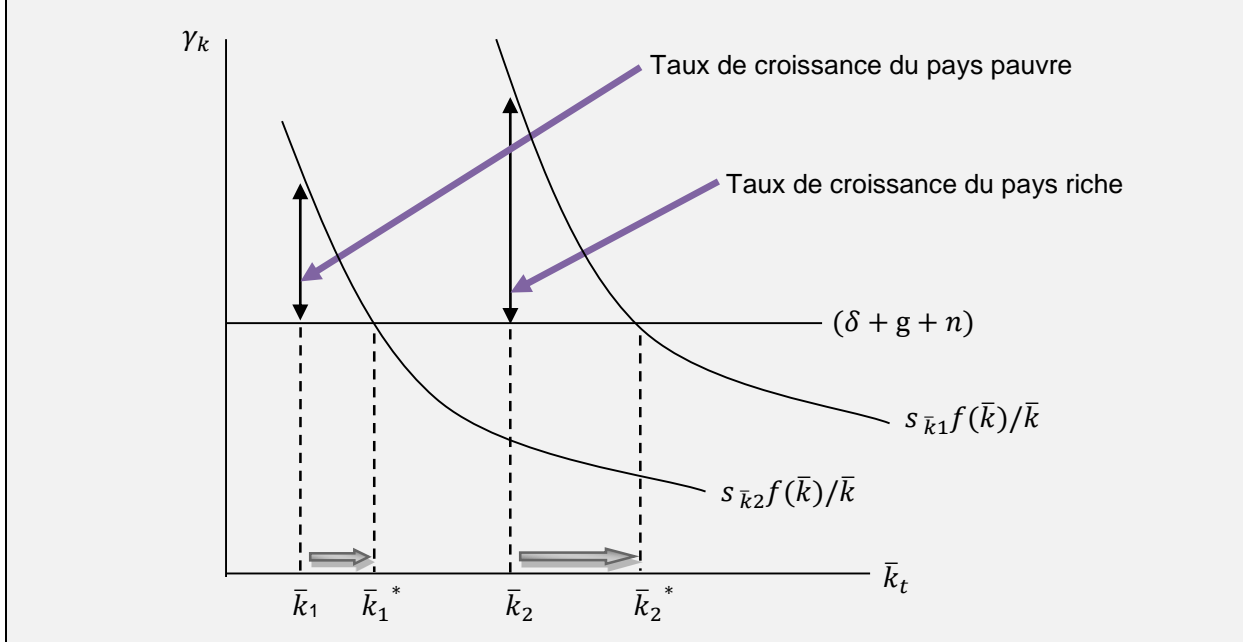
En outre, Il est à préciser que dans la figure 3, nous avons considéré deux économies ayant la même fonction de production néoclassique et les mêmes caractéristiques structurelles (soit : g, n, δ) ; il s'agit des *économies identiques*. Dans ce cas, si le stock initial de capital par unité de travail efficace de la première économie (pauvre) est inférieur à celui de la seconde (riche), les deux économies auront à converger vers le même point d'équilibre [\bar{k}^*].

Partant de la figure ci-dessus, à gauche de l'état régulier, les économies pauvres (celles qui sont dotées d'un stock de capital faible au départ, soit \bar{k}_0) connaissent un taux de croissance plus élevé que les riches (celles qui sont dotées d'un stock de capital élevé au départ, soit \bar{k}'_0) ; ce qui implique que ces dernières soient rattrapées par les premières dans un équilibre de long terme (c'est l'hypothèse de *beta convergence absolue*⁽¹⁾).

En revanche, si ces économies ne possèdent pas toutes les mêmes paramètres structurels, elles auront des états réguliers différents. Nous illustrons ce propos dans la figure 4 ci-dessous, où nous considérons deux pays (régions) différents en termes de stock initial de capital par unité de travail efficace ($\bar{k}_1 < \bar{k}_2$) et de taux d'épargne ($S_{\bar{k}_1} < S_{\bar{k}_2}$). Dans ce cas, ces pays auront des quantités de capital par unité de travail efficace différentes à l'état régulier ($\bar{k}_1^* < \bar{k}_2^*$). Graphiquement, cela se traduit par :

¹ Nous en parlons un peu plus bas.

Encadré 4 (figure 4) : Dynamique dans le modèle de Solow – économies différentes



Il ressort de la figure 4 que le taux de croissance du pays riche (celui disposant d'un stock de capital par unité de travail effectif très élevé, soit \bar{k}_2) est plus élevé que celui du pays pauvre (celui disposant d'un stock de capital par unité de travail effectif faible, soit \bar{k}_1). Notons ainsi qu'une économie pauvre peut croître moins vite qu'une économie riche si les deux n'ont pas les mêmes paramètres structurels (*On peut observer un phénomène de divergence ou de club de convergence*⁽¹⁾). A cela s'ajoute que chaque économie converge vers son état régulier et que la vitesse de convergence est inversement liée à la distance qui la sépare de cet état régulier.

3. Sentier temporel du capital

Pour dégager le sentier temporel du capital dans le modèle de Solow, partons de l'expression (9c) obtenue précédemment :

$$\frac{d\bar{k}}{\bar{k}} = s\bar{k}^{-(1-\alpha)} - (\delta + g + n) \dots \dots (9c)$$

Si l'on exprime cette équation (9c) comme une fonction logarithmique, on constate qu'il s'agit d'une *équation différentielle de Bernoulli* susceptible d'être ramenée à une équation différentielle linéaire à coefficient et second membre constants.

En effet, l'équation (9c) peut s'écrire aussi comme ceci :

$$d\bar{k} = s\bar{k}^\alpha - (\delta + g + n)\bar{k}$$

Et cette équation est équivalente à la suivante :

$$d \ln \bar{k} + (\delta + g + n) = s\bar{k}^{\alpha-1} \text{ ou encore } \frac{d\bar{k}}{dt} + (\delta + g + n)\bar{k} = s\bar{k}^\alpha \dots \dots (9d)$$

¹ Nous en parlons dans les lignes qui suivent.

Pour rendre l'équation différentielle (9d) ci-dessus linéaire à second membre et coefficient constants, on doit diviser les deux membres par « \bar{k}^α » ; ce qui implique :

$$\frac{1}{\bar{k}^\alpha} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} + (\delta + g + n) \bar{k}^{1-\alpha} = s \dots \dots (9e)$$

En posant :

$$V = \bar{k}^{1-\alpha} \dots \dots (9f)$$

On trouve :

$$\frac{dV}{dt} = (1 - \alpha) \cdot \bar{k}^{-\alpha} \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} \rightarrow \bar{k}^{-\alpha} \frac{d\bar{k}}{dt} = \frac{1}{(1 - \alpha)} \frac{dV}{dt} \dots \dots (9g)$$

Etant donné (9f), (9g) dans (9e) donne :

$$\frac{1}{(1 - \alpha)} \cdot \frac{dV}{dt} + (\delta + g + n) V = s$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'expression ci-dessus par « $(1 - \alpha)$ », on obtient :

$$\frac{dV}{dt} + (1 - \alpha)(\delta + g + n)V = (1 - \alpha)s$$

La solution générale à cette équation différentielle, comprenant la fonction complémentaire et l'intégrale particulière, se présente comme suit :

$$V_t = C e^{-(1-\alpha)(\delta+g+n)t} + \frac{s}{(\delta + g + n)}$$

Sachant que $V = \bar{k}^{1-\alpha}$, il y a lieu d'en déduire le sentier temporel du capital :

$$\bar{k}_t = C e^{-(\delta+g+n)t} + \left[\frac{s}{(\delta + g + n)} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

Notons que l'équilibre de long terme est représenté par l'intégrale particulière suivante :

$$k^* = \left[\frac{s}{(\delta + g + n)} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

Et la fonction complémentaire traduit la déviation du capital de sa valeur d'équilibre. Autrement dit, Si $t = 0, \bar{k}_0 = C + k^* \rightarrow C = \bar{k}_0 - k^*$.

De ce fait, le sentier temporel du capital dans le modèle de Solow est donné par l'expression (9h) qui suit :

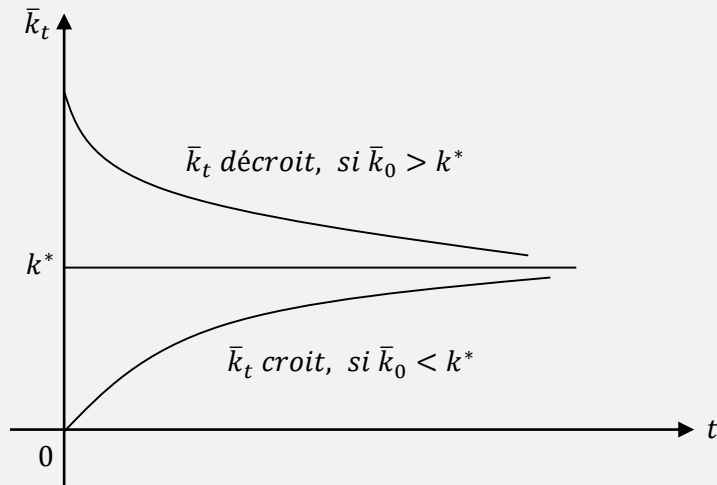
$$\bar{k}_t = [\bar{k}_0 - k^*] e^{-(\delta+g+n)t} + k^* \dots \dots (9h)$$

Si $t \rightarrow \infty$, le chemin temporel est convergent, car :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{k}_t = k^*$$

Le graphique 5 ci-dessous est illustratif :

Encadré 5 (figure 5): Illustration graphique du chemin temporel du capital per capita



4. Equations d'équilibre

De façon mécanique, notons que l'équilibre = l'état stationnaire = l'absence de croissance. Autrement dit, à l'équilibre, on a :

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = 0$$

Ce qui implique, partant de l'expression (9c), ce qui suit :

$$0 = s\bar{k}^{-(1-\alpha)} - (\delta + g + n) \Rightarrow s\bar{k}^{-(1-\alpha)} = (\delta + g + n)$$

Delà, tirons le niveau « \bar{k} » d'équilibre noté « \bar{k}^* » :

$$\bar{k}^* = \left[\frac{(\delta + g + n)}{s} \right]^{-\frac{1}{(1-\alpha)}} = \left[\frac{s}{(\delta + g + n)} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \dots \dots (10a)$$

Partant de l'expression (8), étant donné l'expression (), l'on peut déduire le niveau « \bar{y} » d'équilibre, noté « \bar{y}^* », comme suit :

$$\bar{y} = \bar{k}^\alpha \Rightarrow \bar{y}^* = \bar{k}^{*\alpha} = \left[\frac{s}{(\delta + g + n)} \right]^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \dots \dots (10b)$$

Rappelons (Rappel 1) :

$$\bar{y} = \frac{Y}{AL} \Rightarrow y = A\bar{y} = A \cdot \frac{Y}{AL} = \frac{Y}{L} = y$$

Partant, l'on peut déduire :

$$y^* = A \cdot \bar{y}^* = A \left[\frac{s}{(\delta + g + n)} \right]^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \dots \dots (10c)$$

Rappelons aussi (Rappel 2) :

$$\bar{y}^* = \bar{k}^{*\alpha} \Rightarrow \ln \bar{y}^* = \alpha \ln \bar{k}^* \dots \dots (10d)$$

Partant de l'expression (10b), « $\ln \bar{k}^*$ » donne ce qui suit :

$$\ln \bar{k}^* = \frac{1}{(1-\alpha)} [\ln s - \ln(\delta + g + n)] \dots \dots (10e)$$

(10e) dans (10d), cette dernière expression devient :

$$\ln \bar{y}^* = \alpha \left[\frac{1}{(1-\alpha)} \ln s - \frac{1}{(1-\alpha)} \ln(\delta + g + n) \right] \dots \dots (10f)$$

$$\rightarrow \ln \bar{y}^* = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \ln s - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \ln(\delta + g + n) \dots \dots (10f)$$

Suivant l'expression (10c), on peut déduire :

$$y^* = A \cdot \bar{y}^* \Rightarrow \ln y^* = \ln A + \ln \bar{y}^* \dots \dots (10g)$$

Suivant l'expression (6), rappelons (Rappel 3) :

$$\frac{dA}{A} = g \dots \dots (6a)$$

Avec « g » : taux de croissance du progrès technique.

De l'expression (6a) ci-dessus, retrouvons l'équation du progrès technique (la primitive), en appliquant les propriétés du calcul intégral, comme suit :

$$\int \frac{dA_t}{A_t} = \int g dt \Rightarrow \ln A_t = g \cdot t + c$$

Si l'on exprime ces deux membres sous forme exponentielle, on obtient :

$$e^{\ln A_t} = e^{gt} \cdot e^c \Rightarrow A_t = e^{gt} \cdot e^c \Rightarrow \forall t = 0, A_0 = e^0 \cdot e^c \Rightarrow A_0 = e^c$$

Ce qui amène à écrire (la primitive) :

$$A_t = A_0 \cdot e^{gt} \dots \dots (6b)$$

Ainsi, partant de (6b), l'on peut trouver « $\ln A_t$ » :

$$\ln A_t = \ln A_0 + gt \cdot \ln e = \ln A_0 + gt \dots \dots (6c)$$

Ramenons (6c) dans (10g), cette dernière expression devient :

$$\ln y^* = \ln A + \ln \bar{y}^* = \ln A_0 + gt + \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \ln s - \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \ln(\delta + g + n) \dots \dots (10h)$$

On obtient ainsi [expression (10h)] l'équation d'équilibre du modèle de Solow.

5. Equation de convergence

5.1. Concept de convergence

La convergence économique peut être appréhendée d'un point de vue mathématique ou économique (théorique).

a) *Sur le plan théorique*

Il peut être identifié – dans la littérature économique – plusieurs formes de convergence dont les principales sont : la convergence nominale, la convergence réelle et la convergence structurelle (*Diop L., 2002 et Fuss C., 1999*).

La convergence nominale est un processus de rapprochement dans le temps des variables nominales indicatives de la stabilité macroéconomique : les taux d'inflation, les ratios de dette ou de déficit publics par rapport au produit intérieur brut, les taux d'intérêt, etc. Lorsque ces variables tendent vers une valeur de référence, l'on parle aussi de la convergence nominale. En tant que telle, la convergence passe pour une condition à la réussite de l'intégration.

La convergence réelle est la tendance à l'égalisation à long terme du taux de croissance du revenu ou de la production par tête des différentes zones géographiques (*Baumont C. et al., 2000*). Elle est, pour *Diop L. (2002)*, la relative amélioration des niveaux de vie au sein d'un groupe de pays. Elle y établit, selon l'auteur, une homogénéisation des conditions de vie qui entraîne une « cohésion économique et sociale ». Il s'en suit que, de manière pratique, elle se traduit par la réduction de la dispersion des niveaux de revenu par tête de ces pays, au cours du temps. Il convient de retenir qu'il y a convergence réelle lorsque les économies initialement pauvres croissent à un taux beaucoup plus élevé que les économies initialement riches jusqu'à ce que le taux de croissance de ces deux économies s'égalise à long terme. Dans ce cas, l'on parle aussi de la « *beta-convergence absolue* » pour caractériser une situation où les disparités dans les niveaux de vie ⁽¹⁾ entre les économies riches et les pauvres tendent à disparaître – indépendamment des caractéristiques structurelles de ces économies – au fur et à mesure que celles-ci se rapprochent de leur sentier de croissance équilibrée.

L'on se réfère à la convergence relative/structurelle lorsque les niveaux de vie des économies ayant les mêmes caractéristiques structurelles tendent à se rapprocher dans le temps. Dans ce cas, l'on parle également de la « *beta-convergence relative* ». Ces caractéristiques sont entre autres la technologie, la croissance démographique, le taux d'épargne, les préférences, etc.

Précisons aussi que l'évaluation empirique de la beta convergence (*Barro et Sala-i-Martin, 1995*) a conduit à affiner ce concept. Il est à noter que si les écarts observés en terme de revenu per capita sont transitoires, alors on pourra faire allusion à la convergence absolue des économies vers un même état régulier. Par contre, si ces écarts persistent, la question suivante tient lieu : est-ce le fait des conditions initiales (c'est-à-dire de la différence de niveau de PIB par tête initial entre économies) ou c'est le fait de différence des structures entre économies ? L'on fera ainsi appel à la notion de « *clubs de convergence* » si les conditions initiales expliquent significativement les disparités entre zones géographiques. Il

¹ Le niveau de vie est généralement saisi par le PIB par tête. Mais l'on peut aussi se servir de l'indicateur de développement humain (IDH), du coefficient d'inégalité de Gini, du niveau ou seuil de pauvreté, etc.

s'en suit que deux pays qui auront des conditions initiales semblables convergeront vers le même état régulier, et donc appartiendront au même club (Salle I., 2007). Si c'est plutôt les différences structurelles qui expliquent les écarts de taux de croissance entre pays, l'on parlera de la notion de convergence conditionnelle.

De façon générale, retenons que l'analyse de la convergence économique des PIB par tête s'est principalement basée sur deux approches. La première consiste à déterminer un indicateur de dispersion (tel l'*écart-type*) des PIB par tête entre pays, et ensuite vérifier si cet indicateur montre une tendance systématique à se réduire dans le temps (ce qui mesure la **sigma convergence**). L'autre approche se base sur l'estimation de la relation entre le PIB par tête courant et le PIB par tête retardé. Si la corrélation est positive et inférieure à l'unité, alors cela veut dire que le taux de croissance du PIB par tête courant est inversement proportionnel au niveau passé du PIB par tête, et donc que les pays initialement plus pauvres croissent plus rapidement que les pays initialement plus riches (ce qui mesure la **beta convergence absolue**). Par contre, si cette corrélation est calculée conditionnellement à l'effet d'autres facteurs sur le PIB courant, alors l'on parlera de la **beta convergence relative**. Celle-ci n'implique pas que les pays les plus pauvres progressent plus rapidement que les pays les plus riches, mais seulement qu'un pays s'approche de son équilibre de long terme à une vitesse décroissante (CEA/BSR-CA, octobre 2007).

b) Sur le plan mathématique

Sur le plan mathématique, parler de la convergence, c'est traduire une situation où les écarts entre les séries tendent à se réduire au fil du temps (Diop L., 2006 ; Fuss, 1999). Cette notion est proche de celle de la stationnarité des séries⁽¹⁾.

Cette convergence s'exprime comme suit :

- $\lim_{t \rightarrow \infty} (Y_{it} - Y_{jt}) = a$: Les séries *convergent point à point* entre elles si leur écart tend vers une constante a ;
- $\lim_{t \rightarrow \infty} E(Y_{it} - Y_{jt}) = a$: Les séries *convergent en moyenne* entre elles si l'espérance mathématique de leur écart tend vers une constante a ;
- $\lim_{t \rightarrow \infty} E(Y_{it} - Y_{jt}) = a$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} V(Y_{it} - Y_{jt}) = 0$: Les séries *convergent en probabilité* si l'espérance de leur écart tend vers une constante « a » et si, en même temps, la variance de leur écart s'annule dans le temps.

Selon Fuss C. (1999), l'on dira des séries qu'elles convergent si : $\lim_{t \rightarrow \infty} E(Y_{it} - Y_{jt}) = a$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} V(Y_{it} - bY_{jt} - a) = \delta^2$, c'est dire que l'espérance de leur écart tend vers une constante « a » et la variance de leur relation tend vers une constante « δ^2 » (ce qui suppose la cointégration entre séries ou la stationnarité des résidus de la relation de long terme entre séries).

Soulignons que, contrairement à la convergence en moyenne, la convergence point à point paraît très contraignante pour les variables économiques qui sont de nature volatiles et subissent des chocs différents et transitoires.

¹ Une série est stationnaire si les espérances mathématiques de sa moyenne et de sa variance sont indépendantes du temps. En plus, si sa covariance est nulle, l'on parle d'une stationnarité forte ; au cas contraire, la stationnarité sera dite faible ; c.à.d. la covariance correspond à l'écart entre les observations considérées.

D'un point de vue économique, le concept de convergence est utilisé pour caractériser le processus de rapprochement des économies au regard de certaines variables macroéconomiques telles que le taux de change, le taux d'inflation, le taux d'intérêt, le ratio dette publique ou déficit public par rapport au PIB, le PIB par tête, etc. (Diop L., 2002).

De manière générale, selon les économistes Gerschenkron A. et Abramovitz M., il y a convergence économique lorsque les pays « en retard ou pauvres » tendent à croître rapidement, comblant ainsi leur retard avec les pays plus développés ou riches.

5.2. Equation de convergence en général

Partant de l'expression (8), l'on peut déduire ce qui suit :

$$\bar{y} = \bar{k}^\alpha \Rightarrow \ln \bar{y} = \alpha \cdot \ln \bar{k} \Rightarrow d \ln \bar{y} = \frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = \alpha \frac{d\bar{k}}{\bar{k}}$$

Soit :

$$\gamma_{\bar{y}} = \alpha \gamma_{\bar{k}}$$

Avec :

$$\gamma_{\bar{k}} = s\bar{k}^{-(1-\alpha)} - (\delta + g + n)$$

$$\gamma_{\bar{y}} = \frac{d\bar{y}}{\bar{y}} \text{ et } \gamma_{\bar{k}} = \frac{d\bar{k}}{\bar{k}}$$

A présent, on va procéder au développement limité de Taylor à l'ordre 1 de l'expression « $\gamma_{\bar{k}}$ » au tour du point « $\ln k^*$ » (on fera une approximation log-linéaire de « $\gamma_{\bar{k}}$ » au voisinage du point de $k = k^*$) pour obtenir la vitesse de convergence.

Avant tout, écrivons autrement « $\gamma_{\bar{k}}$ » comme suit :

$$\gamma_{\bar{k}} = s \cdot e^{-(1-\alpha)\ln \bar{k}} - (\delta + g + n) \dots \dots (11a)$$

On cherche à log-linéariser l'expression (11a). A titre illustratif, soit la fonction suivante :

$$f(\log a)$$

Cette fonction log-linéarisée par rapport à « $\log a$ » s'écrit :

$$[f(\log a) - f(\log a^*)] = \left[\frac{\partial f(\log a)}{\partial \log a} \right]_{a=a^*} (\log a - \log a^*)$$

Partant de cette illustration, « $\gamma_{\bar{k}}$ » est log-linéarisé au point d'équilibre « $\ln k^*$ » comme suit (\approx : approximation) :

$$\gamma_{\bar{k}} \approx s \cdot e^{-(1-\alpha)\ln \bar{k}^*} - (\delta + g + n) + (\ln \bar{k} - \ln \bar{k}^*) * \left. \frac{\partial \gamma_{\bar{k}}}{\partial \ln \bar{k}} \right|_{\bar{k}=\bar{k}^*}$$

$$\rightarrow \gamma_{\bar{k}} \approx \ln \left(\frac{\bar{k}}{\bar{k}^*} \right) s \cdot \bar{k}^{*(\alpha-1)} \cdot (\alpha - 1) \dots \dots (11b)$$

Avec :

$$-(1 - \alpha) = (\alpha - 1)$$

$$\left. \frac{\partial \gamma_{\bar{k}}}{\partial \ln \bar{k}} \right|_{\bar{k}=\bar{k}^*} = \partial \left[s \cdot \bar{k}^{*(\alpha-1)} \right] = s \cdot (\alpha - 1) \cdot \bar{k}^{*(\alpha-1)}$$

Selon l'expression (10a), on sait que :

$$\bar{k}^* = \left[\frac{s}{(\delta + g + n)} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \dots \dots (10a)$$

Ainsi, (10a) dans (11b) donne :

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{k}} &\approx \ln \left(\frac{\bar{k}}{\bar{k}^*} \right) s \cdot (\alpha - 1) \cdot \left[\frac{s}{(\delta + g + n)} \right]^{\frac{-(1-\alpha)}{(1-\alpha)}} \\ \rightarrow \gamma_{\bar{k}} &\approx (\ln \bar{k} - \ln \bar{k}^*) \cdot s \cdot (\alpha - 1) \cdot \left[\frac{(\delta + g + n)}{s} \right] \\ \rightarrow \gamma_{\bar{k}} &\approx -(1 - \alpha) \cdot (\delta + g + n) \cdot (\ln \bar{k} - \ln \bar{k}^*) \dots \dots (11c) \end{aligned}$$

Si l'on pose : $\Phi = -(1 - \alpha) \cdot (\delta + g + n)$, alors on écrira (11c) comme suit :

$$\gamma_{\bar{k}} \approx -\Phi (\ln \bar{k} - \ln \bar{k}^*) \dots \dots (11d)$$

Partant de l'expression (11d), on peut valider l'hypothèse de convergence économique dans le sens où :

$$\frac{\partial \gamma_{\bar{k}}}{\partial \bar{k}} < 0$$

Etant donné $\gamma_{\bar{k}}$, et parce que $\gamma_{\bar{y}} = d \ln \bar{y} = d\bar{y}/\bar{y} = f(\gamma_{\bar{k}})$, déduisons aussi ce qui suit :

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{y}} &= -\Phi (\ln \bar{y} - \ln \bar{y}^*) = \Phi \ln \bar{y}^* - \Phi \ln \bar{y} \\ d \ln \bar{y} + \Phi \ln \bar{y} &= \Phi \ln \bar{y}^* \dots \dots (11e) \end{aligned}$$

$\gamma_{\bar{y}}$ ou l'expression (11e) ainsi obtenue est une équation différentielle logarithmique linéaire d'ordre 1 à coefficient et second membre constant ; sa solution est :

$$\ln \bar{y}_t = C e^{-\phi t} + \frac{\Phi \ln \bar{y}^*}{\Phi} = C e^{-\phi t} + \ln \bar{y}^* \dots \dots (11f)$$

$$\forall t = 0, \text{ on a } : \ln \bar{y}_0 = C e^{-\phi \cdot 0} + \ln \bar{y}^* \Rightarrow C = \ln \bar{y}_0 - \ln \bar{y}^* \dots \dots (11g)$$

Remplaçons « C » par son expression (11g) dans (11f), cette dernière expression devient :

$$\ln \bar{y}_t = (\ln \bar{y}_0 - \ln \bar{y}^*) e^{-\phi t} + \ln \bar{y}^* \dots \dots (11h)$$

Si l'on procède par la factorisation de l'expression (11h) ci-dessus, ce qui revient simplement à regrouper les termes semblables, on obtient ceci :

$$\ln \bar{y}_t = (1 - e^{-\phi t}) \ln \bar{y}^* + e^{-\phi t} \ln \bar{y}_0 \dots \dots (11i)$$

Captions ou exprimons la croissance économique comme la différence des logarithmes, ce qui revient à soustraire « $\ln \bar{y}_0$ » dans les deux membres de (11i) ; et on obtient :

$$\ln \bar{y}_t - \ln \bar{y}_0 = (1 - e^{-\phi t}) \ln \bar{y}^* + (e^{-\phi t} - 1) \ln \bar{y}_0 \dots \dots (11j)$$

L'expression (11j) traduit la *forme générale de l'équation de convergence* dans le modèle de Solow.

5.3. Equation de la beta convergence conditionnelle

Suivant l'expression (10f), on sait que :

$$\rightarrow \ln \bar{y}^* = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} * \ln s - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} * \ln(\delta + g + n) \dots \dots (10f)$$

Si l'on remplace « $\ln \bar{y}^*$ » par son expression (10f) dans (11j), cette dernière expression devient :

$$\ln \bar{y}_t - \ln \bar{y}_0 = -(1 - e^{-\phi t}) \ln \bar{y}_0 + (1 - e^{-\phi t}) \left[\frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \ln s - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \ln(\delta + g + n) \right] \dots \dots (12a)$$

Avec : $(e^{-\phi t} - 1) = -(1 - e^{-\phi t})$.

L'expression (12a) traduit *l'équation de convergence par unité de travail efficace* qui, malheureusement, ne fait pas souvent l'objet d'estimation. On lui préfère à l'équation de convergence du produit par tête que l'on obtient comme ceci :

On sait que (rappel) :

$$A_t = A_0 \cdot e^{gt} \dots \dots (6b)$$

$$\ln A_t = \ln A_0 + gt \cdot \ln e = \ln A_0 + gt \dots \dots (6c)$$

$$\bar{y} = \frac{Y}{AL} = \frac{1Y}{AL} = \frac{1}{A}y \dots \dots (8), \quad \text{avec } y = \frac{Y}{L}$$

Partant de l'expression (8), on peut déduire l'expression du produit par tête « y » comme suit :

$$y = A \cdot \bar{y} \Rightarrow \ln y = \ln A + \ln \bar{y} \dots \dots (12b)$$

Avec : $\ln y$ = elle représente implicitement l'équation de convergence du produit par tête ;
 $\ln \bar{y}$ = elle représente implicitement l'équation de convergence par unité de travail efficace.

Dans l'expression (12b), soit $y = A \cdot \bar{y}$, l'on peut comprendre que l'on met en évidence le coefficient A de l'équation de convergence ; et, comme toute variable dans ladite équation de convergence ((12a) par exemple), « A » y était incorporé avec comme coefficient, le facteur : « $(1 - e^{-\phi t})$ ».

Ainsi, l'expression (6c) se réécrit :

$$\ln A_t = (1 - e^{-\phi t}) \ln A_0 + gt \dots \dots (6d)$$

Tenant compte de l'expression (6d), étant donné l'expression (12a), l'équation de convergence du produit par tête s'écrit :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right) - \ln\left(\frac{Y_0}{L_0}\right) &= (1 - e^{-\phi t}) \ln A_0 + gt + (1 - e^{-\phi t}) \left[\frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \ln s - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \ln(\delta + g + n) \right] \\ &- (1 - e^{-\phi t}) \ln\left(\frac{Y_0}{L_0}\right) \dots \dots (12c) \end{aligned}$$

Avec : $\ln y = \ln(Y/L)$.

L'expression (12c) est appelée *l'équation de beta convergence conditionnelle*. Sur la période allant de 0 à t, pour le pays i (sur données de panel), l'équation (12c) s'écrit sous forme générale comme suit :

$$\gamma_{\left(\frac{Y}{L}\right)} = g + \eta \left(\ln \frac{Y_{j,0}}{L_{j,0}} - \ln \frac{Y^*}{L} - \ln A_{j,0} \right) \dots \dots (12d)$$

Avec :

$$\eta = -\frac{(1 - e^{-\phi t})}{t} \text{ et } g = g_j, \forall j$$

Si l'on pose⁽¹⁾ : $\ln A_0 = b + \varepsilon$, l'équation (12c) devient :

$$\begin{aligned} \ln \frac{Y_t}{L_t} - \ln \frac{Y_0}{L_0} &= (1 - e^{-\phi t}) b + gt + (1 - e^{-\phi t}) \left[\frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \ln s - \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \ln(\delta + g + n) \right] \\ &- (1 - e^{-\phi t}) \ln \frac{Y_0}{L_0} + (1 - e^{-\phi t}) \varepsilon_t \dots \dots (12e) \end{aligned}$$

C'est la *spécification économétrique de l'équation de beta convergence conditionnelle*.

5.4. Equation de la beta convergence absolue

Considérant l'équation (12e) ci-dessus, si l'on pose :

$$\beta_1 = (1 - e^{-\phi t}) b - (1 - e^{-\phi t}) \ln \frac{Y_0}{L_0}; \quad \beta_2 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} (1 - e^{-\phi t}), \quad u_t = gt + (1 - e^{-\phi t}) \varepsilon_t$$

Cette équation (12e) se réécrit comme suit :

$$\ln y_t - \ln y_0 = \beta_1 + \beta_2 [\ln s - \ln(\delta + g + n)] + u_t \dots \dots (12f)$$

Et, si l'on se propose de tester la beta convergence absolue⁽²⁾, l'équation (12f) s'écrira :

$$\ln y_t - \ln y_0 = \beta_1 + \beta_2 \ln y_0 + u_t \dots \dots (12g)$$

¹ Le terme « A_0 », qui reflète la technologie et bien d'autres facteurs propres aux pays tels que les institutions, le climat, les dotations en ressources naturelles, le niveau de corruption, etc., est supposé inconnu et susceptible d'être estimé comme suit : $\ln A_0 = b + \varepsilon$, avec b le niveau de technologie et ε les facteurs sus évoqués pouvant expliquer la dynamique du taux de croissance des pays (Salle I., 2007).

² On parle de beta convergence si l'on met en relation le taux de croissance des économies et leur dotation initiale en termes de niveau de vie, indépendamment des variables de conditionnement de l'équilibre dont le taux d'épargne (s), le taux de croissance de la population employée (n) et celui du progrès technique (g), ainsi que le taux de dépréciation du capital (δ).

Avec : $\beta_1 = (1 - e^{\Phi t})b$ et $\beta_2 = -(1 - e^{\Phi t})$.

L'équation (12f) traduit l'équation de la beta convergence absolue. Sur données de panel, cette équation (12g) s'écrit :

$$\frac{\ln\left(\frac{Y_{i,t+k}}{L_{i,t+k}}\right) - \ln\left(\frac{Y_{i,t}}{L_{i,t}}\right)}{k - t} = \beta_1 + \beta_2 \ln\left(\frac{Y_{i,t}}{L_{i,t}}\right) + \varepsilon_{i,t} \dots \dots (12h)$$

Le membre de gauche de cette expression désigne le taux de croissance moyen pour le pays i sur la période allant de t à $t+k$ qui doit inversement être lié au niveau de vie à la période initiale « t » pour parler de la beta convergence absolue (c.à.d. si $\beta_2 < 0$).

5.5. Sigma convergence

L'étude de la convergence économique par la « sigma convergence » consiste à déterminer un indicateur de dispersion des PIB par tête entre pays, et ensuite vérifier si cet indicateur montre une tendance systématique à se réduire dans le temps. Parmi les indicateurs de dispersion, l'on se réfère souvent à la variance ou l'écart-type et le coefficient de variation. Si l'on s'intéresse à l'écart-type ou la variance de la distribution des logarithmes de PIB/habitants au sein d'un échantillon de pays considérés, l'on va se servir des formules suivantes pour vérifier la sigma convergence :

$$\sigma^2_{\ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln y_{it} - \overline{\ln y_t})^2 \dots \dots (Variance) \dots \dots (13a)$$

$$\sigma_{\ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{Nk} (\ln y_{it} - \overline{\ln y_t})^2 \dots \dots (Ecart - type) \dots \dots (13b)}$$

Avec : $\ln y_{it}$: logarithme du PIB/habitant du pays i à la date t ;

$\overline{\ln y_t}$: la moyenne arithmétique de la distribution du logarithme de PIB par habitant ou par tête à la date t ;

Nk : le nombre de pays ou individus dans le groupe considéré ;

N : Nombre de pays

Formellement, l'on parlera de la sigma convergence, lorsque l'inégalité suivante arrive à se vérifier :

$$\sigma^2_{\ln\left(\frac{Y_0}{L_0}\right)} - \sigma^2_{\ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)} > 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_{\ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right)} < \sigma_{\ln\left(\frac{Y_0}{L_0}\right)}$$

Cette inégalité traduit la baisse des disparités entre pays au cours du temps (graphiquement, cela se traduit par une évolution décroissante de l'écart-type/variance). Notons que la sigma convergence est une notion plus simple à démontrer que la beta convergence ; car, on ne parle pas de la sigma convergence absolue, ni conditionnelle.

6. Club de convergence

Pour une raison ou une autre – dans un même groupe/région – certains pays peuvent être piégés dans un état d'équilibre défavorable et d'autres demeurer dans un équilibre haut ou favorable. Des facteurs tels que le capital humain, le développement du système financier, les infrastructures de transport et le cadre institutionnel semblent mieux justifier des multiples équilibres entre pays d'un même groupe ; ce qui conduit à l'apparition des « clubs de convergence » (Kankwanda G., 2007). Ces derniers sont des groupes des pays séparés qui se caractérisent chacun par une convergence stable⁽¹⁾ vers un état d'équilibre différent des autres (Barthélemy J.C. et Varoudakis A., 1995 ; Quah D.T., 1997). Signalons qu'en présence des clubs de convergence, l'analyse des déterminants de la croissance et même l'étude de la convergence économique peuvent être biaisées si l'on considère comme semblables les économies appartenant à des clubs différents.

Formellement, la notion des clubs de convergence peut être appréhendée à travers un modèle de convergence incorporant des variables quadratiques ou cubiques (Ndiaye, 2006 ; Baumol et Wolf, 1983) :

$$\frac{1}{k} \ln \left(\frac{y_{i,t+k}}{y_{it}} \right) = \beta_1 + \beta_2 \ln y_{it} + \alpha_0 (\ln y_{it})^2 + \alpha_1 (\ln y_{it})^3 + \epsilon_{it} \dots (14)$$

Si β_2, α_0 et α_1 sont négatifs et statistiquement significatifs, il peut être admis que les pays convergent vers différents niveaux d'équilibre (il s'agit de plusieurs variantes d'un même équilibre).

7. Demi-vie et vitesse de convergence

Notons que la sigma convergence ne permet pas de répondre aux questions : à quelle vitesse et jusqu'à quand les écarts entre pays seront résorbés ? C'est plutôt la beta convergence qui permet d'y répondre. Pour ce faire, nous partons de l'expression (12g), soit l'équation de beta convergence absolue, pour calculer la vitesse de convergence (Φ) et la demi-vie⁽²⁾ « Γ ».

7.1. Vitesse de convergence (Φ)

La vitesse de convergence est la durée nécessaire pour qu'une économie arrive à combler la moitié de son écart par rapport à l'état stationnaire. Pour rappel, l'expression (12g) est donnée comme suit :

$$\ln y_t - \ln y_0 = \beta_1 + \beta_2 \ln y_0 + u_t \dots (12g)$$

Avec : $\beta_1 = (1 - e^{\Phi t})b$ et $\beta_2 = -(1 - e^{\Phi t})$.

Partant de $\beta_2 = -(1 - e^{\Phi t})$, l'on calcule la vitesse de convergence « Φ » comme suit :

$$e^{-\Phi t} = (1 + \beta_2) \rightarrow -\Phi * t * \ln e = \ln(1 + \beta_2)$$

¹ Quand on s'en écarte, l'on a tendance à y revenir.

² C'est la durée nécessaire pour qu'une économie arrive à combler la moitié de son écart par rapport à l'état stationnaire.

$$\Phi = -\frac{\ln(1 + \beta_2)}{t} \dots \dots (15a), \quad \text{avec : } t = k$$

L'expression (15a) traduit la vitesse de convergence.

7.2. Demi-vie (Γ)

Etant donné la vitesse de convergence « Φ », l'on calcul la demi-vie « Γ » comme suit :

$$\Gamma = -\frac{\ln 0,5}{\Phi} \text{ ou } \Gamma = \frac{\ln 2}{\Phi} \dots \dots (15b)$$

A titre illustratif, si $\Gamma = 15$ années, cela signifie que 50% d'écart entre pays (soit en termes de niveau de vie ou PIB par tête « y_t ») sera résorbé par un processus de convergence qui devra durer 15 ans.

Retenons :

Γ = Durée nécessaire pour qu'un individu (pays) arrive à combler la moitié de son écart par rapport à l'état stationnaire.

Φ = Vitesse avec laquelle un individu (pays) réduit son écart par rapport à l'équilibre chaque année, exprimée en pourcentage.

Références bibliographiques

- Barro R. et Sala-i-Martin X. (1992), « Convergence », in *Journal of Political Economy*, n° 100, pp. 223-251.
- Barro R. et Sala-i-Martin X. (1995), « Economic Growth », Mc Graw Hill, New-York.
- Barthélemy J.C. et Varoudakis A. (1995), « Clubs de convergence et croissance. Le rôle du développement financier et du capital humain », in *Revue économique*, vol. 46-2, pp. 217-235.
- Baumol W.J. et Wolf E.N. (1983), « Feed-back from Productivity Growth to R&D », in *Scandinavian Journal of Economics*, 85 : 147-57.
- Baumont C., Ertur C. et Le Gallo J. (2000), « Convergence des régions européennes : Une approche par l'économétrie spatiale », in *pôle d'Economie et de Gestion*, février, 27 p.
- Baumont C., Ertur C. et Le Gallo J. (2006), « Clubs de convergence et effets de débordements géographiques : une analyse spatiale sur données régionales européennes », in *Economie et Prévision*, n°173, pp. 111-134.
- Bensidoun I. et Boone L. (1999), « La notion de convergence », in *l'économie mondiale*, éd. La découverte, collections repères/CEPII, pp. 94-103.
- Bofoya Komba (2010), « Modèles macroéconomiques », éd. Galimage, 177 p.
- Communauté économique pour l'Afrique/CEA (2007), « convergence économique en Afrique Centrale », octobre.
- Dall'erba S. et le Gallo J. (2005), « Croissance, convergence et interactions régionales : les outils récents de l'analyse spatiale quantitative », in *Région et Développement* n°21-2005, pp. 5–11.
- Dall'erba S. et le Gallo J. (2005), « Dynamique du processus de convergence régionale en Europe », in *Région et Développement* n°21-2005, pp. 119–139.
- Diemer Arnaud, « Théorie de la croissance endogène et principe de convergence », 14 p.
- Diop Lamine P. (2002), « Convergence nominale et Convergence réelle : Une application des concepts de δ -convergence et de β -convergence aux économies de la CEDEAO », in *Notes d'information et statistiques de la BCEAO* n°531, décembre, 27 p.
- Echard R. et Yildizoglu M. (1998), « croissance économique », 48 p.
- Fuss C. (1999), « Mesures et tests de convergence : une revue de la littérature », in *Revue de l'OFCE*, n° 69, Avril, pp. 222–249.
- Jean-Pierre P. (1999), « La convergence régionale européenne : une approche empirique par les clubs et les panels », in *Revue d'Economie Régionale et Urbaine*, n° 1, pp. 21-44.
- Kankwanda G. (2007), « Théories de croissance économique », Notes de cours, FASEG/UNIKIN, 148 p.

- Kibala Kuma J., « Intégration régionale, externalités spatiales et convergence économique : cadre théorique, revue de littérature et modélisation (guide méthodologique des études sur la nouvelle synthèse géographie-croissance) », inédit (en cours de rédaction).
- Kibala Kuma J., « le modèle de croissance exogène de Solow : aspects théoriques et développements mathématiques », inédit (en cours de rédaction).
- Mankiw G., Romer D. et Weil D. (1992), « A contribution to the empirics of Economic Growth », in *Quarterly Journal of Economics*, n° 57, pp. 407-437.
- Mankiw Gregory (2010), « Macroéconomie », éd. De Boeck, Bruxelles, 200 p.
- Ndiaye O. (2006), « UEMOA : une intégration économique à deux vitesses à travers des clubs de Convergence », 7èmes journées scientifiques du réseau Analyse Économique et Développement de l'AUF.
- Quah Danny T. (1997), « Empirics for Growth and Distribution : Stratification, Polarization, and Convergence Clubs », in *Journal of Economic Growth*, 2 : 27-59.
- Ragot Xavier (2006), « Théorie de la croissance et Economie de long terme », Notes de cours/CENSAE, 82 p.
- Salle Isabelle (2007), « Fondements théoriques et base méthodologique de l'analyse empirique de la notion de convergence économique ».
- Solow Robert (1956), « A contribution to the theory of Economic Growth », in *Quarterly Journal of Economics*, n° 70, pp. 65-94.
- Wickens Michael (2010), « Analyse macroéconomique approfondie : Une approche par l'équilibre général dynamique », éd. De Boeck, 1ère édition, Bruxelles, 477 p.
-