



HAL
open science

Simulation haute performance des suspensions de fibres courtes pour les procédés de fabrication de composites

Nesrine Aissa, Luisa Alexandra Rocha da Silva, Emmanuelle Abisset-Chavanne, Hugues Dignonnet

► To cite this version:

Nesrine Aissa, Luisa Alexandra Rocha da Silva, Emmanuelle Abisset-Chavanne, Hugues Dignonnet. Simulation haute performance des suspensions de fibres courtes pour les procédés de fabrication de composites. 21ème Journées Nationales sur les Composites, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM) - Bordeaux, Jul 2019, Bordeaux, Talence, France. hal-02420691

HAL Id: hal-02420691

<https://hal.science/hal-02420691>

Submitted on 20 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Simulation haute performance des suspensions de fibres courtes pour les procédés de fabrication de composites

High performance simulation of short fiber suspensions for manufacturing processes

N. Aissa^{1,2}, L. Silva¹ E. Abisset-Chavanne¹ et H.Digonnet¹

1 : Institut de Calcul Intensif (ICI),
École Centrale de Nantes
1 Rue de la Noë, 44300 Nantes

e-mail : nesrine.aissa@ec-nantes.fr, luisa.rocha-da-silva@ec-nantes.fr, emmanuelle.abisset-chavanne@ec-nantes.fr
et hugues.digonnet@ec-nantes.fr

2 : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)
École Centrale de Nantes
1 Rue de la Noë, 44300 Nantes
e-mail : nesrine.aissa@ec-nantes.fr

Résumé

La simulation numérique directe constitue un outil précis pour la compréhension des mécanismes d'orientation dans les suspensions chargées de fibres courtes. L'objectif est de mettre en place un outil de simulation directe permettant de prédire d'une manière fiable la microstructure d'une pièce issue du procédé d'injection. Un passage à l'échelle en rhéométrie numérique est envisagé afin d'étudier le problème dans sa globalité et de se passer des hypothèses limitatrices reliées au choix des volumes élémentaires représentatifs. Un algorithme de génération de microstructures isotropes ou orientées a été implémenté permettant de générer, dans un temps optimisé, des millions de fibres. Un écoulement de Stokes a été appliqué à une suspension de 10 000 fibres et les équations ont été traitées par une méthode éléments finis associée à une formulation multidomaines et un maillage adaptatif. Ensuite, l'étude du mouvement des fibres a été initiée à travers l'étude d'une fibre dans un écoulement de cisaillement.

Abstract

The microstructure of a short fiber thermoplastic composite greatly affects its mechanical properties. We wish to simulate the flow behavior of concentrated fiber suspensions containing a significant number of fibers in order to understand the evolution of fiber orientation during the forming process. We aim to ensure a scale transition in numerical rheometry by simulating a hole injected part or a thickness of a part with a complex geometry. This paper focuses first on a numerical method to generate an initial isotropic and oriented state of concentrated fiber suspensions. Then, a Stokes flow is applied to 10000 fibres and equations are solved by a finite element method associated with a multi-domain formulation and an adaptive mesh. Finally, the study of the kinematic of fiber suspensions is initiated by simulating the motion of an unique fiber under Newtonian shear flow.

Mots Clés : composite à fibres courtes, algorithme ASA, scalabilité numérique, mouvement de corps rigide

Keywords : short fiber reinforced composite, RSA algorithm, numerical scalability, rigid body motion

1. Introduction

De nos jours, l'utilisation des thermoplastiques renforcés de fibres courtes ne cesse de croître notamment dans le secteur automobile. Ces matériaux permettent de répondre aux enjeux d'allègement massif et de réduction de coût de fabrication, tout en optimisant les caractéristiques et le comportement mécanique. Ces derniers dépendent étroitement de la de microstructure induite par le procédé de mise en forme. Dans le cas des pièces injectées, on s'intéresse essentiellement aux distributions d'orientation et de longueur des fibres. Généralement, les fibres font 10 à 15 μm de diamètre et leur

longueur moyenne ne dépasse pas les 0.5 mm [1]. Dans ce travail, on se focalise seulement sur la simulation numérique des mécanismes d'orientation et non pas à leurs impacts sur le comportement.

En effet, l'étude et la modélisation de l'écoulement dans un milieu complexe tel que les suspensions de fibres est une tâche fastidieuse. Selon le régime de concentration, la nature du fluide suspendant et l'échelle d'étude, différents phénomènes doivent être pris en considération et plusieurs approches de peuvent être adoptées. Dès 1922, le mouvement d'une particule ellipsoïdale rigide immergée dans un fluide Newtonien incompressible est bien prédit grâce aux travaux de Jeffery [2]. Depuis, plusieurs auteurs ont étudié l'impact de la géométrie de la particule [3] et la nature du suspendant [4] sur l'évolution de son mouvement. Toutefois, le cas des écoulements industriels est bien plus compliqué que les cas dilués décrits précédemment. Les interactions entre fibres doivent être prises en considération. Le modèle le plus utilisé dans ce cas est le modèle de Folgar et Tucker [5], mettant en évidence un coefficient de diffusion inspiré par la modélisation d'un mouvement brownien dont la détermination reste assez délicate, et un tenseur d'ordre 4 dont l'approximation nécessite des relations de fermeture. En ce qui concerne la simulation numérique directe (SND), la majorité des travaux se limite à des calculs effectués sur des petits VER périodiques, étant donné le coût excessif en temps et en mémoire. Ceci implique la mise en place de plusieurs hypothèses simplificatrices qui ne prennent pas en compte toute la complexité du problème.

Simuler une pièce complète ou une épaisseur de pièce avec une géométrie complexe telle qu'une nervure permettra d'avoir une vision plus générale et d'étudier le problème dans sa globalité. On espère ainsi mieux comprendre à l'échelle microscopique les différents mécanismes d'orientation des fibres pour des pièces ayant des géométries complexes et d'apporter des explications numériques à des phénomènes observés expérimentalement, tel que la formation et l'évolution d'agrégats au sein d'une suspension, qui est une question importante et qui n'a pour l'heure que peu de réponses.

Pour ce faire, le développement et l'amélioration d'outils de simulation haute performance est nécessaire. Dans cet article, on présente les différents travaux achevés pour la réalisation de cet objectif. Il est judicieux de commencer dans un premier temps, par la génération d'un état initial de microstructure. Ceci fait l'objet de la Sec. 2, où l'on présente un algorithme optimisé de génération de microstructures représentant un état isotrope ou orienté d'un nombre très important de fibres. La Sec. 3 résume un cas d'application de simulation statique des microstructures générées et un cas dynamique de l'évolution de l'orientation d'une fibre unique. Finalement, les perspectives de ce travail sont discutées dans la Sec. 4.

2. Génération de microstructures de fibres courtes

Cette section porte sur la présentation d'un outil de génération numérique de microstructures composites renforcées de fibres courtes implémenté dans le cadre de nos travaux. Dans ce qui suit, on présente l'algorithme adopté ainsi que les différentes modifications qui lui ont été apportées afin d'améliorer les performances en terme du coût de calcul et de scalabilité, dans le but d'assurer un passage à l'échelle en simulation numérique.

2.1. Microstructures isotropes

L'algorithme adopté est un algorithme de type Adsorption Séquentielle Aléatoire (ASA) [6] largement utilisé pour placer des objets sans collision. La première version développée consiste à générer une microstructure avec une orientation moyenne isotrope des fibres. Les fibres ont une géométrie cylindrique et sont caractérisées essentiellement par leur rapport de forme β , défini comme le quotient de la longueur de la fibre et de son diamètre. L'orientation d'une fibre est exprimée à l'aide d'un vecteur unitaire \mathbf{p} porté par l'axe principal de la fibre et défini dans le repère $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ par les angles (θ, φ) , comme le montre la (Fig. 1).

Le vecteur \mathbf{p} s'écrit donc dans ce repère :

$$\mathbf{p} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^T \quad (\text{Eq. 1})$$

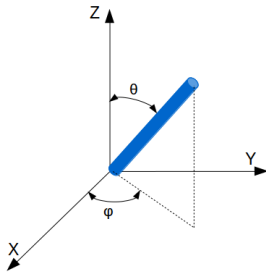


Fig. 1. Orientation d'une fibre dans l'espace

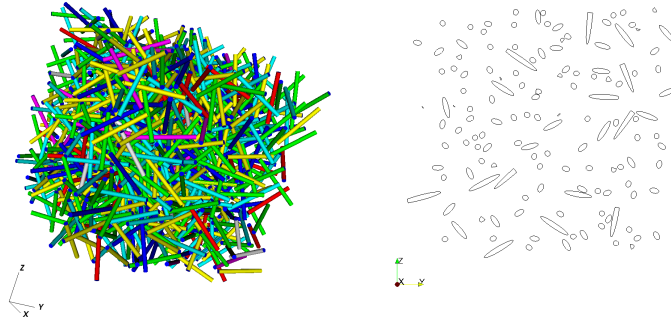


Fig. 2. Microstructure isotrope : 900 fibres, $V_f = 9\%$, $\beta = 13.5$

Les dimensions de la microstructure générée dépendent de la fraction volumique en fibres V_f , et du nombre de fibres n , définis comme paramètres d'entrée du programme. En effet le volume du domaine s'écrit :

$$\text{Volume} = \frac{nV_{\text{fibres}}}{V_f} \quad (\text{Eq. 2})$$

Le processus consiste à affecter successivement les fibres aux positions de barycentres initialement distribuées uniformément dans le domaine. Si la fibre à placer intersecte une des fibres déjà présentes ou bien une de ses 26 images dans les domaines voisins, son ajout au domaine sera refusé. Ainsi, une nouvelle orientation aléatoire lui est proposée et le test d'intersection est relancé jusqu'à ce qu'il soit validé ou jusqu'à un nombre limite d'essais, \mathbf{J} , est atteint. Dans ce cas, l'ajout de cette fibre est abandonné.

Pour une représentation plus réaliste des suspensions de fibres courtes, les longueurs des fibres suivent une loi de distribution normale ayant une espérance égale à la longueur moyenne des fibres, $\langle L \rangle$, et un écart type σ . La (Fig. 2) schématise un exemple de microstructures obtenues ainsi qu'un plan de coupe pour montrer l'absence de collision.

La fraction volumique maximale, V_{fmax} , obtenue pour différents rapports de forme est étudiée. Pour un même rapport de forme et un nombre limite d'essais à chaque ajout de fibre, \mathbf{J} égale à 10^6 , différentes fraction volumique sont testées et la valeur la plus élevée obtenue est considérée comme étant la fraction volumique maximale, V_{fmax} . Un cas où les fibres sont toutes de même longueur et un cas où la longueur des fibres suit une loi normale dont l'écart type est égale à 15% de sa moyenne ont été utilisés. Les résultats récupérés sont comparés avec la limite théorique en concentration en fibres courtes ayant une orientation isotrope $V_{fmax} = 4/\beta$ et celle trouvée expérimentalement $V_{fmax} = 5.3/\beta$ dans les travaux de [7]. La (Fig. 3) montre que, pour les grands rapports de forme, décrivant des fibres longues, les résultats obtenus sont qualitativement en accord avec ceux trouvés dans la littérature. Cependant, pour le cas des fibres relativement courtes, la fraction volumique maximale atteinte, V_{fmax} ne dépasse pas les 25% qui est déjà supérieur au cas standard des microstructures injectées .

2.2. Amélioration de performance de l'algorithme : ajout d'un "octree" et simulation distribuée

Pour améliorer les performances du code développé, surtout en termes de temps de calcul, un algorithme de type "octree" lui a été intégré dans un premier temps. Quelques modifications lui ont été apportées afin que les calculs soit distribués sur plusieurs cœurs dans un deuxième temps.

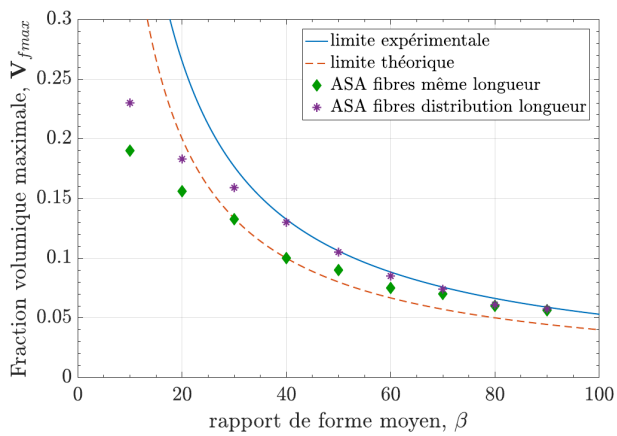


Fig. 3. Limite de l'outil de génération en termes de fraction volumique maximale, V_{fmax} en fonction du rapport de forme moyen, β

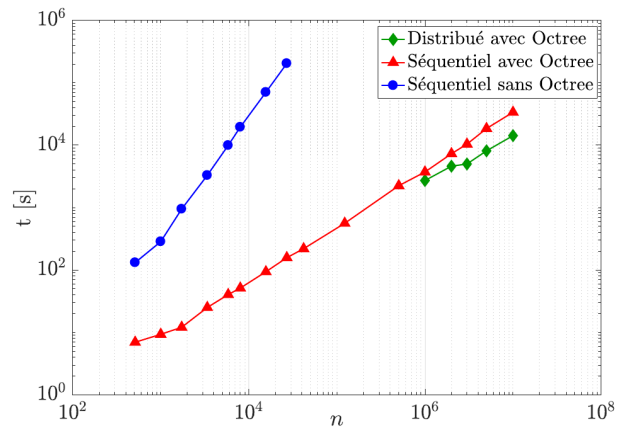


Fig. 4. Comparaison sur le temps de calcul des différents algorithmes : séquentiel sans/avec octree et distribué

L'"octree" (Fig. 5) est une structure de données de type arbre permettant de partitionner un espace tridimensionnel en le subdivisant récursivement en huit octants. L'objectif visé est de faciliter et d'accélérer la détection de collision entre fibres. Le processus commence par inclure tout le domaine dans une grande boîte englobante qui définit la racine de l'"octree". Soit n_{max} le nombre de fibres maximal autorisé dans une boîte. On compte le nombre de fibres de la grande boîte englobante. Si ce nombre excède n_{max} , alors la racine est découpée en 8 petites boîtes. Ces dernières définissent les enfants de la racine. Ainsi de suite, le processus est relancé sur chacun des enfants jusqu'à obtention d'un nombre de fibres inférieur à n_{max} dans chacune des boîtes. Ces boîtes constituent les feuilles de l'"octree".

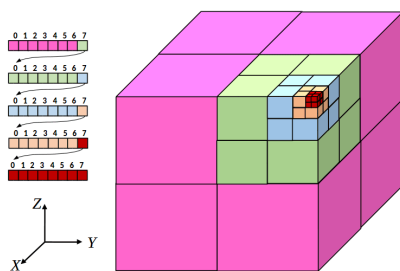


Fig. 5. Illustration de la structure d'un "octree"

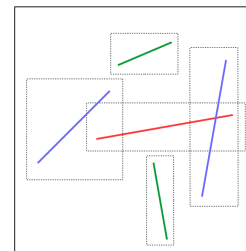


Fig. 6. Fibres placées dans des **AABB** ("Axis Aligned Bounding Box")

Dans l'algorithme ASA précédemment présenté, afin de positionner une nouvelle fibre, toute la collection de fibres déjà placées et leurs 26 images (pour des conditions de périodicité) est parcourue en cherchant une éventuelle collision. Cette opération est très coûteuse et le nombre d'itérations peut facilement exploser, surtout dans le cas d'un grand nombre de fibres. Grâce à la mise en place de l'"octree", la recherche de contacts sera effectuée parmi un nombre réduit de fibres jugées comme potentiels candidats pour un contact possible. En effet, chacune des fibres est enveloppée dans un rectangle aligné avec les axes du repère globale du domaine nommé **AABB** ("Axis Aligned Bounding Box"). Les fibres avec lesquelles il existe une possibilité de contact sont les fibres de la feuille ou des feuilles (si la fibre à ajouter est partagée entre plusieurs feuilles) auxquelles la nouvelle fibre appartient et dont leurs **AABB** sont en collision. La (Fig. 6) schématise cette méthode : elle présente une feuille de l'Octree (grande boîte noire) dans laquelle on veut placer la fibre rouge. Ainsi, les calculs des distances ne seront effectués que sur les fibres bleues et les fibres vertes ne seront pas concernées car leurs **AABB** n'intersectent pas l'**AABB** de la fibre rouge.

Par la suite, le programme est adapté afin qu'il soit compatible avec un processus de simulation multi-tâches. Le domaine de simulation est découpé en nb sous domaines. On lance simultanément

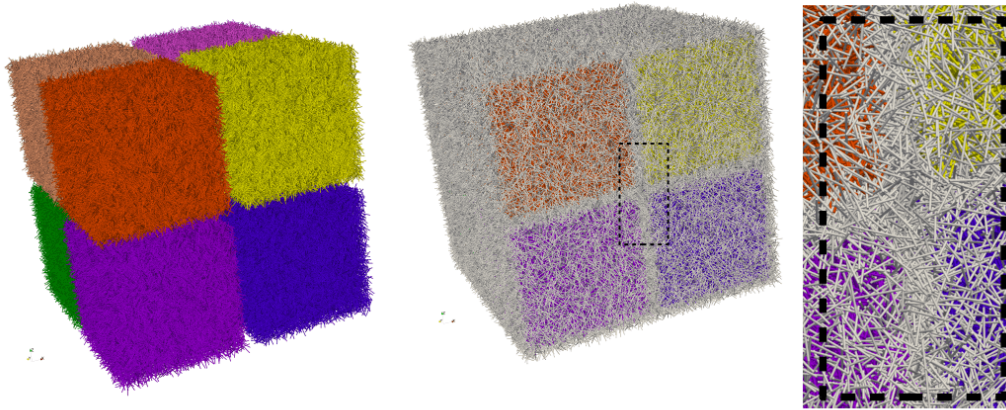


Fig. 7. Processus de simulation distribuée (zoom sur les interfaces des sous domaines)

la génération des fibres à l'intérieur de ces domaines car elles ne risquent pas de s'intersecter avec d'autres fibres de domaines voisins, sur nb cœurs différents sans vérifier la condition de périodicité. Les fibres des bords et des interfaces entre les domaines sont ajoutées d'une manière séquentielle tout en respectant la condition de périodicité. Ainsi, des millions de fibres sont générées avec un coût de calcul raisonnable. La (Fig. 8) présente une comparaison du temps de calcul entre les différentes versions des algorithmes développés. Le calcul distribué est effectué sur 8 cœurs de calcul. Tous les calculs ont été effectués pour $V_f = 10\%$, $\beta = 20$ et un nombre maximal d'essais, J , égal à 5000. On constate un gain considérable apporté par l'Octree et ceci au fur et à mesure que le nombre de fibres augmente. Concernant la version distribuée, son intérêt n'est explicite qu'en cas d'un nombre très élevé de fibres. Autrement dit, dans le cas où le nombre des fibres aux interfaces entre les sous domaines de notre partition est faible devant celui des fibres dans les domaines internes lors de la répartition du domaine de calcul. Ceci permet aussi une meilleure gestion des ressources en mémoire en cas de génération de millions de fibres. La (Fig. 7) illustre cette approche.

2.3. Microstructures orientées

Dans l'algorithme précédemment présenté, lors d'une intersection de la fibre à ajouter avec une autre, son orientation est aléatoirement changée tout en gardant sa position initiale. Afin de pouvoir créer des échantillons orientés, la position de la fibre est plutôt modifiée lors d'une collision détectée et non pas son orientation. Ceci a permis de respecter la distribution d'orientation fixée comme paramètre d'entrée de l'algorithme avec des faibles erreurs (Fig. 8).

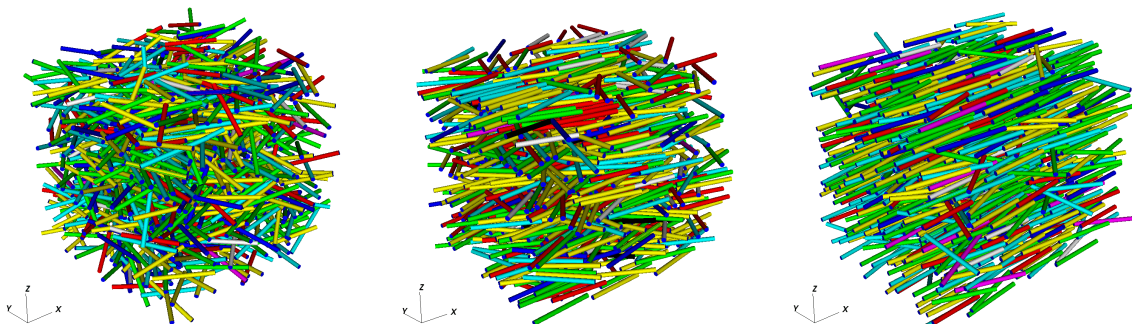


Fig. 8. Microstructures orientées : isotrope dans le plan, modérément aligné, fortement aligné

3. Immersion et interaction avec un code E.F de simulation d'écoulement

Une fois l'état initial de la microstructure généré, une approche par immersion de domaine couplée à un maillage adaptatif fortement anisotrope pour l'étude de la cinématique des fibres est envisagée pour la suite des travaux. L'approche suivie consiste à résoudre un problème multidomaine correspondant à un domaine fluide dans lequel se trouvent des particules solides. La formulation de ce problème est traitée par une méthode des éléments finis et le déplacement des fibres est établi par le biais d'une méthode particulière. L'idée est d'exploiter et d'adapter la plateforme massivement parallèle et les outils de simulation développés au sein de l'Institut de Calcul Intensif au cas des suspensions de fibres courtes. Dans cet objectif, un cas statique contenant 10000 fibres immergées dans un domaine fluide dans lequel les équations de Stokes sont résolues est présenté dans la Sec.3.2, et un cas dynamique d'une fibre évoluant au sein d'un fluide newtonien incompressible est comparé avec les résultats de Jeffrey dans la Sec.3.3. La Sec.3.1 présente brièvement la technique d'immersion et d'adaptation de maillage pour les microstructures fibreuses générées.

3.1. Immersion et adaptation de maillage

Les techniques d'immersion, d'adaptation et de réadaptation permettront de reconstruire les microstructures fibreuses générées, de créer le maillage correspondant dans le domaine de simulation ainsi que suivre leur évolution au cours du temps. L'idée est d'utiliser une fonction distance signée α (Eq. 3) pour représenter la géométrie d'une forme ω de frontière Γ dans un domaine Ω d'une manière implicite.

$$\alpha = \bar{d}(x, \Gamma) = \begin{cases} d(x, \Gamma) & \text{if } x \in \omega \\ -d(x, \Gamma) & \text{if } x \notin \omega \end{cases} \quad (\text{Eq. 3})$$

Afin d'éviter les discontinuités au niveau des interfaces, une fonction Heaviside lissée est utilisée. L'(Eq. 4) met en relation une fonction épaisseur définie en (Eq. 5). Dans cette dernière, un paramètre ε décrivant l'épaisseur de l'interface est introduit.

$$H(\alpha) = 1_{\omega}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha > 0 \\ 0 & \text{if } \alpha < 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 4})$$

$$H_{\varepsilon}(u, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u_{\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \quad (\text{Eq. 5})$$

Une fois la forme immergée, le maillage est adaptée autour. Les techniques d'adaptation de maillage décrites dans [8] permettent d'obtenir un maillage anisotrope (Fig. 11) ayant un nombre de nœuds considérablement amoindri par rapport à un maillage isotrope de précision équivalente. Le temps de la reconstitution du maillage dans ce travail est optimisé grâce à l'implication de l'"octree" lors des calculs des distances aux différents points du maillage immergé.

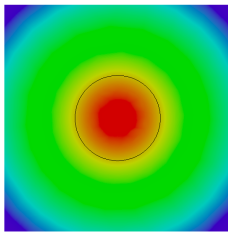


Fig. 9. Distance signée

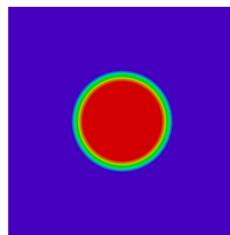


Fig. 10. Heaviside lissée ($\varepsilon = 1/10$ du rayon de la forme immergée)

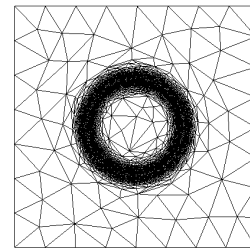


Fig. 11. Maillage adapté

3.2. Passage à l'échelle en simulation numérique directe : cas statique

On a choisit de tester la scalabilité de la méthode schématisée dans la (Fig.12) à travers l'immersion et la résolution d'un écoulement de Stokes (Eq. 6), appliqué à une microstructure fixe contenant 10 000 fibres. Le problème résolu est :

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \text{ et } \nabla \cdot u = 0 \tag{Eq. 6}$$

où σ est le tenseur des contraintes et u est le champs de vitesse, auxquels nous associons un ensemble valide de conditions aux limites.

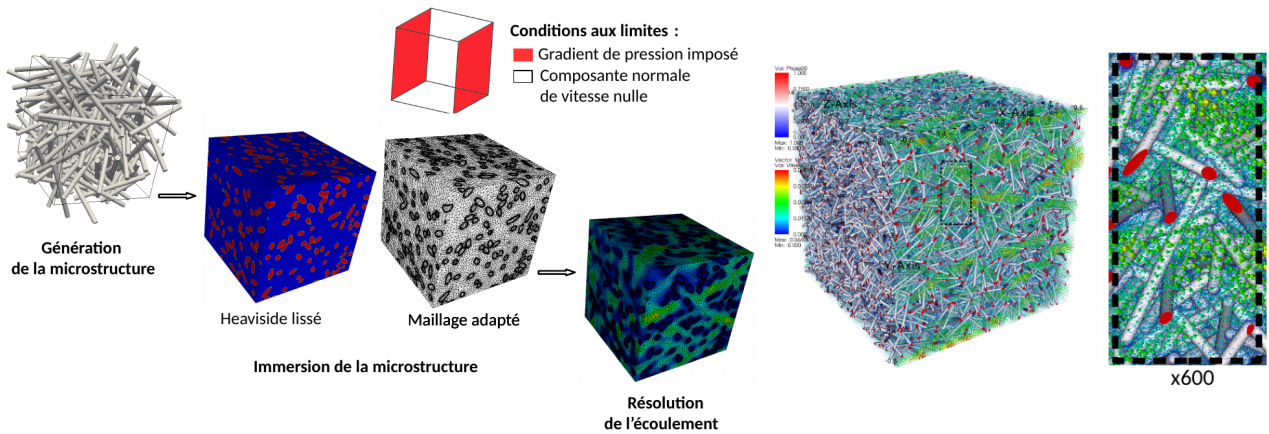


Fig. 12. Protocole de simulation

Fig. 13. Cas 10 000 fibres : zoom sur les fibres immergées et le champs de vitesse autour

On se situe dans un cadre multidomaine, comportant une phase fluide et une phase solide. Les propriétés physiques des phases, q_i , sont définies sur tout le domaine de calcul à travers la loi de mélange exprimée par l' Eq. 7 permettant ainsi une transition linéaire des paramètres matériaux sur une épaisseur égale à 2ε . La résolution du problème s'effectue avec une formulation éléments finis stabilisée.

$$q_\varepsilon(\alpha) = q_1 H_\varepsilon(\alpha) + q_2 (1 - H_\varepsilon(\alpha)) \tag{Eq. 7}$$

Dans cet exemple, la taille du domaine de simulation est de $1.35 \times 1.35 \times 1.35 \text{ mm}$, la fraction volumique obtenue est $V_f = 14\%$ et le rapport de forme moyen est $\beta = 13.33$. La longueur des fibres suit une distribution normale de moyenne 0.2 mm et d'écart type 0.03 mm . Une épaisseur d'interface égale à un vingtième du rayon des fibres est choisie. Le maillage adapté obtenu ainsi contient 301 millions de noeuds. Tab. 1 résume le temps de calcul ainsi le nombre de CPU utilisé pour les différentes étapes du processus montrant ainsi que la phase d'immersion et d'adaptation de maillage est la plus coûteuse.

	Génération	Immersion+adaptation	Résolution
temps	1min 44s	10h13min	1h40min
nombre de CPU	séquentiel + Octree	3000	3000

Tab. 1. Temps de calcul et CPU utilisés

3.3. Évolution de l'orientation d'une fibre en écoulement de cisaillement : cas dynamique

Avant d'aborder la problématique de la simulation numérique directe de l'évolution de l'orientation des fibres dans un milieu concentré, un cas relativement simple correspondant à l'évolution d'une fibre au sein d'un écoulement de couette est étudié. Ce cas servira à tester, valider et discuter les limites de la méthode numérique adoptée.

Initialement, une fibre est immergée dans un fluide newtonien incompressible et le maillage est adaptée autour. La vitesse est imposée aux parois horizontales afin d'obtenir un écoulement de cisaillement à taux de cisaillement constant, $\mathbf{u} = (\dot{\gamma}y, 0)$. À chaque pas de temps, la résolution du problème spatial permet de déterminer le champs de vitesse Eulerien. Grâce à la connaissance de ce champs de vitesse, il est possible de mettre à jour la position de la fibre \mathbf{X} ainsi que son orientation \mathbf{p} par intégration du système (Eq. 8) avec un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}) \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{p} \end{cases} \quad (\text{Eq. 8})$$

Une fois les nouvelles position et orientation de la phase solide connues, la fonction caractéristique de la phase solide est mise à jour et le maillage est de nouveau adapté. Lors de la simulation, la fibre suit le même type de mouvement périodique que celui prédit par Jeffery. La (Fig. 14) montre une bonne correspondance entre les résultats théoriques et numériques.

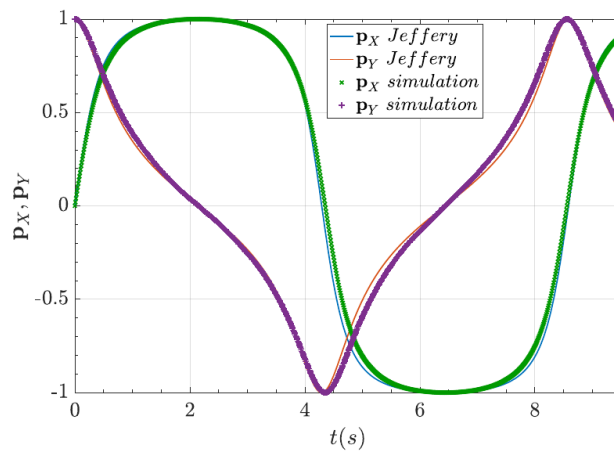


Fig. 14. Rotation d'une fibre dans un écoulement de Couette : comparaison entre les résultats théoriques et numériques des composantes du vecteur d'orientation \mathbf{p}

4. Conclusions et Perspectives

Des microstructures contenant des millions de fibres courtes sont générées dans un temps de calcul optimal. Ces microstructures serviront dans ce travail d'état initial d'étude de l'évolution de l'orientation lors d'écoulements complexes. Néanmoins, elles peuvent aussi être exploitées pour des simulations d'étude de diverses problématiques de micromécanique ou de transfert thermique à titre d'exemple. Un passage à l'échelle pour la résolution d'un problème statique d'interaction fluide structure est assuré. L'accès aux champs microscopiques et aux informations locales est extrêmement important pour apporter des réponses à des problématiques comme celle relative à la perméabilité où l'impact du choix de la taille des domaines simulés et des conditions aux limites adoptées pose encore des questions. Une méthode de simulation numérique directe du mouvement d'une particule dans un fluide newtonien a été testée. Cette méthode a l'avantage d'être assez précise et peut être facilement étendue à d'autres types d'écoulement. Cependant, elle est onéreuse en temps de calcul vu le coût considérable du processus d'adaptation de maillage.

Des travaux pour alléger le coût d'adaptation de maillage sont en cours dans le but d'assurer l'étude dans le cas des suspensions semi-diluées à concentrées.

Références

- [1] M. VINCENT « Orientation des fibres courtes dans les pièces en thermoplastique renforcé », *Techniques de l'ingénieur Plasturgie : procédés spécifiques aux composites* Vol. base documentaire : TIB474DUO. n° ref. article : am3729.

- [2] G. B. Jeffery « The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid », *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* Vol. 102 n° 715, pp. 161–179, 1922, ISSN 0950-1207.
- [3] F. P. Bretherton « The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number », *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 14 n° 2, pp. 284–304, 1962.
- [4] P. Laure, L. Silva, E. Peuvrel-Disdier, R. Valette « Etude de l'orientation d'une fibre dans un écoulement de cisaillement pour les fluides viscoélastiques. », in : 48ème colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie, vol. 13, , pp. 6–pages, 2013.
- [5] F. Folgar, C. L. Tucker « Orientation Behavior of Fibers in Concentrated Suspensions », *Journal of Reinforced Plastics and Composites* Vol. 3 n° 2, pp. 98–119, 1984.
- [6] R. Mezher « Modeling and Simulation of concentrated suspensions of short, rigid and flexible fibers », Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2015.
- [7] K. Evans, A. Gibson « Prediction of the maximum packing fraction achievable in randomly oriented short-fibre composites », *Composites Science and Technology* Vol. 25 n° 2, pp. 149–162, 1986.
- [8] L. Douteau, L. Silva, H. Digonnet, T. Coupez, D. Le Touzé, J.-C. Gilloteaux, Towards Numerical Simulation of Offshore Wind Turbines Using Anisotropic Mesh Adaptation, Springer International Publishing, Cham, ISBN 978-3-030-11887-7, , pp. 95–104, 2019.