



**HAL**  
open science

# La théorie du Bending-Gradient pour la propagation des ondes dans les plaques composites

Nadine Bejjani, Pierre Margerit, Karam Sab, Arthur Lebée, Joanna Bodgi

## ► To cite this version:

Nadine Bejjani, Pierre Margerit, Karam Sab, Arthur Lebée, Joanna Bodgi. La théorie du Bending-Gradient pour la propagation des ondes dans les plaques composites. 21ème Journées Nationales sur les Composites, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM) - Bordeaux, Jul 2019, Bordeaux, Talence, France. ⟨hal-02420742⟩

**HAL Id: hal-02420742**

**<https://hal.science/hal-02420742v1>**

Submitted on 20 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# La théorie du Bending-Gradient pour la propagation des ondes dans les plaques composites

## *The Bending-Gradient theory for wave propagation in composite plates*

Nadine Bejjani<sup>1,2</sup>, Pierre Margerit<sup>1</sup>, Karam Sab<sup>1</sup>, Arthur Lebee<sup>1</sup> et Joanna Bodgi<sup>2</sup>

1 : Laboratoire Navier (ENPC, IFSTTAR, CNRS UMR 8205),  
Université Paris-Est

6-8 av. Blaise Pascal, Cité Descartes, 77420 Champs Sur Marne, France  
e-mail : nadine.bejjani@enpc.fr, pierre.margerit@enpc.fr, karam.sab@enpc.fr et arthur.lebee@enpc.fr

2 : Unité de recherche " Mathématiques et modélisation "  
Faculté des Sciences, Université Saint-Joseph  
B.P. 11-514 Riad El Solh, Beyrouth 1107 2050, Liban  
e-mail : joanna.bodgi@net.usj.edu.lb

### Résumé

Cet article concerne la prédiction de la propagation des ondes de flexion dans des structures anisotropes relativement élancées au moyen de modèles de plaques raffinés. L'étude est menée en utilisant la théorie du Bending-Gradient qui est considérée comme une extension aux plaques multicouches de la théorie de Reissner-Mindlin. La pertinence du modèle proposé est testée en le comparant à des théories de plaques bien connues et à des résultats de référence obtenus par la méthode des éléments finis.

### Abstract

This paper is concerned with the prediction of the propagation of flexural waves in anisotropic laminated plates with relatively high slenderness ratios by means of refined plate models. The study is conducted using the Bending-Gradient theory which is considered as an extension of the Reissner-Mindlin theory to multilayered plates. The relevance of the proposed model is tested by comparing it to well-known plate theories and to reference results obtained using the finite element method.

**Mots Clés :** Propagation d'onde - Courbe de dispersion - théorie du Bending-Gradient - modèle de Reissner-Mindlin - Méthode des éléments finis spectraux

**Keywords :** Wave propagation - Dispersion curve - Bending-Gradient theory - Reissner-Mindlin model - Spectral Finite element method

## 1. Introduction

Etant composées au moins de deux matériaux différents, les plaques composites sont hétérogènes et fortement anisotropes. Par conséquent, leur comportement est difficile à modéliser. Plusieurs modèles de plaques ont été proposés dans la littérature. Les deux modèles les plus connus sont le modèle de Kirchhoff-Love [1] pour les plaques minces et la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FOSDT) connue sous le nom de Reissner-Mindlin [2] pour les plaques épaisses. Ces deux modèles donnent des résultats très satisfaisants lorsque le matériau constitutif est homogène. Toutefois, l'extension de ces modèles aux plaques hétérogènes entraîne des erreurs significatives sur le déplacement transversal.

En s'inspirant par des idées de Reissner, de récents travaux au laboratoire Navier [3] ont permis de créer un nouveau modèle en statique, connu sous le nom du Bending-Gradient, consacré aux plaques épaisses hétérogènes. Dans ce modèle, les forces de cisaillement hors-plan de Reissner-Mindlin sont remplacées par des forces de cisaillement généralisées liées au gradient du moment de flexion. Ainsi, le Bending-Gradient est considéré comme une extension aux plaques multicouches du modèle de Reissner-Mindlin. En toute généralité, le Bending-Gradient ne peut pas être réduit à un modèle de

Reissner-Mindlin sauf si la plaque est homogène. Dans ce cas, les deux modèles coïncident strictement.

Le modèle du Bending-Gradient a été récemment justifié par la méthode des développements asymptotiques [4] et par des méthodes variationnelles [5]. Ayant justifié cette théorie mathématiquement, le but de ce papier est de tester sa validité pour la modélisation de la propagation d'ondes planes dans des plaques symétriques hétérogènes et anisotropes.

Dans la section 2 sont introduites les variables et les équations de la théorie du Bending-Gradient. La section 3 est consacrée à la formulation des équations du mouvement en 3D et à partir du Bending-Gradient. Dans la section 4, l'efficacité du Bending-Gradient est testée en le comparant à des résultats de modèles connus et à des résultats de références obtenus par la méthode des éléments finis. Les conclusions sont présentées dans la section 5.

## 2. La théorie du Bending-Gradient

Comme point de départ, il convient de signaler que l'objectif principal de la théorie du Bending-Gradient est de substituer le modèle 3D par un modèle réduit 2D. Afin d'apporter une compréhension plus approfondie du modèle, on commence alors par un rappel du problème élastique 3D.

### 2.1. Le problème élastique tridimensionnel

L'espace physique considéré est muni d'un repère orthonormé  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  où  $O$  est l'origine et  $\underline{e}_i$  est le vecteur de base dans la direction  $i \in \{1, 2, 3\}$ . On considère une plaque linéaire élastique occupant le domaine tridimensionnel  $V = S \times ]-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[$ , où  $S \subset \mathbb{R}^2$  est la surface moyenne de la plaque et  $h$  son épaisseur. Le bord du domaine, noté par  $\partial V$ , est décomposé en trois parties (Fig. 1) :

$$\partial V = \partial V_{\text{lat}} \cup \partial V_3^+ \cup \partial V_3^-,$$

avec  $\partial V_{\text{lat}} = \partial S \times ]-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[$  et  $\partial V_3^\pm = S \times \left\{ \pm \frac{h}{2} \right\}$ , (Eq. 1)

où  $\partial S$  est le bord de  $S$ .

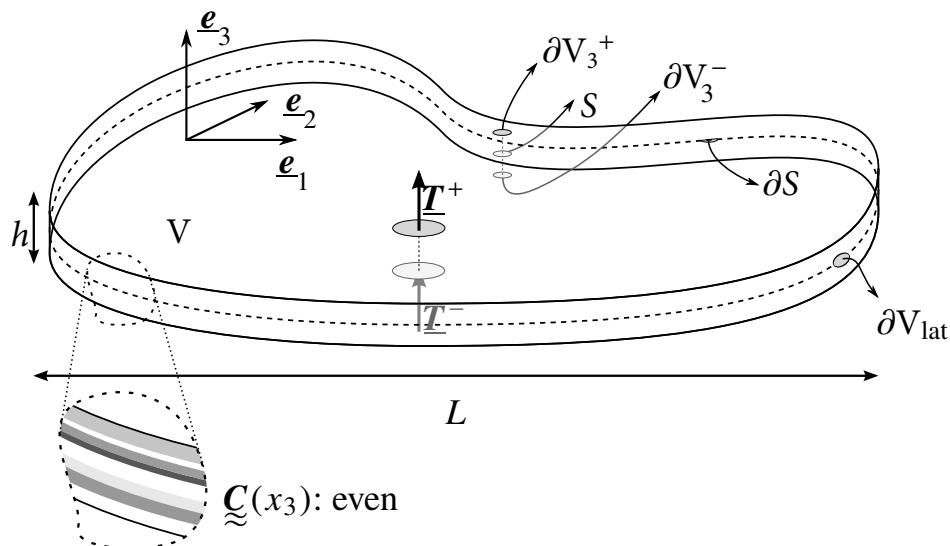


Fig. 1. Configuration 3D de la plaque

En se restreignant uniquement sur les charges hors-plan, la plaque est soumise à des forces par unité de surface sur  $\partial V_3^\pm$  de la forme :

$$(T_1, T_2, T_3)^\pm(x_1, x_2) = \left( 0, 0, \frac{1}{2} p(x_1, x_2) \right),$$

(Eq. 2)

où  $p$  est une fonction donnée sur  $S$ .

En l'absence de forces volumiques, le problème élastique 3D consiste à trouver dans  $V$  un champ de déplacement ( $u_i$ ), un tenseur de contraintes ( $\sigma_{ij}$ ) et un tenseur de déformations ( $\varepsilon_{ij}$ ), solutions des équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 & \text{sur } V, & \text{(Eq. 3a)} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x_3) : \varepsilon_{lk} & \text{sur } V, & \text{(Eq. 3b)} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{sur } V, & \text{(Eq. 3c)} \\ \sigma_{i3} = T_i^\pm & \text{sur } \partial V_3^\pm, & \text{(Eq. 3d)} \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial V_{\text{lat}}. & \text{(Eq. 3e)} \end{cases}$$

Les équations (Eq. 3a), (Eq. 3b) et (Eq. 3c) représentent respectivement l'équation d'équilibre, la loi de comportement et l'équation de compatibilité. Pour des raisons de simplicité, la plaque est supposée encadrée (Eq. 3e). D'autres conditions aux bords peuvent être aussi traitées.

## 2.2. La théorie du Bending-Gradient

On présente maintenant les définitions principales des champs statiques et cinématiques ainsi que les équations du Bending-Gradient expliquées en détail dans [3, 6, 7].

### 2.2.1. Contraintes et déformations généralisées

Les déplacements généralisés du Bending-Gradient sont  $(U_3, \Phi_{\alpha\beta\gamma})$  où  $U_3$  est le déplacement transversal de la plaque et  $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$  est le tenseur de rotation généralisé d'ordre 3 vérifiant  $\Phi_{\alpha\beta\gamma} = \Phi_{\beta\alpha\gamma}$ . Les déformations généralisées du Bending-Gradient, qui dérivent de  $(U_3, \Phi_{\alpha\beta\gamma})$ , sont  $(\chi_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta\gamma})$ .  $\chi_{\alpha\beta}$  désigne le tenseur de courbure d'ordre deux défini par :

$$\chi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta\gamma,\gamma}. \quad \text{(Eq. 4)}$$

$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  est le tenseur généralisé des déformations de cisaillement d'ordre trois vérifiant  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$  et donné par :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Phi_{\alpha\beta\gamma} + i_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{3,\delta}. \quad \text{(Eq. 5)}$$

Les équations (Eq. 4) et (Eq. 5) désignent les conditions de compatibilité.

Les déformations généralisées  $(\chi_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta\gamma})$  constituent le dual des contraintes généralisées  $(M_{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\delta})$ . Le tenseur  $M_{\alpha\beta}$  représente le tenseur de moment de flexion symétrique ( $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ ) lié au tenseur de contraintes 3D ( $\sigma_{ij}$ ) par :

$$M_{\alpha\beta} = \langle x_3 \sigma_{\alpha\beta} \rangle. \quad \text{(Eq. 6)}$$

Le symbole  $\langle \bullet \rangle$  désigne l'intégration suivant l'épaisseur :  $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_3) dx_3 = \langle f \rangle$ . Le tenseur d'ordre trois  $R_{\alpha\beta\gamma}$  représente le tenseur des forces de cisaillement généralisé vérifiant  $R_{\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\alpha\gamma}$ .

En toute généralité, le Bending-Gradient peut gérer différents types de conditions aux limites (encastré, libre, appui simple). Par exemple, les conditions aux bords pour une plaque encadrée s'écrivent :

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma = 0 \quad \text{et} \quad U_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial S, \quad \text{(Eq. 7)}$$

où  $n_\gamma$  est le vecteur normal extérieur à  $\partial S$ .

## 2.2.2. Equations constitutives

La relation entre les contraintes généralisées  $(M_{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\delta})$  et les déformations généralisées  $(\chi_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta\gamma})$  est exprimée par le biais des équations suivantes :

$$\begin{cases} \chi_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta\gamma\delta} M_{\delta\gamma}, & \text{(Eq. 8a)} \\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} R_{\zeta\epsilon\delta}, & \text{(Eq. 8b)} \end{cases}$$

où  $d_{\alpha\beta\gamma\delta}$  et  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  sont des tenseurs de souplesse qui s'expriment en fonction des propriétés élastiques des couches [7].

$d_{\alpha\beta\gamma\delta}$  représente le tenseur de souplesse de flexion d'ordre quatre, défini positif, inverse du tenseur de raideur de flexion  $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

Le tenseur de cisaillement généralisé  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  d'ordre six est positif mais n'est pas toujours défini sur tout  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{R} = \{ (X_{\alpha\beta\gamma}) \in \mathbb{R}^8 \mid X_{\alpha\beta\gamma} = X_{\beta\alpha\gamma} \}. \quad \text{(Eq. 9)}$$

Sab et Lebée [7] ont décomposé l'espace vectoriel  $\mathbb{R}$ , muni du produit scalaire  $X_{\alpha\beta\gamma} X'_{\alpha\beta\gamma}$ , en  $\text{Ker } h$  et son orthogonal  $\text{Im } h$  :

$$\mathbb{R} = \text{Ker } h \oplus \text{Im } h,$$

où  $\oplus$  est l'opérateur de somme directe,  $\text{Im } h$  est l'image du tenseur d'ordre six  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  :

$$\text{Im } h = \{ h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} X_{\zeta\epsilon\delta}, \quad X_{\zeta\epsilon\delta} \in \mathbb{R} \},$$

et  $\text{Ker } h$  son noyau :

$$\text{Ker } h = \{ X_{\alpha\beta\gamma} \in \mathbb{R} \mid h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} X_{\zeta\epsilon\delta} = 0 \}.$$

Les notations  $P^S$  et  $P^K$  désignent les projections orthogonales sur  $\text{Im } h$  et  $\text{Ker } h$  respectivement. Sab et Lebée [7] ont montré que le tenseur  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  est défini uniquement sur le sous-espace  $\text{Im } h$  dont la dimension est comprise entre 2 et 6. Pour plus de détails, le lecteur est prié de consulter [7].

Comme  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  n'est pas toujours défini, on note  $H_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  son pseudo-inverse de Moore-Penrose. Cela nous permet d'écrire la relation réciproque de (Eq. 8b) :

$$R_{\alpha\beta\gamma} = H_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} \Gamma_{\zeta\epsilon\delta}, \quad \Gamma_{\zeta\epsilon\delta} \in \text{Im } h. \quad \text{(Eq. 10)}$$

Selon l'équation (Eq. 8b), pour que  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  soit défini, les tenseurs  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  et  $R_{\alpha\beta\gamma}$  doivent appartenir à  $\text{Im } h$ . Comme on a toujours  $i_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{3,\delta} \in \text{Im } h$ , la condition  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \in \text{Im } h$  est équivalente à  $\Phi_{\alpha\beta\gamma} \in \text{Im } h$ . La condition  $R_{\alpha\beta\gamma} \in \text{Im } h$  est assurée par les équations d'équilibre présentés ci-dessous.

## 2.2.3. Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre du Bending-Gradient sont :

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta\gamma} - P_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}^S M_{\zeta\epsilon,\delta} = 0, & \text{(Eq. 11a)} \\ i_{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\delta\gamma\beta,\alpha} + p = 0. & \text{(Eq. 11b)} \end{cases}$$

où  $i_{\alpha\beta\gamma\delta}$  désigne le tenseur d'identité d'ordre quatre. Dans la suite, on suppose que le tenseur  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  est toujours défini. Dans ce cas,  $P^S$  est l'opérateur d'identité et les équations (Eq. 11) s'écrivent :

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta\gamma} - M_{\alpha\beta,\gamma} = 0, & \text{(Eq. 12a)} \\ i_{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\delta\gamma\beta,\alpha} + p = 0. & \text{(Eq. 12b)} \end{cases}$$

On note qu'on peut obtenir le vecteur de cisaillement transverse  $(Q_\alpha) = (\langle \sigma_{\alpha 3} \rangle)$  à partir de  $R_{\alpha\beta\gamma}$  par :

$$Q_\alpha = R_{\alpha\beta\beta}, \quad (\text{Eq. 13})$$

$h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  étant défini ou pas. On peut alors réécrire les équations (Eq. 11b) et (Eq. 12)b sous la forme :

$$Q_{\alpha,\alpha} + p = 0 \quad (\text{Eq. 14})$$

#### 2.2.4. Plaques homogènes

En général, le Bending-Gradient ne peut pas être réduit à un modèle de Reissner-Mindlin [7]. Néanmoins, quand il s'agit d'une plaque homogène, les deux théories coïncident. Dans ce cas, le tenseur  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  s'écrit :

$$h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} = i_{\alpha\beta\gamma\eta} f_{\eta\theta}^R i_{\theta\delta\epsilon\zeta}, \quad (\text{Eq. 15})$$

où  $f_{\eta\theta}^R$  est un tenseur d'ordre deux de Reissner-Mindlin défini positif. De plus, les rotations  $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$  s'écrivent sous la forme :

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma} = i_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_\delta, \quad (\text{Eq. 16})$$

où  $\varphi_\delta$  désignent des rotations 2D. Le tenseur d'ordre trois  $R_{\alpha\beta\gamma}$  s'exprime sous la forme :

$$R_{\alpha\beta\gamma} = \frac{2}{3} i_{\alpha\beta\eta\theta} M_{\theta\gamma,\eta} \quad (\text{Eq. 17})$$

Les équations d'équilibre du Bending-Gradient deviennent alors :

$$\begin{cases} Q_\alpha - M_{\alpha\beta,\beta} = 0, & (\text{Eq. 18a}) \\ Q_{\alpha,\alpha} + p = 0, & (\text{Eq. 18b}) \end{cases}$$

On retrouve alors les équations d'équilibre du modèle de Reissner-Mindlin.

### 3. Propagation des ondes planes dans une plaque anisotrope

Cette partie est dédiée à l'étude de la propagation des ondes dans les plaques anisotropes dans le cadre de l'élasticité linéaire tridimensionnelle. Notre objectif est de prédire avec précision les courbes de dispersion associées aux ondes de flexion.

#### 3.1. Equations tridimensionnelles du mouvement

Dans la suite, on considère une plaque symétrique infinie dans les directions 1 et 2 et on s'intéresse en particulier à étudier la propagation des ondes dans la direction 1. Le vecteur déplacement  $u_i$  est alors fonction des coordonnées  $(x_1, x_3)$  et du temps  $t$  :

$$u_i = u_i(x_1, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{Eq. 19})$$

La propagation des ondes dans une plaque élastique anisotrope infinie est régie par l'ensemble des équations de la théorie élastique tridimensionnelle données par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i = 0, & (\text{Eq. 20a}) \\ \sigma_{ij} - C_{ijkl}(x_3) : \epsilon_{lk} = 0, & (\text{Eq. 20b}) \\ \epsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = 0, & (\text{Eq. 20c}) \\ \sigma_{i3} = 0 \text{ en } x_3 = \pm \frac{h}{2}. & (\text{Eq. 20d}) \end{cases}$$

où  $\rho$  désigne la densité et le double point indique une dérivée seconde par rapport au temps ( $\ddot{x} = \frac{dx^2}{dt^2}$ ). Les contraintes ( $\sigma_{i3}$ ) et les déplacements ( $u_i$ ) doivent éventuellement être continus aux interfaces entre les couches.

Pour les ondes harmoniques se propageant dans la direction 1 au temps  $t$ , les composantes  $u_i$  du vecteur déplacement solution des équations (Eq. 20), sont exprimées par :

$$u_i(x_1, x_3, t) = \Re \left( \hat{u}_i(x_3) e^{j(\omega t - kx_1)} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Eq. 21})$$

où  $(\hat{u}_i)_{i=1,2,3}$  sont des amplitudes,  $\omega$  est la fréquence angulaire,  $k \neq 0$  est le nombre d'onde et  $j$  l'unité imaginaire. Le symbole  $\Re(z)$  désigne la partie réelle du nombre complexe  $z$ . La longueur d'onde est identifiée par  $\lambda$  et associée au nombre d'onde par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (\text{Eq. 22})$$

Si on note  $c$  la vitesse de propagation de l'onde, on a :

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (\text{Eq. 23})$$

L'objectif de cette étude est de donner une bonne approximation de la relation de dispersion des ondes de flexion liant la fréquence angulaire  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ .

Des solutions de référence du problème (Eq. 20) peuvent être obtenues par la méthode des éléments finis dont la procédure est présentée ci-après. Pour plus de détails, voir [8].

### 3.2. Méthode des éléments finis

L'approche par éléments finis conduit au problème aux valeurs propres suivant [9, 10, 11] :

$$\left( k^2 [K_2] + jk [K_1] + [K_0] - \omega^2 [M] \right) [U] = \underline{0}, \quad (\text{Eq. 24})$$

où  $[K_i]$ ,  $i = 1, 2, 3$  et  $[M]$  sont des matrices hermitiennes symétriques et  $[U]$  le vecteur des déplacements nodaux. Cette formulation est généralement appelée "méthode des éléments finis spectraux" (SFEM). Cette méthode a été mise en oeuvre ici pour calculer des solutions de référence au problème de propagation des ondes dans les plaques anisotropes. Des éléments linéaires ont été utilisés. Il a été montré que 10 éléments par couche suffisent pour éviter les problèmes de convergence dans la gamme de longueurs d'onde d'intérêt.

### 3.3. Equations du mouvement du Bending-Gradient

La formulation du problème de propagation d'ondes est basé sur la papier de Mindlin [12] qui a montré que les effets inertiels dus à la rotation peuvent être négligés dans le cas homogène. Ainsi, dans le modèle proposé, les effets du cisaillement transverse sont pris en considération par la théorie du Bending-Gradient alors que les effets d'inertie en rotation sont négligés. Dans ce cas, la charge transversale  $p$  est donnée par :

$$p = -\ddot{U}_3 \bar{\rho}, \quad (\text{Eq. 25})$$

où  $\bar{\rho} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(x_3) dx_3$ .

La propagation d'ondes dans une plaque anisotrope en l'absence de forces volumiques est modélisée par :

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta\gamma} - M_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \\ Q_\alpha = R_{\alpha\beta\beta}, \\ Q_{\alpha,\alpha} = \ddot{U}_3 \bar{\rho}. \end{cases} \quad (\text{Eq. 26})$$

En utilisant les relations (Eq. 8), (Eq. 4) et (Eq. 5), on peut exprimer les équations (Eq. 26) en fonction des déplacements généralisés  $(U_3, \Phi_{\alpha\beta\gamma})(x_1, t)$  comme suit :

$$\begin{cases} H_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} (\Phi_{\zeta\epsilon\delta} + i_{\zeta\epsilon\delta\eta} U_{3,\eta}) - D_{\alpha\beta\theta\epsilon} \Phi_{\epsilon\theta\xi,\xi\gamma} = 0, & \text{(Eq. 27a)} \\ H_{\alpha\beta\beta\delta\epsilon\zeta} (\Phi_{\zeta\epsilon\delta,\alpha} + i_{\zeta\epsilon\delta\eta} U_{3,\eta\alpha}) = \hat{U}_3 \bar{\rho}. & \text{(Eq. 27b)} \end{cases}$$

Pour les ondes se propageant dans la direction 1, les déplacements généralisés  $(U_3, \Phi_{\alpha\beta\gamma})(x_1, t)$ , solutions des équations (Eq. 27), peuvent être décrits par :

$$\begin{cases} U_3(x_1, t) = \Re \left( \hat{U}_3 e^{j(\omega t - kx_1)} \right), & \text{(Eq. 28a)} \\ \Phi_{\alpha\beta\gamma}(x_1, t) = \Re \left( \hat{\Phi}_{\alpha\beta\gamma} e^{j(\omega t - kx_1)} \right), & \text{(Eq. 28b)} \end{cases}$$

où  $\hat{U}_3$  et  $\hat{\Phi}$  sont des constantes arbitraires. Les équations (Eq. 27) deviennent alors :

$$\begin{cases} H_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} (\hat{\Phi}_{\zeta\epsilon\delta} - jki_{\zeta\epsilon\delta 1} \hat{U}_3) + k^2 D_{\alpha\beta\theta\epsilon} \hat{\Phi}_{\epsilon\theta 1} \delta_{1\gamma} = 0, & \text{(Eq. 29a)} \\ H_{1\beta\beta\delta\epsilon\zeta} (-jk\hat{\Phi}_{\zeta\epsilon\delta} - k^2 i_{\zeta\epsilon\delta 1} \hat{U}_3) + \omega^2 \hat{U}_3 \bar{\rho} = 0. & \text{(Eq. 29b)} \end{cases}$$

où  $\delta_{\alpha\beta}$  désigne le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si  $\alpha = \beta$  et 0 sinon.

Trouver la relation de dispersion associée aux ondes de flexion nécessite l'utilisation d'un logiciel de calcul mathématique tel que Matlab. Les détails de l'implémentation numérique sont disponibles dans [13].

### 3.4. Equations du mouvement de Reissner-Mindlin et de Kirchhoff-Love

On rappelle que le modèle du Bending-Gradient est transformé en un modèle de Reissner-Mindlin lorsque  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta}$  est de la forme (Eq. 15). Dans ce cas, les relations de dispersion des ondes de flexion sont exprimées par :

$$\omega = \pm k \sqrt{\frac{k^4 F_{11}^R (D_{1111} D_{2121} - D_{1121}^2) + k^2 D_{1111} (F_{11}^R F_{22}^R - (F_{12}^R)^2)}{\bar{\rho} \left( (F_{11}^R + k^2 D_{1111}) (F_{22}^R + k^2 D_{2121}) - (F_{12}^R + k^2 D_{2111})^2 \right)}}, \quad \text{(Eq. 30)}$$

où  $F_{\alpha\beta}^R = \left( f_{\alpha\beta}^R \right)^{-1}$ .

Finalement, la théorie de Kirchhoff-Love est obtenue en considérant  $h_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} = 0$ . On obtient alors le résultat classique :

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{D_{1111}}{\bar{\rho}}} k^2 \quad \text{(Eq. 31)}$$

## 4. Résultats numériques et validation

La validité et l'efficacité de la présente théorie (BG) sont évaluées en comparant les résultats obtenus à des solutions de référence calculées par la méthode classique des éléments finis (FEM). On présente aussi les résultats obtenus pour le modèle de Kirchhoff-Love (KL) et la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FOSDT) corrigée par le facteur  $\frac{\pi^2}{12}$ .

Ci-dessous sont présentées des simulations numériques réalisées en premier pour un stratifié  $[-30^\circ, 30^\circ]_S$ . L'indice  $S$  pour symétrique, signifie que les angles entre crochets correspondent à la moitié de l'empilement, l'autre moitié étant symétrique par rapport au plan moyen. On suppose que les quatre couches ont même épaisseur  $h = 0.01 \text{ mm}$ . Les propriétés mécaniques du matériau constitutif sont données dans le tableau (Tab. 1).

$E_L$	$E_N = E_T$	$G_{LN} = G_{LT}$	$G_{TN}$	$\nu_{LN} = \nu_{LT} = \nu_{TN}$	$\rho$
1.72e+11	6.89e+09	3.45e+09	2.75e+09	0.25	2260

Tab. 1. Caractéristiques mécaniques du stratifié 1 [14, 15],  $E$  et  $G$  en Pa,  $\rho$  en  $kg/m^3$ 

$E_L = E_T$	$E_N$	$G_{LT}$	$G_{LN} = G_{TN}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{LN} = \nu_{TN}$	$\rho$
5.40e+10	4.80e+09	3.16e+09	1.78e+09	0.06	0.31	2000

Tab. 2. Caractéristiques mécaniques du verre-époxy [16],  $E$  et  $G$  en Pa,  $\rho$  en  $kg/m^3$ 

Les symboles  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  et  $\rho$  désignent respectivement le module d'Young, le module de cisaillement, le coefficient de poisson et la densité du matériau. Les indices L, T et N correspondent respectivement aux directions longitudinale, transversale et normale.

Le deuxième exemple est un stratifié constitué de couches alternées de même épaisseur  $h = 1 \text{ mm}$  de composite tissé verre-époxy et d'aluminium dont les propriétés mécaniques sont regroupées dans les tableaux (Tab. 2) et (Tab. 3) respectivement. La séquence d'empilement est [GFRP, Al, GFRP, Al]<sub>S</sub> et les directions  $L$ ,  $N$  du matériau GFRP sont alignées avec les directions 1 et 2. Plus d'exemples peuvent être trouvés dans [13].

Dans les figures (Fig. 2) et (Fig. 3) sont illustrées les courbes de dispersion obtenues pour les stratifiés 1 et 2 respectivement. L'axe des abscisses indique le rapport épaisseur-longueur d'onde ( $h/\lambda$ ). L'axe des ordonnées correspond au rapport ( $c/c_s$ ), où  $c$  est la vitesse de l'onde et  $c_s$  désigne un facteur de normalisation défini par [12] :

$$c_s = \sqrt{\frac{G_{LN}}{\rho}}.$$

Pour réaliser une analyse complète, il nous faut évaluer l'erreur commise dans les calculs numériques. L'erreur relative est exprimée par :

$$\mathcal{E}_r = \frac{c_{\text{app}} - c_{\text{fem}}}{c_{\text{fem}}}, \quad (\text{Eq. 32})$$

où  $c_{\text{app}}$  et  $c_{\text{fem}}$  désignent respectivement la valeur approximative et la valeur de référence de la vitesse de l'onde. On trouvera dans le tableau (Tab. 4) les différentes valeurs de l'erreur relative par rapport aux solutions de référence obtenus par la méthode classique des éléments finis (FEM) pour un rapport épaisseur-longueur d'onde  $h/\lambda = 0.3$ .

Comme le montrent les figures (Fig. 2) et (Fig. 3), la théorie de Kirchhoff-Love ne permet pas de prédire correctement la courbe de dispersion relative au mode de flexion pour un rapport épaisseur-longueur d'onde supérieur à 0.1 (voir Tab. 4). Ceci est explicable par les hypothèses du modèle stipulant que les effets inertiels dus à la rotation et aux déformations de cisaillement transverse sont négligés [1].

On peut observer sur la figure (Fig. 2) que les résultats obtenus avec le modèle  $\frac{\pi^2}{12}$ -FOSDT sont en bon accord avec les résultats de référence (FEM). Le modèle Bending-Gradient (BG) donne une approximation suffisamment bonne de la courbe de dispersion du mode de flexion. L'erreur relative  $|\mathcal{E}_r|$  de ce modèle est évaluée à 4.1% environ.

Selon la figure (Fig. 3), les résultats du modèle  $\frac{\pi^2}{12}$ -FOSDT ne concordent pas avec les résultats de référence (FEM). L'erreur relative  $|\mathcal{E}_r|$  se situe autour de 13.4%, la comparaison étant effectuée pour  $h/\lambda = 0.3$ . Le modèle Bending-Gradient (BG) donne des prévisions relativement proches de celles

$E$	$G$	$\nu$	$\rho$
7.20e+10	2.67e+10	0.35	2700

Tab. 3. Caractéristiques mécaniques de l'aluminium[17],  $E$  et  $G$  en Pa,  $\rho$  en  $kg/m^3$

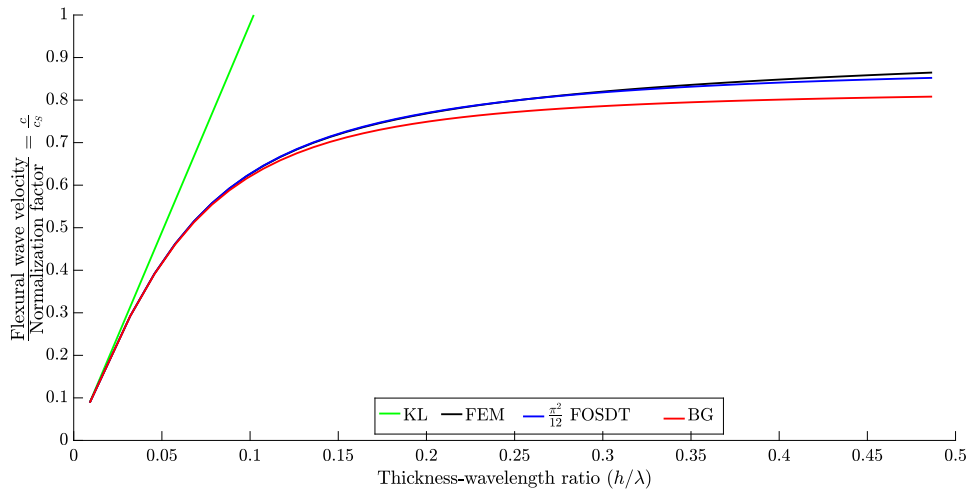


Fig. 2. Comparaison des courbes de dispersion pour le stratifié 1

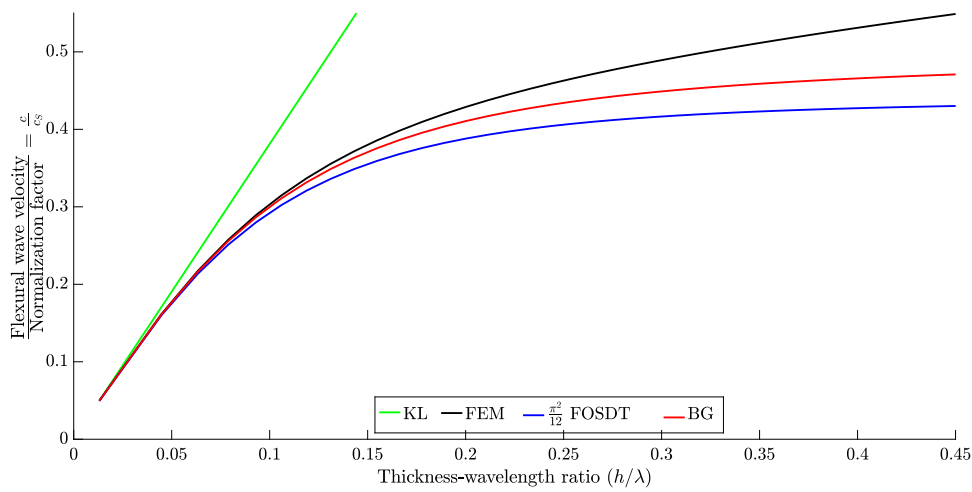


Fig. 3. Comparaison des courbes de dispersion pour le stratifié 2

obtenues par la méthode des éléments finis (FEM). L'erreur relative  $|\mathcal{E}_r|$  est inférieure à 7% comme indiqué dans le tableau (Tab. 4).

En toute généralité, le modèle  $\frac{\pi^2}{12}$ -FOSDT produit des estimations de bonne qualité. Toutefois, il apparaît que l'approximation obtenue par le modèle du Bending-Gradient est la plus robuste.

## 5. Conclusion

Dans ce papier, le problème de propagation des ondes de flexion dans les plaques stratifiées anisotropes a été abordé en utilisant le Bending-Gradient. Les équations du mouvement ont été formulées en tenant compte des déformations du cisaillement transverse et en négligeant les effets d'inertie rotatoire. La résolution de ces équations a permis d'établir les relations de dispersion reliant la fréquence

Stratifié	KL	$\frac{\pi^2}{12}$ FOSDT	BG
1	0.896	-0.002	-0.041
2	0.539	-0.134	-0.065

Tab. 4. Erreur relative des modèles proposés par rapport aux résultats de la méthode des éléments finis pour un rapport épaisseur-longueur d'onde  $h/\lambda = 0.3$

angulaire et le nombre d'onde. Le modèle du Bending-Gradient a été validé en le comparant à des solutions de la méthode d'éléments finis considérées comme solutions de référence. Des simulations numériques effectuées pour plusieurs types d'empilement ont montré que les résultats obtenus par le Bending-Gradient sont les plus robustes et les moins sensibles à la configuration de la plaque.

## Références

- [1] A. E. H. Love « The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell », *Proceedings of the Royal Society of London* Vol. 43 n° 258–265, pp. 352–353, 1888.
- [2] E. Reissner « The Effect of transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates », *J. Appl. Mech. Eng. ASME* Vol. 12, pp. A69–A77, 1945.
- [3] A. Lebé, K. Sab « A Bending-Gradient model for thick plates. Part I : Theory », *International Journal of Solids and Structures* Vol. 48 n° 20, pp. 2878 – 2888, 2011, ISSN 0020–7683.
- [4] A. Lebé, K. Sab, Justification of the Bending-Gradient Theory Through Asymptotic Expansions, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, ISBN 978-3-642-36394-8, , pp. 217–236, 2013.
- [5] N. Bejjani, K. Sab, A. Lebé, J. Bodgi « The Bending-Gradient Theory for Thick Plates : Existence and Uniqueness Results », *Journal of Elasticity* Vol. 133 n° 1, pp. 37–72, 2018, ISSN 1573–2681.
- [6] A. Lebé, K. Sab « A Bending-Gradient model for thick plates, Part II : Closed-form solutions for cylindrical bending of laminates », *International Journal of Solids and Structures* Vol. 48 n° 20, pp. 2889 – 2901, 2011, ISSN 0020–7683.
- [7] K. Sab, A. Lebé, Homogenization of Heterogeneous Thin and Thick Plates, ISBN 978-1-84821-652-5, 2015.
- [8] P. Margerit « Caractérisation large bande du comportement dynamique linéaire des structures hétérogènes viscoélastiques anisotropes. Application à la table d'harmonie du piano », Ph.D. thesis, Université Paris-Est, 2018.
- [9] S. Dong, R. B. Nelson « On Natural Vibrations and Waves in Laminated Orthotropic Plates », *Journal of Applied Mechanics* Vol. 39.
- [10] S. K. Datta, A. H. Shah, R. L. Bratton, T. Chakraborty « Wave propagation in laminated composite plates », *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 83 n° 6, pp. 2020–2026, 1988.
- [11] Z. C. Xi, G. R. Liu, K. Y. Lam, H. M. Shang « Dispersion and characteristic surfaces of waves in laminated composite circular cylindrical shells », *The Journal of the Acoustical Society of America* Vol. 108 n° 5, pp. 2179–2186, 2000.
- [12] R. D. Mindlin « Influence of Rotatory Inertia and Shear Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates », *Journal of Applied Mechanics* Vol. 18 n° 1, pp. 31–38, 1951.
- [13] N. Bejjani « Propagation des ondes dans les plaques multicouches : le modèle du Bending-Gradient et la méthode des développements asymptotiques », Ph.D. thesis, Université Paris-Est, 2019.
- [14] A. Lebé, K. Sab « On the Generalization of Reissner Plate Theory to Laminated Plates, Part II : Comparison with the Bending-Gradient Theory », *Journal of Elasticity* Vol. 126 n° 1, pp. 67–94, 2015.
- [15] N. J. Pagano « Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending », *Journal of Composite Materials* Vol. 3 n° 3, pp. 398–411, 1969.
- [16] J. Renno, E. Manconi, B. Mace « A Finite Element Method for Modelling Waves in Laminated Structures », *Advances in Structural Engineering* Vol. 16, pp. 61–76, 2013.
- [17] Z. Liu, M. Fard, J. Davy « Prediction of the effect of porous sound-absorbing material inside a coupled plate cavity system », *International Journal of Vehicle Noise and Vibration* Vol. 12, pp. 314, 2016.