



**HAL**  
open science

# Approche multi-résolution pour la modélisation de coques composites basée sur la séparation de variables

Olivier Polit, Philippe Vidal, Laurent Gallimard

► **To cite this version:**

Olivier Polit, Philippe Vidal, Laurent Gallimard. Approche multi-résolution pour la modélisation de coques composites basée sur la séparation de variables. 21ème Journées Nationales sur les Composites, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM) - Bordeaux, Jul 2019, Bordeaux, Talence, France. hal-02421569

**HAL Id: hal-02421569**

**<https://hal.science/hal-02421569>**

Submitted on 20 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **Approche multi-résolution pour la modélisation de coques composites basée sur la séparation de variables**

### ***Multi-resolution approach for the modeling of composite shells based on the variable separation***

**Olivier Polit, Philippe Vidal et Laurent Gallimard**

LEME, UPL, Univ Paris Nanterre  
50 rue de Sèvres, F- 92410 Ville d'Avray  
e-mail : olivier.polit@parisnanterre.fr, philippe.vidal@parisnanterre.fr et laurent.gallimard@parisnanterre.fr

#### **Résumé**

Ce travail traite d'une approche Layer-wise pour la modélisation de structures coques cylindriques basée sur une méthode par séparation de variables. L'étude se focalise sur une stratégie multi-résolution pour diminuer le coût de calculs de nombreuses analyses quand les paramètres changent. Pour cela, le champ de déplacement est approximé comme une somme de fonctions séparées dépendant des coordonnées du plan et hors plan. Un processus itératif résolvant successivement des problèmes 2D et 1D est mis en oeuvre à chaque itération. Une expansion d'ordre 4 est choisie dans l'épaisseur de chaque couche. Une méthode des éléments finis classique est mise en oeuvre pour les inconnues dans le plan. Dans le cadre de notre étude multi-calculs, une fois qu'une première analyse est menée, les fonctions 2D générées peuvent être exploitées pour les calculs suivants. Le calcul se réduit alors à un problème 1D. Si nécessaire, quelques fonctions 2D sont ajoutées. L'approche est validée sur des structures type cornière en comparant à une approche Layer-wise quasi-3D. Des illustrations pour différentes géométries et séquences d'empilement sont proposées.

#### **Abstract**

The article deals with a layer-wise modeling of composite cylindrical shell structures based on a variable separation method. The present study is focused on the use of a multi-resolution strategy to decrease the computational cost of numerous analyses where some parameters can change. For this purpose, the displacement field is approximated as a sum of separated functions of the in-plane coordinates and the transverse coordinate. Thus, an iterative process that consists of solving a 2D and 1D problem successively at each iteration, is required. In the thickness direction, a fourth-order expansion in each layer is considered. For the in-plane description, classical Finite Element method is used. In our framework of a multi-resolution process, once a first computation is achieved, the previously built 2D functions can be used. Thus, the following problems to be solved can be limited to a 1D dimension. If needed, only few 2D functions might be built. The approach is assessed through mechanical tests on L-angle specimens by comparing with a quasi-3D LayerWise approach. It is illustrated by varying the geometry and the stacking sequences of the shell.

**Mots Clés :** composite, coque, méthode des éléments finis, PGD, multi-résolution

**Keywords :** composite, shell, finite element method, PGD, multi-resolution

### **1. Introduction**

Les composites stratifiés et sandwichs sont de plus en plus retenus, en particulier dans les structures aéronautique, maritime, ... grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques. De plus, des géométries complexes, telles que des structures courbes, sont également utilisées et sont soumises à des sollicitations sévères. Or, les mécanismes de rupture dépendent fortement des effets locaux aux interfaces des couches ou à proximité des bords. Il s'avère donc nécessaire de les évaluer de façon précise.

Pour la modélisation des structures composites et sandwichs, on peut distinguer deux grandes approches :

- l'approche couche équivalente (ESL) : le nombre d'inconnues est indépendant du nombre de couches,

- l’approche couche discrète (LW) : le nombre d’inconnues est proportionnel au nombre de couches.

La première est économique en coût de calcul mais elle montre des limitations en terme de précision pour certaines configurations. La seconde pallie à ces limitations mais elle peut être coûteuse. Néanmoins, ces approches permettent d’éviter le recours à des modélisations 3D qui peuvent être lourdes en terme de mise en oeuvre et en temps de calculs.

Notons également que depuis une vingtaine d’années, la méthode PGD (Proper Generalized Decomposition) [1] a montré d’intéressantes propriétés dans le cadre de réduction de modèles [2]. Elle a été proposée dans le cadre de la méthode Latin par Ladevèze [3] en introduisant une décomposition radiale. Elle a pu notamment être avantageusement exploitée en utilisant la séparation de variables (coordonnées plan moyen et transverse) pour traiter des problèmes de plaques / coques composites [4, 5] avec un coût réduit.

Le but de cette étude est d’évaluer une stratégie multi-résolution basée sur la PGD afin de modéliser des structures coques cylindriques réalisées en matériaux composites. L’approche est basée classiquement sur la représentation séparée plan moyen / hors plan des inconnues en déplacements. Ainsi, les 3 composantes s’expriment sous la forme d’une somme de produits de fonctions 2D et 1D. Le problème résultant est non-linéaire et peut être résolu à l’aide d’une méthode basée sur le point fixe. Cela conduit à résoudre successivement des problèmes 2D et 1D, mais dont le coût est nettement inférieur à une approche LW classique. L’aspect intéressant est la possibilité de choisir un ordre d’expansion 4 pour la fonction 1D, sans pénaliser le coût de calcul. Ce choix est déterminant pour garantir la précision du calcul pour des structures composites. L’idée est ensuite d’exploiter avantageusement la méthode pour réaliser de nombreux calculs où les paramètres géométriques ou matériaux sont modifiés. En effet, une fois un premier calcul réalisé pour un jeu de paramètres donnés, cette solution peut être exploitée pour les calculs suivants. Il suffit seulement de recalculer les fonctions 1D, les fonctions 2D étant conservées. Le coût de calcul est donc drastiquement réduit pour ces nouvelles simulations. Si cela n’est pas suffisant, il est possible d’ajouter de nouvelles fonctions 2D, mais leur nombre sera réduit. Cette stratégie est une extension de l’étape préliminaire introduite dans [6, 7].

Le plan de cet article se compose en 3 parties. Tout d’abord, un bref rappel de la définition de la coque est donné. Sa description s’appuie sur l’utilisation d’une carte. Puis, la formulation du problème à résoudre est précisée dans le cadre de la séparation de variables. Etant non-linéaire, sa résolution s’effectuera de façon classique par un point fixe. Puis, l’accent est porté sur la stratégie multi-résolution mise en place. Enfin, des exemples numériques sont fournis pour illustrer les performances de la méthode. La géométrie et la séquence d’empilement sont modifiées pour les différentes simulations.

## 2. Définition de la coque et géométrie différentielle

### 2.1. Description générale

Une coque  $C$  ayant une surface moyenne  $S$  et une épaisseur constante  $e$ , voir (Fig. 1), est définie par [8] :

$$C = \left\{ M \in \mathcal{R}^3 : \vec{OM}(\xi, \xi^3 = z) = \vec{\Phi}(\xi) + z \vec{a}_3; \xi \in \Omega; -\frac{1}{2}e \leq z \leq \frac{1}{2}e \right\}$$

où le plan moyen peut être décrit par une carte  $\vec{\Phi}$  à partir d’un domaine bi-dimensionnel paramétré  $\Omega$  selon :

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} : \quad \Omega \subset \mathcal{R}^2 &\longrightarrow S \subset \mathcal{R}^3 \\ \xi = (\xi^1, \xi^2) &\longmapsto \vec{\Phi}(\xi) \end{aligned} \tag{Eq. 1}$$

La figure (Fig. 1) montre la carte  $\vec{\Phi}$  décrivant la surface moyenne (en gris) et les vecteurs des bases locales. Les vecteurs de base  $\vec{a}_i$  sont définis en un point de  $\mathcal{S}$  et les vecteurs de base  $\vec{g}_i$  sont définis pour un point générique de la coque.

En un point de la surface moyenne, les vecteurs de base covariant définissant le plan tangent de la surface moyenne sont classiquement obtenues de la façon suivante :

$$\vec{a}_\alpha = \vec{\Phi}(\xi^1, \xi^2)_{,\alpha} \quad ; \quad \vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} \quad (\text{Eq. 2})$$

où  $\vec{a}_3$  est le vecteur normal unitaire à la surface  $\mathcal{S}$ , cf. (Fig. 1). Par convention, les indices  $i, j, \dots$  prennent les valeurs  $\{1, 2, 3\}$ , tandis que les indices  $\alpha, \beta, \dots$  valent  $\{1, 2\}$ . La convention de sommation sur les indices répétées est utilisée et la dérivée partielle est notée  $(\cdot)_{,\alpha}$ . Une coque est caractérisée par

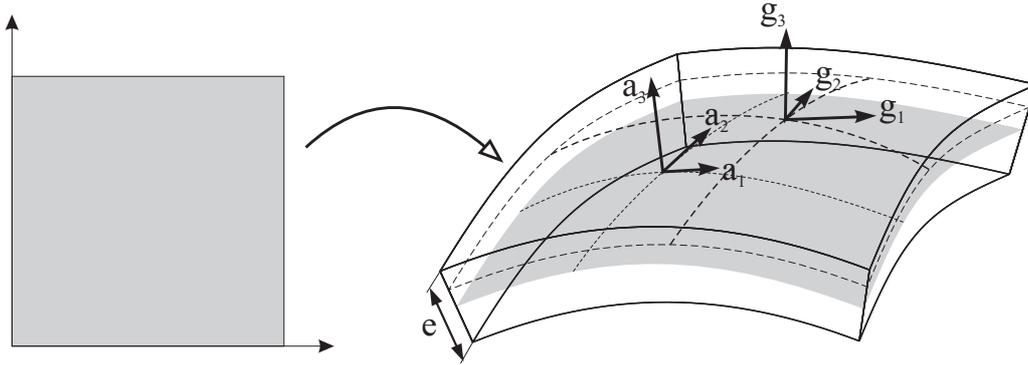


Fig. 1. La carte  $\vec{\Phi}$  et les vecteurs de base locale  $\vec{a}_i$  and  $\vec{g}_i$  pour un panneau coque

sa première forme fondamentale  $a_{\alpha\beta}$  et sa seconde  $b_{\alpha\beta}$ . Pour plus de détails sur la description des coques, le lecteur peut se référer au livre [8].

## 2.2. Application à une coque cylindrique

Une coque cylindrique (voir (Fig. 2)) est décrite suivant la carte :

$$\begin{cases} x_1(\xi^1, \xi^2) = R \cos\left(\frac{\xi^1}{R}\right) \\ x_2(\xi^1, \xi^2) = R \sin\left(\frac{\xi^1}{R}\right) \\ x_3(\xi^1, \xi^2) = \xi^2 \end{cases} \quad (\text{Eq. 3})$$

Les termes non nuls des formes covariantes et mixtes sont donnés par :

$$a_{11} = a_{22} = 1 \quad b_{11} = b^1_1 = -\frac{1}{R} \quad \mu^1_1 = 1 + \frac{z}{R} \quad m^1_1 = \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} \quad (\text{Eq. 4})$$

où  $R$  est le rayon moyen de la coque.

## 3. Application de la décomposition propre généralisée aux coques cylindriques

Dans cette section, la PGD est appliquée pour l'analyse de coques composites. C'est une extension de travaux antérieurs sur des structures poutre et plaque ([9, 10, 5]).

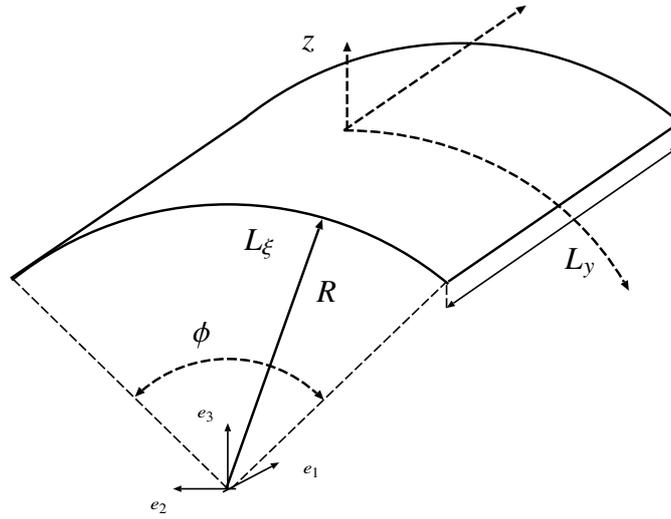


Fig. 2. surface moyenne de la coque cylindrique

### 3.1. Forme faible du problème

La coque est soumise à une densité surfacique d'effort  $\mathbf{t}$  définie sur une surface  $\partial C_F$ . Un déplacement  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$  est imposé sur  $\Gamma_D = \partial C - \partial C_F$ . Le problème mécanique est basé sur une formulation variationnelle qui est :

Trouver  $\mathbf{u}(M) \in U$  (espace des déplacements admissibles) tel que

$$a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = b(\delta \mathbf{u}), \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \delta U \quad (\text{Eq. 5})$$

avec

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int \int \int_C \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dC \\ b(\delta \mathbf{u}) &= \int \int_{\partial C_F} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, d\partial C \end{aligned}$$

où  $U$  est l'espace des déplacements admissibles, i.e.  $U = \{\mathbf{u} \in (H^1(\mathcal{V}))^3 / \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \Gamma_D\}$ . On a  $\delta U = \{\mathbf{u} \in (H^1(\mathcal{V}))^3 / \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ .

Dans cette formulation, les efforts volumiques sont négligés.

### 3.2. Le déplacement

Considérons  $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$  les coordonnées curvilinéaires associées aux directions principales de courbure et  $z = \xi^3$  la coordonnée normale. Les composantes du champ de déplacements associées aux vecteurs de la base contravariante  $\vec{a}^i$  de la coque sont notées  $(u_1(\boldsymbol{\xi}, z), u_2(\boldsymbol{\xi}, z), u_3(\boldsymbol{\xi}, z))$ . Le déplacement est construit comme la somme de  $N$  produits de 2 fonctions dépendant des coordonnées du plan et transverse ( $N \in \mathbb{N}$  est l'ordre de représentation) :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(\boldsymbol{\xi}, \xi^3 = z) \\ u_2(\boldsymbol{\xi}, \xi^3 = z) \\ u_3(\boldsymbol{\xi}, \xi^3 = z) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} f_1^i(z) v_1^i(\boldsymbol{\xi}) \\ f_2^i(z) v_2^i(\boldsymbol{\xi}) \\ f_3^i(z) v_3^i(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} f_1^i(z) \\ f_2^i(z) \\ f_3^i(z) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} v_1^i(\boldsymbol{\xi}) \\ v_2^i(\boldsymbol{\xi}) \\ v_3^i(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 6})$$

où  $(f_1^j, f_2^j, f_3^j)$  et  $(v_1^j, v_2^j, v_3^j)$  sont définis dans  $\Omega_z$  (domaine unidimensionnel associé à la fibre normale) et  $\Omega$ . L'opérateur "o" représente le produit au sens de Hadamard.

### 3.3. Le problème à résoudre

La résolution du problème (Eq. 5) s'effectue par un algorithme de type glouton. On suppose que les  $m$  premières fonctions sont connues et on cherche un nouveau couple  $\mathbf{f}, \mathbf{v}$ . La fonction recherchée à l'itération  $m + 1$  s'écrit alors

$$\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m + \begin{bmatrix} f_1 v_1 \\ f_2 v_2 \\ f_3 v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{u}^m + \mathbf{f} \circ \mathbf{v} \quad (\text{Eq. 7})$$

où  $(v_1, v_2, v_3)$  et  $(f_1, f_2, f_3)$  sont les fonctions à calculer et  $\mathbf{u}^m$  contient les  $m$  fonctions connues telles que

$$\mathbf{u}^m = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} f_1^i v_1^i \\ f_2^i v_2^i \\ f_3^i v_3^i \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 8})$$

Les fonctions tests sont

$$\delta(\mathbf{f} \circ \mathbf{v}) = \delta\mathbf{f} \circ \mathbf{v} + \delta\mathbf{v} \circ \mathbf{f} \quad (\text{Eq. 9})$$

avec

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 10})$$

Substituant (Eq. 9) et (Eq. 7) dans la formulation faible (Eq. 5), les deux équations suivantes sont à résoudre :

— pour la fonction test  $\delta\mathbf{f}$

$$a(\mathbf{v} \circ \mathbf{f}, \mathbf{v} \circ \delta\mathbf{f}) = b(\mathbf{v} \circ \delta\mathbf{f}) - a(\mathbf{u}^m, \mathbf{v} \circ \delta\mathbf{f}) \quad \forall \delta\mathbf{f} \quad (\text{Eq. 11})$$

— pour la fonction test  $\delta\mathbf{v}$

$$a(\mathbf{f} \circ \mathbf{v}, \mathbf{f} \circ \delta\mathbf{v}) = b(\mathbf{f} \circ \delta\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}^m, \mathbf{f} \circ \delta\mathbf{v}) \quad \forall \delta\mathbf{v} \quad (\text{Eq. 12})$$

Ce problème couplé non-linéaire est résolu par une méthode classique de type point fixe. Pour chacun des problèmes, les fonctions inconnues sont seulement uni ou bi-dimensionnelles. L'algorithme est stoppé lorsque la distance entre deux termes consécutifs est suffisamment petite (Cf. [10]).

### 3.4. Algorithme multi-résolution incluant une étape préliminaire

Dans cette section, un algorithme multi-résolution est présenté pour résoudre de nombreux problèmes avec des paramètres matériaux ou géométriques différents. L'idée est de tirer parti de la représentation séparée de la solution. L'approche proposée peut être considérée comme une extension de l'exploitation de l'étape préliminaire introduite dans [6, 7] pour améliorer la vitesse de convergence de la méthode Latin. Une fois qu'un certain nombre de couples sont construits, seules les fonctions 1D dépendant de l'épaisseur sont corrigées. Le problème peut s'écrire de la façon suivante :

$$a\left(\sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{v}^i \circ \mathbf{f}^i, \sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{v}^i \circ \delta\mathbf{f}^i\right) = b\left(\sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{v}^i \circ \delta\mathbf{f}^i\right) \quad \forall \delta\mathbf{f}^i \quad (\text{Eq. 13})$$

L'algorithme multi-résolution associé est décrit dans Algorithme 1. La première étape vise à construire les  $N_1$  couples pour un jeu de paramètres initial. Puis, les fonctions  $\mathbf{v}^p$  dépendant de  $\xi$  sont réutilisées pour les calculs suivants associés à des nouveaux jeux de paramètres. Ainsi, seules les fonctions dépendant de  $z$  sont recalculées. Le problème se réduit à une seule dimension. Si l'erreur en résidu est importante alors seuls quelques nouveaux couples restent à construire dans la phase d'enrichissement.

**Algorithm 1** Algorithme multi-résolution avec l'étape préliminaire**Premier calcul** pour un jeu de paramètres fixé. $N_1$  couples  $(\mathbf{f}^p, \mathbf{v}^p)$  construits.**Calcul pour un nouveau jeu de paramètres****Etape préliminaire**Correction des  $\mathbf{f}^p, p = 1, \dots, N_1$  from (Eq. 13)

Vérification de la convergence

**Etape d'enrichissement** ( $N_{new}$  nouvelles fonctions)**for**  $m = N_1 + 1$  to  $N_1 + N_{new}$  **do**Initialiser  $\tilde{\mathbf{f}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{v}}^{(0)}$ **for**  $k = 1$  to  $k_{max}$  **do**Calculer  $\tilde{\mathbf{f}}^{(k)}$  à partir de (Eq. 11),  $\tilde{\mathbf{v}}^{(k-1)}$  étant connuCalculer  $\tilde{\mathbf{v}}^{(k)}$  à partir de (Eq. 12),  $\tilde{\mathbf{f}}^{(k)}$  étant connu

Vérification de la convergence

**end for**Affecter  $\mathbf{f}^{m+1} = \tilde{\mathbf{f}}^{(k)}, \mathbf{v}^{m+1} = \tilde{\mathbf{v}}^{(k)}$ Affecter  $\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m + \mathbf{f}^{m+1} \circ \mathbf{v}^{m+1}$ 

Vérification de la convergence

**end for**

La résolution de ces problèmes se base sur l'utilisation de la méthode des éléments finis. Un élément fini quadrilatère 8 noeuds basé sur les fonctions d'interpolation de Serendipity est choisi pour les fonctions du plan moyen. Une approche du 4ème ordre étant particulièrement adaptée pour la modélisation de structures composites, elle est utilisée pour les fonctions de la coordonnée transverse. La discrétisation des problèmes mis en jeu n'est pas détaillée ici, le lecteur pourra consulter [11].

#### 4. Résultats numériques

Différents tests sont proposés pour valider et évaluer l'approche proposée qui sera notée VS-LD4. Différentes séquences d'empilement communément employées dans l'aéronautique sont considérées. Le processus multi-résolution est testé en faisant varier la géométrie seule ou bien incluant également le nombre de couches. La précision de l'approche est évaluée en comparant avec un modèle LayerWise (noté LD4) développé par E. Carrera dans le cadre de la "Carrera's Unified Formulation" (CUF, voir [12, 13]).

Les tests numériques sont proposés dans [14]. Il s'agit de cornières qui sont fréquemment utilisées pour assurer la jonction perpendiculaire de différents panneaux dans l'industrie aéronautique. Leur description est résumée ci-dessous :

**géométrie** : coque composite cylindrique très épaisse avec  $\phi = \pi/2$

Le nombre de couches (NC), les séquences d'empilement et le rayon de la structure sont donnés dans chaque section. Toutes les couches ont la même épaisseur.

**conditions limites** : coque encastrée le long du bord droit et libre sur les autres bords, soumise à une pression globale constante,  $q(\xi) = q_0 = 1$  MPa

**propriétés matériaux** : le stratifié T700GC/M21 est considéré avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} E_L &= 115 \text{ GPa}, E_T = 8.5 \text{ GPa}, G_{LT} = 4.5 \text{ GPa}, \\ G_{TT} &= 3.0357 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0.32 \nu_{TT} = 0.4 \end{aligned} \quad \text{où } L \text{ correspond à la direction des}$$

fibres,  $T$  à la direction transverse.

**maillage :** Suivant une étude de convergence non-présentée, le maillage est constitué de  $(N_x = 16) \times (N_y = 16)$  éléments dans les directions  $\xi^1$  et  $\xi^2$ .

**nombre de ddls :**  $Ndof_{xy} = 3(N_x + 1)(N_y + 1)$  et  $Ndof_z = 12 \times \alpha NC + 3$  sont les nombres de ddls associés à chaque problème liés à  $v_j^i$  et  $f_j^i$ .  $\alpha$  est le nombre de couches numériques par couche physique. Ainsi, le nombre total de ddls est  $Ndof_{xy} + Ndof_z$ .

**modèle de référence :** LD4

Différentes séquences d'empilement proposées dans [14] représentant un large champ d'applications sont considérées. Ils sont listés ci-dessous :

- **LU1** : stratifié quelconque  $[0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ , il n'a pas de symétrie.
- **LU2** : stratifié très orienté  $[0_3^\circ/45^\circ/90_2^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{ns}$ , fréquemment employé pour des sollicitations élevées de traction uniaxiale,
- **LU3** : stratifié quasi-isotrope  $[(45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ)_2]_{ns}$ , fréquemment utilisé pour des sollicitations multi-axiales complexes
- **LU4** : stratifié désorienté  $[45_2^\circ/0^\circ/-45_3^\circ/90^\circ/45^\circ]_{ns}$  conçu pour une sollicitation de cisaillement dans le plan, incluant 75% de plis à  $\pm 45^\circ$ .

Les différentes géométries de la coque sont résumées dans (Tab. 1). Chaque configuration sera référencée selon la notation LUI-SPJ, où  $I \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $J \in \{1, 2, 3\}$ .

	$n$	Nb de couches	épaisseur de couche [mm]	$\phi$	$R$ [mm]	$L_y$ [mm]
SP1	1	16	0.262	$\pi/2$	6.095	20
SP2	2	32	0.262	$\pi/2$	12.19	40
SP3	-	8	0.262	$\pi/2$	6.095	20

Tab. 1. Géométrie de la coque

#### 4.1. Multi-résolution : différentes séquences d'empilement

La configuration LU2-SP2 à 32 couches est choisie initialement. Les 8 couples construits seront exploitées pour de nouveaux calculs avec des empilements différents. Les fonctions associées au déplacement transverse sont données sur (Fig. 3). La fonction  $v_3^j(\xi)$  est tracée sur la configuration non-déformée de la structure, et le facteur d'amplification est spécifiée. Les deux premiers modes peuvent être considérés comme des modes globaux, leur contribution à la solution finale est la plus importante. Les suivants sont des corrections locales proche de l'encastrement ou des bords libres. Les distributions des fonctions  $f_3^j$  dépendant de  $z$  deviennent complexes. Des modèles d'ordre élevé sont nécessaires.

Une fois cette première base construite, elle est réutilisée pour les configurations suivantes, i.e. LU3 et LU4-SP2. Les nouvelles fonctions  $f_3^j(z)$  sont données sur (Fig. 4). On remarque que les deux premières fonctions restent quasi-constantes et linéaires. La précision des résultats obtenues est validée en considérant les erreurs relatives des contraintes locales  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{33}$  à  $\xi^1 = L_\xi/4$ ,  $\xi^2 = L_y/2$  (cf. (Tab. 2)). Alors que l'erreur avec les fonctions initiales est importante, le recalcul des fonctions de l'épaisseur permet de réduire significativement l'erreur relative maximum à 3.7%. La précision peut être améliorée en ajoutant seulement 3 couples (erreur à moins de 1.8%).

Finalement, en dépit de la différence entre la solution initiale et celle pour un nouveau jeu de paramètres, la méthode s'avère efficace et précise pour une large gamme de séquences d'empilement.

#### 4.2. Multi-résolution : différentes géométries

La même procédure que précédemment est mise en oeuvre en considérant un changement de géométrie : épaisseur de chaque couche  $e_{ply}$ , le rayon de la coque  $R$  et l'angle d'ouverture  $\phi$ . La base initiale est

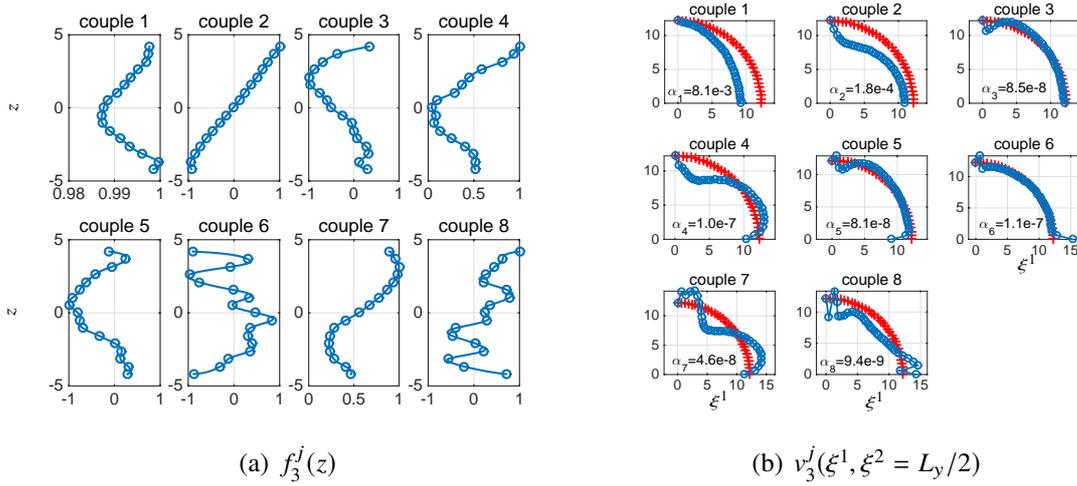


Fig. 3. couples  $f_3^j(z), v_3^j(\xi^1, \xi^2 = L_y/2)$  construits pour LU2-SP2

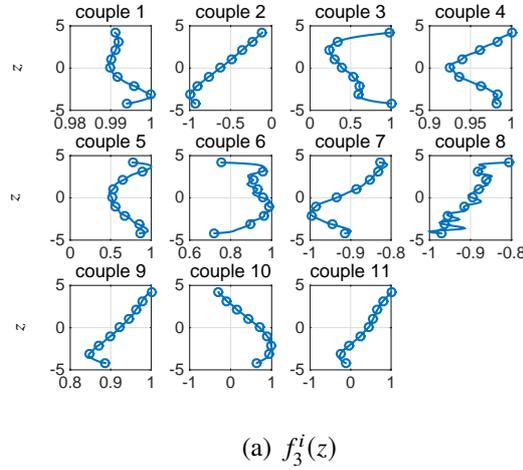


Fig. 4.  $f_3^i(z)$  LU3-SP2 - Multi-résolution à partir des couples LU2-SP2

constituée de 13 couples pour la configuration LU4-SP1 (16 couches). Une transformation simple du domaine 1D (pour  $e_{ply}$  et  $R$ ) ou 2D (pour  $\phi$ ) est effectuée pour réaliser les calculs avec des jeux de paramètres différents. Les erreurs locales obtenues sont données dans les tableaux (Tab. 3), (Tab. 4) et (Tab. 5). De grands domaines de variation géométrique sont considérées dans les exemples traités. Pour une variation de 10%, la réactualisation des fonctions de l'épaisseur suffit. Au-delà, seulement 1 ou 2 nouveaux couples permettent d'obtenir des résultats précis alors que le changement de géométrie est significatif. On peut remarquer que la base des fonctions dépendant de  $\xi$  semble suffisantes pour des modifications sur la valeur de  $\phi$  (voir (Tab. 5)).

lay-up	LU3			LU4		
	base initiale			base initiale		
	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )
$\sigma_{11}^{max}(\xi^1 = L\xi/4, \xi^2 = L_y/2, z)$	-16.21 (49%)	-31.81 (0.4%)	-32.04 (0.3%)	-18.91 (43%)	-33.12 (0.3%)	-32.86 (1%)
$\sigma_{13}^{max}(\xi^1 = L\xi/4, \xi^2 = L_y/2, z)$	-3.22 (10%)	-2.89 (1.1%)	-2.87 (1.8%)	-3.18 (11%)	-2.78 (3%)	-2.85 (0.5%)
$\sigma_{33}^{max}(\xi^1 = L\xi/4, \xi^2 = L_y/2, z)$	-2.32 (9%)	-2.50 (2.3%)	-2.57 (0.6%)	-2.32 (5.8%)	-2.37 (3.7%)	-2.46 (0.2%)
Nbre de nouveaux couples	0	0	3	0	0	3

Tab. 2. Erreur relative sur les contraintes - Process multi-résolution à partir des fonctions associées à LU2-SP2 - 32 couches

	$e_{ply}=0.2358 \text{ mm} (-10\%)$			$e_{ply}=0.2 \text{ mm} (-24\%)$			$e_{ply}=0.1 \text{ mm} (-62\%)$		
	base initiale			base initiale			base initiale		
	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )
$\sigma_{11}^{max}$	17%	1.4%	-	38%	4.0%	0.6%	83%	20%	0.8%
$\sigma_{13}^{max}$	15%	1.9%	-	31%	5.6%	0.4%	35%	36%	1.2%
$\sigma_{33}^{max}$	4%	0.6%	-	10%	2.5%	0.5%	42%	16%	0.9%
Nouveaux couples	0	0	-	0	0	1	0	0	2

Tab. 3. Erreur relative sur les contraintes en ( $\xi^1 = L_x/4, \xi^2 = L_y/2, z$ ) - Process multi-résolution à partir des fonctions associées à LU4-SP1 - paramètre  $e_{ply}$  - 16 couches

	R=6.7 mm (+10%)			R=8 mm (+31%)			R=18 mm (+195%)		
	base initiale			base initiale			base initiale		
	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )
$\sigma_{11}^{max}$	24%	1.8%	-	55%	6.6%	1.4%	96%	47%	0.8%
$\sigma_{13}^{max}$	22%	0.8%	-	48%	6.1%	0.6%	55%	26%	2.3%
$\sigma_{33}^{max}$	6%	0.8%	-	18%	4.1%	0.06%	55%	37%	1.5%
Nouveaux couples	0	0	-	0	0	1	0	0	2

Tab. 4. Erreur relative sur les contraintes en ( $\xi^1 = L_x/4, \xi^2 = L_y/2, z$ ) - Process multi-résolution à partir des fonctions associées à LU4-SP1 - paramètre R - 16 couches

### 4.3. Multi-résolution : différentes géométries et nombres de couches simultanément

L'approche est illustrée en considérant différentes géométries et séquences d'empilement simultanément sur (Fig. 5) et dans (Tab. 6) : à partir d'un premier calcul pour un stratifié 16 plis nécessitant 13 couples (LU4-SP1), seulement 2 nouveaux couples sont générés pour une configuration 32 plis LU2-SP2 ( $e = 8.384 \text{ mm}$ ) et 8 plis LU1-SP3 ( $e = 2.096 \text{ mm}$ ). La précision des résultats est confirmée en comparant avec un calcul LW de référence (LD4). L'erreur est inférieure à 1.1%. Alors que la solution initiale est radicalement différente, les distributions le long de l'épaisseur des contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{33}$  sont en très bonne corrélation avec une solution de référence quasi-3D en ne construisant que très peu de couples supplémentaires. Les possibilités de la méthode sont donc prometteuses pour traiter des configurations variées.

## 5. Conclusion

Dans cet article, nous avons montré les performances de la séparation de variables (PGD) dans un cadre multi-résolution pour la modélisation de coques composites. En effet, partant d'une base de fonctions construites pour un jeu de paramètres fixé, celle-ci peut être avantageusement réutilisée pour de nombreux calculs impliquant d'autres jeux de paramètres. Le coût de calcul se réduit à celui de problèmes 1D. Si nécessaire, peu de couples supplémentaires sont à construire, ce qui reste peu coûteux comparé à une approche LayerWise classique. Les possibilités de la méthode ont été illustrées sur des paramètres géométriques et matériaux pouvant varier très fortement. La précision a également été évaluée en comparant à une approche quasi-3D. Au final, la méthode développée semble pertinente dans le cadre d'approches multi-paramétriques pour la modélisation de structures composites.

	$\phi = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\pi} (-25\%)$			$\phi = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\pi} (-50\%)$		
	base initiale			base initiale		
	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )	$f_i^j$ initial	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )
$\sigma_{11}^{max}$	122%	0.6%	-	880%	0.8%	0.7%
$\sigma_{13}^{max}$	97%	0.9%	-	447%	2.7%	1.7%
$\sigma_{33}^{max}$	34%	0.3%	-	30%	0.1%	0.9%
Nouveaux couples	0	0	-	0	0	1

Tab. 5. Erreur relative sur les contraintes en ( $\xi^1 = L_x/4, \xi^2 = L_y/2, z$ ) - Process multi-résolution à partir des fonctions associées à LU4-SP1 - paramètre  $\phi$  - 16 couches

	32 couches LU2-SP2		8 couches LU1-SP3	
	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )	$f_i^j$ corrigé	nouveau ( $f_i^j, v_i^j$ )
$\sigma_{11}^{max}$	1.2%	0.7%	15%	0.9%
$\sigma_{13}^{max}$	5.2%	0.04%	19%	1.1%
$\sigma_{33}^{max}$	3.7%	0.6%	9%	0.1%
Nb nouveaux couples	0	2	0	2

Tab. 6. Erreur relative sur les contraintes en ( $\xi^1 = L_x/4, \xi^2 = L_y/2, z$ ) - Process multi-résolution à partir des fonctions associées à LU4-SP1 - différentes stratifications

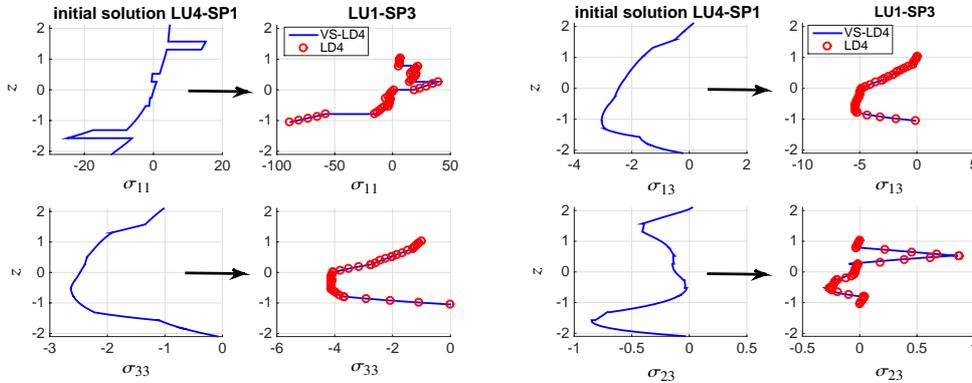


Fig. 5. Distribution de  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{33}$  dans l'épaisseur - Processus multi-résolution à partir des fonctions de base associées à LU4-SP1 [ $45_2^0/0/-45_3^0/90/45$ ]<sub>s</sub> - nouveau stratifié LU1-SP3 : [ $0^0/45^0/90^0/-45^0/0/45^0/-45^0/90^0$ ]

## Références

- [1] A. Ammar, B. Mokdada, F. Chinesta, R. Keunings « A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids », *J. Non-Newton. Fluid Mech.* Vol. 139, pp. 153–176, 2006.
- [2] O. Allix, P. Vidal « A new multi-solution approach suitable for structural identification problems. », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 191 n° 25-26, pp. 2727–2758, 2002.
- [3] P. Ladevèze « Nonlinear computational structural mechanics - New approaches and Non-incremental methods of calculation », Springer-Verlag, , pp. , 1999.
- [4] B. Bognet, F. Bordeu, F. Chinesta, A. Leygue, A. Poitou « Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3D solutions with 2D computational complexity. », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 201-204, pp. 1–12, 2012, doi : 10.1016/j.cma.2011.08.025.
- [5] P. Vidal, L. Gallimard, O. Polit « Shell finite element based on the Proper Generalized Decomposition for the modeling of cylindrical composite structures. », *Comput. Struct.* Vol. 132, pp. 1–11, 2014, -doi : 10.1016/j.compstruc.2013.10.015.
- [6] P. Bussy, P. Rougée, P. Vauchez « The large time increment method for numerical simulation of metal forming processes. », in : and (Ed.), Proc. NUMETA, Elsevier, , pp. 102–109, 1990.
- [7] P. Boisse, P. Bussy, P. Ladevèze « A new approach in non-linear mechanics : the large time increment method. », *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 29, pp. 647–663, 1990.
- [8] M. Bernadou, Finite Element Methods for Thin Shell Problems., John Wiley et Sons, Chichester, 1996.
- [9] P. Vidal, L. Gallimard, O. Polit « Assessment of a composite beam finite element based on the Proper Generalized Decomposition. », *Compos. Struct.* Vol. 94 n° 5, pp. 1900–1910, 2012, -doi : 10.1016/j.compstruct.2011.12.016.
- [10] P. Vidal, L. Gallimard, O. Polit « Proper Generalized Decomposition and Layer-Wise approach for the modeling of composite plate structures. », *Int. J. Solids Struct.* Vol. 50 n° 14-15, pp. 2239–2250, 2013, -doi : 10.1016/j.ijsolstr.2013.03.034.
- [11] P. Vidal, L. Gallimard, O. Polit « Multi-resolution strategies for the modeling of composite shell structures based on the variable separation method. », *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 117 n° 7, pp. 778–799, 2019, -doi : 10.1002/nme.5978.
- [12] E. Carrera, L. Demasi « Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 1 : Derivation of finite element matrices. », *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 55, pp. 191–231, 2002.
- [13] E. Carrera, L. Demasi « Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 2 : Numerical implementations. », *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. 55, pp. 253–291, 2002.
- [14] J.-S. Charrier, F. Laurin, N. Carrere, S. Mahdi « Determination of the out-of-plane tensile strength using four-point bending tests on laminated L-angle specimens with different stacking sequences and total thicknesses », *Composite Part A : Appl. Sci. Manufacturing* Vol. 81, pp. 243 – 253, 2016.