



**HAL**  
open science

## Modélisation des effets unilatéraux basés sur l'ouverture de fissures

Mohammed Matallah, Christian La Borderie

► **To cite this version:**

Mohammed Matallah, Christian La Borderie. Modélisation des effets unilatéraux basés sur l'ouverture de fissures. *Revue Européenne de Génie Civil*, 2008, 12 (9-10), pp.1105-1122. 10.3166/EJECE.12.1105-1122 . hal-02424281

**HAL Id: hal-02424281**

**<https://hal.science/hal-02424281>**

Submitted on 31 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation des effets unilatéraux basés sur l'ouverture de fissures

Mohammed Matallah — Christian La Borderie

*LaSaGeC2, Laboratoire de Sciences Appliquées au Génie Civil et Côtier  
Université de Pau et des Pays de l'Adour  
1, allée du Parc Montauray, F-64600 Anglet  
mohammed.matallah@univ-pau.fr*

---

*RÉSUMÉ. La modélisation de la fissuration constitue un enjeu crucial pour l'analyse et la prédiction du comportement jusqu'à la ruine des structures en béton armé. Les approches utilisées actuellement permettent de décrire l'endommagement et les déformations anélastiques liées à la création des microfissures. Lors de chargements cycliques ou simplement de la redistribution de contraintes à l'intérieur d'une structure, certaines fissures se referment et provoquent une restauration de la raideur initiale. L'introduction de ce phénomène appelé unilatéral se base généralement sur une partition du tenseur de contraintes ou de déformations et non sur l'ouverture de fissures. Les modèles ainsi développés sont généralement instables ou thermodynamiquement incorrects (Chaboche, 1992 ; Cormery et al., 2002). Le modèle développé (Matallah et al., 2006) propose une approche originale qui utilise l'ouverture unitaire de fissures  $\varepsilon^{ouf}$  comme variable interne. Cette nouvelle variable permet d'introduire naturellement les effets unilatéraux (ouverture-fermeture de fissures). Après un rappel des bases mathématiques du modèle, des simulations numériques d'une structure en béton armé sous chargement cyclique sont présentées. Nous montrons l'intérêt de la variable  $\varepsilon^{ouf}$  par sa capacité à représenter le champ de fissuration en tenant compte des reffermetures éventuelles.*

*ABSTRACT. Numerical modeling of cracking is of a great importance when considering safety and durability of concrete structures. Generally, classical formulations are used to describe damage and inelasticity due to micro-cracks opening. For cyclic loadings, or when a stress redistribution appears in a structures, the material recovers its original elasticity due to micro-cracks closing. The description of this phenomenon is based generally on a strain or a stress decomposition. Models developed so are mostly instables or not thermodynamically corrects. The model developed (Matallah et al., 2006) proposes an original approach where an internal variable called the Unitary Crack Opening  $\varepsilon^{ouf}$  is introduced to allow crack opening computation. The unilateral effect (Crack closure effect) is naturally introduced thanks to the variable  $\varepsilon^{ouf}$ . We will start this paper by formulating the model. Furthermore, numerical model responses of beam subjected to cyclic loading are presented. Crack patterns at different loading levels are presented in order to demonstrate the capacity of the model (through the variable  $\varepsilon^{ouf}$ ) to represent crack opening and crack closure effect.*

*MOTS-CLÉS : ouverture de fissures, effet unilatéral, endommagement, anélasticité.*

*KEYWORDS: cracks opening, unilateral effect, damage, inelasticity.*

---

## 1. Introduction

L'analyse et la prévision de la ruine des structures en béton armé constituent un enjeu important dans le domaine du génie civil. Des efforts remarquables ont été investis pour la compréhension physique et la modélisation numérique des processus de dégradation affectant les ouvrages. Les structures sont généralement le siège de sollicitations variées (mécaniques, hydrauliques, thermiques...). Lorsque les chargements sont cycliques, il est évident que les phénomènes unilatéraux doivent être modélisés. De plus, pour de nombreux ouvrages (barrages, enceintes de confinement . . .), la fonctionnalité est essentiellement liée à leur étanchéité. Dans les zones à forte fissuration, le niveau d'étanchéité dépend fortement de l'ouverture de fissures. De ce fait, il est très important d'avoir une définition claire de l'ouverture d'une fissure et d'être capable de la modéliser avec précision.

Les fissures dans le matériau béton représentent des discontinuités géométriques. D'un point de vue cinématique, la modélisation de ces discontinuités peut être accomplie *via* deux approches principales :

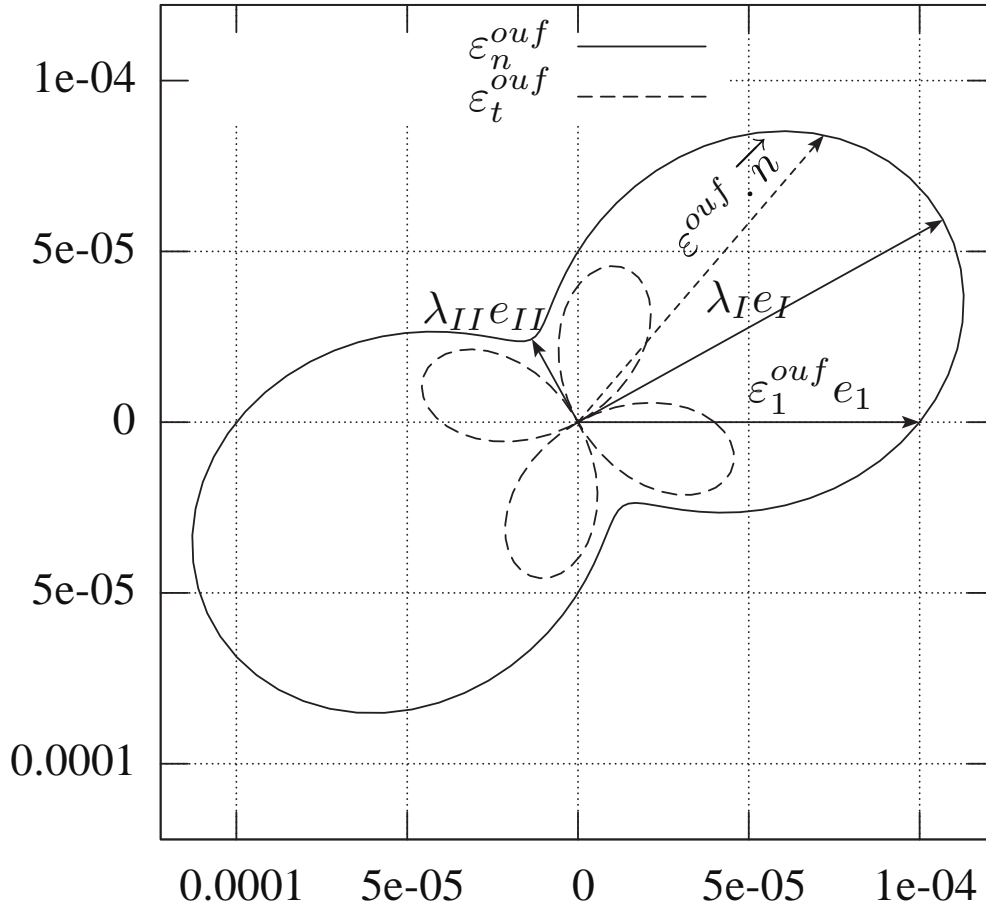
- les approches discontinues : dans ce type d'approches (Oliver *et al.*, 2002)(Jirásek *et al.*, 2001), les fissures sont représentées par des discontinuités de déplacements (discontinuités fortes) ou de déformations (discontinuités faibles). Ce type d'approche est bien adapté à la description de l'état final de dégradation des matériaux caractérisé par l'amorçage des fissures complètes séparant le matériau en blocs séparés ;

- les approches continues : ce sont les approches couramment utilisées dans les modélisations par éléments finis. Les champs de déplacements sont continus. Le processus de fissuration est caractérisé par une transition d'un état initial de déformation à faible gradient à un état à fort gradient. Ce type d'approche est approprié pour décrire l'état initial de dégradation caractérisé par un endommagement diffus.

Les approches de type X-FEM (*eXtended Finit Element Method*) récemment développées peuvent être considérées comme des approches mixtes. En effet, ces approches basées sur la partition de l'unité enrichissent la base des fonctions de formes classiques. La discontinuité est introduite au niveau de la formulation des fonctions de formes et non dans la loi de comportement du matériau.

La classification qu'on a établie est de caractère cinématique. Chaque description cinématique doit être associée à des lois de comportement aboutissant à des modèles spécifiques aux matériaux traités. Chacune des deux approches présente des inconvénients et des avantages. Pour pouvoir prédire correctement l'ouverture de fissures, les approches discontinues semblent bien adaptées sauf que l'état initial de dégradation caractérisé par un endommagement diffus n'est pas bien décrit. Jirásek *et al.* (2001b) ont proposé un modèle qui combine les deux approches. Le modèle démarre avec une approche continue (*Smearred crack model*) pour bien décrire l'état initial de dégradation et bascule à une formulation discontinue (*Embedded crack model*).

Le modèle développé par Matallah (2006) propose une formulation proche des mo-



**Figure 1.** Tracé polaire des composantes de  $\varepsilon^{ouf}$

dèles de la fissuration diffuse (Rashid, 1968; Deborst *et al.*, 1985; Bazant *et al.*, 1983), il introduit la notion d'ouverture de fissures. Les conséquences des ouvertures des microfissures sur le champ de déformation sont modélisées par un tenseur symétrique d'ouverture de fissures  $\varepsilon_{ouf}$ . Le champ des déplacements dû à l'ouverture des fissures reste compatible avec la variable tensorielle  $\varepsilon_{ouf}$ . L'ouverture unitaire de fissures qui représente l'ouverture des fissures par unité de longueur est définie en chaque point de l'espace pour un couple de vecteurs (normaux, orthogonaux)  $(n, t)$  par deux composantes :

–  $\varepsilon_n^{ouf} = n_i \varepsilon_{ij}^{ouf} n_j$  la composante représentant l'ouverture elle-même ;

–  $\varepsilon_t^{ouf} = t_i \varepsilon_{ij}^{ouf} n_j$  la composante représentant le glissement au niveau de la fissure.

Dans l'espace, le glissement est représenté par deux composantes.

La figure 1 représente la variation de  $\varepsilon_t^{ouf}$  et  $\varepsilon_n^{ouf}$  (tracé polaire) pour un cas bidimensionnel lorsque la normale  $\vec{n}$  parcourt le plan avec :

$$\varepsilon^{ouf} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 4 \cdot 10^{-5} \\ 4 \cdot 10^{-5} & 5 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}_{(e_1, e_2)}$$

$(\lambda_I$  et  $\lambda_{II})$  et  $(e_I, e_{II})$  dans la figure 1 représentent les valeurs et les vecteurs propres de  $\varepsilon_{ouf}$ . Pour chaque direction de  $\vec{n}$ , les valeurs des composantes de  $\varepsilon_{ouf}$  sont données par l'intersection du vecteur  $\vec{n}$  avec les courbes polaires.

La variable tensorielle  $\varepsilon_{ouf}$  est couplée à une variable scalaire d'endommagement  $D$ . La formulation de la loi de comportement est donnée par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - D\varepsilon_{kl}^{ouf}) \quad [1]$$

$C_{ijkl}$  est le tenseur d'élasticité du matériau vierge. Bien que l'endommagement soit décrit par un scalaire caractérisant habituellement une isotropie, son effet mécanique est modulé par le caractère anisotrope de la variable  $\varepsilon_{ouf}$  (Matallah, 2006). Les états initiaux de dégradation peuvent être caractérisés par la variable d'endommagement  $D$ . Dans les zones à forte fissuration, la variable  $\varepsilon_{ouf}$  constitue une variable clé pour la détermination de l'ouverture de fissure.

Le tenseur d'ouverture de fissures  $\varepsilon_{ouf}$  est lié au tenseur de déformations anélastiques  $\varepsilon^{an}$  par une variable  $S$ , appelée indicateur d'ouverture de fissure. Quand les fissures sont complètement ouvertes  $S = 1$  :

$$\varepsilon_{kl}^{ouf} = S\varepsilon_{kl}^{an} = \varepsilon_{kl}^{an} \quad [2]$$

Lors d'un chargement cyclique ou d'une redistribution des contraintes dans une structure, certaines microfissures se referment et provoquent ainsi une restauration de la raideur initiale. La relation proposée entre  $\varepsilon_{ouf}$  et  $\varepsilon^{an}$  permet de décrire facilement ce phénomène. En effet, quand les fissures sont complètement refermées, on a  $S = 0$ , donc :

$$\forall \varepsilon_{kl}^{an}, \varepsilon_{kl}^{ouf} = S\varepsilon_{kl}^{an} = 0 \quad [3]$$

et

$$\forall \varepsilon_{kl}^{an}, \forall D, \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - DS\varepsilon_{kl}^{an}) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad [4]$$

Le tenseur d'ouverture unitaire de fissures s'annule et le comportement du matériau vierge est restauré. Toutefois, la mémoire de la dégradation du matériau est conservée.

## 2. Formulation thermodynamique du modèle proposé

### 2.1. Potentiel d'état

Le modèle est développé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. On postule l'existence d'un potentiel thermodynamique fonction des variables d'état. Le deuxième principe de la thermodynamique permet d'écrire les lois d'état :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} - DS\varepsilon_{ij}^{an})C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - DS\varepsilon_{kl}^{an}) + f(p) \quad [5]$$

$\rho$  : masse volumique;  $\psi$  : potentiel d'état;  $C_{ijkl}$  : tenseur d'élasticité du matériau vierge;  $\varepsilon_{ij}$  : tenseur d'ordre 2 de déformations totales;  $\varepsilon_{ij}^{an}$  : tenseur d'ordre 2 de déformations anélastiques;  $D$  : variable scalaire d'endommagement;  $S$  : indicateur d'ouverture de fissures;  $p$  : variable interne représentant l'état d'écrouissage (déformation anélastique cumulée). Les variables forces thermodynamiques associées aux variables internes ( $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^{an}, D, S, p$ ) s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - DS\varepsilon_{kl}^{an}) \quad [6]$$

$$\sigma_{ij}^{an} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{an}} = -DSC_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - DS\varepsilon_{kl}^{an}) \quad [7]$$

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = -S\varepsilon_{ij}^{an}C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - DS\varepsilon_{kl}^{an}) \quad [8]$$

$$Y_s = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial S} = -D\varepsilon_{ij}^{an}C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - DS\varepsilon_{kl}^{an}) \quad [9]$$

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p} \quad [10]$$

Le tableau 1 représente les variables d'état et leurs variables associées.

Variables d'état		Variables associées
Observables	Internes	
$\varepsilon_{ij}$	$\varepsilon_{ij}^{an}$ $p$ $S$ $D$	$\sigma_{ij}$ $\sigma_{ij}^{an}$ $R$ $Y_s$ $Y$

**Tableau 1.** *variables thermodynamiques*

## 2.2. Potentiel de dissipation

### 2.2.1. Anélasticité

Les lois d'évolution de la variable tensorielle  $\varepsilon_{ij}^{ouf}$  représentant les ouvertures de fissures sont gérées comme dans le cas de la plasticité avec une fonction de charge. Nous proposons un critère de charge multisurface formé de deux critères de type Drucker Prager, l'un pour modéliser la traction et l'autre pour la compression (figure 2).

$$\begin{cases} F_t = \alpha_t J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_t I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - R_t - f_t^0 \\ F_c = \alpha_c J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_c I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - R_c - f_c^0 \end{cases} \quad [11]$$

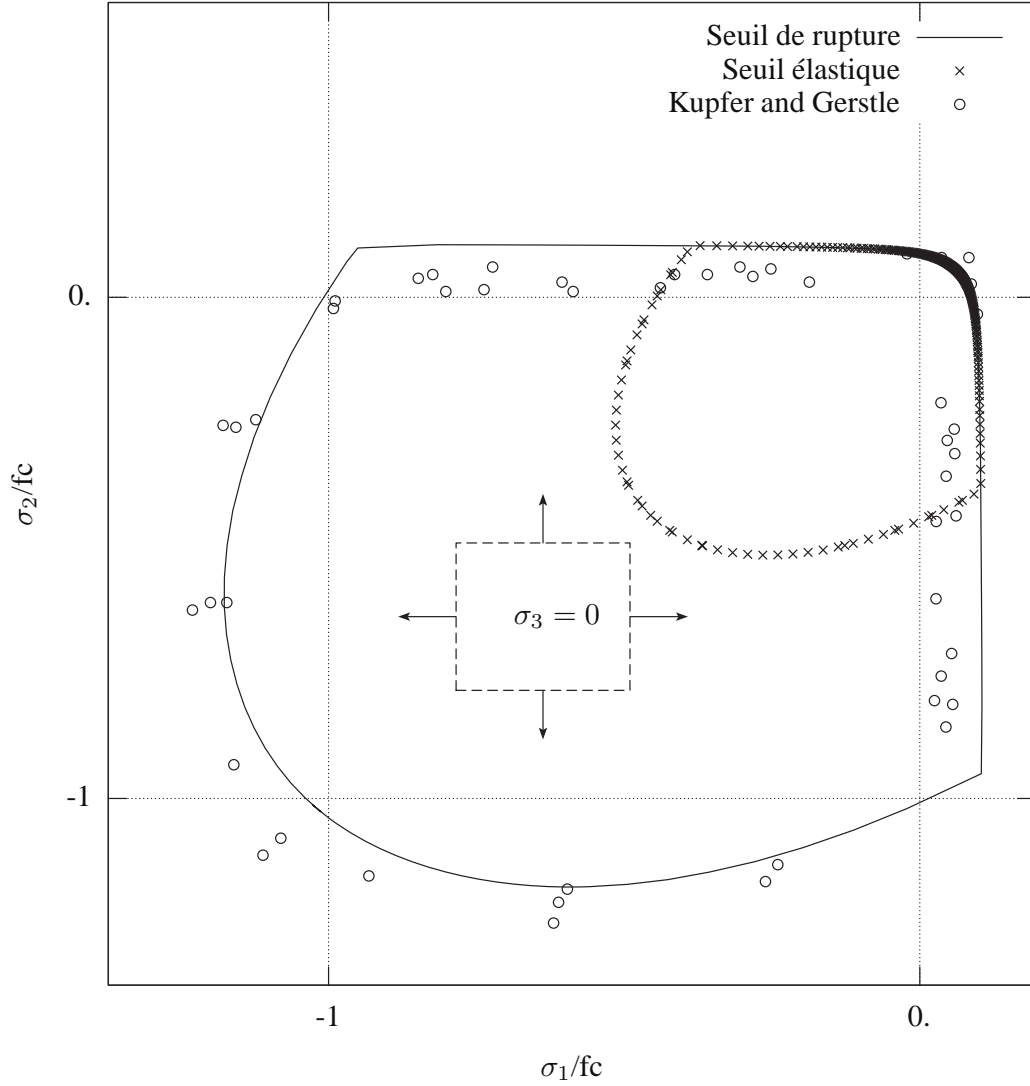
Chaque critère est caractérisé par deux paramètres :  $(\alpha_t, \beta_t)$  pour la traction et  $(\alpha_c, \beta_c)$  pour la compression. Les paramètres  $f_c^0$  et  $f_t^0$  représentent les limites élastiques en traction et en compression.

Nous avons choisi d'écrire les lois d'évolution des variables internes dans un cadre non associé. En effet, la règle de normalité est écrite par rapport à un potentiel anélastique différent de la fonction de charge. Pour de nombreux matériaux (béton, sol...), l'utilisation des modèles non associés permet de mieux représenter leur comportement (Jirázek *et al.*, 2001), particulièrement pour les matériaux dilatants, comme c'est le cas du béton lorsqu'il est sollicité en compression. Les expressions des potentiels anélastiques sont données par :

$$\begin{cases} g_t = \alpha_{tg} J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_{tg} I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - R_t \\ g_c = \alpha_{cg} J_2(\tilde{\sigma}_{ij}) + \beta_{cg} I_1(\tilde{\sigma}_{ij}) - R_c \end{cases} \quad [12]$$

A l'intersection des deux critères, l'ambiguïté sur la direction de l'écoulement est levée par la proposition de Koiter (1953) qui considère que :

$$\varepsilon_{ij}^{ouf} = \dot{\lambda}_t \left\{ \frac{\partial g_t}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \right\} + \dot{\lambda}_c \left\{ \frac{\partial g_c}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \right\} \quad [13]$$



**Figure 2.** *Seuil élastique et seuil de rupture*

Dans le cas de notre formulation, l'écoulement anélastique se fait à contrainte effective qui représente la contrainte calculée à partir de l'état de déformation élastique existant et de la relation d'élasticité du matériau vierge. Nous notons :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{ouf}) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e \quad [14]$$

Les fonctions d'écrouissage  $R_t$  et  $R_c$  sont introduites pour décrire la dégradation du matériau après la phase élastique. En traction, nous proposons pour décrire  $R_t$  une loi linéaire :

$$R_t = a_t p_t \quad [15]$$

Le paramètre  $a_t$  est fonction de la limite élastique en traction  $f_t$  et de la déformation à la rupture en traction  $\varepsilon_r$ .  $p_t$  est la déformation anélastique cumulée en traction.



En compression, après la phase élastique, le matériau présente un durcissement suivi d'un adoucissement. Nous proposons une loi exponentielle pour décrire la variable  $R_c$  :

$$R_c = (a_c p_c + f_c^0) * \exp(-b_c p_c) - f_c^0 \quad [16]$$

Les paramètres  $a_c$  et  $b_c$  pilotent le comportement avant et après pic.  $p_c$  est la déformation anélastique cumulée en compression.

### 2.2.2. Endommagement

L'endommagement est caractérisé par une variable scalaire  $D$ , son évolution dérive d'une fonction de charge par la loi de normalité.

$$F(D) = g(p, Y) - Y_0 = -Y \xi \exp(-\xi p) - Y_0 \quad [17]$$

$p$  est la déformation anélastique cumulée.  $\xi$  est un paramètre de matériaux.

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial Y} = \dot{\lambda} \xi \exp(-\xi p) \quad [18]$$

### 2.3. Loi d'évolution de la variable $S$ (indicateur d'ouverture de fissures)

Le comportement unilatéral (refermeture de fissures) du béton a été mis en évidence par Terrien (Terrien, 1980) dans le cas d'une rupture localisée et confirmé par Mazars et Ramtani (Mazars *et al.*, 1989) dans le cadre de l'endommagement diffus. Pour décrire ce phénomène, nous avons proposé d'établir une relation linéaire entre le tenseur d'ouverture de fissures  $\varepsilon_{ij}^{ouf}$  et le tenseur des déformations anélastiques  $\varepsilon_{ij}^{an}$  (équation [2]) :

$$\varepsilon_{ij}^{ouf} = S \varepsilon_{ij}^{an} \quad [19]$$

La variable  $S$  est bornée entre deux valeurs 0 et 1. La valeur 0 signifie une fissure complètement fermée. Quand  $S = 1$  la fissure est complètement ouverte. Lors d'un déchargement, on passe d'un état de fissuration avec des fissures ouvertes  $S = 1$  à un état de fissuration caractérisé par des fissures complètement (ou partiellement) fermées  $S \leq 1$ . Nous proposons comme loi d'évolution une loi linéaire :

$$S = 1 - \frac{F_t^{ac}}{F_t^{\sigma_f}} \quad [20]$$

$F_t^{ac}$  : valeur actuelle de la fonction de charge de traction

$F_t^{\sigma_f}$  : valeur de la fonction de charge de traction au point de la restauration de la raideur  $\sigma_f$ . ( $F(\tilde{\sigma}_{ij})=F_t^{\sigma_f}$ )

La loi est adaptée pour un cas de chargement cyclique uniaxial, elle n'est certainement pas parfaite pour d'autres cas de chargements, mais devrait donner une bonne approximation.

### 3. Aspect algorithmique

Le modèle est implanté en 2D (contraintes planes, déformations planes), axisymétrique et en 3D dans le code aux éléments finis Cast3M. L'algorithme d'intégration utilisé est connu sous le nom du GCP (*Generalized Cutting Plan Algorithm*). Il se résume à calculer les variables internes de la loi de comportement au temps  $t_n$  connaissant l'état initial au temps  $t_{n-1}$  en utilisant des développements limités effectués sur les fonctions critères. Le processus de calcul est réitéré jusqu'à la convergence (retour sur la surface seuil  $f_i \approx 0$ ). L'algorithme est en effet transformé en un problème d'optimisation gouverné par les conditions de Kuhn-Tucker (Kuhn *et al.*, 1951). Dans le cas d'un critère multisurface à deux surfaces, on écrit :

$$\Delta\lambda_i^{k+1} \geq 0, F_i(\tilde{\sigma}^{k+1}, R^{k+1}) \leq 0, \Delta\lambda_i^{k+1} F_i(\tilde{\sigma}_{ij}^{k+1}, R^{k+1}) = 0 \quad [21]$$

L'algorithme est traduit par une séquence d'approximations :

$$\Delta\lambda_i^{(n,k+1)} = \Delta\lambda_i^{(n,k)} + \delta\lambda_i \quad [22]$$

$$\tilde{\sigma}^{(n,K+1)} = \tilde{\sigma}^{(n,K)} - \sum_{i=1}^2 \delta\lambda_i C_e \frac{\delta g_{\tilde{\sigma}}^{(n,k)}}{\delta \tilde{\sigma}} \quad [23]$$

Les variables internes sont mises à jour :

$$\varepsilon_{ij}^{ouf(n)} - \varepsilon_{ij}^{ouf(n-1)} = \sum_{i=1}^2 \Delta\lambda_i^{(n)} \frac{\partial g_i}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} \quad [24]$$

$$p_i^n - p_i^{n-1} = \sum_{i=1}^2 \Delta\lambda_i^{(n)} \frac{\partial g_i}{\partial R_i} \quad [25]$$

La valeur du multiplicateur anélastique  $\delta\lambda_i$  est déterminée à partir d'un développement limité d'ordre 1 de l'équation  $f_i = 0$  :

$$f_i^{(n,k+1)} = f_i^{(n,k)} + \frac{\delta f_i^{(n,k)}}{\delta\sigma} \delta\sigma + \frac{\delta f_i^{(n,k)}}{\delta\lambda_i} \delta\lambda_i = 0 \quad [26]$$

Dans le cas d'un seul critère actif ( $f_t$  ou  $f_c$ ),  $\delta\lambda_i$  s'écrit :

$$\delta\lambda_i = \frac{-F_i^{(n,k)}}{-\frac{\partial F_i}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}^{(n,k)} : C_{ijkl} : \frac{\partial g_i}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}^{(n,k)} - \frac{\partial R_i}{\partial \lambda_i}^{(n,k)}} \quad [27]$$

Dans le cas de l'activation des deux critères, l'évaluation de  $\delta\lambda_t$  et  $\delta\lambda_c$  passe par la résolution d'un système d'équations :

$$\begin{Bmatrix} -F_t \\ -F_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial F_t}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g_t}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}\right) - \frac{\partial R_t}{\partial \lambda_t} & -\left(\frac{\partial F_t}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g_c}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}\right) \\ -\left(\frac{\partial F_c}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} C_{ijkl} : \frac{\partial g_t}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}\right) & -\left(\frac{\partial F_c}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} C_{ijkl} : \frac{\partial g_c}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}\right) - \frac{\partial R_c}{\partial \lambda_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\lambda_t \\ \delta\lambda_c \end{Bmatrix} \quad [28]$$

L'évolution de l'endommagement est fonction de la déformation anélastique cumulée.

$$D = 1 - \exp(-\xi p) \quad [29]$$

La contrainte finale est ensuite donnée par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - D \varepsilon_{kl}^{ouf}) \quad [30]$$

## 4. Application aux calculs de structures

### 4.1. Concept énergétique

Pour limiter les phénomènes de localisation, nous utilisons l'approche dite *Crack Band Theory* (Bazant *et al.*, 1983) (Hillerborg *et al.*, 1976) où l'on considère que les champs des déformations et des contraintes sont continues.

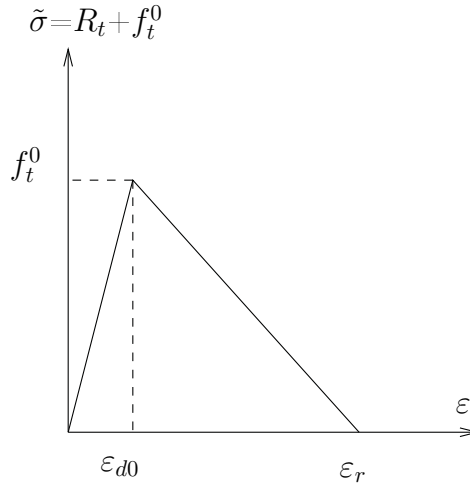
$$G_f = \int \sigma du \quad [31]$$

Dans le cas de notre formulation, l'équation précédente s'écrit :

$$G_f = \int \sigma d\varepsilon_{ouf}(x) dx \quad [32]$$

En général, une distribution constante sur une bande de largeur  $h$  est admise, ce qui permet de calculer le saut de déplacement  $du$  comme le produit de la déformation d'ouverture de fissures  $\varepsilon_{ouf}$  par la largeur de la bande  $h$ .  $G_f$  représente donc l'aire sous la courbe  $(\sigma - \varepsilon^{ouf})$  ou  $(\sigma - \varepsilon)$ .

$$G_f = h \int \sigma d\varepsilon_{ouf} \quad [33]$$



**Figure 3.** Courbe  $\tilde{\sigma}-\varepsilon$

$$G_f = h \int \sigma d\varepsilon_{ouf} = h \int_0^{\infty} E(\varepsilon - D\varepsilon_{ouf}) d\varepsilon_{ouf} \quad [34]$$

Dans le cas de la traction, nous avons choisi une forme linéaire de la variable d'écroutissage  $R_t$  :

$$R_t = \frac{-f_t^0}{\varepsilon_r} \varepsilon_{ouf} \quad [35]$$

Dans un cas de traction uniaxial, la contrainte effective s'écrit (équation [11]) :

$$\tilde{\sigma} = R_t + f_0^t \quad [36]$$

La figure 3 représente une courbe  $\tilde{\sigma}$ - $\varepsilon$  obtenue en traction. A partir de cette figure, on peut écrire :

$$\frac{f_t^0}{\varepsilon_{d0} - \varepsilon_r} = \frac{R_t + f_t^0}{\varepsilon_r - \varepsilon} \quad [37]$$

En utilisant l'équation [35], on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon_r - \varepsilon_{d0}} = \frac{-\varepsilon_{ouf} + \varepsilon_r}{\varepsilon_r(\varepsilon_r - \varepsilon)} \quad [38]$$

La relation entre  $\varepsilon_{ouf}$  et  $\varepsilon$  est donnée par :

$$\varepsilon_{ouf} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon - \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_r - \varepsilon_{d0}} \quad [39]$$

En utilisant la dernière équation et l'équation de l'évolution de l'endommagement, on obtient la formule de  $G_f$  :

$$\frac{G_f}{h} = \frac{1}{2} \varepsilon_r f_t + \frac{E}{\xi^2} \quad [40]$$

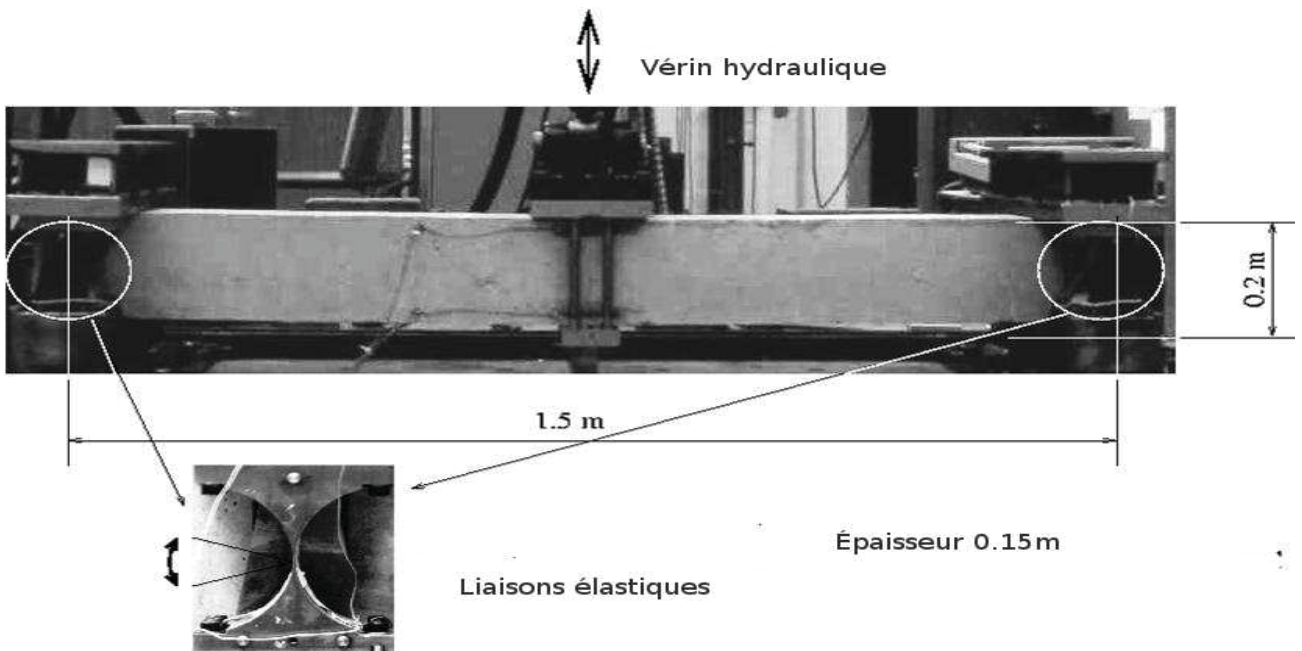
Le paramètre  $\varepsilon_r$  qui représente la déformation à la rupture est désormais fonction de la taille des éléments du maillage. L'énergie de fissuration dans une bande est donc indépendante de la taille des mailles ((Hillerborg *et al.*, 1976),(Bazant *et al.*, 1983)). Pour chaque élément de maillage,  $\varepsilon_r$  permet de calculer la branche descendante de la courbe de traction.

Nous proposons d'illustrer les capacités du modèle à représenter les effets unilatéraux par un calcul cyclique sur une poutre en béton armé en faisant l'hypothèse de contraintes planes.

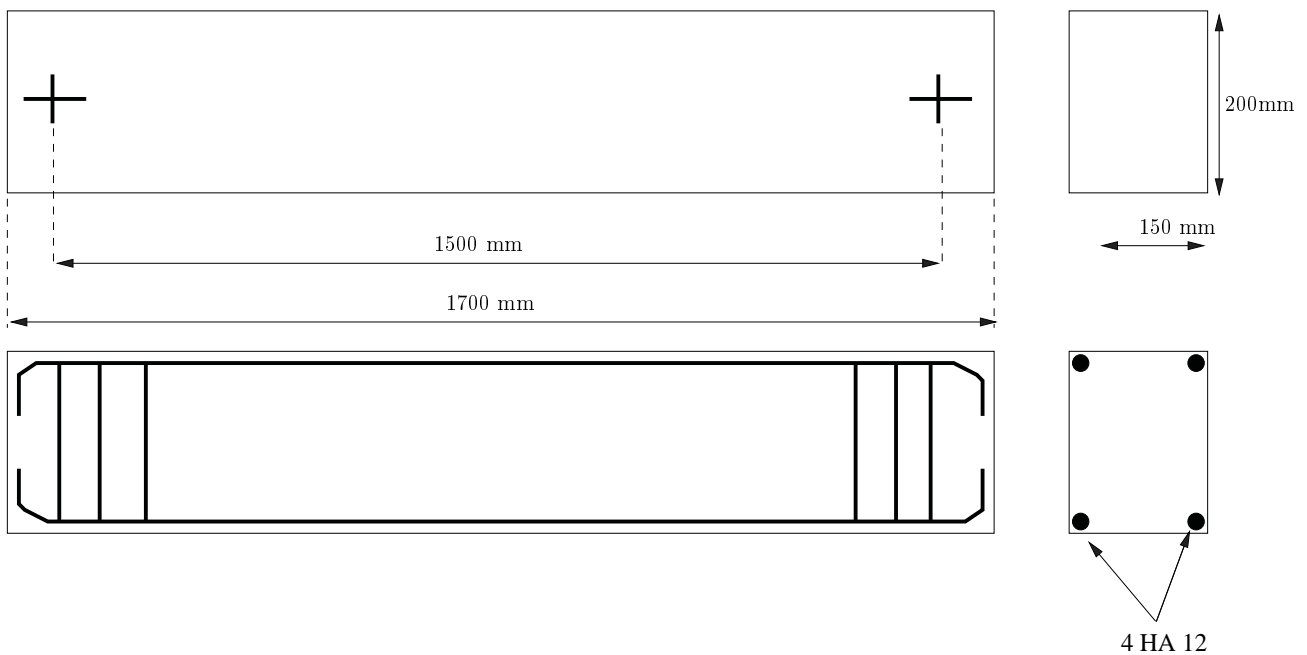
#### 4.2. Poutre en flexion cyclique

L'essai a été réalisé par La Borderie (1991), (Mazars *et al.*, 1992). La géométrie de la poutre ainsi que son ferrailage sont représentés sur les figures 4 et 5. La résistance à la compression à 28 jours du béton utilisé est de l'ordre de 28,3 MPa. Sa résistance à la traction est de l'ordre de 2,95 MPa.

Quatre armatures longitudinales en acier à haute adhérence de diamètre 12 mm ainsi que trois cadres situés au niveau de chacun des appuis sont disposés pour éviter une rupture par effort tranchant. La simulation est réalisée en utilisant des éléments



**Figure 4.** Schéma du principe du montage d'essai



**Figure 5.** Géométrie de la poutre

quadratiques. La poutre est supposée appuyée sur les deux côtés. Les armatures sont modélisées par des éléments barres en faisant l'hypothèse d'adhérence parfaite.

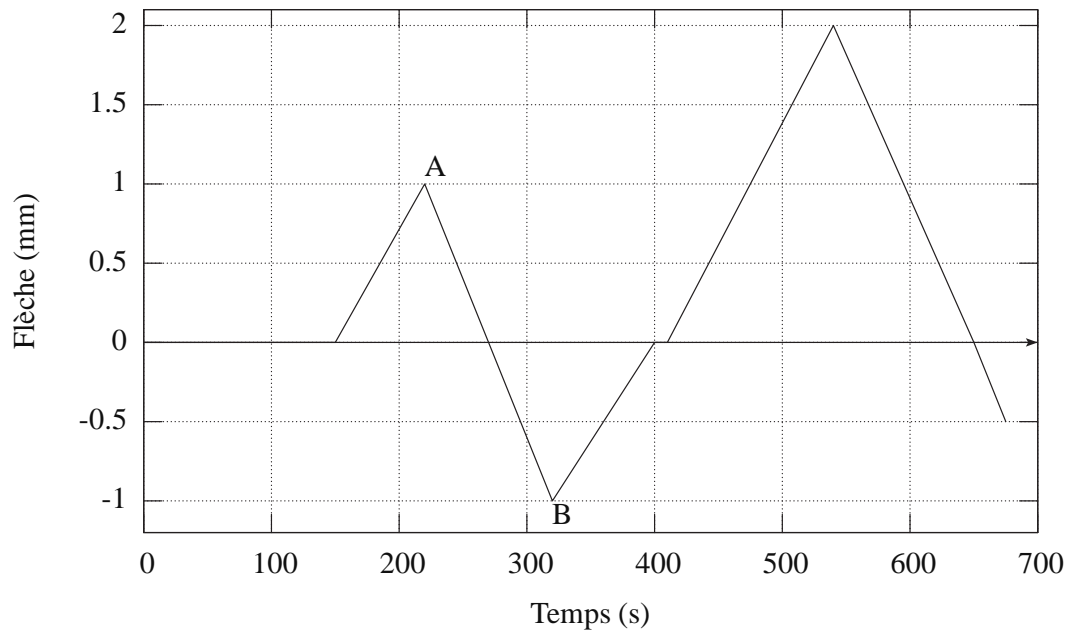
Le chargement est composé d'un cycle d'amplitude 1 mm suivi d'un cycle d'amplitude 2 mm (figure 6) (La Borderie, 1991). Pour ce cas test, quatre paramètres doivent être identifiés (tableau 2);  $G_f$  : l'énergie de fissuration en traction;  $\xi$  : paramètre de la loi d'évolution de l'endommagement. Ce paramètre donne la variation

$G_f$	$\xi$	$\sigma_f$	$f_t$
100N/m	2000	3MPa	2MPa

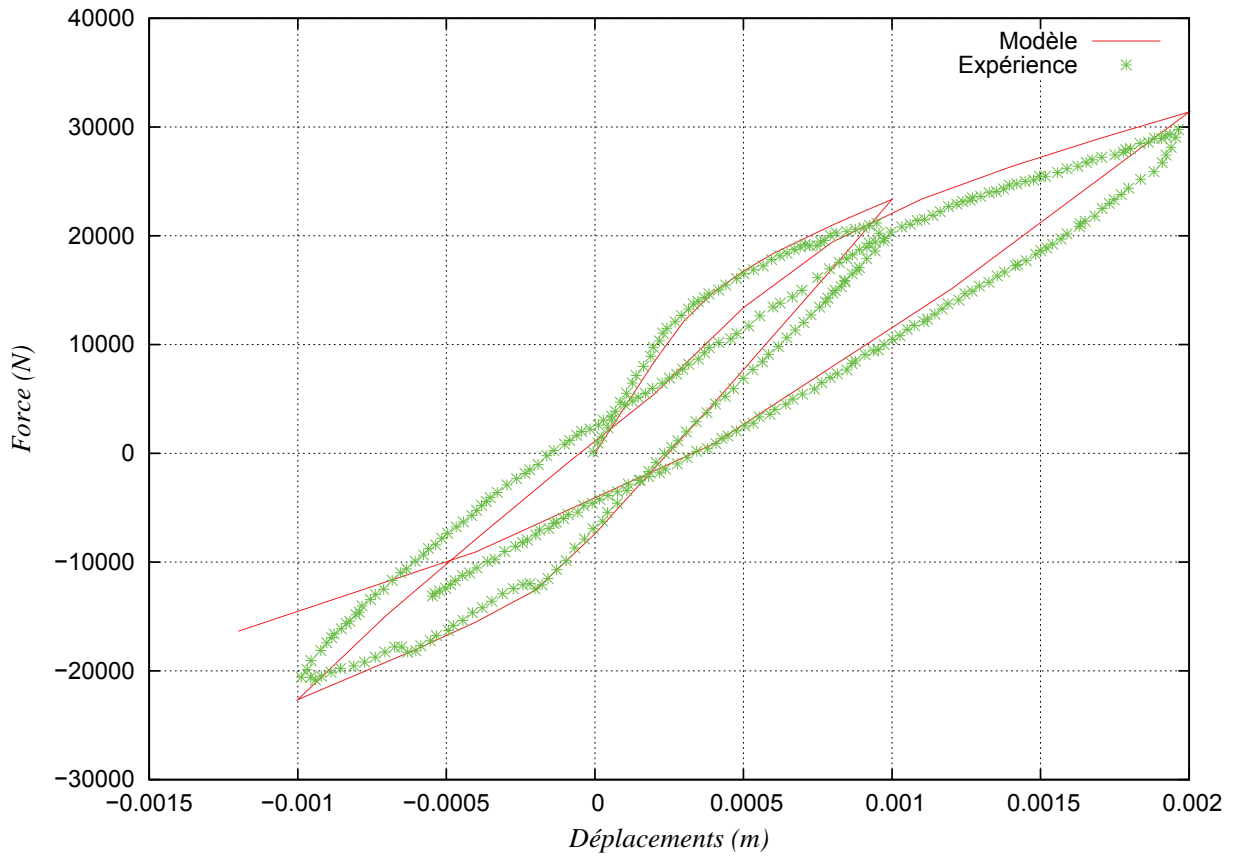
**Tableau 2.** Paramètres du modèle utilisés dans la simulation de la poutre en flexion cyclique

de l'endommagement en fonction des déformations anélastiques et peut être défini à partir d'un essai de traction cyclique ;  $\sigma_f$  : contrainte au point de la restauration de la raideur. Sa valeur peut être identifiée à partir d'un test uniaxial cyclique ;  $f_t$  : représentation à valeur près de la limite en traction. Ce paramètre est défini à partir d'un essai de traction classique. Pour chaque élément du maillage, la valeur de  $\varepsilon_r$  est déterminée à partir de l'équation 40. Les valeurs des paramètres choisis pour la simulation sont données dans le tableau 2.

La réponse globale est représentée sur la figure 7 en comparaison avec le résultat de l'essai. On remarque une très bonne cohérence entre les deux résultats.



**Figure 6.** Histoire de chargement (La Borderie, 1991)

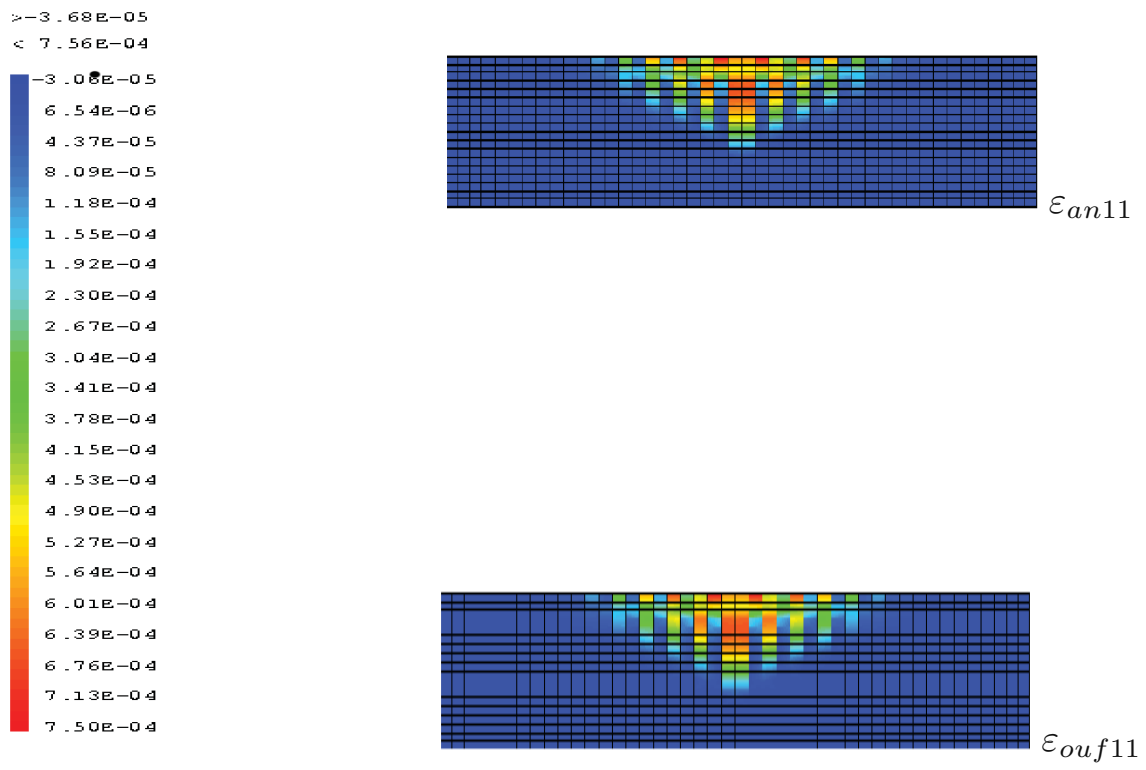


**Figure 7.** *Comparaison essai-calcul*

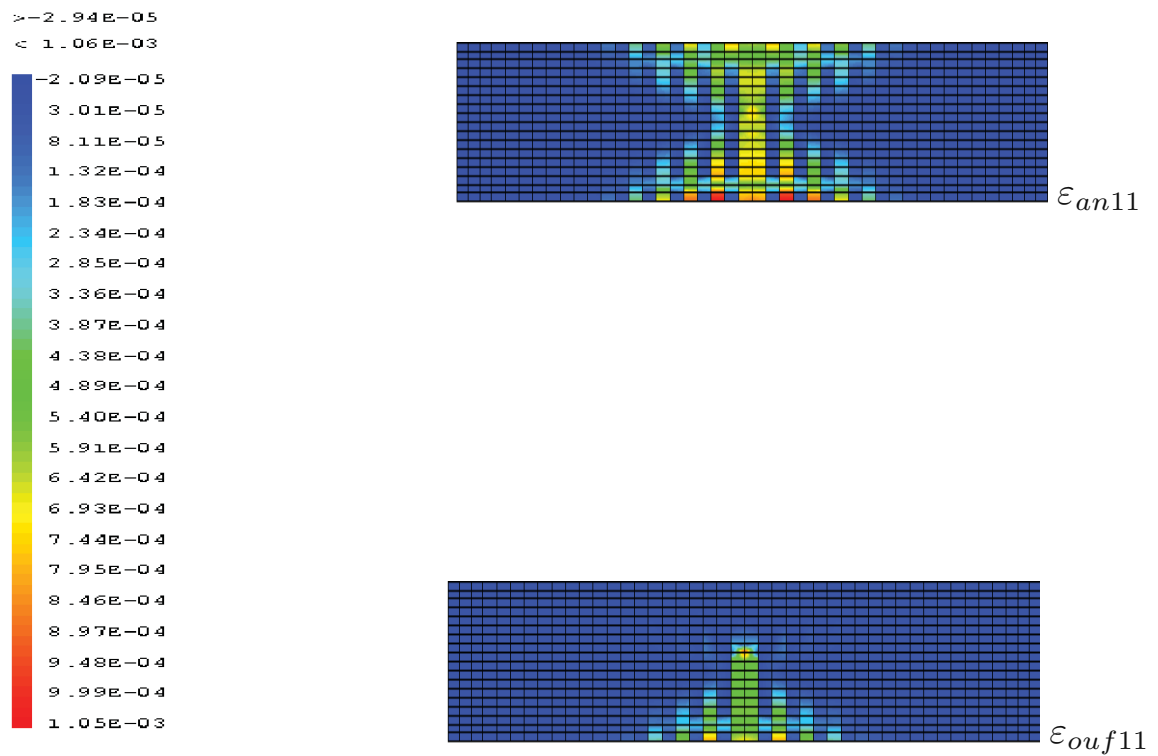
Pour illustrer le rôle de la variable  $\varepsilon_{ouf}$ , nous allons tracer les cartes de fissuration de  $\varepsilon_{an_{11}}$  et de  $\varepsilon_{ouf_{11}}$  (correspondantes aux valeurs normales pour l'axe parallèle à celui de la poutre) pour les états correspondant aux points de chargement *A* et *B* (figure 6). Au point *A*, la partie supérieure de la poutre est endommagée, les cartes de  $\varepsilon_{an}$  et de  $\varepsilon_{ouf}$  sont identiques (figure 8). Le point *B* correspond à un chargement de signe opposé, les fissures initialement ouvertes se referment alors que de nouvelles fissures se créent (figure 9). Les déformations anélastiques sont toujours présentes dans la partie supérieure alors que les fissures sont bien fermées comme le montre la carte de  $\varepsilon_{ouf_{11}}$ .

Le modèle développé a l'avantage de pouvoir décrire le processus d'ouverture et de refermeture de fissures. Lors d'un chargement cyclique, la relation introduite entre le tenseur de déformations anélastiques  $\varepsilon_{an}$  et le tenseur  $\varepsilon_{ouf}$  nous a permis de distinguer les effets de dégradation du phénomène de refermeture de fissures.





**Figure 8.** *Etat de chargement (A) (partie centrale de la poutre)*



**Figure 9.** *Etat de chargement (B) (partie centrale de la poutre)*

## 5. Conclusion

L'approche proposée repose sur un modèle d'endommagement original basé sur un concept d'ouverture de fissures. Les lois d'évolution de la fissuration sont formulées par une approche similaire à celle de la plasticité. La variable tensorielle introduite  $\varepsilon^{ouf}$  représente un moyen pour calculer les ouvertures de fissures dans le matériau, elle permet de décrire les effets unilatéraux du matériau de façon très simple.

La description de l'ouverture et de la refermeture de fissures dans les ouvrages et les structures au cours d'un chargement constitue un point important pour l'étude des problèmes couplés. L'approche développée devra être confrontée à l'expérience pour la prédiction quantitative des ouvertures de fissures.

## 6. Bibliographie

- Bazant Z., Oh B., « Crack band theory for fracture of concrete », *RILEM Mat Struct*, vol. 16, n° 93, p. 155-177, 1983.
- Chaboche J., « Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition », *Int. J. of Damage Mechanics*, vol. 1, p. 148-174, 1992.
- Cormery F., Weleman H., « A critical review of some damage models with unilateral effect », *Mech. Res. Communications*, vol. 29, p. 391-395, 2002.
- Deborst R., Nauta P., « Non-orthogonal cracks in smeared finite element model », *Engng Comput*, vol. 2, p. 35-46, 1985.
- Hillerborg A., Modeer M., Peterson P. G., « Analysis of crack formation and crack growth by fracture mechanics and finite elements », *Cement and Concrete Research*, vol. 6, p. 773-786, 1976.
- Jirásek M., Zimmermann T., « Embedded crack model : PartI. Basic formulation », *Int. J. Numer. Meth. Engng*, n° 50, p. 1269-1290, 2001.
- Jirásek M., Bažant Z., *Inelastic Analysis of Structures*, WILEY, 2001.
- Kuhn H. W., Tucker A. W., « Nonlinear programming », in J. Neyman (ed.), *Of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, p. 481-492, 1951.
- La Borderie C., Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton, Thèse de doctorat, Université Paris 6, Ecole Normale Supérieure de Cachan, mai, 1991.
- Matallah M., Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton, Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2006.
- Matallah M., La Borderie C., « Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton », *Rencontres Universitaires de Génie Civil*, La Grande Motte, June 1-2, LMGC, 2006.
- Mazars J., La Borderie C., *Recent advances in earthquake engineering and structural dynamics*, Ouest Editions, Presses Académiques, chapter Response of plain and reinforced concrete structures under cyclic loading. Experimental behavior and continuous damage modeling, p. 529-544, 1992.

- Mazars J., Ramtani S., Berthaud Y., « An experimental procedure to delocalize tensile failure and to identify unilateral effect of distributed damage », in J. Mazars, J. Bazant (eds), *Proc. In Cracking and damage : Strain Localization and Size Effect*, p. 55-64, 1989.
- Oliver J., Huespe A., Pulido M., E. C., « From continuum mechanics to fracture mechanics : the Strong discontinuity approach », *Eng. Fracture mechanics*, vol. 25, p. 113-136, 2002.
- Rashid Y., « Analysis of prestressed concrete pressure vessels », *Nucl Engng Des*, vol. 7, p. 334-344, 1968.
- Terrien M., Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction, *Bulletin de liaison Ponts et Chaussées n° 105*, 1980.