HAL open science

Paramétrisation du problème 3x+1 sur la droite réelle : diagramme de phase, renormalisation et intervalles errants

Nik Lygeros, Olivier Rozier

To cite this version:

Nik Lygeros, Olivier Rozier. Paramétrisation du problème 3x+1 sur la droite réelle : diagramme de phase, renormalisation et intervalles errants. 2020. hal-02412727v2

HAL Id: hal-02412727

https://hal.science/hal-02412727v2

Preprint submitted on 2 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

PARAMÉTRISATION DU PROBLÈME $3x+1$ SUR LA DROITE RÉELLE : DIAGRAMME DE PHASE, RENORMALISATION ET INTERVALLES ERRANTS

NIK LYGEROS ET OLIVIER ROZIER

Résumé. Le *problème* $3x+1$, défini sur les entiers positifs, concerne les itérations de la fonction $T(x) = (3x+1)/2$ si x est impair et $T(x) = x/2$ sinon. Un prolongement analytique sur les réels a été étudié par Marc Chamberland, puis par les auteurs. Nous généralisons cette étude à une classe de fonctions réelles dépendant de quatre paramètres, de manière à englober de nombreuses variantes du *problème* $3x+1$. A l'aide d'une approche heuristique, nous obtenons un "diagramme de phase" en deux dimensions permettant de caractériser la dynamique asymptotique moyenne, i.e., pour presque tout réel au voisinage de $\pm\infty$. Dans une large partie de l'espace des paramètres, nous établissons le taux moyen de croissance des trajectoires réelles proches de l'infini, sous une condition de distribution uniforme modulo 2. Puis nous décrivons la dynamique intrinsèque et extrinsèque au voisinage des entiers au moyen d'une méthode de renormalisation. Cela nous conduit à distinguer quatre types d'intervalles errants.

Abstract. The $3x+1$ problem, defined on the positive integers, deals with the iterations of the function $T(x) = (3x+1)/2$ if x is odd and $T(x) = x/2$ otherwise. An analytical extension on real numbers has been studied by Chamberland, and later by the authors. We generalize this study on a class of real functions that depend on four parameters, so as to encompass many variants of the $3x+1$ problem. Following a heuristic approach, we obtain a two-dimensional "phase diagram" characterizing the average asymptotic dynamics (i.e., for almost every real number close to $\pm\infty$). In a large part of the parameter space, we establish the average growth rate of real trajectories close to infinity, under a condition of uniform distribution modulo 2. Finally, we describe the intrinsic and extrinsic dynamics close to integers using a renormalization method. This leads us to distinguish four types of wandering intervals.

Table des matières

1. Introduction 2
2. Paramétrisation et extension réelle 3
3. Dynamique asymptotique 4
3.1. Moyenne géométrique 4
3.2. Diagramme de phase 5
3.3. Discrépance modulo 2 7
4. Dynamique proche des entiers 10
4.1. Renormalisation 10
4.2. Parité constante (type 1) 12
4.3. Parité non-constante périodique (type 2) 13
4.4. Parité pseudo-aléatoire (type 3) 16
5. Intervalles errants 17
6. Conclusion 20
Références 21

---

1. Introduction

Le *problème* $3x+1$, aussi appelé *conjecture de Syracuse* ou encore *conjecture de Collatz*, stipule que toute séquence suffisamment longue d'itérations de la fonction T définie sur les entiers positifs par

$$T(n) := \begin{cases} (3n+1)/2 & \text{si n est impair,} \\ n/2 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.1}$$

conduit invariablement à la valeur 1.

Conjecture 1.1. ***Problème*** $3x+1$
Pour tout entier $n > 0$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $T^k(n) = 1$, où $T^k(n)$ désigne le $k^{ième}$ itéré de T.

La difficulté de cette conjecture résulte de l'imprévisibilité des parités successives dans toute séquence issue d'un entier arbitraire. Plusieurs résultats notables confortent l'idée que la dynamique des itérations s'apparente à un processus quasi-aléatoire. Ainsi, Lagarias et Soundararajan ont montré que la distribution des premiers chiffres pour des séquences finies suit approximativement une loi de Benford [8] (voir aussi le résultat similaire de Kontorovich et Miller dans [6]). Et récemment, Tao a prouvé que les séquences atteignent presque surement des valeurs "presque majorées", un peu à la manière d'une marche aléatoire [15].

Dans le cadre de notre étude, nous appellerons *vitesse moyenne* d'une séquence finie $\big(n, T(n), \cdots, T^k(n)\big)$ la quantité $\big(T^k(n)/n\big)^{1/k}$. Un raisonnement heuristique analogue à celui de Crandall dans [2], et que nous avons détaillé dans [10], suggère que la vitesse moyenne d'une séquence arbitraire

finie a statistiquement une valeur proche de $\sqrt{3}/2 \simeq 0.866\ldots$, moyenne géométrique de $1/2$ et $3/2$.

2. Paramétrisation et extension réelle

Il existe aussi d'autres variantes du problème $3x+1$. Ainsi, Crandall a introduit les *"problèmes $qx+1$"*[1] relatifs aux itérations des fonctions T_q dépendant d'un paramètre $q \geq 3$ impair :

$$\begin{aligned} T_q : \mathbb{Z}^+ &\longrightarrow \mathbb{Z}^+ \\ n &\longmapsto \begin{cases} (qn+1)/2 & \text{si n est impair,} \\ n/2 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Crandall suggère que l'on peut toujours trouver un entier dont l'orbite ne contient pas la valeur 1 dès lors que $q > 3$.

Conjecture 2.1. ***Problème*** $qx+1$ (Crandall)
Soit un entier impair $q > 3$. Alors il existe un entier $n > 0$ tel que $T_q^k(n) \neq 1$ pour tout k.

Cette conjecture a été prouvée pour une infinité de valeurs de q et notamment $q = 21, 39, 57, 105, 111\ldots$ pour lesquelles la valeur 1 n'est presque jamais atteinte par itération de T_q [4]. Elle est aussi résolue pour $q = 5$ et $q = 181$ où des cycles ne contenant pas 1 sont connus. Toutefois, le problème $qx+1$ est encore ouvert pour les autres valeurs de q, à commencer par $q = 7$.

Par ailleurs, on conjecture que la fonction T_q admet une orbite non-bornée pour tout $q > 3$, mais cela n'a été prouvé pour aucune valeur de q. La vitesse moyenne escomptée pour les itérations de T_q vaut $\sqrt{q}/2$.

Dans cet article, nous proposons à la fois d'étendre le domaine à l'ensemble des réels et de paramétriser ce prolongement afin de couvrir de nombreuses variantes. On pourra ainsi observer dans un espace des paramètres continu la "transition de phase" entre comportements décroissants et comportements croissants.

On rappelle que pour $q = 3$, la fonction T peut être prolongée analytiquement par la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto x + \tfrac{1}{4} - \left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{4}\right)\cos(\pi x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il résulte de ce prolongement un système dynamique à domaine continu qui admet des orbites divergentes monotones, comme l'a prouvé Chamberland [1]. De plus, nous avons montré que l'absence d'intervalles errants dans la dynamique de f impliquerait l'absence de trajectoires divergentes pour la fonction T du problème $3x+1$ (théorème 4.1 dans [10]).

On trouvera d'autres exemples d'extensions possibles dans le livre de Simonetto [14].

1. En réalité, Crandall considère l'ensemble des *"problèmes $qx+r$"* avec q,r impairs, $q > 1$ et exhibe une solution générique pour $r > 1$.

Dans la suite de notre étude, nous considérons principalement la classe de fonctions

$$\begin{aligned} F_{a,b,c,d} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (ax+b)\cos^2\left(\tfrac{\pi x}{2}\right) + (cx+d)\sin^2\left(\tfrac{\pi x}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

qui dépendent de quatre paramètres réels a, b, c, d. Par commodité, on notera simplement F la fonction $F_{a,b,c,d}$. Les paramètres a, b (resp. c,d) déterminent l'image des entiers pairs (resp. impairs). La fonction F s'écrit également

$$F(x) = \frac{a+c}{2}\, x + \frac{b+d}{2} + \left(\frac{a-c}{2}\, x + \frac{b-d}{2}\right)\cos(\pi x)\,. \tag{2.4}$$

Lorsque $a = 1/2$, $b = 0$, $c = q/2$ et $d = 1/2$ avec q entier positif impair, alors F prolonge la fonction T_q sur les réels. En particulier, si $q = 3$, on a l'égalité $F = f$.

3. Dynamique asymptotique

3.1. **Moyenne géométrique.** Afin de caractériser le comportement moyen de F au voisinage de l'infini, on observe que la fonction $x \longmapsto F(x)/x$ admet une asymptote sinusoïdale

$$G(x) := (a+c)/2 + ((a-c)/2)\cos(\pi x). \tag{3.1}$$

La moyenne géométrique de G s'obtient aisément au moyen de la *mesure de Mahler* [11] d'un polynôme $P(X) = q(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$, définie par

$$\mathcal{M}(P) := |q| \prod_{i=1}^{n} \max(1, |\alpha_i|). \tag{3.2}$$

En effet, elle vérifie

$$\mathcal{M}(P) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\, \left|P(e^{i\theta})\right| \,\mathrm{d}\theta\right). \tag{3.3}$$

Lemme 3.1. *Soient P le polynôme*

$$P(X) := \left(\frac{a-c}{4}\right)\left(X^2+1\right) + \left(\frac{a+c}{2}\right) X$$

et $\tau(G)$ la moyenne géométrique de G sur une période. Alors on a

$$\tau(G) = \mathcal{M}(P) = \begin{cases} \frac{\left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|c|}\right)^2}{4} & \textit{si } ac > 0, \\ \frac{|a|+|c|}{4} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Le résultat est trivial si $a = c$. Supposons $a \neq c$. Comme $G(x) = e^{-i\pi x} P\left(e^{i\pi x}\right)$, on a donc $\tau(G) = \mathcal{M}(P)$ en raison de (3.3).

Si le discriminant, égal à ac, est positif, le polynôme P admet deux racines réelles α_1 et α_2 de valeurs absolues

$$|\alpha_1| = \frac{\left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|c|}\right)^2}{|a-c|} > 1 \text{ et } |\alpha_2| = \left|\frac{1}{\alpha_1}\right| < 1.$$

La formule (3.2) nous donne

$$\tau(G) = \frac{\left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|c|}\right)^2}{4}.$$

Si $ac < 0$, les racines de P sont complexes de modules 1, et le résultat suit :

$$\tau(G) = \frac{|a-c|}{4} = \frac{|a|+|c|}{4}.$$

□

3.2. **Diagramme de phase.** Notre objectif est de distinguer dans l'espace des paramètres les régions pour lesquelles la dynamique asymptotique (i.e., au voisinage de $\pm\infty$) est plutôt croissante ou plutôt décroissante sur un nombre suffisamment grand d'itérations. Nous appellerons *diagramme de phase* cette partition de l'espace des paramètres.

Afin d'étudier la dynamique asymptotique de la fonction F, nous considérons le comportement de séquences finies d'itérations

$$S = (x, F(x), \ldots, F^n(x))$$

telles que $n \gg 1$ et $\min(|x|, |F(x)|, \ldots, |F^n(x)|) \gg 1$. Nous définissons alors la *vitesse moyenne* d'une séquence S , notée $\mathcal{V}_n(S)$, par

$$\mathcal{V}_n(S) := \left|\frac{F^n(x)}{x}\right|^{\frac{1}{n}}.$$

Des calculs numériques en multiprécision suggèrent que cette vitesse moyenne est souvent proche de la moyenne géométrique $\tau(G)$ explicitée dans le lemme 3.1, pour toutes les valeurs des paramètres. Sur la Figure 1, nous avons estimé dans le plan des paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ la probabilité pour une séquence de longueur 1000 d'avoir une vitesse moyenne inférieure à 1, selon une méthode de *Monte-Carlo*. Cela amène à formuler la conjecture suivante.

Conjecture 3.2. (Diagramme de phase) *Les itérations de la fonction F au voisinage de $\pm\infty$ ont presque surement une vitesse moyenne strictement inférieure à 1 si et seulement si une des conditions ci-dessous est vérifiée :*

(i) $ac > 0$ *et* $\sqrt{|a|}+\sqrt{|c|} < 2$ *;*

(ii) $ac \leq 0$ *et* $|a|+|c| < 4$.

On rappelle que la fonction F est une extension de T_q relative au problème $qx+1$ pour les valeurs 1/2, 0, q/2, 1/2 des paramètres a, b, c, d respectivement. La vitesse moyenne asymptotique attendue sur les réels est donnée par $\tau(G)$, qui vaut alors $(1+\sqrt{q})^2/8$. Elle est supérieure à

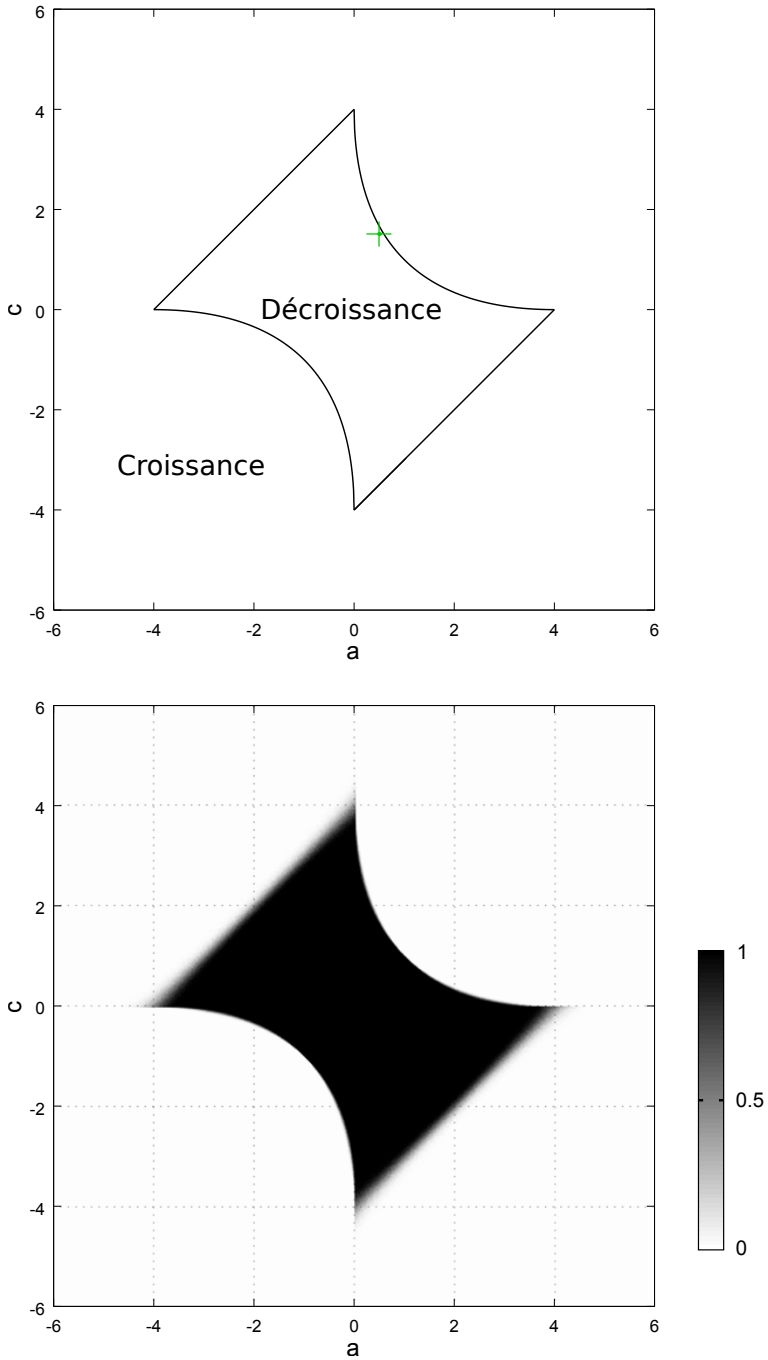

FIGURE 1. **Diagramme de phase**. En haut, le diagramme théorique (cf. conjecture 3.2) avec localisation du point correspondant au problème $3x + 1$ (vert). En bas, la probabilité de décroissance sur 1000 itérations dans l'espace des paramètres $(a, c) \in [-6, 6]^2$.

$\sqrt{q}/2$ qui est la vitesse moyenne attendue pour les entiers. Dans le plan des paramètres (a, c), les extensions de T_q sont "alignées" sur la droite $a = 1/2$. Le lemme 3.1 permet le calcul des points de "transition de phase" pour lesquels $\tau(G) = 1$, à savoir $c = 9/2 - 2\sqrt{2} \simeq 1.671\ldots$ et $c = -7/2$.

3.3. **Discrépance modulo 2.** Une majoration de l'incertitude sur la vitesse moyenne sera obtenue dans le cas où $ac > 0$. Pour cela, nous utilisons la notion de discrépance d'une séquence finie $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0, \beta]^n$, définie par

$$D_n^*(\mathcal{X}) := \sup_{0 \le \alpha \le \beta} \left| \frac{|\{x_1, \ldots, x_n\} \cap [0, \alpha)|}{n} - \frac{\alpha}{\beta} \right|. \tag{3.4}$$

Quand la longueur de la séquence $\mathcal{X}$ augmente, la discrépance $D_n^*(\mathcal{X})$ tend vers zéro si et seulement si la distribution de $\mathcal{X}$ tend à être uniforme dans l'intervalle $[0, \beta]$. Cette notion de discrépance intervient dans l'inégalité de Koksma [7] :

Théorème 3.3. (Koksma) *Soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation (totale) $V(\phi)$ bornée. Alors pour toute séquence $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n) \in [a, b]^n$, on a*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(t)\, \mathrm{d}t \right| \le V(\phi) D_n^*(\mathcal{X}).$$

De manière informelle, nous dirons qu'une séquence finie d'itérations $S = \left(F^i(x)\right)_{i=0}^n$ est uniformément distribuée modulo 2 (u. d. mod 2) si la discrépance à l'origine de $(S \bmod 2) := \left(F^i(x) \bmod 2\right)_{i=0}^n$ dans l'intervalle $[0, 2]$ vérifie $D_n^*(S \bmod 2) \ll 1$.

Théorème 3.4. *Soient a, b, c, d réels tels que $ac > 0$, et soit une séquence finie d'itérations $S = (x, F(x), \ldots, F^n(x))$ telle que $\min\{|F^i(x)|\}_{i=0}^{n-1} \ge M$ pour un réel $M > m := \max(|b/a|, |d/c|)$. Alors on a la majoration*

$$|\ln \mathcal{V}_n(S) - \ln \tau(G)| \le 2 \left| \ln \frac{c}{a} \right| D_n^*(S \bmod 2) + \ln \left(\frac{M}{M-m} \right)$$

où $\mathcal{V}_n(S)$ est la vitesse moyenne de S et $\tau(G)$ la moyenne géométrique de la fonction G.

Démonstration. Le preuve est similaire à celle du théorème 6.1 dans [10]. Comme $ac > 0$, la fonction G ne s'annule pas et l'on peut écrire $F(t) = G(t)(t + H(t))$ où H est la fonction périodique

$$H(t) := \frac{b + d + (b-d)\cos(\pi t)}{2G(t)} = \frac{b + d + (b-d)\cos(\pi t)}{a + c + (a-c)\cos(\pi t)}$$

à valeurs dans $[\min(b/a, d/c), \max(b/a, d/c)]$.

La vitesse moyenne de S vérifie

$$(\mathcal{V}_n(S))^n = \left|\frac{F^n(x)}{x}\right| = \prod_{i=0}^{n-1}\left|\frac{F^{i+1}(x)}{F^i(x)}\right| = \prod_{i=0}^{n-1}\left|G\left(F^i(x)\right)\right| \cdot \left|1+\frac{H\left(F^i(x)\right)}{F^i(x)}\right|.$$

Il vient alors

$$\ln \mathcal{V}_n(S) - \ln \tau(G) = A + B$$

avec

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \ln\left|G\left(F^i(x)\right)\right| - \ln \tau(G)$$

et

$$B = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \ln\left|1+\frac{H\left(F^i(x)\right)}{F^i(x)}\right| \leq -\ln\left(1-\frac{m}{M}\right) = \ln\left(\frac{M}{M-m}\right).$$

La moyenne géométrique de G satisfait l'équation

$$\ln \tau(G) = \frac{1}{2}\int_0^2 \ln|G(t)|\ \mathrm{dt}.$$

Le résultat final découle de l'inégalité de Koksma appliquée à la fonction $\Phi(t) := \ln|G(t)|$ de variation totale $V(\Phi) = |2\Phi(1) - \Phi(2) - \Phi(0)| = 2\left|\ln(c/a)\right|$, soit

$$|A| \leq V(\Phi) D_n^*(S \bmod 2).$$

□

Remarque 3.1. Le terme de discrépance du théorème 3.4 disparait dans le cas $a = c$. La vitesse moyenne asymptotique vaut alors $|a|$, indépendamment de la distribution modulo 2 des itérés successifs.

Remarque 3.2. On peut s'attendre à ce que la condition de distribution uniforme modulo 2 des itérations de F soit le plus souvent valide au voisinage de $\pm\infty$. On notera à cet effet que, si $a \neq c$, le diamètre des zones contractantes de F tend vers 0, tandis que l'amplitude des oscillations devient infiniment grande.

A présent, nous allons montrer, dans le cas $ac > 0$ et $\tau(G) < 1$, l'inexistence de séquence d'itérations u. d. mod 2 tendant vers l'infini.

Théorème 3.5. *Soient a, b, c, d réels tels que $ac > 0$, $a \neq c$ et $\sqrt{|a|}+\sqrt{|c|} < 2$. Soit x un réel d'orbite $\{F^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ telle que*

$$\liminf_{i\to\infty} |F^i(x)| > \frac{4\max\left(\left|\frac{b}{a}\right|, \left|\frac{d}{c}\right|\right)}{4-\left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|c|}\right)^2}.$$

Alors l'orbite de x n'est pas uniformément distribuée modulo 2.

Démonstration. Il existe un entier positif N et un réel $\alpha > 1$ tels que

$$|F^i(x)| \geq \frac{4\,\alpha\,m}{4-\left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|c|}\right)^2} = \frac{\alpha\,m}{1-\tau(G)}$$

pour tout $i \geq N$, avec $m := \max\left(|b/a|, |d/c|\right)$.

On considère les séquences finies $S_n = \left(F^i(x)\right)_{i=N}^{N+n}$ pour tout n entier positif, et on pose

$$M_n := \min\{|F^i(x)|\}_{i=N}^{N+n} \geq \frac{\alpha\,m}{1-\tau(G)}.$$

D'après le théorème 3.4,

$$\ln \mathcal{V}_n(S_n) - \ln \tau(G) \leq 2\left|\ln \frac{c}{a}\right| D_n^*(S_n \bmod 2) - \ln\left(1-\frac{m}{M_n}\right).$$

Il vient

$$2\left|\ln \frac{c}{a}\right| D_n^*(S_n \bmod 2) \geq A_n + B_n$$

avec

$$A_n = \ln \mathcal{V}_n(S_n) = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{F^{N+n}(x)}{F^N(x)}\right|$$

et

$$B_n = -\ln \tau(G) + \ln\left(1-\frac{m}{M_n}\right).$$

D'une part, on vérifie aisément que $\liminf_{n\to\infty} A_n \geq 0$. D'autre part, on a

$$B_n \geq -\ln \tau(G) + \ln\left(1-\frac{1-\tau(G)}{\alpha}\right) = \ln\left(1+\frac{(\alpha-1)(1-\tau(G))}{\alpha\,\tau(G)}\right).$$

On obtient donc le résultat souhaité :

$$\liminf_{n\to\infty} D_n^*(S_n \bmod 2) \geq \frac{\ln\left(1+\frac{(\alpha-1)(1-\tau(G))}{\alpha\,\tau(G)}\right)}{2\left|\ln \frac{c}{a}\right|} > 0.$$

□

Ce résultat induit le corollaire 3.6 ci-dessous.

Corollaire 3.6. *Soient a, b, c, d réels tels que $ac > 0$ et $\sqrt{|a|}+\sqrt{|c|} < 2$. Soit x un réel d'orbite $\left(F^i(x)\right)_{i=0}^{\infty}$ divergente telle que*

$$\lim_{i\to\infty} |F^i(x)| = +\infty.$$

Alors l'orbite de x n'est pas u. d. mod 2.

Démonstration. Dans le cas $a \neq c$, c'est un corollaire immédiat du théorème 3.5. Pour traiter le cas $a = c$, il suffit de remarquer que toutes les orbites sont alors bornées en raison de la majoration stricte $|a| < 1$. □

Les orbites considérées dans le corollaire 3.6 ont une dynamique que l'on qualifiera de *rétrograde* au sens où elle est inversée par rapport à la *dynamique asymptotique* décroissante des orbites u. d. mod 2. De telles orbites n'existent pas lorsque $|a| < 1$ et $|c| < 1$ car la fonction F vérifie alors $|F(x)| < |x|$ au voisinage de l'infini. Si l'on fixe $|a| > 1$ ou $|c| > 1$ et si de plus $\tau(G) < 1$, on peut appliquer la même méthode que Chamberland dans [1] pour établir l'existence d'orbites rétrogrades. Nous donnerons des exemples dans la partie §4.

Nous n'avons pas traité le cas $ac \leq 0$. Ce dernier est plus problématique car la fonction F admet alors une infinité de zéros dans tout voisinage de $\pm\infty$. Ainsi, la condition de distribution uniforme modulo 2 n'est pas suffisante et il conviendrait de tenir compte de la distance minimale entre zéros et itérés. Les calculs numériques suggèrent que la vitesse moyenne reste le plus souvent proche de $\tau(G)$ pour des séquences itératives arbitraires et suffisamment longues au voisinage de $\pm\infty$, en dépit d'une grande variabilité. Il semble ainsi que la transition de phase se produise toujours pour $\tau(G) = 1$, comme le suggère la Figure 1.

4. Dynamique proche des entiers

Dans cette partie, on s'intéresse aux cas de figure où les entiers sont préservés en partie ou en totalité par la fonction F. Il est alors parfois possible de déterminer la dynamique locale proche d'entiers suffisamment grands en valeur absolue par une méthode de *renormalisation asymptotique*. Ces dynamiques particulières émergent uniquement pour des valeurs précises de a, b, c et d, représentables sous forme de points isolés ou au mieux de plans à 2 dimensions dans l'espace à 4 dimensions des paramètres (a, b, c, d). Nous interprétons cela comme une forme de "résonance" intrinsèque du système dynamique régi par la fonction F sur la droite réelle.

4.1. Renormalisation.

A présent, on suppose que $a \neq c$. On considère alors la famille d'intervalles fermés $\{J_n^u; n \in \mathbb{Z}^*, u \in \mathbb{R}^*, |u| \leq 2\}$ où l'intervalle J_n^u est délimité par les valeurs n et $n + \frac{\delta}{n}u$, avec

$$\delta := \frac{4}{\pi^2 \, |a - c|}. \tag{4.1}$$

Le développement limité de la fonction F au voisinage d'un entier n non-nul donne l'approximation

$$F\left(n + \frac{\delta}{n}\, t\right) - F(n) = \begin{cases} \frac{\delta}{n}\, t\,(a - s\, t) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{\delta}{n}\, t\,(c + s\, t) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.2}$$

où $s = 1$ si $a > c$, et $s = -1$ sinon.

Comme $F(n)$ vaut $an+b$ si n est pair et $cn+d$ sinon, en supposant en outre que $F(n) \neq 0$ et $ac \neq 0$, il vient

$$F\left(n+\frac{\delta}{n}\,t\right)-F(n)=\begin{cases} \frac{\delta}{F(n)}\;a\,t\,(a-s\,t)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{\delta}{F(n)}\;c\,t\,(c+s\,t)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Lorsque $ac=0$, par exemple $c=0$, seul le cas pair est licite puisque le paramètre c n'intervient pas. Ainsi, dans tous les cas où $ac=0$, on ne considèrera que les entiers d'une seule et même parité pour cette approche. Dans ce qui suit, nous traitons le cas plus général $ac \neq 0$.

On définit alors l'approximation quadratique $\widetilde{F}$ de F dans chaque intervalle J_n^u par

$$\widetilde{F}\left(n+\frac{\delta}{n}\,t\right):=F(n)+\begin{cases} \frac{\delta}{F(n)}\;a\,t\,(a-s\,t) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{\delta}{F(n)}\;c\,t\,(c+s\,t) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Par renormalisation, on est ramené à étudier les itérations d'une fonction constituée de deux applications quadratiques dont la dynamique est connue depuis Feigenbaum. Cette méthode est applicable dès lors que l'on peut trouver un réel $u \neq 0$, une période $p \in \mathbb{Z}^+$, un seuil $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \gg 1$, et un ensemble non-borné $\widetilde{E} \subset \mathbb{Z}$ tels que

$$F^k\left(\widetilde{E}_N\right) \subset \mathbb{Z} \tag{4.5}$$

pour tout entier positif $k \leq p-1$, avec $\widetilde{E}_N := \widetilde{E} \cap [N,+\infty)$,

$$F^p\left(\widetilde{E}_N\right) \subset \widetilde{E} \tag{4.6}$$

et

$$\widetilde{F}^p\left(J_n^u\right) \subset J_{F^p(n)}^u \tag{4.7}$$

pour tout $n \in \widetilde{E}_N$. Les conditions (4.5), (4.6) et (4.7) assurent la stabilité de la dynamique asymptotique proche des entiers issus de $\widetilde{E}$. On dira alors que la dynamique de F est *asymptotiquement renormalisable* sur les intervalles $\{J_n^u\}_{n\in\widetilde{E}_N}$ et on définit la dynamique renormalisée d'un réel $x \in J_n^u$, $n \in \widetilde{E}_N$, comme étant la séquence

$$R_k(x) := \frac{F^k(n)}{\delta}\left(F^k(x)-F^k(n)\right) \tag{4.8}$$

avec $k \in \mathbb{N}$.

Pour étudier et comprendre le comportement de la dynamique renormalisée au voisinage de l'infini, on considère l'approximation

$$\widetilde{R}_k(x) := \frac{F^k(n)}{\delta}\left(\widetilde{F}^k(x)-F^k(n)\right), \tag{4.9}$$

ceci tant que $|F^k(n)| \geq N$. L'équation (4.4) conduit à la relation de récurrence

$$\widetilde{R}_{k+1}(x) = \begin{cases} a\,\widetilde{R}_k(x)\,\left(a - s\,\widetilde{R}_k(x)\right) & \text{si } F^k(n) \text{ est pair,} \\ c\,\widetilde{R}_k(x)\,\left(c + s\,\widetilde{R}_k(x)\right) & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.10}$$

avec $\widetilde{R}_0(x) = R_0(x)$, $x \in J_n^u$.

Les conditions de stabilité (4.6) et (4.7) assurent le fait que les fonctions $\widetilde{R}_{kp}$ prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[0, u]$ (ou $[u, 0]$ si $u < 0$).

Il s'avère que la dynamique renormalisée dépend non seulement des paramètres a et c, mais aussi des paramètres b et d qui contrôlent les parités successives des entiers $F^k(n)$. On regroupe ces dynamiques particulières en trois types principaux selon les séquences de parité :

Type 1: parité constante ;

Type 2: parité non-constante périodique ;

Type 3: parité pseudo-aléatoire.

On prendra la période $p = 1$ pour les dynamiques de type 1 et 3, et $p \geq 2$ pour le type 2.

L'étude de la dynamique renormalisée se ramène asymptotiquement à celle de séquences itératives des fonctions quadratiques $L_{\max(a,c)}$ et $L_{-\min(a,c)}$ avec

$$L_\lambda(t) := \lambda\, t\,(\lambda - t). \tag{4.11}$$

Chaque fonction L_λ appartient à la classe de conjugaison de la fonction logistique $r \longmapsto \lambda^2\, r\,(1 - r)$ de paramètre λ^2, via la transformation $t = \lambda r$.

4.2. **Parité constante (type 1).** Il s'agit de déterminer la dynamique renormalisée à proximité de séquences d'entiers ayant la même parité, ce qui correspond au cas le plus simple. On suppose l'existence d'un entier positif $N \gg 1$ et d'un ensemble non-borné $\widetilde{E} \subset 2\mathbb{Z}$ ou $1 + 2\mathbb{Z}$ tel que

$$F\left(\widetilde{E}_N\right) \subset \widetilde{E}.$$

La parité est donc constante lors des itérations de F sur l'ensemble $\widetilde{E}_N$. On pose alors $\lambda = sa$ en cas de parités paires, ou $\lambda = -sc$ en cas de parités impaires.

La condition (4.7) avec $p = 1$ est équivalente à l'existence d'un réel $u \neq 0$ tel que l'intervalle $[0, u]$ (ou $[u, 0]$ si $u < 0$) soit stable par la fonction L_λ. La dynamique de F est donc renormalisable asymptotiquement au voisinage de $\widetilde{E}$ si et seulement si on a la majoration $|\lambda| \leq 2$, c'est-à-dire $|a| \leq 2$ si les éléments de $\widetilde{E}$ sont pairs ou $|c| \leq 2$ s'ils sont impairs, et l'on pourra poser $u = \lambda$. De plus, dans le cas où $|\lambda| < 1$, le point fixe 0 est attractif et l'on peut étendre l'intervalle de stabilité de part et d'autre car on a $L_\lambda\left([u_0, u_1]\right) \subset$

Parité	Paramètres	$\widetilde{E}$	Dynamique de $\widetilde{R}_k$
paire	$\lvert a\rvert = 1, b \in 2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$	convergence vers 0^+
	$\lvert a\rvert = 2, b \in 2\mathbb{Z}$	$2\mathbb{Z}$	chaos
	$a = 7/4, b = c = 0, d = 1$	$\{4^m 7^n\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$	2-cycle attractif
impaire	$\lvert c\rvert = 1, d \in 2\mathbb{Z}$	$1 + 2\mathbb{Z}$	convergence vers 0^+
	$\lvert c\rvert = 2, d \in 1 + 2\mathbb{Z}$	$1 + 2\mathbb{Z}$	chaos
	$c = 1/3, d = 0$	$\{3^n\}_{n\in\mathbb{N}}$	0 est attractif

TABLE 1. Exemples de dynamiques renormalisables avec parité constante (type 1).

$[u_0, u_1]$, avec $u_0 = \min(\lambda - \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}) < 0$ et $u_1 = \max(\lambda - \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}) > 0$. Ainsi on obtient l'inclusion

$$\widetilde{F}\left(J_n^{u_0} \cup J_n^{u_1}\right) \subset J_{F(n)}^{u_0} \cup J_{F(n)}^{u_1} \quad \text{pour } n \in \widetilde{E}_N.$$

La Table 1 donne quelques exemples de dynamiques renormalisables de type 1.

Un exemple intéressant survient dans les cas où $a = 2$, $b = 0$ et c proche de 0, de sorte que $\tau(G) \simeq \frac{1}{2}$. Les entiers pairs sont alors globalement préservés par F et la dynamique renormalisée $\widetilde{R}_k$ dans leur voisinage immédiat est celle de la fonction quadratique $L_2(t) := 2t(2-t)$. Elle est donc stable et localement de nature chaotique à l'intérieur des intervalles $J_n^2 = [n, n+2\delta/n]$ lorsque n devient grand, avec un point critique proche du centre $n + \delta/n$ de chaque intervalle. De plus, elle est peu affectée par les petites variations des paramètres c et d. Nous sommes en présence d'une dynamique chaotique confinée dans un ensemble infini d'intervalles disjoints deux à deux, dynamique que l'on pourrait qualifiée d'*"attracteur errant"*. Dans cet exemple, on observe parfois deux phases successives dans l'orbite d'un réel x arbitraire suffisamment grand :

— une phase de décroissance à faible discrépance modulo 2, de vitesse moyenne proche de $\tau(G) \simeq \frac{1}{2}$,
— une phase de croissance rétrograde non-bornée à forte discrépance modulo 2, de vitesse moyenne proche de 2.

La transition entre les deux phases se produit lorsqu'un itéré tombe dans un intervalle J_n^2 au voisinage d'un point critique d'ordre pair $n \neq 0$.

Un autre exemple met en jeu le paramètre $a = 7/4$. La dynamique obtenue est celle de la fonction logistique de paramètre $49/16 = 3.0625$, soit un cycle attractif de période 2.

Une dynamique renormalisée de type 1 est toujours conjuguée à une fonction logistique de paramètre r rationnel. L'ensemble des valeurs possibles du paramètre r est dense dans $(0, 4]$.

4.3. **Parité non-constante périodique (type 2).** Lorsque les séquences de parité sont périodiques de période $p \geq 2$, la dynamique renormalisée

Cas de figure	Conditions de stabilité	
	"inférieure"	"supérieure"
$\lvert ac\rvert < 1$	stable	stable
$ac \geq 1$	$M\frac{m^2}{4}\left(M + \frac{m^3}{4}\right) \leq 1$	$m\frac{M^2}{4}\left(m + \frac{M^3}{4}\right) \leq 1$
$ac \leq -1$ et $\frac{M^3}{4} \leq m$	instable	stable
$ac \leq -1$ et $\frac{M^3}{4} > m$	instable	$M \geq \frac{m^3}{2}$ et $M\frac{m^2}{4}\left(M - \frac{m^3}{4}\right) \leq 1$

TABLE 2. Conditions de stabilité sur les dynamiques renormalisables avec parités alternées (type 2, $p = 2$).

résulte de la composition de deux fonctions quadratiques appliquées toujours dans le même ordre.

On considère un ensemble non-borné $\widetilde{E} \subset \mathbb{Z}$ pour lequel les conditions de stabilité (4.5) et (4.6) sont vérifiées pour une période $p \geq 2$. On suppose en outre que pour tout $n \in \widetilde{E}$, les parités successives de $F^k(n)$, $k = 0, \ldots, p-1$, suivent toujours une même séquence de longueur p contenant p_0 itérés pairs et p_1 itérés impairs, avec $p_0 p_1 \neq 0$.

Remarque 4.1. Il n'est pas certain que toutes les séquences de parités soient admissibles. Dans tous les exemples identifiés de type 2, les séquences de parités successives se ramènent toujours à un schéma générique de p_0 parités paires suivies de p_1 parités impaires. De plus, on a toujours $p_0 = 1$ ou $p_1 = 1$.

La condition de stabilité (4.7) conduit à différents cas de figure suivant les valeurs de a et c. On qualifie la stabilité de "supérieure" (resp. "inférieure") lorsque la condition (4.7) porte sur des intervalles J_n^u avec $u > 0$ (resp. $u < 0$).

Le cas le plus simple est celui où $|a|^{p_0}|c|^{p_1} < 1$ car le point fixe 0 est alors attractif. La stabilité, simultanément "supérieure" et "inférieure", est alors "bilatérale".

Afin d'étudier le cas général, on définit les valeurs

$$M := \max(|a|, |c|) \quad \text{et} \quad m := \min(|a|, |c|). \tag{4.12}$$

On distingue les deux cas de figure ci-dessous selon le signe de ac.

(i) $ac > 0$: parmi les fonctions $L_{\max(a,c)}$ et $L_{-\min(a,c)}$ définies en (4.11), l'une est unimodale et l'autre monotone sur l'intervalle $[0, M]$, et réciproquement sur $[-m, 0]$;

(ii) $ac < 0$: les fonctions $L_{\max(a,c)}$ et $L_{-\min(a,c)}$ sont les fonctions L_M et L_m, conjointement unimodales sur $[0, M]$ et monotones sur $\mathbb{R}^-$.

La Table 2 résume les conditions de stabilité dérivées de (4.7) pour tous les cas de dynamique renormalisable avec parités alternées ($p = 2$) en fonction des valeurs de M et m. La Figure 2 donne une représentation graphique des

zones de stabilité "supérieure" et "inférieure" dans le plan des paramètres (a, c).

Dans la Table 3, nous présentons divers exemples de dynamiques renormalisables avec parités périodiques. On détermine leur vitesse moyenne $\widetilde{\mathcal{V}}$ au moyen de la formule

$$\widetilde{\mathcal{V}} = (|a|^{p_0}|c|^{p_1})^{\frac{1}{p}} \,. \tag{4.13}$$

Il convient de distinguer la vitesse moyenne extrinsèque $\widetilde{\mathcal{V}}$ des itérations et la vitesse intrinsèque (ou locale) de convergence/divergence (au sens de Liapounov) après renormalisation. En général, ces deux quantités sont faiblement corrélées. On distinguera également la période p des itérations modulo

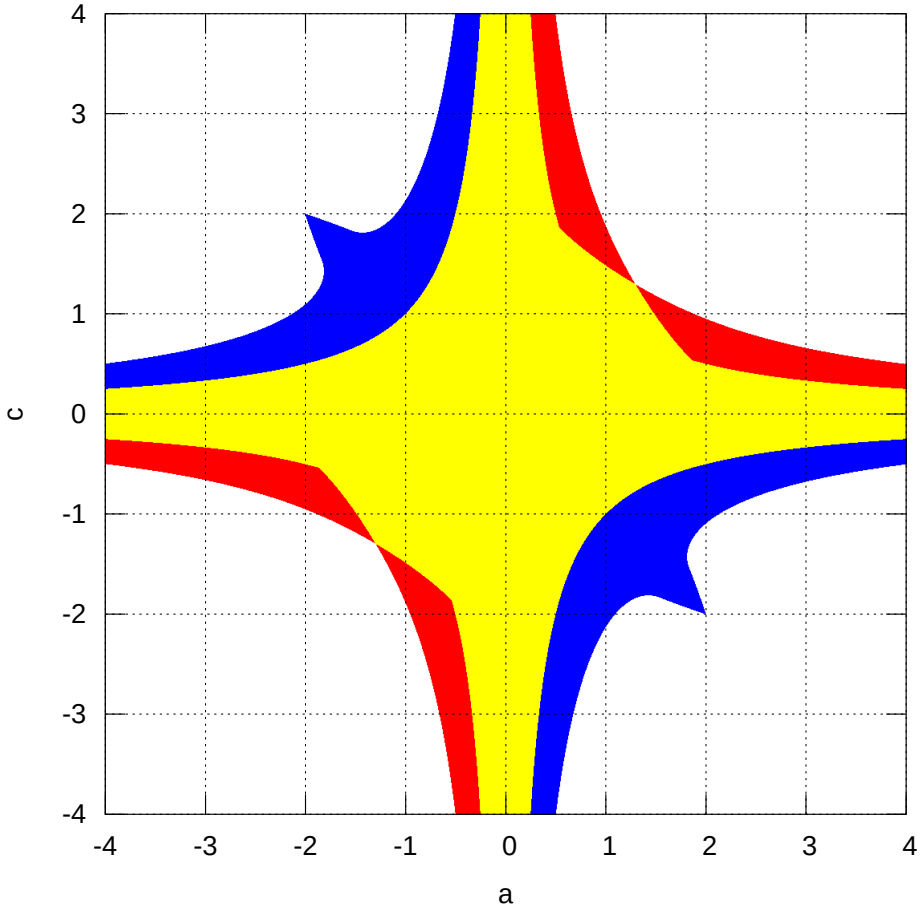

FIGURE 2. **Diagramme de stabilité** des dynamiques renormalisables de type 2 et de période 2. Zones de stabilité "inférieure" (rouge), "supérieure" (bleu) et "bilatérale" (jaune) dans l'espace des paramètres (a, c).

p	mod 2	a	b	c	d	$\widetilde{E}$	$\widetilde{\mathcal{V}}$	Dynamique renormalisée "inférieure"	"supérieure"
2	$(0,1)$	2	1	-2	0	$\mathbb{Z}$	2	instable	chaos
	$(0,1)$	2	1	-1	1	$\mathbb{Z}$	$\sqrt{2}$	instable	4-cycle attractif
	$(0,1)$	4	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbb{Z}$	$\sqrt{2}$	instable	chaos
	$(0,1)$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{4}{5}$	8	$4+8\mathbb{Z}$	1	$\longrightarrow 0^-$	2-cycle attractif
3	$(0,0,1)$	$\frac{3}{2}$	36	$\frac{4}{9}$	0	$4\mathbb{Z}$	1	$\longrightarrow 0^-$	3-cycle attractif
	$(0,1,1)$	8	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbb{Z}$	$\sqrt[3]{2}$	chaos	instable
4	$(0,1,1,1)$	$\frac{8}{9}$	$\frac{-5}{9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$4+18\mathbb{Z}$	$\sqrt[4]{3}$	instable	4-cycle attractif

TABLE 3. Exemples de dynamiques renormalisables avec parités périodiques (type 2).

2 sur les entiers de la période éventuelle d'un cycle attractif après renormalisation, cette dernière étant le plus souvent multiple de p.

Remarque 4.2. Le premier exemple $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 0$, de période $p = 2$, se ramène à la dynamique de la fonction $L_2(t)$ déjà rencontrée dans la partie 4.2.

4.4. **Parité pseudo-aléatoire (type 3).** Nous abordons le cas délicat des séquences de parité non-périodiques, responsables du caractère inextricable du problème $3x + 1$.

En l'absence de périodicité, nous considérons pour tout entier k positif les probabilités $w_0(k)$ (resp. $w_1(k)$) d'avoir exactement k termes consécutifs de même parité avant le prochain changement de parité si l'on part d'un terme pair (resp. impair). Ces proportions relatives permettent d'estimer, d'un point vue heuristique, les longueurs moyennes l_0 et l_1 des séquences paires et impaires respectivement :

$$l_0 := \sum_{k=1}^{\infty} k\, w_0(k) \quad \text{et} \quad l_1 := \sum_{k=1}^{\infty} k\, w_1(k). \tag{4.14}$$

On en déduit que les itérations sur les entiers ont statistiquement une vitesse moyenne proche de

$$\widetilde{\mathcal{V}} = |a|^{\frac{l_0}{l_0+l_1}}\, |c|^{\frac{l_1}{l_0+l_1}}. \tag{4.15}$$

Comme pour les autres types de renormalisation, cette vitesse diffère généralement de la vitesse moyenne asymptotique sur les réels. Dans le cas de l'extension du problème $3x+1$, on mesure les probabilités $w_0(k) = w_1(k) = 2^{-k}$, conduisant aux longueurs moyennes $l_0 = l_1 = 2$. On trouve donc une vitesse moyenne $\widetilde{\mathcal{V}} = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$ tandis que $\tau(G) = (2+\sqrt{3})/4 \approx 0.933$, comme cela fut mentionné dans [10].

Dans la Table 4, nous donnons d'autres exemples de dynamiques renormalisables de type 3, parfois assez exotiques, en particulier lorsque les longueurs

a	b	c	d	$\widetilde{E}$	l_0	l_1	$\widetilde{\mathcal{V}}$
1/2	0	-1/2	1/2	$\mathbb{Z}$	2	2	1/2
3/2	0	-3/2	1/2	$\mathbb{Z}$	2	2	3/2
1/2	0	3/2	1/2	$\mathbb{Z}$	2	2	$\sqrt{3}/2$
3/2	0	-1	1	$\mathbb{Z}$	2	1	$(3/2)^{2/3}$
3/2	0	2/3	2	$2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$	3	1	$\sqrt{3/2}$
3/2	0	-4/3	4	$2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$	4	1	$3^{3/5}/2^{2/5}$
3/2	0	4/9	4	$4\mathbb{Z}\cup 6\mathbb{Z}\cup 9\mathbb{Z}$	4	1	$(3/2)^{2/5}$

TABLE 4. Exemples de dynamiques renormalisables avec parités pseudo-aléatoires (type 3).

Cas de figure	Conditions de stabilité	
	"inférieure"	"supérieure"
$M<1$	stable	stable
$1\leq M\leq 2$ et $ac\geq 0$	instable	$m\left(m+\frac{M^3}{4}\right)\leq 1$
$1\leq M\leq 2$ et $ac\leq 0$	instable	$\frac{M^3}{4}\leq m$

TABLE 5. Conditions de stabilité sur les dynamiques renormalisables avec parité pseudo-aléatoire et entropie maximale (type 3, $l_0=l_1=2$).

moyennes l_0 et l_1 diffèrent. On observe ainsi une relative diversité concernant les valeurs possibles des vitesses moyennes $\widetilde{\mathcal{V}}$ sur les entiers de $\widetilde{E}$.

La nature précise de la dynamique renormalisée est généralement difficile à déterminer, compte tenu de l'imprévisibilité des parités successives. Toutefois, lorsque $M:=\max(|a|,|c|)<1$, on vérifie aisément que le point fixe 0 (localisé sur les entiers) est attractif pour toutes les séquences de parité. La stabilité de la dynamique est alors bilatérale (i.e., de part et d'autre du point fixe 0).

En procédant comme pour le type 2, nous pouvons déterminer pour le type 3 les conditions de stabilité dans l'espace des paramètres (a,c), en fonction de M et $m:=\min(|a|,|c|)$. Ces conditions sont explicitées dans la Table 5 et représentées dans la Figure 3, pour le cas où l'entropie (modulo 2) est maximale, c'est-à-dire quand toutes les séquences de parités sont possibles ($l_0=l_1=2$). Ce cas recouvre l'extension du problème $3x+1$.

5. Intervalles errants

Il est naturel de distinguer les dynamiques renormalisables au voisinage de certains entiers selon que ces entiers ont une orbite convergente ou divergente. Dans ce dernier cas, elles révélent généralement l'existence d'intervalles errants [12]. On rappelle qu'un intervalle I est un *intervalle errant* s'il satisfait les deux conditions :

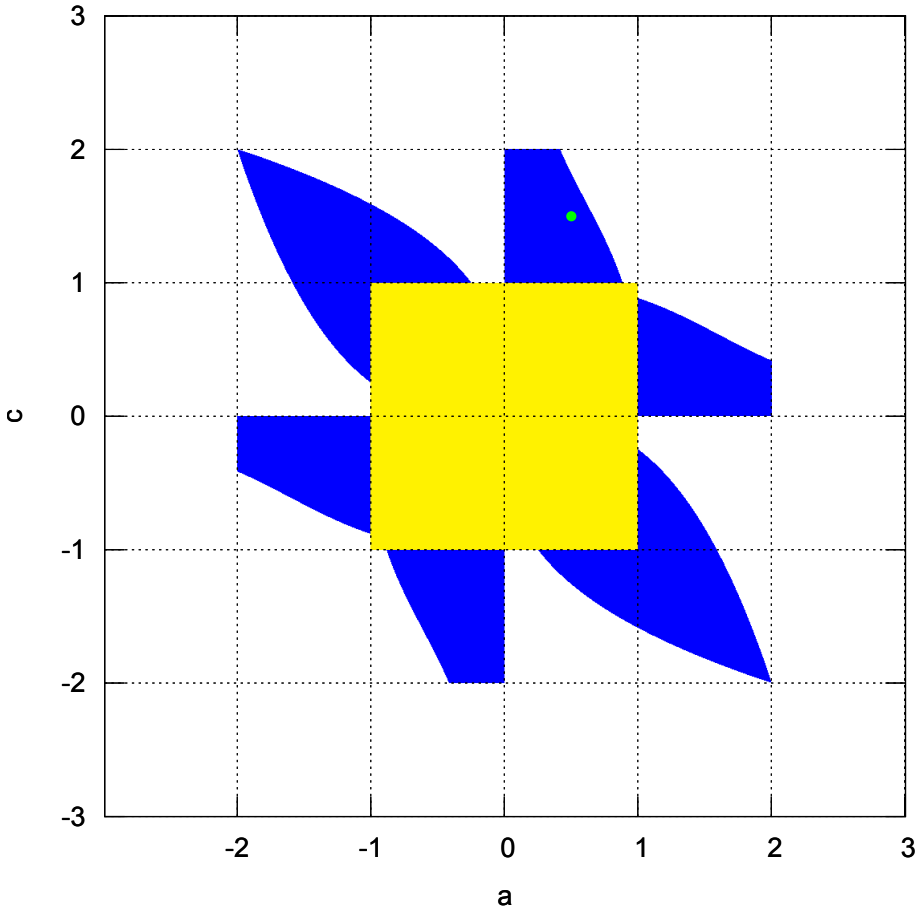

FIGURE 3. **Diagramme de stabilité** des dynamiques renormalisables de type 3 avec entropie maximale. Zones de stabilité "bilatérale" (jaune) et "supérieure" (bleu) dans l'espace des paramètres (a, c). Point correspondant au problème $3x + 1$ (vert).

(i) I, $F(I)$, $F^2(I)$, ... sont deux-à-deux disjoints ;

(ii) l'ensemble des points d'accumulation des orbites issues de I ne forment pas une orbite périodique unique.

Dans la partie 4, nous avons rencontré de nombreux exemples d'orbites entières avec une dynamique renormalisable et une vitesse moyenne strictement supérieure à 1. Chacun de ces exemples permet de construire des intervalles qui satisfont les deux conditions ci-dessus. Ce sont donc des intervalles errants auxquels on affectera un type différent selon l'enchainement des parités sur les entiers.

Type 1: parité constante.

Type 2: parités non-constantes périodiques.

Type 3: parités pseudo-aléatoires.

Il existe un autre type d'intervalles errants non-liés à des séquences d'entiers. Nous les qualifierons d'intervalles errants de type 4.

Type 4: séquences non-entières.

Nous avons identifié de tels intervalles pour certaines valeurs des paramètres a, b, c, d vérifiant les conditions

$$a = c,\ b \neq d \text{ et } |a| \geq 1. \tag{5.1}$$

L'expression de la fonction F se simplifie en

$$F(x) = ax + \left(\frac{b+d}{2}\right) + \left(\frac{b-d}{2}\right)\cos(\pi x) \tag{5.2}$$

de sorte que la dérivée F' est bornée et oscille autour de a entre les valeurs $a-\pi(b-d)/2$ et $a+\pi(b-d)/2$. Les orbites associées aux intervalles errants de F sont (asymptotiquement) monotones et divergentes, de vitesse moyenne $\tau(G) = |a|$. Dans le cas particulier $a = 1$, on a l'équation fonctionnelle

$$F(x+2) = F(x) + 2 \tag{5.3}$$

et la dynamique est invariante par translation de 2. Un exemple classique d'intervalles errants survient pour

$$a = c = 1,\ b = -d = \sqrt{4 + \frac{1}{\pi^2}} = 2.025\ldots \tag{5.4}$$

où l'on note la présence exceptionnelle de deux orbites sur les points critiques

$$c_n = n + \frac{(-1)^n}{\pi}\operatorname{arccot}(2\pi),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{5.5}$$

L'une est croissante et proche des entiers pairs, l'autre décroissante et proche des entiers impairs, conformément à la transformation

$$F(c_n) = c_{n+2(-1)^n}. \tag{5.6}$$

Chaque intervalle errant contient exactement un entier n et un point critique c_n. Dans cet exemple, la dynamique au voisinage des points critiques est super-attractive.

On peut obtenir des exemples similaires d'intervalles errants de type 4 pour des valeurs entières arbitrairement grandes de a, en posant

$$a = c = 1 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}^*,\ b = -d = \frac{a}{\pi}. \tag{5.7}$$

Les points critiques sont les points

$$c_n = 2n + \frac{1}{2},\ n \in \mathbb{Z} \tag{5.8}$$

et ils vérifient l'équation

$$F(c_n) = c_{an+k}. \tag{5.9}$$

En-dehors de ces exemples très particuliers, l'ensemble des points critiques n'est généralement pas préservé. Toutefois, les intervalles errants de type 4 peuvent encore survenir pour des valeurs irrationnelles de a et c, contrairement aux autres types. A titre d'exemple, on pourra choisir $a = c = \pi/2$, $b \simeq 0$ et $d \simeq 1$.

Enfin, nous donnons un exemple d'intervalles errants de type 4 en l'absence de point critique, pour la fonction F de paramètres $a = c = 2$, $b = 0$ et $d = 1$.

Dans le cas particulier de la fonction f associée au problème $3x + 1$ et étudiée dans [10], on conjecture l'absence d'intervalles errants, tout au moins dans $\mathbb{R}^+$. Or l'étude de la dynamique renormalisée au voisinage des entiers conduit alors aux constatations suivantes :

(i) les entiers pairs sont attractifs ;

(ii) les entiers impairs sont répulsifs.

De plus, si une orbite entière positive est périodique, par exemple dans le cas hypothétique d'un cycle non-trivial, alors Chamberland a montré que l'attraction l'emporte très légèrement [1]. En revanche, si une orbite entière est divergente (i.e., tend vers l'infini), la répulsion domine. Ainsi, dans le cas (très improbable) d'une orbite entière divergente associée à une famille d'intervalles errants, la dynamique renormalisée serait probablement chaotique à l'intérieur des intervalles considérés. Soulignons qu'une telle dynamique est *a priori* possible dans le cas d'intervalles errants (sur les réels), alors qu'elle est proscrite pour les composantes errantes d'une fonction complexe. En effet, ces dernières sont des composantes de Fatou, caractérisées par leur dynamique non-chaotique.

Lorsque la fonction F prolonge T_q avec $q \geq 5$, l'existence d'intervalles errants est très improbable également. En effet, la dynamique proche des entiers n'est pas renormalisable pour $c = q/2 > 2$, comme attesté sur la Figure 3.

6. Conclusion

L'extension et la paramétrisation du problème $3x+1$ sur les réels révèlent une dynamique plus riche que celle observée sur les entiers. D'une part, le comportement asymptotique moyen, accessible à l'analyse, est assez bien compris au travers d'un diagramme de phase dans une partie significative de l'espace des paramètres. D'autre part, la dynamique proche des entiers échappe parfois à cette analyse dès lors que les entiers sont préservés en partie ou en totalité. Elle est en quelque sorte confinée au voisinage des points critiques et apparait décorrélée du comportement moyen sur les réels. On observe alors l'émergence d'intervalles errants de différents types. Dans l'espace des paramètres que nous avons étudié, ces dynamiques particulières ont peu de degrés de liberté et sont le plus souvent réduites à un point.

En l'absence de stabilité structurelle sur les réels, cette approche ne semble pas susceptible de résoudre le problème $3x+1$ et ses variantes. Toutefois, elle illustre les intrications possibles entre systèmes dynamiques à domaine continu et certains problèmes de théorie des nombres, de nature fondamentalement discrète. Ainsi, la question de l'existence d'une modélisation physique du problème $3x+1$ est finalement pertinente. En effet, on connait déjà des exemples de liens concrets entre physique expérimentale et théorie des nombres [3, 5].

Références

[1] M. Chamberland, A continuous extension of the 3x+1 problem to the real line, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2 (1996) 495–509.

[2] R. E. Crandall, On the "$3x+1$" problem, *Math. Comp.*, 32 (1978) 1281–1292.

[3] J. Cresson, Dynamique des nombres et physique des oscillateurs, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 20 (2008) 107–123.

[4] Z. Franco, C. Pomerance, On a conjecture of Crandall concerning the $qx+1$ problem, *Math. Comp.*, 64 (1995) 1333–1336.

[5] G. Galperin, Playing pool with π (the number π from a billiard point of view). *Regular Chaotic Dyn.*, 8 (2003) 375–394.

[6] A. V. Kontorovich, S. J. Miller, Benford's law, values of L-functions and the $3x+1$ problem, preprint arXiv :math/0412003 (2005) 1–25.

[7] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, 1974.

[8] J. C. Lagarias, K. Soundararajan, Benford's law for the $3x+1$ function, *J. Lond. Math. Soc.*, 74 (2006) 289–303.

[9] J. C. Lagarias, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, American Mathematical Monthly, 2010.

[10] N. Lygeros, O. Rozier, Dynamique du problème $3x+1$ sur la droite réelle, preprint arXiv :1402.1979 (2014), 1–16.

[11] K. Mahler, *Lectures on Transcendental Numbers*, Springer-Verlag, 1976.

[12] W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

[13] L.-O. Pochon, A. Favre, La suite de Syracuse, un monde de conjectures, preprint hal-01593181 (2017), 1–69. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181`

[14] R. Simonetto, *Conjecture de Syracuse : Avancées Inédites*, 2016. `https://mathsyracuse.wordpress.com`

[15] T. Tao, Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values, preprint arXiv :1909.03562 (2019) 1–49.

[16] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the* $3n+1$ *Function*, Springer-Verlag, 1998.

LGPC (UMR 5285), Université de Lyon, France
E-mail address: `nlygeros@gmail.com`

IPGP (UMR 7154), Université de Paris, France
E-mail address: `olivier.rozier@gmail.com`