



**HAL**  
open science

## Evaluation rapide et précise des performances d'une communication LoRa basée sur la fonction de Marcum

Jules Courjault, Baptiste Vrigneau, Matthieu Gautier, Olivier Berder

### ► To cite this version:

Jules Courjault, Baptiste Vrigneau, Matthieu Gautier, Olivier Berder. Evaluation rapide et précise des performances d'une communication LoRa basée sur la fonction de Marcum. Colloque du GRETSI, Aug 2019, Lille, France. hal-02418669

**HAL Id: hal-02418669**

**<https://hal.science/hal-02418669>**

Submitted on 19 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Évaluation rapide et précise des performances d'une communication LoRa basée sur la fonction de Marcum

Jules COURJAULT, Baptiste VRIGNEAU, Matthieu GAUTIER, Olivier BERDER

Univ Rennes, CNRS, IRISA, 6 rue de Kerampont, 22300 LANNION  
firstname.lastname@irisa.fr

**Résumé** – Les applications utilisant les objets connectés sont de plus en plus nombreuses grâce à l'émergence de nouvelles normes de communication longue portée, telles que Sigfox, 4G Cat-M / NB-IoT ou LoRa. Cette dernière, très populaire, utilise des bandes de fréquences libres et ne nécessite pas d'opérateur. Malgré un principe bien connu, seuls quelques travaux récents tentent d'exprimer la probabilité d'erreur et il manque encore des études théoriques qui permettraient une évaluation rapide des performances et un dimensionnement de réseau adapté. Les résultats proposés ici présentent une nouvelle approche théorique basée sur la fonction de Marcum.

**Abstract** – During the last decade, various applications using Internet of Things were developed thanks to emerging long range solutions such as Sigfox, 4G Cat-M / NB-IoT, or LoRa. The latter is a popular solution because it is operator free and proposes long range abilities. Although the principle is well-known, the theoretical study, which would enable fast performance evaluation and therefore appropriate network dimensioning, is limited to few recent works. This paper introduces a new approach based on the Marcum function.

## 1 Introduction

Depuis quelques années, le nombre d'objets connectés a augmenté exponentiellement pour de multiples applications comme la surveillance d'environnement ou les fermes connectées. De nombreuses solutions sont alors apparues pour répondre aux besoins de transmissions sans fil à longue portée et à faible consommation d'énergie, appelées Low Power Wide Area Networks (LP-WAN) [1]. Parmi toutes ces candidates, LoRa, une solution portée par Semtech [2][3] et l'alliance LoRa, utilise les bandes libres 433 MHz, 868 MHz ou 915 MHz et assure un débit allant de 0,3 kbps à 50 kbps. Son principe est basé sur un étalement linéaire de fréquence (Chirp Spread Spectrum ou CSS) [4][5], permettant de limiter les interférences et l'impact de l'effet Doppler [6][7]. Trois principaux paramètres changent la configuration de la transmission : la bande passante  $BW$ , le facteur d'étalement  $SF$  et le rendement du code  $CR$ . Bien que le brevet décrive précisément la technique, son étude théorique reste limitée. Les auteurs dans [8] proposent une approche mathématique rigoureuse mais, comme souligné dans [9], il manque encore une étude théorique de la probabilité d'erreur. Le problème n'est pas de trouver une expression exacte déjà donnée par [10], mais une implémentation rapide et précise à l'aide d'approximations. Alors que toutes les expressions disponibles dans la littérature utilisent la fonction erreur complémentaire, la nouveauté de ce papier est de proposer une approximation précise de la probabilité d'erreur binaire (PEB) pour un canal à bruit blanc additif gaussien (BBAG) basée sur la fonction de Marcum [11, 12].

La partie 2 introduit l'état de l'art et les équations de base, puis la section 3 présente la nouvelle approche. Les résultats sont commentés dans le paragraphe 4 avant de conclure.

## 2 État de l'art

### 2.1 PEB théorique de LoRa et problèmes

Dans un but de concision, seules les équations nécessaires sont rappelées et le lecteur pourra se référer à [8, 9] pour plus de détails. Le principe du récepteur LoRa est d'appliquer un désétalement, puis une transformée de Fourier et, enfin, une décision en utilisant le maximum du module. Comme les symboles sont équiprobables, l'étude peut se focaliser sur la décision d'un symbole  $m$  et la probabilité de décision correcte  $\mathbb{P}_m$  peut être exprimée par [13] :

$$\mathbb{P}_m = F_{\chi^2} \left( \frac{|\sqrt{N} + W_p[N - m]|^2}{\sigma^2} \right)^{N-1}, \quad (1)$$

où  $N = 2^{SF}$ ,  $SF$  est le facteur d'étalement défini comme un entier compris entre 7 et 12,  $W_p[N - m]$  est un bruit blanc additif gaussien de variance  $\sigma^2$  et  $F_{\chi^2}$  est la fonction de répartition d'une loi de  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté. En utilisant le résultat connu  $F_{\chi^2}(x) = 1 - \exp(-x/\sigma^2)$ , (1) devient :

$$\mathbb{P}_m = \left( 1 - \exp \left( -|\sqrt{N} + W_p[N - m]|^2 / \sigma^2 \right) \right)^{N-1}. \quad (2)$$

En définissant le rapport signal sur bruit  $\bar{\gamma} = 1/\sigma^2$ , la variable aléatoire  $Z = |\sqrt{N} + W_p[N - m]|^2 / \sigma^2$  suit une loi de  $\chi^2$  non centrée à 2 degrés de liberté et un paramètre  $\lambda = 2N \cdot \bar{\gamma}$  :

$$f_Z(x) = \exp(-(x + \lambda)/2) I_0 \left( \sqrt{\lambda x} \right) / 2, \quad (3)$$

avec  $I_0(\cdot)$  la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0. Finalement, pour obtenir la probabilité d'erreur sym-

bole (PES) moyenne, il faut calculer :

$$\text{PES} = \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - e^{-z/2}\right)^{N-1}\right) f_Z(z) dz, \quad (4)$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{C_N^{k+1}}{N} (-1)^{k+1} e^{-N \cdot \bar{\gamma} \frac{k}{k+1}}, \quad (5)$$

avec le coefficient binomial  $C_N^{k+1} = N!/(k+1)!(N-k-1)!$ . Cependant, cette formule engendre des erreurs de précisions et n'est pas utilisable en l'état quand  $SF$  est plus grand que 6. Cela a déjà été souligné dans [9, 10] et justifie le besoin d'approximations efficaces. Une simulation par Monte Carlo est utilisée dans [13] pour pallier le problème.

## 2.2 Approximations existantes pour la PEB

La PEB est obtenue à partir de la PES par la relation suivante :

$$\text{PEB} = \text{PES} \times 2^{SF-1}/(2^{SF} - 1) \simeq \text{PES}/2. \quad (6)$$

Reynders *et al.* ont proposé l'approximation [14, Eq.(3)] :

$$\text{PEB} \approx Q\left(\frac{\log_{12}(SF) \bar{\gamma}}{\sqrt{2}}\right), \quad (7)$$

avec  $Q(x)$  la queue de distribution d'une loi normale normalisée. Les mêmes auteurs ont simplifié l'expression dans [5] basée sur une approximation numérique des simulations :

$$\text{PEB} \approx 0.5 \cdot Q\left(1.28\sqrt{SF \cdot \bar{\gamma}} - 1.28\sqrt{SF} + 0.4\right). \quad (8)$$

Plus récemment, les auteurs dans [9] ont proposé des approximations pour les canaux gaussien et de Rayleigh. Le principe repose sur l'approximation d'une loi de Rice par celle d'une gaussienne. Le résultat pour un canal BBAG est [9, Eq.(21)] :

$$\text{PEB} \approx 0.5 \cdot Q\left(\frac{\sqrt{N \cdot \bar{\gamma}} - \left(H_{N-1}^2 - \frac{\pi^2}{12}\right)^{1/4}}{\sqrt{H_{N-1} - \sqrt{H_{N-1}^2 - \frac{\pi^2}{12} + 0.5}}}\right), \quad (9)$$

où  $H_m$  est le  $m$ -ième nombre harmonique approximé par  $H_m \approx \log(m) + \frac{1}{2m} + 0.57722$ . En utilisant des simplifications sur  $H_{N-1}^2$ , une seconde expression en découle [9, Eq.(23)] :

$$\text{PEB} \approx 0.5 \cdot Q\left(\sqrt{2N \cdot \bar{\gamma}} - \sqrt{1.386 \cdot SF + 1.154}\right). \quad (10)$$

## 3 Utilisation de la fonction de Marcum

### 3.1 Point de départ : la probabilité $\bar{\mathbb{P}}_m$

Comme évoqué précédemment, les travaux précédents se focalisent sur la loi de la variable aléatoire. La nouveauté dans ce papier est de regarder la probabilité  $\bar{\mathbb{P}}_m$  avec la fonction  $g(z) = 1 - \left(1 - e^{-z/2}\right)^{N-1}$  tout en gardant la loi de  $\chi^2$  non centrée. Quand la fonction est développée en somme de  $e^{-kz/2}$ , ce dernier est moins significatif quand  $z$  et  $k$  augmentent. Cette

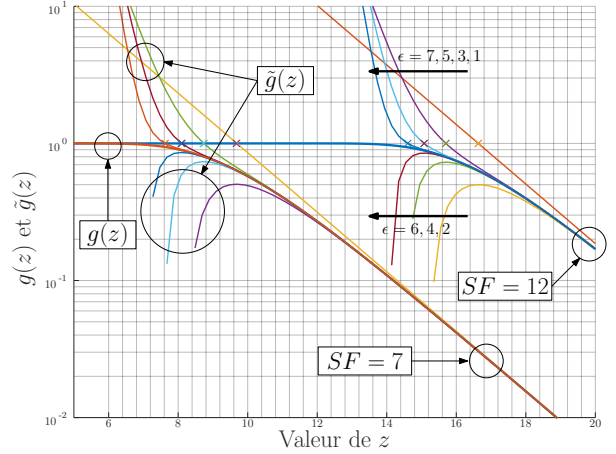


FIGURE 1 – Comparaison entre la forme exacte  $g(z)$  et l'approximation avec différents ordres  $\epsilon$  de 1 à 7 et  $SF = 7, 12$ . Les valeurs de  $z_c$  sont indiquées par des croix.

remarque est aussi équivalente à utiliser le développement de Taylor, limité à  $\epsilon$  termes, pour  $z$  grand :

$$g(z) \approx \tilde{g}(z) = \sum_{k=1}^{\epsilon} (-1)^{k+1} C_{N-1}^k e^{-kz/2}. \quad (11)$$

La Figure 1 montre la comparaison entre  $g(z)$  et  $\tilde{g}(z)$  pour différentes valeurs de l'ordre de développement  $\epsilon = 1$  à 7. Le point positif est la limitation de  $k$  dans le coefficient binomial mais l'approximation souffre d'une divergence soit vers l'infini pour des valeurs impaires, soit vers zéro pour les cas pairs. Cependant, une solution simple et efficace est de définir l'approximation par morceau en limitant la valeur à 1 pour les cas impairs :

$$g(z) \approx \begin{cases} 1 & \text{si } z \leq z_c \\ \tilde{g}(z) & \text{si } z > z_c \end{cases}. \quad (12)$$

Le terme  $z_c$  correspond à la valeur limite de  $z$  pour choisir 1 ou  $\tilde{g}(z)$ , c'est-à-dire la solution de  $\tilde{g}(z) = 1$ . Une rapide observation montre que cette approximation sera précise pour de faibles valeurs de  $\epsilon$ . Le calcul de la moyenne devient alors :

$$\text{PES} = \int_0^{z_c} f_Z(z) dz + \int_{z_c}^{\infty} \sum_{k=1}^{\epsilon} (-1)^{k+1} C_{N-1}^k e^{-kz/2} f_Z(z) dz. \quad (13)$$

En utilisant la distribution donnée par (3), la PES peut être approximée par :

$$\text{PES} = 1 + \sum_{k=1}^{\epsilon+1} \frac{C_N^k}{N} (-1)^k e^{-\frac{N \cdot \bar{\gamma} (k-1)}{k}} Q_1\left(\sqrt{\frac{2N}{k} \bar{\gamma}}, \sqrt{kz_c}\right) \quad (14)$$

avec  $Q_1$  la fonction de Marcum d'ordre 1 définie par :

$$Q_M(a, b) = \int_b^{\infty} x \left(\frac{x}{a}\right)^{M-1} e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} I_{M-1}(ax) dx. \quad (15)$$

### 3.2 Comment trouver $z_c$ ?

Ce problème n'est pas trivial car en posant  $\zeta = e^{-\frac{\epsilon}{2}}$ , il est équivalent à trouver la seule racine réelle d'un polynôme d'ordre  $\epsilon$ . Si cela est possible pour les valeurs 1 et 3, l'expression générale n'est pas envisageable. En notant  $\zeta(\epsilon) = e^{-\frac{z(\epsilon)}{2}}$ , les premières solutions sont :

$$\zeta(1) = \frac{1}{(N-1)}, \quad (16)$$

$$\zeta(3) = \tau - \frac{N-4}{(N-2)(N-3)^2} \frac{1}{\tau} + \frac{1}{N-3} \quad (17)$$

$$\tau = \left( \frac{(N-4)(N-5)}{(N-1)(N-2)(N-3)^3} + \frac{\sqrt{2}(N-4)}{(N-1)(N-2)^{1.5}(N-3)^{1.5}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (18)$$

Afin d'étendre l'approximation aux ordres 5 et 7, une solution heuristique polynomiale est donnée par :

$$\zeta(\epsilon) = \alpha_1 \epsilon + \alpha_0 \quad (19)$$

$$\alpha_1 = (\zeta(3) - \zeta(1))/2, \quad \alpha_0 = \zeta(1) - \alpha_1 \quad (20)$$

Cette approximation est valable pour  $\epsilon$  inférieur à 9 mais les résultats montreront que c'est suffisant. De plus, une extension aux valeurs paires est possible en prenant  $z_c(\epsilon) = z_c(\epsilon - 1)$ .

### 3.3 Approximation d'ordre 0

La complexité de calcul est directement liée au nombre de fonctions de Marcum dans la formule. Celui-ci est  $\epsilon + 1$  et signifie que 2 fonctions interviennent au minimum pour  $\epsilon = 1$ . Afin de limiter cette complexité, nous proposons une solution heuristique n'utilisant qu'une seule fonction de Marcum, extension à  $\epsilon = 0$ , ayant comme point de départ l'expression de  $\epsilon = 1$  avec un terme de correction du RSB noté  $\gamma_c$  :

$$PES = 1 - Q_1 \left( \sqrt{2N\gamma_c\bar{\gamma}}, \sqrt{2\log(N-1)} \right). \quad (21)$$

Profitant d'une nouvelle manière d'obtenir la PES, une étude numérique basée sur un critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne pour un RSB de -30 à -5 dB a été menée pour les valeurs de  $SF$ . La Table 1 donne les valeurs obtenues qui peuvent être approximées par :

$$\gamma_c \simeq \sqrt{2SF}/20 + 0.681. \quad (22)$$

TABLE 1 – Valeurs numériques correctrices du RSB pour  $\epsilon = 0$

$SF$	7	8	9	10	11	12
$\gamma_c$	0,868	0,882	0,894	0,905	0,915	0,924

## 4 Résultats et comparaisons

### 4.1 Choix de la valeur de $\epsilon$

Les résultats de l'approximation de la PEB sont donnés dans la Figure 2 pour différentes valeurs de  $\epsilon = 1$  à 7 et  $SF = 7$  à 12. La convergence est très rapide : si la courbe pour  $\epsilon = 1$  est visible, les autres sont quasiment confondues. Une première conclusion est donc que prendre  $\epsilon$  au delà de 5 n'est pas utile

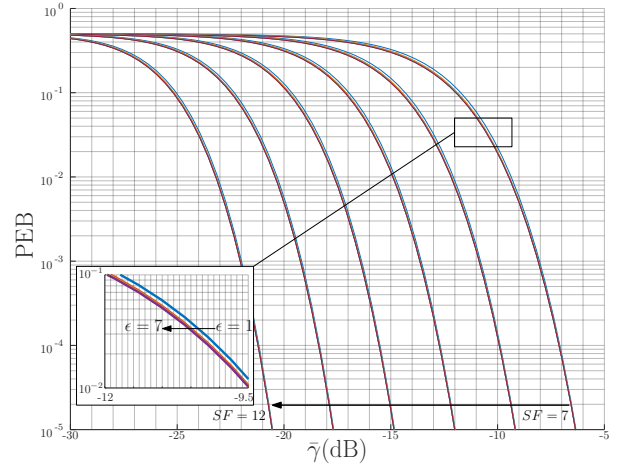


FIGURE 2 – Approximation de la PEB pour  $\epsilon = 1$  à 7 et  $SF = 7$  à 12.

pour des raisons de complexité et de précision. Pour confirmer cette observation, le paramètre suivant est défini :

$$\Delta_{PEB, i \rightarrow j} = \left( PEB|_{\epsilon=i} - PEB|_{\epsilon=j} \right) / PEB|_{\epsilon=i}. \quad (23)$$

Il permet d'observer la variation lorsque l'ordre est augmenté. La Table 2 donne les valeurs maximales de ce paramètre qui varie selon la valeur du RSB. Si la valeur du RSB n'est pas la même, elle reste sensiblement la même indépendamment de  $SF$ . On peut observer que les valeurs impaires de  $\epsilon$  offrent les contributions les plus importantes. Cependant, la contribution diminue rapidement en dessous de 1% dès que  $\epsilon > 3$ .

TABLE 2 – Valeurs maximales de  $\Delta_{PEB, i \rightarrow i+1}$  quand  $SF = 7$  à 12,  $i = 1$  à 6

$i$	1	2	3	4	5	6
$\max \Delta_{PEB, i \rightarrow i+1}$	11,6%	0,9%	2,4%	0,4%	0,76%	0,17%

### 4.2 Comparaisons des PEB

La Figure 3 permet de comparer notre proposition (pour  $\epsilon = 5$ ) aux meilleures approximations du PEB dans la littérature [9], et à la PEB obtenue par simulation de Monte-Carlo.

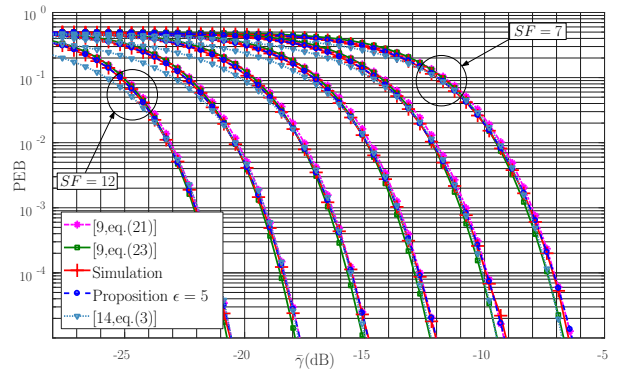


FIGURE 3 – Comparaison de l'approximation proposée avec les simulations, [9] et [14] pour  $\epsilon = 5$  et  $SF = 7$  à 12.

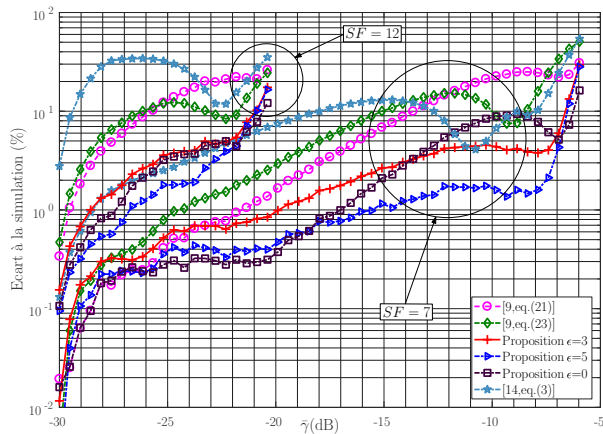


FIGURE 4 – Erreur relative avec les simulations pour l’approximation proposée, [9] et [14]. Les simulations ont été effectuées avec  $\epsilon = 0, 3, 5$  et  $SF = 7, 12$ .

La simulation valide notre approximation quelles que soient les valeurs de  $SF$  et du RSB, contrairement aux approximations de Elshabrawy *et al.* et [14, Eq.(3)]. La forme [9, eq.(23)] est sensible à  $SF$  à fort RSB et celle [9, eq.(21)] accuse un écart à moyen RSB. Pour confirmer ces résultats, la Figure 4 compare l’erreur relative entre les différentes approximations et la PEB simulée. Les courbes permettent de visualiser que notre approximation est meilleure que l’état de l’art et qu’augmenter  $\epsilon$  diminue l’erreur. De plus, l’approximation d’ordre 0 offre un bon compromis complexité-précision car elle est équivalente à  $\epsilon = 5$  pour le RSB inférieur à -17 dB puis voit son erreur augmenter mais reste inférieure à l’état de l’art.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, une nouvelle approximation de la PEB d’une transmission LoRa a été proposée pour un canal BBAG avec une approche qui se démarque de l’état de l’art. Les précédents travaux approximaient des lois de Rice ou de  $\chi^2$  par une gaussienne contrairement à notre solution qui garde la loi de  $\chi^2$  non centrée et donne un résultat final basé sur une somme de fonctions de Marcum. La comparaison avec la simulation et le meilleur de l’état de l’art a validé la précision de la nouvelle forme qui peut être considérée comme une très bonne référence numérique indépendamment des valeurs de  $SF$  et de RSB. Nous l’avons appliquée à une forme heuristique limitée à une seule fonction de Marcum offrant un compromis complexité-précision intéressant. De plus, cela ouvre les possibilités d’étendre l’étude théorique à des canaux plus compliqués incluant des atténuations de Rice ou Nakagami et de la mobilité (effet Doppler).

## Références

[1] R. Sanchez-Iborra and M. Cano, “State of the art in LP-WAN solutions for industrial IoT services,” *Sensors*,

vol. 16, no. 5, p. 708, 2016.

- [2] O. Seller and N. Sornin, “Low power long range transmitter,” Aug. 2014, US Patent App. 14/170,170. [Online]. Available : <https://www.google.com/patents/US20140219329>
- [3] Semtech, “SX1272/73–860 MHz to 1020 MHz low power long range transceiver,” Tech. Rep. Datasheet, Mar. 2015. [Online]. Available : <http://www.semtech.com/images/datasheet/sx1272.pdf>
- [4] A. Springer, W. Gugler, M. Huemer, L. Reindl, C. C. W. Ruppel, and R. Weigel, “Spread spectrum communications using chirp signals,” in *IEEE/AFCEA EUROCOMM 2000, Information Systems for Enhanced Public Safety and Security*, 2000, pp. 166–170.
- [5] B. Reynders and S. Pollin, “Chirp spread spectrum as a modulation technique for long range communication,” in *2016 SCVT*, Nov. 2016, pp. 1–5.
- [6] X. Le, B. Vrigneau, M. Gautier, M. Mabon, and O. Berder, “Energy/reliability trade-off of LoRa communications over fading channels,” in *International Conference on Telecommunications (ICT)*, June 2018, pp. 544–548.
- [7] F. Ait Aoudia, M. Gautier, M. Magno, M. Le Gentil, O. Berder, and L. Benini, “Long-Short Range Communication Network Leveraging LoRa and Wake-up Receiver,” *Microprocessors and Microsystems : Embedded Hardware Design (MICPRO)*, vol. 56, pp. 184 – 192, December 2017.
- [8] L. Vangelista, “Frequency shift chirp modulation : The lora modulation,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 24, no. 12, pp. 1818–1821, Dec 2017.
- [9] T. Elshabrawy and J. Robert, “Closed form approximation of LoRa modulation BER performance,” *IEEE Communications Letters*, vol. 22, no. 9, pp. 1778–1781, 2018.
- [10] J. G. Proakis, *Digital Communications, 5th edition*, N. York :McGraw-Hill, Ed., 1995.
- [11] J. I. Marcum, *Table of Q functions*, R. Corporation, Ed., Jan. 1950.
- [12] M. K. Simon and M. Alouini, “Exponential-type bounds on the generalized Marcum Q-function with application to error probability analysis over fading channels,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 48, no. 3, pp. 359–366, March 2000.
- [13] G. Ferré and A. Giremus, “Lora physical layer principle and performance analysis,” in *2018 25th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*, Dec 2018, pp. 65–68.
- [14] B. Reynders, W. Meert, and S. Pollin, “Range and coexistence analysis of long range unlicensed communication,” in *The 23rd International Conference on Telecommunications (ICT)*, May 2016, pp. 1–6.