

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE



Minimum enstrophy states and bifurcations in 2D Euler flows around a central obstacle

Bifurcations et états d'enstrophie minimale au sein d'écoulements Euler 2D autour d'obstacles

F. Muller,
A. Burbeau, B.J. Gréa, P. Sagaut

Congrès Français de Mécanique 2017

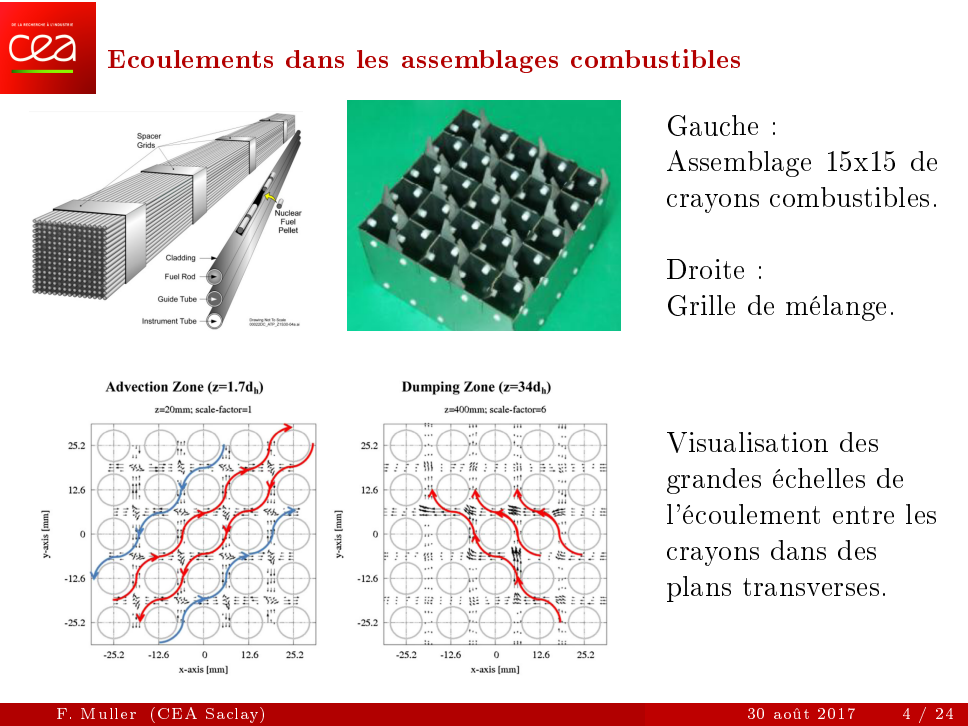
30 août 2017

www.cea.fr

Plan de la présentation

- 1 Cadre industriel de l'étude
- 2 Théorie de physique statistique
- 3 Résultats obtenus

- 1 Cadre industriel de l'étude
- 2 Théorie de physique statistique
- 3 Résultats obtenus



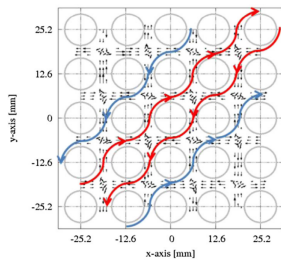
Écoulements dans les assemblages combustibles

Gauche :
Assemblage 15x15 de
crayons combustibles.

Droite :
Grille de mélange.

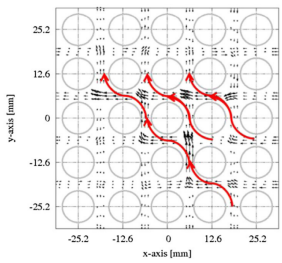
Advection Zone ($z=1.7d_h$)

$z=20\text{mm}$; scale-factor=1



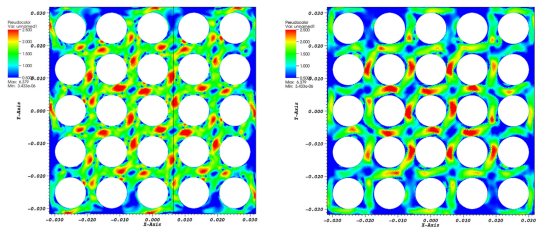
Dumping Zone ($z=34d_h$)

$z=400\text{mm}$; scale-factor=6

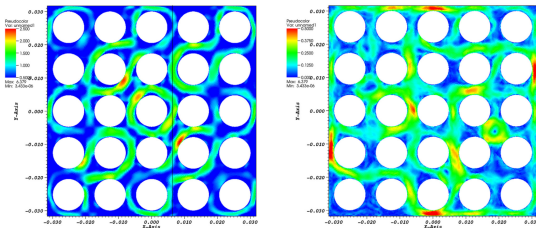


Visualisation des
grandes échelles de
l'écoulement entre les
crayons dans des
plans transverses.

Résultats LES issus de Bieder et al.¹



A proximité de la grille



Loin en aval de la grille

¹Bieder, Falk, and Fauchet, “LES analysis of the flow in a simplified PWR assembly with mixing grid”.

Importance de bien connaître l'écoulement

- La réorganisation de l'écoulement aux grandes échelles a un impact important sur l'efficacité de l'homogénéisation thermique au sein de l'assemblage (zones à faible recirculation).
- Elle soulève un risque de point chaud, en particulier loin des grilles de mélange.
- \Rightarrow Au préalable d'une étude thermique, une bonne connaissance de l'hydraulique de l'écoulement est indispensable.

Expériences

Phénomène de réorganisation observé dans les expériences mais de façon non systématique (AREVA^a, KAERI^b).

^aLascar et al., "Validation of CFD Methodology to predict flow fields within rod bundles with spacer grids".

^bChang et al., "Phenomenological investigations on the turbulent flow structures in a rod bundle array with mixing devices".

Simulations CFD

- Le phénomène de basculement a rarement été constaté dans les simulations réalisées jusque loin en aval des grilles.
- Simulations CFD souvent réalisées sur des portions de longueur trop courtes.
- Peu d'influence du modèle de turbulence utilisé sur les résultats CFD près des grilles.

Analyse bibliographique

Lecture de la littérature (Corvellec^a, Naso^b, Chavanis^{cd}) semble indiquer la possibilité d'établir un lien entre :

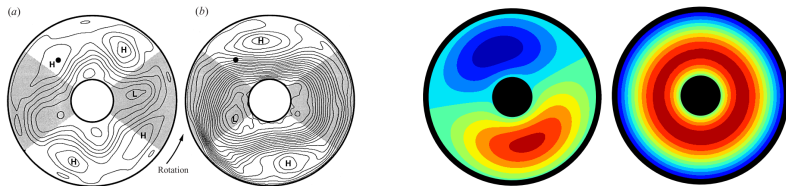
- le phénomène de réorganisation aux grandes échelles observé dans les expériences au sein d'assemblages combustibles
- des transitions de phase en physique statistique.

^aCorvellec, "Phase transitions in two-dimensional and geophysical turbulence".

^bNaso et al., "Statistical mechanics of Beltrami flows in axisymmetric geometry: Theory reexamined".

^cChavanis and Sommeria, "Classification of self-organized vortices in two-dimensional turbulence: the case of a bounded domain".

^dChavanis, "Dynamical and thermodynamical stability of two-dimensional flows: Variational principles and relaxation equations".



Hypothèses

- Séparation du champ de vitesse 3D en :
 $\mathbf{u} = \overline{u_z} \mathbf{z} + \overline{\mathbf{u}_{x,y}}(x, y, z) + \mathbf{u}'(x, y, z, t)$
 → vitesse axiale moyenne $\overline{u_z}$
 quasi-uniforme dans le domaine (hors CL).
 → champ 2D $\overline{\mathbf{u}_{x,y}}(x, y, z)$ transporté par
 hypothèse de Taylor en $\overline{\mathbf{u}_{x,y}}(x, y, \overline{u_z} t)$.
 → fluctuations turbulentes $\mathbf{u}'(x, y, z, t)$ 3D.
- Hors couches limites, dissipation limitée.

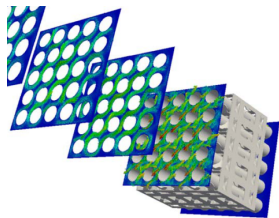


Illustration tirée de
Gandhir et Hassan, 2008.

Cadre de l'étude

- est-il possible de fournir une explication physique au phénomène de réorganisation à l'aide d'outils issus de la mécanique des fluides statistique ?
- quels sont les paramètres physiques déterminants pour l'apparition de ce phénomène ?

Plan de la présentation

- 1 Cadre industriel de l'étude
- 2 Théorie de physique statistique
- 3 Résultats obtenus

Equations d'Euler 2D incompressibles :

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \\ \omega \mathbf{z} = \nabla \times \mathbf{u}. \end{cases}$$

On cherche une solution stationnaire ψ , avec $\omega = -\Delta\psi = f(\psi)$.

- Parmi l'infinité de solutions **stationnaires** possibles, on cherche celles pouvant apparaître à la suite d'une relaxation libre du système, à partir de conditions initiales quelconques.
- Les solutions **stationnaires** sont soit :
 - instables \rightarrow probabilité nulle d'apparaître.
 - méta-stables \rightarrow peuvent apparaître mais sont censées se déstabiliser en temps fini.
 - stables \rightarrow doivent apparaître en temps fini.

Critère suffisant de stabilité thermodynamique de Kelvin^a et Arnol'd^b : extremum d'énergie pour des perturbations symplectiques (advection de la vorticité).

^aKelvin, "Stability of fluid motion: rectilinear motion of viscous fluid between two parallel plates".

^bArnol'd, "An a priori estimate in the theory of hydrodynamic stability".

Prediction de l'état final par maximisation de l'entropie

- Théorie MRS^{ab} (Miller-Robert-Sommeria) établit l'équivalence :
Solution stable
⇔ Maximum d'entropie pour des perturbations conservant les invariants des équations d'Euler 2D (énergie et Casimirs).
- Résolution du problème d'optimisation sous contraintes :

$$\max_{\omega} \left\{ \mathcal{S}[\omega] \mid E[\omega] = E, \int_{\Omega} \mathcal{F}(\omega) \, d\mathbf{r} \right\}$$

^aMiller, "Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions".

^bRobert and Sommeria, "Statistical equilibrium states for two-dimensional flows".

Energie : $E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \, d\mathbf{r}$; Casimirs : $\int_{\Omega} \mathcal{F}(\omega) \, d\mathbf{r}$ avec \mathcal{F} intégrable,

Circulation : $\Gamma = \int_{\Omega} \omega \, d\mathbf{r}$; Enstrophie $\Gamma_2 = \int_{\Omega} \omega^2 \, d\mathbf{r}$

Problème d'optimisation

- Méthode MRS exhaustive mais complexe.
- Suivant Naso^a, on limite le nombre de grandeurs conservées à énergie, circulation et enstrophie, sous l'argument d'une viscosité faible mais non nulle qui dissipe les invariants d'ordre plus élevé.
- On utilise la vorticité macroscopique $\bar{\omega}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \rho(\omega, \mathbf{r}) d\omega$ pour se ramener à des échelles que l'on peut calculer.

$$\min_{\bar{\omega}} \{ \bar{\Gamma}_2[\bar{\omega}] | E[\bar{\omega}] = E, \Gamma[\bar{\omega}] = \Gamma \}$$

- Constitue condition suffisante de stabilité MRS.
- Approche plus cohérente avec l'écoulement observé.
- Implique relation linéaire $\bar{\omega} - \psi$, plus facile à manipuler et exploiter numériquement.

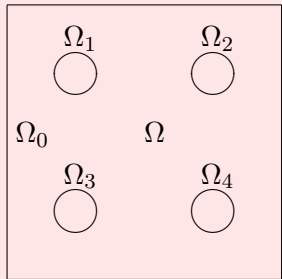
^aNaso, Chavanis, and Dubrulle, "Statistical mechanics of two-dimensional Euler flows and minimum enstrophy states".

Prise en compte des obstacles

Pour la non-pénétration du fluide dans un obstacle :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \implies \nabla \bar{\psi} \cdot \mathbf{n}^\perp = \mathbf{0} \implies \bar{\psi} = \text{constante sur } \Omega_q, \forall q \in [0, Q].$$

Souvent $\psi = 0$ sur $\Omega_q, \forall q \in [0, Q]$ par convention \implies abusif.



($\bar{\omega} \rightarrow \omega$ pour alléger notations)
 On cherche des solutions vérifiant le problème plus général :

$$\begin{cases} -\Delta \psi = \omega & \text{sur } \Omega \\ \psi = a_q & \text{sur } \Omega_q, q \in [0, Q] \end{cases}$$

avec $a_0 = 0$ par convention.

Schéma du domaine pour $Q = 4$.

Obstacles présents \implies conservation de Γ_q autour de chaque obstacle.
 $\implies \min_{\psi} \{ \overline{\Gamma_2}[\psi] | E[\psi] = \overline{E}, \Gamma[\psi] = \overline{\Gamma}, \Gamma_q[\psi] = \overline{\Gamma}_q, q = 1, \dots, Q \} .$ (1)

La fonctionnelle à minimiser est $J(\psi)$:

$$J(\psi) = \overline{\Gamma_2}(\psi) - \beta \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{r} - \overline{E} \right) - \alpha \left(\int_{\Omega} \Delta \psi \, d\mathbf{r} - \overline{\Gamma} \right) - \sum_{q=1}^Q \alpha_q \left(\oint_{\Omega_q} \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \overline{\Gamma}_q \right) .$$
 (2)

- On impose $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Ω_q , $q \in [0, Q]$, ce qui revient à considérer des perturbations irrotationnelles au niveau des parois.
- En introduisant les contraintes sur l'énergie E et sur la circulation Γ , on obtient la forme locale du problème :

$$\begin{cases} -\Delta \psi + \beta \psi & = \Gamma + \beta \langle \psi \rangle & \text{sur } \Omega \\ \psi & = a_q & \text{sur } \Omega_q, q \in [0, Q] \end{cases} \quad (3)$$

Calcul des solutions

Discretisation du Laplacien dans le domaine (différences finies).

Décomposition en base propre $(\beta_i, e_i)_{i=1..N}$, avec $\langle e_i \cdot e_j \rangle = \delta_{ij}$, $e_i|_{\Omega_q} = 0$.

On utilise le changement de variable $\psi = \psi_{\partial\Omega} + \Psi$, tel que

- $\psi_{\partial\Omega} = a_i$ sur Ω_q , $q \in [1, Q]$, $a_0 = 0$.
- $\Psi = 0$ sur l'ensemble de $\partial\Omega = \bigcup_{q=0}^Q \Omega_q$.

La nouvelle équation locale du problème est :

$$-\Delta\Psi + \beta\Psi = \Delta\psi_{\partial\Omega} - \beta\psi_{\partial\Omega} + \Gamma + \beta(\langle\Psi\rangle + \langle\psi_{\partial\Omega}\rangle). \tag{4}$$

2 catégories de solutions sont possibles :

- Continues : $\psi_{cont.}(\Gamma, \beta, \psi_{\partial\Omega}) = \sum_{j=1}^N b_j(\Gamma, \beta, \psi_{\partial\Omega}) e_j + \psi_{\partial\Omega}$.
- Mixtes : $\psi_{mix}(\Gamma, \beta_i, \psi_{\partial\Omega}) = \psi_{cont.}(\Gamma, \beta_i, \psi_{\partial\Omega}) + x e_i, \forall x \in \mathbf{R}, \langle e_i \rangle = 0$.

Introduction du paramètre Λ : $\Lambda^2 = \frac{\Gamma^2}{2E}$.

- Parcours de l'espace des paramètres (Γ, β) .
- A Λ^2 fixé, comparaison des solutions obtenues sachant que l'entrophie $\Gamma_2 \propto -\beta$.
- Tracé des diagrammes de phase (β, Λ^2) .
- Identification des solutions stables selon le paramètre Λ^2 .

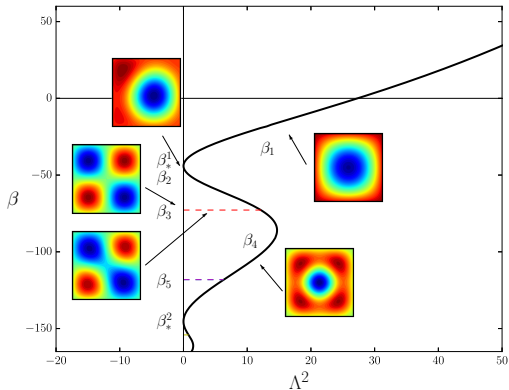


Diagramme de phase obtenu avec cette méthode, pour un domaine carré vide.

Plan de la présentation

- 1 Cadre industriel de l'étude
- 2 Théorie de physique statistique
- 3 Résultats obtenus

Comparaison des résultats pour un domaine carré vide

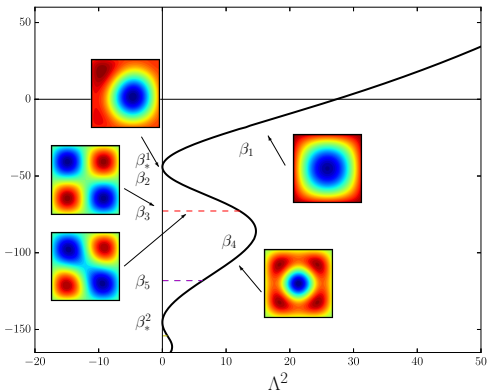


Diagramme de phase obtenu avec notre méthode.

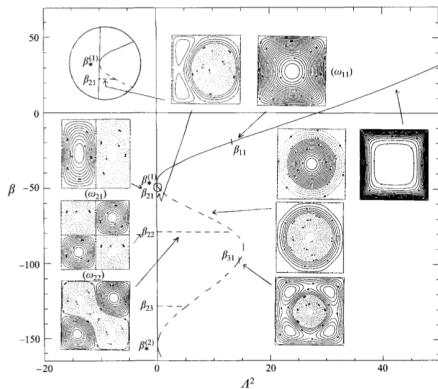


Diagramme de phase présenté par Chavanis (Journal of Fluid Mechanics, 1996)

Résultats pour un anneau

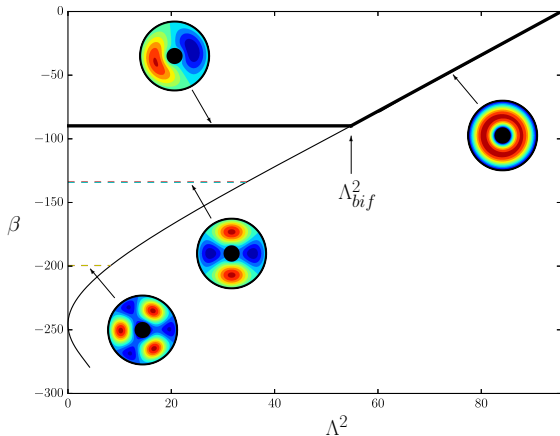


Diagramme de phase obtenu dans le cas d'un domaine annulaire. La solution continue (ligne noire fine), les solutions "mixtes" (lignes en pointillés) et la solution la plus probable (ligne noire épaisse) sont tracées.

Résultats pour un carré avec obstacle central

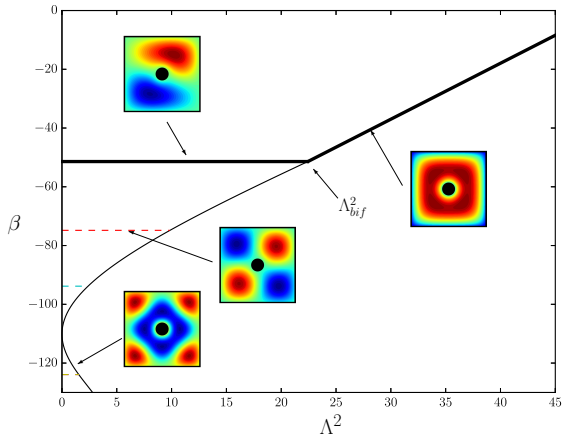
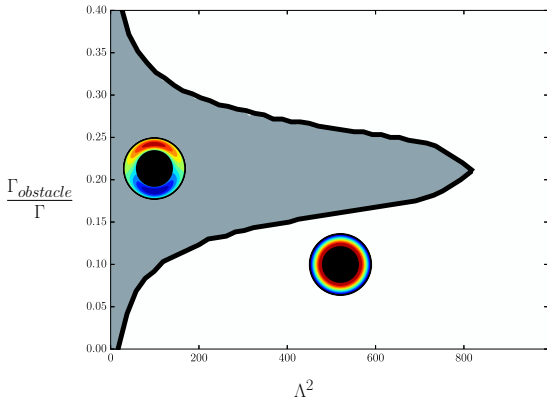


Diagramme de phase obtenu dans le cas d'un domaine carré avec un obstacle. La solution continue (ligne noire fine), les solutions "mixtes" (lignes en pointillés) et la solution la plus probable (ligne noire épaisse) sont tracées.

Diagramme de bifurcation pour un anneau

- Variation des conditions aux limites sur $\psi_{\partial\Omega}$
- \Rightarrow Parcours du domaine de variation des Γ_q
- Observation des zones de prédominance des régimes mixtes et continus, et de la courbe de transition de phase ($\Lambda_{bif}^2, \Gamma_{obstacle}$) entre eux.



Pour un anneau : tracé du diagramme de bifurcation complet dans l'espace des paramètres $(\frac{\Gamma_{obstacle}}{\Gamma}, \Lambda^2)$.

Conclusions et résultats obtenus

- Développement d'un outil de calcul et d'une méthode numérique permettant de calculer les solutions du problème variationnel dans des géométries quelconques en présence d'obstacles internes.
- Validation sur des cas existant dans la littérature.
- Obtention du diagramme de bifurcation dans le cas d'un anneau.
- Résultats confortent l'idée de la possibilité d'établir un lien entre physique statistique et simulations CFD.

Perspectives

- Exploration des cas à plusieurs obstacles.
- Mise en évidence du lien entre les simulations CFD 3D et les résultats de physique statistique.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION
DES QUESTIONS ?