



**HAL**  
open science

# Resultados de existencia y regularidad para problemas elípticos por

Lucio Boccardo, Gisella Croce, Lourdes Moreno-Mérida

► **To cite this version:**

Lucio Boccardo, Gisella Croce, Lourdes Moreno-Mérida. Resultados de existencia y regularidad para problemas elípticos por. La Gaceta de la RSME, 2016, 19. hal-02421855

**HAL Id: hal-02421855**

**<https://hal.science/hal-02421855>**

Submitted on 20 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Resultados de existencia y regularidad para problemas elípticos

por

**Lucio Boccardo, Gisella Croce y Lourdes Moreno-Mérida**

RESUMEN. Este trabajo surge a partir de un curso sobre «Ecuaciones casi-lineales con crecimiento natural» impartido en la Universidad de Granada en abril de 2012 por el primer autor. El objetivo principal es proporcionar al lector una colección de herramientas del Análisis No Lineal aplicables a problemas elípticos no lineales de vigencia actual en la investigación matemática. En concreto, está pensado como una introducción al estudio de resultados de existencia y regularidad para determinados problemas elípticos.

### 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de estas notas, que intentan ser «auto-contenidas», es estudiar resultados de existencia y regularidad para algunos problemas elípticos cuyo modelo fundamental es

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{en } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Delta$  es el operador de Laplace y el dato  $f(x)$  pertenece a  $L^m(\Omega)$ , con  $m > 1$ . Comenzaremos presentando resultados clásicos para tratar después algunos más recientes y con plena vigencia en la investigación en este campo.

¿Qué se entiende por solución de (1.1)? Desde el punto de vista clásico, dada una función  $f$  continua, resolver el problema (1.1) consiste en encontrar una función  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  que verifique tanto la ecuación del problema como la condición de contorno. Estudiar la existencia de solución clásica es una cuestión bastante complicada, incluso para el problema modelo (1.1). En este sentido, a lo largo de estas notas (al igual que se ha hecho desde el siglo pasado) se utiliza el concepto de solución débil que generaliza el concepto clásico anterior. Vamos a trabajar principalmente en el espacio de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$ , que es un espacio de Hilbert (y por tanto completo) de modo que se amplía el espacio donde se buscan soluciones de (1.1) y el problema es más simple. Recordemos que  $H_0^1(\Omega)$  es el cierre de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en  $\Omega$  en el espacio  $H^1(\Omega)$  de las funciones tales que tanto ellas como sus derivadas están en  $L^2(\Omega)$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Todos los resultados de análisis real, análisis funcional y espacios de Sobolev que usamos se pueden consultar en el libro *Análisis funcional: teoría y aplicaciones* de Haïm Brezis ([6]).

Dada  $f(x)$  en  $L^2(\Omega)$ , se llama *solución débil* del problema (1.1) a toda función  $u \in H_0^1(\Omega)$  que verifique

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2)$$

En particular, toda solución clásica de (1.1) es también solución débil de dicho problema, y de lo que se trata ahora es de estudiar la existencia de solución en el sentido débil.

Con el objetivo de encontrar una solución de (1.1), se escribe la identidad (1.2) como

$$g(u, \varphi) - F(\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

donde  $g : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  es la forma bilineal definida por

$$g(u, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi, \quad \forall (u, \varphi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

y  $F \in (H_0^1(\Omega))'$  es un elemento del dual de  $H_0^1(\Omega)$  dado por

$$F(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Observemos que  $g$  es una forma bilineal, simétrica y continua. Además,  $g(u, u) = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ .

En un marco hilbertiano, recordemos el siguiente resultado fundamental (véase [6]).

**TEOREMA 1 (Lax-Milgram).** *Sean  $H$  un espacio de Hilbert y  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal, continua y coerciva, es decir, para la que existe una constante  $\alpha$  tal que  $g(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$ . Entonces, para todo  $F \in H'$ , existe  $u \in H$  único tal que*

$$g(u, \varphi) = \langle F, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H.$$

Además, si  $g$  es simétrica, entonces  $u$  se caracteriza por la propiedad

$$\frac{1}{2}g(u, u) - \langle F, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}g(v, v) - \langle F, v \rangle \right\}. \quad (1.3)$$

El Teorema de Lax-Milgram es una herramienta sencilla para la resolución de ecuaciones lineales elípticas. Es interesante observar la relación entre la ecuación (1.2) y el problema de minimización (1.3). En la terminología del cálculo de variaciones la ecuación (1.2) es la ecuación de Euler del problema de minimización (1.3).

Recordemos que, gracias a la inmersión de Sobolev  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ , se tiene que  $L^{(2^*)}'(\Omega) \hookrightarrow (H_0^1(\Omega))'$ , donde  $(H_0^1(\Omega))'$  es el espacio dual de  $H_0^1(\Omega)$  y  $m'$  y  $m^*$  denotan, respectivamente, el conjugado y el conjugado de Sobolev de  $m$  (véase la Sección 2). En particular,  $2^* = \frac{2N}{N-2}$  y  $(2^*)' = \frac{2N}{N+2}$ .

Además, como  $\Omega$  es un conjunto acotado,  $L^m(\Omega) \subset L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$  siempre que  $m \geq \frac{2N}{N+2}$ . Así, el Teorema de Lax-Milgram permite demostrar la existencia de solución

para el problema de Dirichlet (1.1) cuando el dato  $f$  pertenezca a  $L^m(\Omega)$  con  $m \geq \frac{2N}{N+2}$ ; es decir, de manera informal, cuando el dato  $f$  tiene bastante sumabilidad (véase la Sección 3).

La solución obtenida pertenece al espacio de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  y, por tanto, también pertenece a  $L^{2^*}(\Omega)$ . Además, los resultados clásicos de Guido Stampacchia relacionan la sumabilidad de esta solución y la sumabilidad del dato  $f$ : «cuanto mejor es la sumabilidad del dato  $f$ , mejor es la sumabilidad de la solución obtenida» (véase la Sección 4).

¿Qué ocurre cuando se estudia el problema (1.1) con un dato  $f$  que pertenece al espacio  $L^m(\Omega)$  con  $1 < m < \frac{2N}{N+2}$ ? Como en este marco de «baja sumabilidad» el dato  $f$  no es un elemento del espacio dual de  $H_0^1(\Omega)$ , que se denota por  $H^{-1}(\Omega)$ , no se pueden aplicar ni el Teorema de Lax-Milgram ni técnicas de minimización para probar directamente la existencia de solución.

En la Sección 5 se muestra un método para el estudio del problema (1.1) cuando se trabaja en este marco más delicado. Para estudiar la existencia de solución cuando  $f$  pertenece al espacio  $L^m(\Omega)$  con  $1 < m < \frac{2N}{N+2}$ , se aproxima dicho problema por una familia de problemas susceptibles de ser resueltos utilizando o bien Lax-Milgram o bien técnicas de minimización. De hecho, se consideran los problemas

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f_n, & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $f_n$  es una sucesión de funciones en  $H^{-1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  tal que  $f_n \rightarrow f$  en  $L^m(\Omega)$ ,  $\|f_n\|_{L^m(\Omega)} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}$  y  $|f_n(x)| \leq |f(x)|$  a.e. en  $\Omega$ .<sup>2</sup> La idea fundamental para obtener un resultado de existencia será considerar la sucesión de soluciones aproximadas  $\{u_n\}$  y, en algún sentido, pasar al límite cuando  $n$  tiende a infinito. Como es de esperar, en este marco de «baja sumabilidad», no se obtiene una solución de energía finita, es decir, una función en el espacio  $H_0^1(\Omega)$ . Se prueba la existencia de una función  $u$  que pertenece al espacio de Sobolev  $W_0^{1,m^*}(\Omega)$  (pedimos ahora que  $u$  y sus derivadas estén en  $L^{m^*}(\Omega)$ ) y que verifica la identidad

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Observemos que  $m^* < 2$ , y por tanto  $L^2(\Omega) \subset L^{m^*}(\Omega)$ , de modo que se ha ampliado el conjunto donde se buscan soluciones. Sorprendentemente, en contraste con los resultados anteriores, la presencia de un término de orden inferior en la ecuación del problema (1.1) afecta positivamente a la sumabilidad de la solución y de su gradiente.

En la Sección 6 se muestra cómo la presencia de un término de orden inferior, a pesar de que a priori dificulta el problema, permite obtener soluciones en el espacio de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  aunque se trabaje con datos  $f \in L^m(\Omega)$  con  $1 < m < \frac{2N}{N+2}$ . De

---

<sup>2</sup>Como es costumbre, utilizaremos *a.e.*, abreviatura de *almost everywhere*, para decir «salvo un conjunto de medida cero».

hecho, dado  $f \in L^m(\Omega)$  con  $1 < m < \frac{2N}{N+2}$ , se considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y se prueba que, para  $p$  suficientemente grande, existe una solución de energía finita, es decir, una función  $u$  en el espacio  $H_0^1(\Omega)$  que verifica

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} |u|^{p-1}u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Aunque hasta ahora se han presentado los resultados cuando la parte principal de la ecuación de (1.1) es el operador de Laplace, las demostraciones de las Secciones 3, 4, 5 y 6 se hacen, sin añadir ninguna dificultad, con un operador lineal más general. Además se estudian también algunos problemas con parte principal no lineal.

Para terminar, se considera una clase particular de problemas elípticos no lineales con crecimiento cuadrático en el gradiente. En particular, en la Sección 7 se prueban resultados de existencia para problemas que son una generalización de la ecuación de Euler-Lagrange de determinados funcionales que aparecen de forma natural en el Cálculo de Variaciones. Dada una matrix  $a(x, s)$  *elíptica* y *acotada*, es decir, para la que existen constantes positivas  $\alpha$  y  $\beta$  tales que

$$a(x, s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (1.4)$$

$$|a(x, s)| \leq \beta, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

se considera el funcional  $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, v)|\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

y se prueba, usando técnicas variacionales sencillas, que tiene mínimo. Así, si  $u$  es un mínimo para  $J$ , entonces  $u \in H_0^1(\Omega)$  es solución de la ecuación de Euler asociada

$$-\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + \frac{1}{2}a'(x, u)|\nabla u|^2 = f,$$

en el sentido

$$\int_{\Omega} a(x, u)\nabla u \nabla v + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_s(x, u)|\nabla u|^2 v - \int_{\Omega} f v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Lo característico de esta ecuación elíptica no lineal es que tiene un crecimiento cuadrático en el gradiente de la solución. Esto motiva estudiar algunos problemas elípticos con crecimiento cuadrático en el gradiente y no necesariamente variacionales.

## 2. PRELIMINARES

Detallamos a continuación algunas definiciones que utilizamos a lo largo de estas notas y mostramos algunos resultados que usamos especialmente en la Sección 4.

Para cada  $k > 0$  definimos las funciones

$$T_k(s) := \begin{cases} -k, & s \leq -k, \\ s, & |s| \leq k, \\ k, & s \geq k, \end{cases} \quad \text{y} \quad G_k(s) := s - T_k(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

representadas en Figura 1.

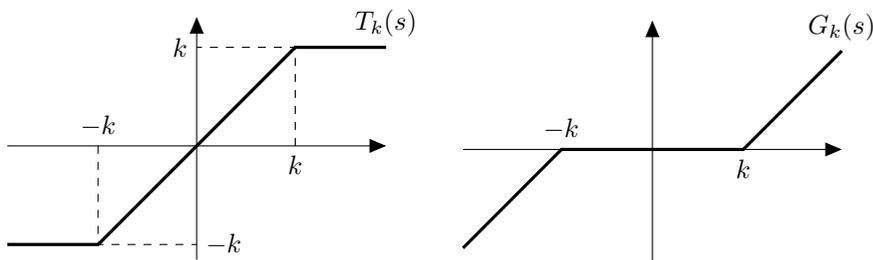


Figura 1: Gráficas de las funciones  $T_k(s)$  y  $G_k(s)$ .

A una función medible  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , le asociamos

$$g(k) := \int_{\Omega} |G_k(f)| \quad \text{y} \quad A_k := \{x \in \Omega : |f(x)| > k\}, \quad k > 0.$$

Dado  $m \geq 1$ , denotamos por  $m'$  y  $m^*$  respectivamente el *conjugado* y el *conjugado de Sobolev* (en dimensión  $N$ ) de  $m$ , que están caracterizados por las condiciones  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$  y  $\frac{1}{m} - \frac{1}{m^*} = \frac{1}{N}$ . Se tiene  $m^* = \frac{Nm}{N-m}$ .

Especialmente en la Sección 4 son de gran utilidad los resultados siguientes.

**LEMA 1.** *Si  $f \in L^1(\Omega)$ , entonces la función  $g$  es derivable a.e. y  $g'(k) = -\mu(A_k)$  a.e.  $k \in \mathbb{R}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Como

$$g(k) = \int_{\{f-k>0\}} (f-k) + \int_{\{-(f+k)>0\}} -(f+k),$$

es suficiente probar que la función

$$\tilde{g}(k) = \int_{\{f-k>0\}} (f-k), \quad k > 0,$$

es derivable a.e. con  $\tilde{g}'(k) = -\mu(A_{k,+})$ , donde  $A_{k,+} = \{x \in \Omega : f(x) - k > 0\}$ . Observamos que la función  $\tilde{g}$  es monótona y por tanto derivable a.e. A continuación calculamos su derivada. Sea  $h \in \mathbb{R}^+$ ; entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{g}(k+h) - \tilde{g}(k)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \int_{A_{k+h,+}} (f - k - h) - \int_{A_{k,+}} (f - k) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_{A_{k+h,+}} -h - \int_{\{k < f \leq k+h\}} (f - k) \right) \\ &= - \int_{\Omega} \chi_{\{f > k+h\}} - \frac{1}{h} \int_{\{k < f \leq k+h\}} (f - k). \end{aligned}$$

Como

$$0 \leq \int_{\{k < f \leq k+h\}} (f - k) \leq \int_{\{k < f \leq k+h\}} h,$$

se tiene, llamando  $\chi$  a la función característica,

$$0 \leq \frac{1}{h} \int_{\{k < f \leq k+h\}} (f - k) \leq \int_{\Omega} \chi_{\{k < f \leq k+h\}}$$

y por tanto el término  $\int_{\{k < f \leq k+h\}} (f - k)$  converge a 0 cuando  $h \rightarrow 0^+$ . Finalmente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{g}(k+h) - \tilde{g}(k)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \chi_{\{f > k+h\}} = -\mu(\{f > k\}) = -\mu(A_{k,+}). \quad \square$$

LEMA 2. Sea  $f \in L^1(\Omega)$ . Si existen constantes  $\alpha > 1$  y  $C > 0$  tales que la función  $g$  verifica

$$g(k) \leq C\mu(A_k)^\alpha, \quad \text{para todo } k > 0,$$

entonces  $f \in L^\infty(\Omega)$  y además existe una constante  $\gamma = \gamma(\alpha, \Omega)$  tal que

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\gamma.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el Lema 1 podemos reescribir la hipótesis de este lema de la siguiente forma:

$$g(k) \leq C[-g'(k)]^\alpha, \quad \text{para todo } k > 0,$$

o equivalentemente,

$$g'(k)[g(k)]^{-\frac{1}{\alpha}} \leq -\frac{1}{C^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \text{para todo } k > 0. \quad (2.1)$$

Integrando esta última desigualdad en  $(0, k)$  obtenemos

$$-\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{k}{C^{\frac{1}{\alpha}}} \geq g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} - g(0)^{1-\frac{1}{\alpha}} = g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} - \|f\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{1}{\alpha}}$$

y, por tanto,

$$g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{1}{\alpha}} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{k}{C^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad \forall k > 0. \quad (2.2)$$

En particular, (2.2) es cierta para

$$k_0 = \frac{C^{\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1 - \frac{1}{\alpha}}.$$

Esta elección de  $k$  implica que  $g(k_0) = 0$  y, en consecuencia,

$$|f(x)| \leq k_0 = \frac{C^{\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1 - \frac{1}{\alpha}} \leq \frac{C^{\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\frac{1}{\alpha}} \mu(\Omega)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1 - \frac{1}{\alpha}}.$$

Finalmente,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{-\alpha} \mu(\Omega)^{\alpha-1} C. \quad \square$$

NOTA 1. Sea  $h_0 > 0$ . Si la desigualdad  $g(k) \leq C\mu(A_k)^\alpha$  se verifica para  $k \geq h_0 > 0$  con  $\alpha > 1$  y  $C > 0$ , entonces  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Además  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \gamma$ , con  $\gamma = \gamma(C, \alpha, h_0, \Omega)$ . Para verlo, basta modificar ligeramente la prueba anterior integrando la desigualdad (2.1) en  $(h_0, k)$ .

LEMA 3. *Sen  $\{g_n\}$  y  $\{f_n\}$  sucesiones de funciones en  $L^1(\Omega)$  que verifican las siguientes propiedades:*

1.  $|f_n| \leq |g_n|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Existe  $g \in L^1(\Omega)$  tal que  $g_n \rightarrow g$  en  $L^1(\Omega)$  y a.e. en  $\Omega$ .
3. Existe  $f \in L^1(\Omega)$  tal que  $f_n \rightarrow f$  a.e. en  $\Omega$ .

Entonces  $f_n \rightarrow f$  en  $L^1(\Omega)$ .

DEMOSTRACIÓN. Definimos  $h_n = |g_n| + |f| - |f_n - f|$ . Por hipótesis,  $h_n \in L^1(\Omega)$  y  $h_n \geq 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Aplicando el Lema de Fatou a esta sucesión, obtenemos que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| \leq 0,$$

y por tanto  $f_n \rightarrow f$  en  $L^1(\Omega)$ . □

### 3. DEL PROBLEMA LINEAL AL PROBLEMA CASI-LINEAL

En esta sección estudiamos la existencia y unicidad de solución del Problema Lineal de Dirichlet y lo generalizamos añadiendo una no linealidad en el operador diferencial.

## 3.1. PROBLEMA LINEAL

Comenzamos estudiando el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)) = f(x), & \text{en } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función en  $L^m(\Omega)$  con  $m \geq 1$  y  $a(x)$  es una matriz elíptica y acotada, es decir, para la que existen constantes positivas  $\alpha$  y  $\beta$  tales que se verifican (1.4) y (1.5).

Decimos que una función  $u$  es solución débil de (3.1) si  $u \in H_0^1(\Omega)$  y verifica

$$\int_{\Omega} a(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**TEOREMA 2.** *Supongamos que  $f \in L^m(\Omega)$  con  $m \geq \frac{2N}{N+2}$  y que  $a$  verifica las hipótesis (1.4) y (1.5). Entonces existe una única solución débil  $u$  del problema (3.1).*

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $a$  es una matriz elíptica y acotada, la forma bilineal  $g : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$  dada por

$$g(u, v) = \int_{\Omega} a(x)\nabla u \cdot \nabla v, \quad (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

es continua y coerciva, es decir existe una constante positiva  $\alpha$  tal que

$$g(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Además, si  $m \geq \frac{2N}{N+2}$ , la aplicación

$$v \mapsto \int_{\Omega} f v, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

es una forma lineal sobre  $H_0^1(\Omega)$  ya que  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$  y, por lo tanto,  $L^{(2^*)'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ , siendo  $(2^*)' = \frac{2N}{N+2}$ .

De esta manera, se verifican las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1) y, por éste, obtenemos el resultado.  $\square$

**NOTA 2.** Si además  $a$  es una matriz simétrica, podemos caracterizar la solución de (3.1) como mínimo de un determinado funcional. En concreto,  $u$  es solución débil de (3.1) si y solo si

$$u = \min\{J(v) : v \in H_0^1(\Omega)\},$$

donde  $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^N$  está definido mediante

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x)\nabla v \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f v, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

### 3.2. PROBLEMA CASILINEAL

A continuación generalizamos el resultado anterior al caso en que  $a = a(x, s)$ . Estudiamos así el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u(x)) = f(x), & \text{en } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde  $a(x, s)$  es, de nuevo, una matriz elíptica y acotada

**TEOREMA 3.** *Supongamos que  $f \in L^m(\Omega)$  con  $m \geq \frac{2N}{N+2}$  y que  $a$  verifica las hipótesis (1.4) y (1.5). Entonces existe una solución débil  $u$  del problema (3.2), es decir, una función  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} a(x, u)\nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**DEMOSTRACIÓN.** La existencia de solución débil del problema (3.2) se obtiene como aplicación del Teorema de punto fijo de Schauder. En efecto, dada una función  $v \in L^2(\Omega)$  definimos  $u := H(v)$  como la única solución de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, v(x))\nabla u(x)) = f(x), & \text{en } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Obsérvese que, gracias al Teorema 2,  $u$  está bien definida. Tomando  $u$  como función test deducimos, usando la propiedad (1.4), la desigualdad de Hölder y la inmersión continua  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ , que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq C \|f\|_{L^m(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

siendo  $C$  una constante positiva. Por tanto, el hecho de que  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  implica

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C} \|f\|_{L^m(\Omega)},$$

donde  $\tilde{C}$  denota otra constante positiva. Por consiguiente, la bola de  $L^2(\Omega)$  con radio  $\tilde{C} \|f\|_{L^m(\Omega)}$  queda invariante bajo la aplicación  $H$ . Además, como la inmersión  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  es compacta, la aplicación  $H$  es continua y compacta en  $L^2(\Omega)$ . De esta manera, se verifican las hipótesis del Teorema de punto fijo de Schauder y, por éste, existe  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $u = H(u)$ , es decir,  $u$  es solución débil de (3.2).  $\square$

**NOTA 3.** En este caso, no hemos podido aplicar el Teorema de Lax-Milgram debido a la no linealidad que hemos introducido.

Buscando una conexión con el método del Cálculo de Variaciones, consideramos ahora el funcional  $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, v)\nabla v \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f v, \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

y estudiamos la existencia de mínimo.

Si el funcional  $J$  es coercivo, es decir,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J(v) = +\infty,$$

entonces existe  $R > 0$  tal que

$$\inf\{J(v) : v \in H_0^1(\Omega)\} = \inf\{J(v) : v \in B(0; R)\},$$

donde  $B(0; R)$  denota la bola cerrada en  $H_0^1(\Omega)$ . En otras palabras, la coercividad del funcional implica que la búsqueda de mínimos de éste se realice sobre una bola. Recordemos que, en un espacio de Banach  $X$ , las bolas son compactas si y solo si el espacio  $X$  tiene dimensión finita. Luego, como  $J$  está definido sobre un espacio de funciones de dimensión infinita (espacio de Sobolev), no tenemos esta propiedad de compacidad. Sin embargo, si en los espacios de Sobolev trabajamos con la convergencia débil, entonces las bolas tienen la propiedad de Bolzano-Weierstrass (recuperando así la propiedad de compacidad). Desafortunadamente, el funcional  $J$  no es continuo si consideramos la convergencia débil, pero es (débilmente) semicontinuo inferior, lo cual es suficiente para garantizar la existencia de mínimo. En este sentido, se prueba a continuación que el funcional  $J$  definido anteriormente es débilmente semicontinuo inferior y coercivo, y por tanto  $J$  tiene un mínimo.

**TEOREMA 4.** *Supongamos que  $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$  y que  $a$  verifica las hipótesis (1.4) y (1.5). Entonces existe  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $J(u) = \min\{J(v) : v \in H_0^1(\Omega)\}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Estudiamos la propiedades de coercividad y semicontinuidad débil del funcional  $J$ .

1.  $J$  es coercivo. En efecto, usando (1.4) y la desigualdad de Hölder tenemos

$$J(v) \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_{H_0^1}^2 - \|f\|_{\frac{2N}{N+2}} \|v\|_{2^*}.$$

Usando la desigualdad de Sobolev, y llamando  $\mathcal{S}$  a la constante de Sobolev, tenemos

$$-\|f\|_{\frac{2N}{N+2}} \|v\|_{2^*} \geq -\mathcal{S} \|f\|_{\frac{2N}{N+2}} \|v\|_{H_0^1}$$

y, por tanto,

$$J(v) \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_{H_0^1}^2 - \mathcal{S} \|f\|_{\frac{2N}{N+2}} \|v\|_{H_0^1}.$$

Luego  $J$  es acotado inferiormente.

2. Si  $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$  es una sucesión minimizante, entonces  $\{u_n\}$  está acotada en  $H_0^1(\Omega)$  por la coercividad del funcional  $J$ .
3. Como  $\{u_n\}$  está acotada en  $H_0^1(\Omega)$ , pasando si es necesario a una subsucesión, podemos afirmar que tiene un límite débil  $u \in H_0^1(\Omega)$ , es decir, que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega).$$

Por tanto, utilizando las inmersiones de Sobolev obtenemos

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \quad \text{fuerte en } L^{2^*}(\Omega), \\ u_n &\longrightarrow u \quad \text{fuerte en } L^p(\Omega) \quad \forall p \in [1, 2^*), \\ u_n &\longrightarrow u \quad \text{a.e. en } \Omega. \end{aligned}$$

4.  $J$  es débilmente semicontinuo inferiormente. En efecto, como

$$\int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla(u_n - u) \cdot \nabla(u_n - u) \geq 0,$$

deducimos

$$\int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \geq 2 \int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla u \cdot \nabla u_n - \int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla u \cdot \nabla u. \quad (3.3)$$

Utilizando (1.5) y las convergencias del punto 3, podemos afirmar que

$$a(x, u_n) \nabla u \longrightarrow a(x, u) \nabla u \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Tomando límites inferiores en la desigualdad (3.3) obtenemos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla u_n \cdot \nabla u_n \geq \int_{\Omega} a(x, u) \nabla u \cdot \nabla u$$

y, por tanto,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n) \geq J(u).$$

Como consecuencia directa de las propiedades de  $J$  obtenemos el resultado. □

NOTA 4 (Véase [1]). Si  $u$  es un mínimo del funcional  $J$ , entonces

$$J(u) \leq J(u + tv), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Luego, si definimos la función

$$y(t) = J(u + tv) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, u + tv) \nabla(u + tv) \cdot \nabla(u + tv) - \int_{\Omega} f(u + tv),$$

tenemos que  $y(0) \leq y(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, si  $y(t)$  fuese derivable en  $t = 0$ , tendríamos que  $y'(0) = 0$ .

Supongamos que existe la derivada parcial  $a_s(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} a(x, s)$  y que está acotada, es decir, que existe  $\gamma > 0$  tal que

$$|a_s(x, s)| \leq \gamma, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Si además imponemos que  $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , entonces  $y(t)$  será derivable en  $t = 0$  con

$$y'(0) = \int_{\Omega} a(x, u) \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_s(x, u) |\nabla u|^2 v - \int_{\Omega} f v = 0.$$

En consecuencia, si  $u$  es un mínimo del funcional  $J$ ,  $u$  es solución de la ecuación de Euler-Lagrange

$$-\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + \frac{1}{2}a_s(x, u)|\nabla u|^2 = f,$$

en el sentido

$$\int_{\Omega} a(x, u)\nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_s(x, u)|\nabla u|^2 v - \int_{\Omega} f v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Obsérvese que la matriz no lineal que hemos introducido nos ha obligado a derivar solo respecto a las direcciones  $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ .

#### 4. REGULARIDAD DE LAS SOLUCIONES EN EL ESPACIO DE LEBESGUE $L^m$

Dadas una matriz elíptica y acotada  $a(x, s)$  y una función  $f \in L^m(\Omega)$  con  $m \geq 1$ , hemos probado en la sección anterior que existe solución débil  $u$  del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u(x)) = f(x), & \text{en } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

cuando  $m \geq \frac{2N}{N+2}$ . Además, por las inmersiones de Sobolev,  $u \in L^{2^*}(\Omega)$ .

A continuación estudiamos la relación que existe entre la sumabilidad de la solución  $u$  y la sumabilidad del dato  $f$ . De hecho probamos que:

- si  $f \in L^m(\Omega)$ ,  $m > N/2$ , entonces  $u \in L^\infty(\Omega)$ ;
- si  $f \in L^m(\Omega)$ ,  $m \in [2N/(N+2), N/2)$ , entonces  $u \in L^{m^{**}}(\Omega)$ .

**TEOREMA 5.** *Si  $f \in L^m(\Omega)$  con  $m > N/2$  y  $a$  verifica las hipótesis (1.4) y (1.5), entonces cualquier solución débil  $u$  del problema (4.1) pertenece a  $L^\infty(\Omega)$ . Además, se tiene la estimación*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)},$$

donde la constante  $C$  depende de  $N$ ,  $\alpha$  y  $m$ .

**DEMOSTRACIÓN (MÉTODO DE STAMPACCHIA).** Como queremos estudiar el comportamiento de la solución en el infinito, tomamos  $v = G_k(u)$  como función test en la formulación débil del problema (4.1). La hipótesis (1.4) sobre  $a(x, u)$  implica que

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla G_k(u)|^2 \leq \int_{\Omega} f G_k(u) \quad (4.2)$$

y, por la desigualdad de Sobolev,

$$\alpha S^2 \left( \int_{\Omega} |G_k(u)|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\Omega} f G_k(u). \quad (4.3)$$

A continuación, aplicamos la desigualdad de Hölder dos veces, primero con exponentes  $2^*$  (y su conjugado) y después con exponentes  $m\frac{N+2}{2N}$  (y su conjugado), al segundo término de la desigualdad anterior. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} fG_k(u) &\leq \left( \int_{\Omega} |G_k(u)|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \left( \int_{A_k} |f|^{\frac{2N}{N+2}} \right)^{\frac{N+2}{2N}} \\ &\leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left( \int_{\Omega} |G_k(u)|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \mu(A_k) \left[ 1 - \frac{2N}{(N+2)m} \right]^{\frac{N+2}{2N}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Uniendo las desigualdades (4.3) y (4.4) conseguimos

$$\alpha \mathcal{S}^2 \left( \int_{\Omega} |G_k(u)|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left( \int_{\Omega} |G_k(u)|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \mu(A_k) \left[ 1 - \frac{2N}{(N+2)m} \right]^{\frac{N+2}{2N}}$$

y, en consecuencia,

$$\alpha \mathcal{S}^2 \left( \int_{\Omega} |G_k(u)|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \mu(A_k) \left[ 1 - \frac{2N}{(N+2)m} \right]^{\frac{N+2}{2N}}. \quad (4.5)$$

De nuevo, por la desigualdad de Hölder con exponentes  $2^*$  (y su conjugado),

$$\int_{\Omega} |G_k(u)| \leq \left( \int_{\Omega} |G_k(u)|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \mu(A_k)^{\frac{N+2}{2N}}$$

y, por tanto, (4.5) implica que

$$g(k) = \int_{\Omega} |G_k(u)| \leq \frac{1}{\alpha \mathcal{S}^2} \|f\|_{L^m(\Omega)} \mu(A_k)^{1 + \frac{2}{N} - \frac{1}{m}}.$$

El Lema 2 con  $\alpha = 1 + \frac{2}{N} - \frac{1}{m}$  y  $C = \frac{1}{\alpha \mathcal{S}^2} \|f\|_{L^m(\Omega)}$  concluye el resultado.  $\square$

NOTA 5. Resaltamos que en la prueba anterior hemos demostrado que, si una función  $u \in H_0^1(\Omega)$  verifica la desigualdad (4.2), entonces  $u$  está acotada.

TEOREMA 6. *Supongamos que  $f \in L^m(\Omega)$  con  $m > N/2$  y que  $a$  verifica las hipótesis (1.4) y (1.5). Si  $u$  es una solución débil del problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.6)$$

entonces  $u$  está acotada.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $u$  una solución débil de (4.6). Tomamos  $v = G_k(u)$  como función test en la formulación débil del problema. Entonces, usando (1.4) y eliminando los términos positivos conseguimos la estimación

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla G_k(u)|^2 \leq \int_{\Omega} fG_k(u)$$

y, por tanto, aplicando la Nota 5 obtenemos el resultado.  $\square$

TEOREMA 7. Si  $f \in L^m(\Omega)$  con  $\frac{2N}{N+2} \leq m < \frac{N}{2}$  y a verifica las hipótesis (1.4) y (1.5), entonces cualquier solución débil  $u$  del problema (4.1) pertenece a  $L^{m^{**}}(\Omega)$ . Además,

$$\|u\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^m(\Omega)},$$

donde la constante  $C$  depende de  $N$ ,  $m$  y  $\alpha$ .

DEMOSTRACIÓN. La idea principal para obtener más información sobre la sumabilidad de una solución es tomar como función test una potencia de la misma. Como no podemos afirmar que, en este caso, las soluciones estén acotadas, necesitamos tomar potencias de su truncamiento. Por ello, dado  $\lambda > 0$  elegimos como función test

$$v = \frac{|T_k(u)|^{2\lambda} T_k(u)}{2\lambda + 1}.$$

De esta manera obtenemos la siguiente identidad:

$$\frac{1}{2\lambda + 1} \int_{\Omega} a(x, u) \nabla u \cdot \nabla (|T_k(u)|^{2\lambda} T_k(u)) = \frac{1}{2\lambda + 1} \int_{\Omega} f |T_k(u)|^{2\lambda} T_k(u). \quad (4.7)$$

A continuación, estudiamos por separado los dos términos de la identidad anterior. Utilizando (1.4) y la desigualdad de Sobolev en el término izquierdo de la identidad (4.7) tenemos

$$\frac{1}{2\lambda + 1} \int_{\Omega} a(x, u) \nabla u \cdot \nabla (|T_k(u)|^{2\lambda} T_k(u)) \geq \alpha \mathcal{S}^2 \left( \int_{\Omega} |T_k(u)|^{(\lambda+1)2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}}. \quad (4.8)$$

Usando la desigualdad de Hölder con exponentes  $m$  (y su conjugado) en el término derecho de la identidad (4.7) obtenemos

$$\frac{1}{2\lambda + 1} \int_{\Omega} f |T_k(u)|^{2\lambda} T_k(u) \leq \frac{1}{2\lambda + 1} \left( \int_{\Omega} |T_k(u)|^{(2\lambda+1)m'} \right)^{\frac{1}{m'}} \|f\|_{L^m(\Omega)}. \quad (4.9)$$

Entonces, aplicando las estimaciones (4.8) y (4.9) a la identidad (4.7), conseguimos

$$\alpha \mathcal{S}^2 (2\lambda + 1) \left[ \int_{\Omega} |T_k(u)|^{(\lambda+1)2^*} \right]^{\frac{2}{2^*}} \leq \left[ \int_{\Omega} |T_k(u)|^{(2\lambda+1)m'} \right]^{\frac{1}{m'}} \|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Para terminar, elegimos  $\lambda$  tal que  $(\lambda + 1)2^* = m'(2\lambda + 1)$ , esto es,

$$\lambda = \frac{-mN + 2N - 2m}{4m - 2N}.$$

Como  $2/2^* - 1/m' > 0$  (ya que  $m < N/2$ ), deducimos que

$$\|T_k(u)\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq C(\alpha, \mathcal{S}, m, N) \|f\|_{L^m(\Omega)},$$

y, tomando límites cuando  $k \rightarrow \infty$ , el Lema de Fatou concluye la prueba.  $\square$

NOTA 6 (Véase [5]). En el caso límite, es decir, cuando  $m = N/2$ , se tiene el resultado siguiente: Si  $f \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ , entonces toda solución débil  $u$  del problema (4.1) verifica que  $e^{\lambda|u|}$  pertenece a  $L^{2^*}(\Omega)$  para cualquier  $\lambda > 0$ .

## 5. PROBLEMAS CON DATO DE SUMABILIDAD BAJA. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN

Vamos a dar resultados de existencia para el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u(x)) = f(x), & \text{en } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

que es el mismo que hemos tratado en la sección anterior, pero ahora lo estudiamos cuando  $f \in L^m(\Omega)$  con  $1 \leq m < \frac{2N}{N+2}$  (y donde  $a(x, s)$  sigue siendo una matriz elíptica y acotada).

Probamos que existe solución en el sentido distribucional, es decir, que existe una función  $u$ , al menos en  $W_0^{1,1}(\Omega)$ , tal que

$$\int_{\Omega} a(x, u)\nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Además, al igual que hemos hecho en el caso  $m \geq \frac{2N}{N+2}$ , podemos relacionar la sumabilidad de la solución distribucional con la sumabilidad del dato  $f$ .

En particular, demostramos el siguiente resultado.

**TEOREMA 8.** *Si  $f \in L^m(\Omega)$  con  $1 \leq m < \frac{2N}{N+2}$  y a verifica las hipótesis (1.4) y (1.5), entonces existe solución distribucional del problema (5.1) con*

- $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$ , si  $1 < m < \frac{2N}{N+2}$ ,
- $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ , para todo  $q < \frac{N}{N-1}$ , si  $m = 1$ .

### 5.1. PROBLEMAS APROXIMADOS

Para estudiar la existencia de solución distribucional del problema (5.1), lo aproximamos por una familia de problemas susceptibles de ser resueltos por los Teoremas 3 y 5. Consideramos

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u_n)\nabla u_n) = f_n, & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde  $f_n := T_n(f)$ . Observemos que  $f_n$  pertenece a  $H^{-1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  y que  $f_n \rightarrow f$  en  $L^m(\Omega)$ ,  $\|f_n\|_{L^m(\Omega)} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}$  y  $|f_n(x)| \leq |f(x)|$  a.e. en  $\Omega$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la existencia de solución  $u_n$  está garantizada por el Teorema 3. Además,  $u_n$  pertenece a  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  por el Teorema 5.

**LEMA 4.** *Supongamos que  $f \in L^m(\Omega)$  con  $m > 1$  y que a verifica las hipótesis (1.4) y (1.5). Si  $u_n$  es una solución de (5.2) para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces la sucesión  $\{u_n\}$  está acotada en  $W_0^{1,m^*}(\Omega)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Dividimos la prueba en dos pasos.

*Paso I:*  $\{u_n\}$  está acotada en  $L^{m^{**}}(\Omega)$ . Para conseguir esta estimación nos gustaría tomar como función test la función  $|u_n|^{2\lambda-1}$  con  $\lambda > \frac{1}{2}$ . Sin embargo, esta elección

no es admisible, porque su gradiente es singular cuando  $u_n = 0$ . Para solventar esta dificultad, fijamos  $\epsilon > 0$  y tomamos, como función test, en (5.2),

$$v_n = [(\epsilon + |u_n|)^{2\lambda-1} - \epsilon^{2\lambda-1}] \operatorname{sgn}(u_n),$$

donde  $\lambda = \frac{m^{**}}{2^*} (> 1/2)$ . Observamos que  $\lambda 2^* = (2\lambda - 1)m'$  y que  $1/2 < \lambda < 1$ . Así,

$$\int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla u_n \nabla v_n = \int_{\Omega} f v_n. \quad (5.3)$$

A continuación estimamos ambos términos de la identidad (5.3). Usando la desigualdad de Hölder con exponentes  $m$  (y su conjugado) en el término derecho, obtenemos que

$$\int_{\Omega} f_n v_n \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left( \int_{\Omega} (\epsilon + |u_n|)^{(2\lambda-1)m'} \right)^{\frac{1}{m'}}.$$

En el término izquierdo de la identidad (5.3), usamos (1.4) y la desigualdad de Sobolev. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla u_n \cdot \nabla v_n &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 (2\lambda - 1) (\epsilon + |u_n|)^{2\lambda-2} \\ &= (2\lambda - 1) \alpha \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla [(\epsilon + |u_n|)^{\lambda} - \epsilon^{\lambda}]}{\lambda} \right|^2 \geq \frac{(2\lambda - 1) \alpha \mathcal{S}^2}{\lambda^2} \left( \int_{\Omega} [(\epsilon + |u_n|)^{\lambda} - \epsilon^{\lambda}]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}}. \end{aligned}$$

Utilizando ambas estimaciones en (5.3) deducimos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^m(\Omega)} \left( \int_{\Omega} (\epsilon + |u_n|)^{(2\lambda-1)m'} \right)^{\frac{1}{m'}} &\geq (2\lambda - 1) \alpha \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(\epsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)}} \\ &\geq \frac{(2\lambda - 1) \alpha \mathcal{S}^2}{\lambda^2} \left( \int_{\Omega} [(\epsilon + |u_n|)^{\lambda} - \epsilon^{\lambda}]^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}}. \quad (5.4) \end{aligned}$$

Finalmente, tomando límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero en la desigualdad anterior, nos queda

$$\frac{(2\lambda - 1) \alpha \mathcal{S}^2}{\lambda^2} \left( \int_{\Omega} |u_n|^{\frac{2^* m^{**}}{2}} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left( \int_{\Omega} |u_n|^{m^{**}} \right)^{\frac{1}{m'}}$$

y por tanto, como  $2/2^* > 1/m'$ , concluimos que

$$\int_{\Omega} |u_n|^{m^{**}} \leq C,$$

donde  $C$  es una constante que depende de  $\mathcal{S}$ ,  $m$ ,  $\alpha$  y  $\|f\|_{L^m(\Omega)}$ .

*Paso II:*  $\{u_n\}$  está acotada en  $W_0^{1,m^*}(\Omega)$ . El Paso I y (5.4) implican que la sucesión  $\int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(\epsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)}}$  está acotada. Dado  $q < 2$ , escribimos  $\int_{\Omega} |\nabla u_n|^q$  de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^q = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^q}{(\epsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)\frac{q}{2}}} (\epsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)\frac{q}{2}}.$$

La desigualdad de Hölder con exponentes  $2/q$  (y su conjugado) implica que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^q \leq \left( \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(\epsilon + |u_n|)^{2(1-\lambda)}} \right)^{\frac{q}{2}} \left( \int_{\Omega} (\epsilon + |u_n|)^{(1-\lambda)\frac{2q}{2-q}} \right)^{1-\frac{q}{2}}.$$

Finalmente, elegimos  $q$  de tal forma que  $\frac{(1-\lambda)2q}{2-q} = m^{**}$ , es decir,  $q = m^*$ . Por tanto, del Paso I se sigue que la sucesión  $\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{m^*}$  está uniformemente acotada.  $\square$

NOTA 7 (Véase [5]). En el caso  $f \in L^1(\Omega)$ , si  $u_n$  es una solución del problema (5.2), entonces la sucesión  $\{u_n\}$  está acotada en  $W_0^{1,q}(\Omega)$  para cualquier  $q < \frac{N}{N-1}$ .

## 5.2. PRUEBA DEL TEOREMA 8

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 8. Una vez que hemos estudiado los problemas aproximados, abordamos el estudio de existencia de solución distribucional del problema (5.1). Dividimos la prueba en varios pasos.

*Paso I:* Suponemos  $m > 1$ . Sea  $\{u_n\}$  una sucesión formada por soluciones  $u_n$  de (5.2). Por el Lema 4, existe  $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$  tal que, al menos para una subsucesión,  $u_n$  converge débilmente a  $u$  en  $W_0^{1,m^*}(\Omega)$ . En particular,  $\nabla u_n$  converge débilmente a  $\nabla u$  en  $L^{m^*}(\Omega)$ . Recordamos que, por (1.5),  $|a(x, u)| \leq \beta$  a.e.  $x \in \Omega$ . Por tanto, dada  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , el Teorema de Lebesgue nos permite afirmar que

$$a(x, u_n)\nabla\varphi \longrightarrow a(x, u)\nabla\varphi \quad \text{en } L^{(m^*)'}.$$

En consecuencia, podemos pasar al límite en la formulación débil de los problemas (5.2) y obtener el resultado.

*Paso II:* Supongamos que  $m = 1$ . Al igual que en el caso  $m > 1$ , consideramos una sucesión  $\{u_n\}$  formada por soluciones  $u_n$  de (5.2). Por la Nota 7, existe  $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$  con  $q < \frac{N}{N-1}$  tal que, bajo una subsucesión,  $u_n$  converge débilmente a  $u$  en  $W_0^{1,q}(\Omega)$ . Utilizando el mismo razonamiento que en el primer paso podemos pasar al límite en la formulación débil de los problemas (5.2) y concluir la prueba.  $\square$

## 6. EFECTO REGULARIZANTE DEL TÉRMINO DE ORDEN INFERIOR SOBRE LAS SOLUCIONES

Consideramos ahora el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + |u|^{p-1}u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde, de nuevo,  $a(x, s)$  es una matriz elíptica y acotada.

Veremos que, para  $p$  suficientemente grande, el término de orden inferior  $|u|^{p-1}u$  tiene un efecto regularizante sobre las soluciones de dicho problema. De hecho, probamos el siguiente resultado:

TEOREMA 9. *Supongamos que  $f \in L^m(\Omega)$  y que  $a$  verifica las hipótesis (1.4) y (1.5). Si  $m > 1$  y  $p \geq \frac{1}{m-1}$ , entonces existe una solución  $u \in H_0^1(\Omega)$  del problema (6.1) en el siguiente sentido:*

$$\int_{\Omega} a(x, u) \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

NOTA 8. Obsérvese el resultado del Teorema 8. El término de orden inferior, aunque dificulta el estudio del problema, ha permitido obtener solución en el espacio de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$ .

### 6.1. PROBLEMAS APROXIMADOS

De nuevo seguiremos un proceso de aproximación para probar el Teorema 9. Por eso estudiamos en primer lugar la existencia de solución del problema (6.1) suponiendo que  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Para ello, consideramos los siguientes problemas aproximados:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u_n) \nabla u_n) + |T_n(u_n)|^{p-1} T_n(u_n) = f, & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.2)$$

Por el Teorema de punto fijo de Schauder, existe una solución  $u_n \in H_0^1(\Omega)$  de (6.2) en el siguiente sentido:

$$\int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla u_n \nabla \varphi + \int_{\Omega} |T_n(u_n)|^{p-1} T_n(u_n) \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Además, el uso de  $G_k(u_n)$  como función test implica que

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^2 \leq \int_{\Omega} f G_k(u_n),$$

y por tanto, usando el método de Stampacchia para estimaciones en  $L^\infty$ , la sucesión  $\{u_n\}$  está (uniformemente) acotada en  $L^\infty(\Omega)$ . Por otra parte, tomando  $\varphi = u_n$  como función test deducimos que

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \leq C \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)},$$

donde  $C$  es una constante positiva y, por consiguiente, que la sucesión  $\{u_n\}$  está también acotada en  $H_0^1(\Omega)$ . En consecuencia, existe  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  tal que  $u_n \rightharpoonup u$  débilmente en  $H_0^1(\Omega)$  (al menos para una subsucesión).

Finalmente, pasando al límite en la formulación débil, concluimos que  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  verifica

$$\int_{\Omega} a(x, u) \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

es decir,  $u$  es solución de (6.1).

A continuación, estudiamos el problema (6.1) cuando la sumabilidad del dato  $f$  es baja ( $m > 1$ ). La idea para probar el Teorema 9 es aproximar (6.1) por la siguiente familia de problemas:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u_n)\nabla u_n) + |u_n|^{p-1}u_n = f_n, & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.3)$$

donde  $f_n = T_n(f)$ . Por los resultados anteriores, existe solución  $u_n$  de (6.3), es decir,  $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} a(x, u_n)\nabla u_n \nabla \varphi + \int_{\Omega} |u_n|^{p-1}u_n \varphi = \int_{\Omega} T_n(f) \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad n \in \mathbb{N}.$$

En los siguientes lemas estudiamos algunas propiedades de las soluciones  $u_n$  del problema (6.3).

LEMA 5. *Si  $\{u_n\}$  es una sucesión formada por soluciones  $u_n$  del problema (6.3), entonces*

$$\left[ \int_{\Omega} |u_n|^{pm} \right]^{\frac{1}{m}} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $u_n \in L^\infty(\Omega)$  y  $p > \frac{1}{m-1}$ ,  $\varphi = |u_n|^{p(m-1)} \operatorname{sgn}(u_n)$  puede elegirse como función test en (6.3). De esta manera,

$$\int_{\Omega} a(x, u_n)\nabla u_n \nabla \left( |u_n|^{p(m-1)} \operatorname{sgn}(u_n) \right) + \int_{\Omega} |u_n|^{pm} = \int_{\Omega} f_n |u_n|^{p(m-1)} \operatorname{sgn}(u_n). \quad (6.5)$$

Eliminando el término positivo

$$\int_{\Omega} a(x, u_n)\nabla u_n \nabla \left( |u_n|^{p(m-1)} \operatorname{sgn}(u_n) \right)$$

y utilizando la desigualdad de Hölder en el término derecho de la identidad (6.5), deducimos que

$$\int_{\Omega} |u_n|^{pm} \leq \int_{\Omega} |f| |u_n|^{p(m-1)} \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left[ \int_{\Omega} |u_n|^{pm} \right]^{1-\frac{1}{m}}$$

y, por tanto, obtenemos el resultado. □

LEMA 6. *Si  $\{u_n\}$  es una sucesión formada por soluciones  $u_n$  del problema (6.3), entonces la sucesión  $\{u_n\}$  está acotada en  $H_0^1(\Omega)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Elegimos  $u_n$  como función test en la formulación débil de (6.3). Así,

$$\int_{\Omega} a(x, u_n)\nabla u_n \nabla u_n + \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} = \int_{\Omega} f_n u_n.$$

Utilizando (1.4) en el primer término de la identidad anterior, y la desigualdad de Hölder en el término derecho, tenemos que

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \leq \int_{\Omega} |T_n(f)| |u_n| \leq \left[ \int_{\Omega} |u_n|^{pm} \right]^{\frac{1}{pm}} \left[ \int_{\Omega} |f|^{(pm)'} \right]^{\frac{1}{(pm)'}}.$$

El hecho de que  $(pm)' < m$  y el Lema 5 concluyen la prueba.  $\square$

## 6.2. PRUEBA DEL TEOREMA 9

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9. Queremos pasar al límite en la formulación débil de los problemas (6.3) para probar la existencia de solución débil del problema (6.1).

Sea  $u_n \in H_0^1(\Omega)$  solución del problema (6.3). Por el Lema 6, existe una función  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que, al menos para una subsucesión,  $u_n \rightarrow u$  débilmente en  $H_0^1(\Omega)$ . Además, el uso de  $u_n$  como función test en la formulación débil y el hecho de que la sucesión  $u_n$  esté acotada en  $H_0^1(\Omega)$ , implican que la sucesión  $\int_{\Omega} |u_n|^{p+1}$  está acotada.

Esta información no es suficiente para poder pasar al límite en el término de orden inferior  $|u_n|^{p-1} u_n$ . Por ello, utilizando el Teorema de Vitali, probamos convergencia fuerte en  $L^1$ . En efecto, sea  $E$  un subconjunto medible y  $k$  un número positivo. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_E |u_n|^p &= \int_{E \cap \{|u_n| \leq k\}} |u_n|^p + \int_{E \cap \{|u_n| > k\}} |u_n|^p \\ &\leq k^p \mu(E) + \frac{1}{k} \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} \leq k^p \mu(E) + \frac{c}{k}, \end{aligned}$$

donde  $c$  es una constante positiva. Por tanto, tomando límite cuando  $\mu(E) \rightarrow 0$  y aplicando el Teorema de Vitali, concluimos que  $|u_n|^{p-1} u_n \rightarrow |u|^{p-1} u$  fuertemente en  $L^1(\Omega)$ . Finalmente, pasamos al límite en la formulación débil de (6.3) para deducir que  $u \in H_0^1(\Omega)$  verifica

$$\int_{\Omega} a(x, u) \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

lo que concluye la prueba.  $\square$

## 7. PROBLEMA CASILINEAL CON CRECIMIENTO CUADRÁTICO EN EL GRADIENTE

En la Sección 3 vimos que, bajo ciertas hipótesis, si  $u \in H_0^1(\Omega)$  es un mínimo del funcional

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, v) |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v, \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

entonces  $u$  es solución de la ecuación de Euler asociada

$$-\operatorname{div}(a(x, u) \nabla u) + \frac{1}{2} a'(x, u) |\nabla u|^2 = f.$$

En esta sección, generalizando el ejemplo anterior, vamos a estudiar el problema no necesariamente variacional

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + \mu u = b(x, u)|\nabla u|^2 + f(x), & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.1)$$

Estudiamos la existencia e integrabilidad de solución para el problema (7.1), donde  $b : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Carathéodory tal que, para algún  $\gamma > 0$ ,

$$|b(x, s)| \leq \gamma; \quad (7.2)$$

$a = a(x, s)$  es una matriz simétrica verificando

$$a(x, s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \quad |a(x, s)| \leq \beta, \quad (7.3)$$

y  $\mu > 0$ .

**TEOREMA 10.** *Si  $f \in L^\infty(\Omega)$ , entonces existe una solución  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  del problema (7.1) en el siguiente sentido:*

$$\int_{\Omega} a(x, u)\nabla u \cdot \nabla \varphi + \mu \int_{\Omega} u\varphi = \int_{\Omega} b(x, u)|\nabla u|^2 \varphi + \int_{\Omega} f\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Aproximamos (7.1) por la siguiente familia de problemas:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + \mu u = b(x, u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} + f(x), & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.4)$$

Por el Teorema de punto fijo de Schauder, para cada  $n$  fijo existe solución  $u_n \in H_0^1(\Omega)$  del problema (7.4). Además, como

$$|b(x, u_n)| \frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \leq n\gamma,$$

por el Teorema 6  $u_n$  pertenece a  $L^\infty(\Omega)$ . En los siguientes lemas probamos que la sucesión  $\{u_n\}$  de soluciones está acotada en  $L^\infty(\Omega)$  y en  $H_0^1(\Omega)$ . Con este fin, definimos la función

$$\varphi(t) = (e^{2\lambda|t|} - 1) \operatorname{sgn}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

que, para  $\lambda > \frac{\gamma}{2\alpha}$ , verifica

$$\alpha\varphi' - \gamma\varphi \geq \gamma > 0. \quad (7.5)$$

**LEMA 7.** *Si  $\{u_n\}$  es una sucesión formada por soluciones de (7.4), entonces  $\{u_n\}$  está acotada en  $L^\infty(\Omega)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $k = \frac{\|f\|_\infty}{\mu}$ . Como  $u_n \in L^\infty(\Omega)$ , es admisible tomar  $\varphi(G_k(u_n))$  como función test en la formulación débil del problema (7.4) para deducir que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, u_n)\nabla u_n \nabla G_k(u_n) \varphi'(G_k(u_n)) + \int_{\Omega} \mu u_n \varphi(G_k(u_n)) \\ &= \int_{\Omega} b(x, u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \varphi(G_k(u_n)) + \int_{\Omega} f\varphi(G_k(u_n)). \end{aligned}$$

Notemos que  $\varphi(G_k(u_n)) = 0$  si y solo si  $0 \leq |u_n| \leq k$ . Así,

$$\begin{aligned} \nabla u_n \nabla G_k(u_n) \varphi'(G_k(u_n)) &= |\nabla G_k(u_n)|^2 \varphi'(G_k(u_n)), \\ \frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n} |\nabla u_n|^2} \varphi(G_k(u_n)) &= \frac{|\nabla G_k(u_n)|^2}{1 + \frac{1}{n} |\nabla u_n|^2} \varphi(G_k(u_n)). \end{aligned}$$

Entonces, por (7.2), (7.3) y (7.5),

$$\gamma \int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^2 + \int_{\Omega} (\mu u_n - f) \varphi(G_k(u_n)) \leq 0.$$

Observemos ahora que, por la elección de  $k$ , la segunda integral es positiva. Consecuentemente,

$$\gamma \int_{\Omega} |\nabla G_k(u_n)|^2 \leq 0$$

y por tanto concluimos que  $\|u_n\|_{\infty} \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\mu}$ .  $\square$

LEMA 8. Si  $\{u_n\}$  es una sucesión formada por soluciones del problema (7.4), entonces  $\{u_n\}$  está acotada en  $H_0^1(\Omega)$ .

DEMOSTRACIÓN. Tomamos  $\varphi(u_n)$  como función test en la formulación débil del problema (7.4); esto es posible porque  $u_n \in L^{\infty}(\Omega)$ . Así,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla u_n \nabla u_n \varphi'(u_n) + \int_{\Omega} \mu u_n \varphi(u_n) \\ = \int_{\Omega} b(x, u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n} |\nabla u_n|^2} \varphi(u_n) + \int_{\Omega} f \varphi(u_n). \end{aligned}$$

Observemos que  $\mu u_n \varphi(u_n) \geq 0$  y por tanto, usando también (7.2) y (7.3), obtenemos

$$\int_{\Omega} \{\alpha \varphi'(u_n) - \gamma |\varphi(u_n)|\} |\nabla u_n|^2 \leq \int_{\Omega} f \varphi(u_n).$$

El hecho de que  $\lambda > \frac{\gamma}{2\alpha}$  implica que  $\alpha \varphi' - \gamma |\varphi| \geq 2\gamma$ . Además, por el Lema 7 y observando que la función  $\varphi$  es creciente, concluimos que

$$2\gamma \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \leq \varphi\left(\frac{\|f\|_{\infty}}{\mu}\right) \int_{\Omega} |f|,$$

es decir,  $\|u_n\|_{H_0^1} \leq C$  donde  $C = C(\gamma, \mu, \|f\|_{\infty})$  es una constante positiva.  $\square$

Con esto, ya podemos completar la prueba del Teorema 10.

Por los Lemas 7 y 8, existe una función  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$  tal que (al menos para una subsucesión)  $u_n \rightharpoonup u$  débilmente en  $H_0^1(\Omega)$ . Dividimos la prueba en dos pasos.

*Paso I: Convergencia fuerte en  $H_0^1(\Omega)$ .* Tomamos  $\varphi(u_n - u)$  como función test en el problema (7.4). Así,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, u_n)(\nabla u_n - \nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\varphi'(u_n - u) \\ &= \int_{\Omega} (f - \mu u_n)\varphi(u_n - u) + \int_{\Omega} b(x, u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \varphi(u_n - u) \\ & \quad - \int_{\Omega} a(x, u_n)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)\varphi'(u_n - u). \end{aligned}$$

Observemos que, por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f - \mu u_n)\varphi(u_n - u) = 0.$$

Además, el teorema de la convergencia dominada también implica que  $a(x, u_n)\nabla u$  converge hacia  $a(x, u)\nabla u$  en  $L^2(\Omega)$ . Como  $\nabla u_n$  converge débilmente en  $L^2(\Omega)$  hacia  $\nabla u$ , nos queda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a(x, u_n)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)\varphi'(u_n - u) = 0.$$

Por tanto, usando también (7.2) y (7.3), tenemos

$$\int_{\Omega} \alpha|\nabla u_n - \nabla u|^2\varphi'(u_n - u) \leq \epsilon_n + \int_{\Omega} \gamma|\nabla u_n|^2|\varphi(u_n - u)|$$

donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ . Como  $|\nabla u_n|^2 \leq 2|\nabla(u_n - u)|^2 + 2|\nabla u|^2$ , deducimos que

$$\int_{\Omega} \{\alpha\varphi'(u_n - u) - 2\gamma|\varphi(u_n - u)|\}|\nabla u_n - \nabla u|^2 \leq \epsilon_n + 2\gamma \int_{\Omega} |\nabla u|^2|\varphi(u_n - u)|.$$

Finalmente, recordando que  $\alpha\varphi' - \gamma|\varphi| \geq 2\gamma$  y observando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^2|\varphi(u_n - u)| = 0,$$

concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^2 = 0.$$

*Paso II: Paso al límite.* Por el paso anterior, al menos para una subsucesión,

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u && \text{fuerte en } L^2(\Omega), \\ \nabla u_n &\longrightarrow \nabla u && \text{fuerte en } L^2(\Omega), \\ u_n &\longrightarrow u && \text{a.e. en } \Omega. \end{aligned}$$

Sea  $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a(x, u_n) \nabla u_n \nabla \psi &= a(x, u) \nabla u \nabla \psi, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\mu u_n - f) \psi &= \int_{\Omega} (\mu u - f) \psi. \end{aligned}$$

Además, como  $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  fuerte en  $L^2(\Omega)$ , existe una función  $h \in L^1(\Omega)$  tal que, al menos para una subsucesión,  $|\nabla u_n|^2 \leq h$ . Por tanto, usando de nuevo el teorema de la convergencia dominada, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(x, u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n} |\nabla u_n|^2} \psi = \int_{\Omega} b(x, u) |\nabla u|^2 \psi.$$

Por consiguiente,  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  verifica

$$\int_{\Omega} a(x, u) \nabla u \cdot \nabla \varphi + \mu \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} b(x, u) |\nabla u|^2 \varphi + \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \quad \square$$

NOTA 9 (Véase [5]). Si  $f \in L^m(\Omega)$  con  $m > N/2$ , entonces existe  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  que es solución de (7.1).

NOTA 10. El término  $\mu u$ , con  $\mu > 0$ , ha sido importante para probar la existencia de solución de (7.1). De hecho, si  $\lambda_1$  denota el primer valor propio del operador laplaciano y consideramos una función acotada  $f$  tal que  $f(x) > \lambda_1$ , entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

no tiene solución distribucional. En efecto, razonamos por contradicción. Supongamos que  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  es una solución del problema. Por el principio del máximo  $u$  es positiva. Si consideramos el cambio de variable  $z = e^u - 1$ , entonces  $z$  pertenece a  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  y es positiva en  $\Omega$ . Además,

$$-\Delta z = -(z + 1)[\Delta u + |\nabla u|^2] = f(x)(z + 1).$$

Por tanto,  $-\Delta z > \lambda_1 z$ , que es una contradicción.

NOTA 11 (Véanse [3], [2], [7]). También aparece un problema casilineal con crecimiento cuadrático en el gradiente si consideramos el funcional dado por

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (1 + |v|^r) |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

De hecho, la ecuación de Euler asociada a  $I$  es (al menos formalmente)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}((1 + |u|^r) \nabla u) + \frac{r}{2} u |u|^{r-2} |\nabla u|^2 = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observemos que ahora no estamos en el marco del problema anterior (7.1), ya que las funciones

$$a(s) = 1 + |s|^r \quad \text{y} \quad |b(s)| = \frac{r}{2} |s|^{r-1}$$

no son acotadas. A pesar de esta dificultad añadida de no acotación, de nuevo el término de orden inferior ayuda a conseguir soluciones de energía finita, aún incluso con datos  $f$  de «baja sumabilidad». En gran medida, este efecto regularizante del término de orden inferior  $g(s) = s|s|^{r-2}$  es debido a que verifica la condición de signo, es decir,  $g(s)s \geq 0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

## REFERENCIAS

- [1] D. ARCOYA Y L. BOCCARDO, Introducción al estudio de la ecuación de Euler de algunos funcionales del Cálculo de Variaciones, *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* **44** (2008), 7–31.
- [2] L. BOCCARDO, Dirichlet problems with singular and gradient quadratic lower order terms, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* **14**(03) (2008), 411–426.
- [3] L. BOCCARDO, A contribution to the theory of quasilinear elliptic equations and application to the minimization of integral functionals, *Milan Journal of Mathematics* **79**(1) (2011), 193–206.
- [4] L. BOCCARDO Y G. CROCE, *Esistenza e regolarità di soluzione di alcuni problemi ellittici*, Pitagora, 2010.
- [5] L. BOCCARDO Y G. CROCE, *Elliptic partial differential equations; existence and regularity of distributional solutions*, De Gruyter Studies in Mathematics **55**, 2013.
- [6] H. BRÉZIS, *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*, Alianza, 1984.
- [7] L. MORENO-MÉRIDA, A quasilinear Dirichlet problem with quadratic growth respect to the gradient and  $L^1$  data, *Nonlinear Anal.* **95** (2014), 450–459.

LUCIO BOCCARDO, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GUIDO CASTELNUOVO, UNIVERSITÀ DI ROMA «LA SAPIENZA», PIAZZALE ALDO MORO 5, 00185 ROMA, ITALIA  
Correo electrónico: [boccardo@mat.uniroma1.it](mailto:boccardo@mat.uniroma1.it)

GISELLA CROCE, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DU HAVRE, UNIVERSITÉ DU HAVRE, UFR SCIENCES & TECHNOLOGIES, 25, RUE PHILIPPE LEBON, BP 1123, 76063 LE HAVRE CEDEX, FRANCIA  
Correo electrónico: [gisella.croce@univ-lehavre.fr](mailto:gisella.croce@univ-lehavre.fr)  
Página web: <https://sites.google.com/site/gisellacroce/>

LOURDES MORENO-MÉRIDA, DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE GRANADA, AVENIDA FUENTENUEVA S/N, 18071 GRANADA, ESPAÑA  
Correo electrónico: [lumore@ugr.es](mailto:lumore@ugr.es)