HAL open science

Reconstruction et caractérisation des polarisations d'une onde gravitationnelle

Fangchen Feng, Julien Flamant, Pierre Chainais, Eric Chassande-Mottin, Nicolas Le Bihan

To cite this version:

Fangchen Feng, Julien Flamant, Pierre Chainais, Eric Chassande-Mottin, Nicolas Le Bihan. Reconstruction et caractérisation des polarisations d'une onde gravitationnelle. GRETSI 2019 - XXVIIème Colloque francophone de traitement du signal et des images, Aug 2019, Lille, France. hal-02410728

HAL Id: hal-02410728

https://hal.science/hal-02410728v1

Submitted on 13 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Reconstruction et caractérisation des polarisations d'une onde gravitationnelle

Fangchen FENG[1], Julien FLAMANT[2], Pierre CHAINAIS[3], Eric CHASSANDE-MOTTIN[1], Nicolas LE BIHAN[4]

[1]Univ. Paris Diderot, CNRS/IN2P3 - APC 75205 Paris, France

[2]Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

[3]Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9189 - CRIStAL 59000 Lille, France

[4]Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble-INP, GIPSA-Lab, 38000 Grenoble, France

feng@apc.in2p3.fr, julien.flamant@univ-lorraine.fr, pierre.chainais@ec-lille.fr, ecm@apc.in2p3.fr, nicolas.le-bihan@gipsa-lab.fr

Résumé – Les propriétés de polarisation des ondes gravitationnelles révèlent des informations cruciales sur la physique des sources gravitationnelles (systèmes binaires compacts de trous noirs ou d'étoiles à neutrons, etc.) telles que les phénomènes de précession. En pratique, la reconstruction des deux composantes polarisées $h_+(t)$ et $h_\times(t)$ de l'onde gravitationnelle est rendue possible par la mesure en au moins deux détecteurs non-alignés. Nous décrivons une procédure d'analyse complète des signaux gravitationnels. À partir des signaux mesurés, cette procédure estime la direction de la source dans le ciel, reconstruit les deux polarisations $h_+(t)$ et $h_\times(t)$, et estime les paramètres de Stokes instantanés de l'onde. Ce jeu d'observables "non-paramétriques" encode de nombreuses propriétés fines de la source astrophysique sans recours à un modèle dynamique spécifique, les rendant particulièrement attractifs pour la caractérisation des effets de précession d'une binaire.

Abstract – Polarization properties of gravitational waves carry crucial information about the physics of gravitational sources (binary compact systems of black holes or neutron stars, etc.) such as precession effects. In practice, the reconstruction of the two polarizations $h_+(t)$ and $h_\times(t)$ is made possible by the use of at least two non-aligned detectors. To this aim, we propose a complete analysis procedure of gravitational signals. Starting from measurements, this procedure estimates the sky position of the source, reconstructs the two components $h_+(t)$ and $h_\times(t)$ and estimates instantaneous Stokes parameters of the wave. This set of non-parametric observables encodes many fine properties of the astrophysical source without close bounds to a specific dynamical model, making them particularly suited to decipher precession effects.

Une nouvelle forme d'astronomie est née avec les premières observations des ondes gravitationnelles par les détecteurs LIGO et Virgo. Ces détecteurs ont observé à plusieurs reprises la fusion de deux trous noirs et/ou étoiles à neutrons. Ce phénomène, appelé fusion de binaire compacte, avait jusqu'à présent, échappé à l'astronomie conventionnelle [1]. La théorie de la relativité générale prédit l'existence de deux polarisations notées h_+ et $h_\times$ pour les ondes gravitationnelles [7]. La relation de phase entre ces deux composantes est principalement liée à l'orientation de la source par rapport à l'observateur. Elle conditionne aussi l'évolution du diagramme de polarisation qui permet de mettre en évidence de possibles changements d'orientation dus à la précession du plan orbital. La présence de précession fournit une information décisive sur la formation du système binaire car elle traduit, notamment, le désalignement du moment angulaire d'au moins un élément de la binaire avec l'axe de rotation orbitale. La précession est classiquement testée par l'ajustement aux données de modèles de formes d'onde intégrant cet effet. Cependant, ce type de procédure réalise plutôt un test global d'un modèle de la dynamique orbitale de la binaire, non limité aux seuls effets de précession.

L'approche proposée ici s'affranchit de ces limitations. En partant des signaux mesurés par les détecteurs d'ondes gravitationnelles et d'un modèle d'observation, nous proposons une procédure d'analyse complète pour 1) localiser la source dans le ciel, 2) estimer le signal bivarié constitué des deux polarisations $h_+(t)$ et $h_\times(t)$ de l'onde incidente, 3) caractériser le motif de polarisation de ce signal par ses paramètres de Stokes instantanés. Enfin, nous montrons que ce motif de polarisation traduit les propriétés fines de la source, une précession de la binaire par exemple. Cette nouvelle approche introduit de nouvelles observables "non-paramétriques" liés à la configuration géométrique de la source et à son évolution, sans les contraintes que peut avoir un modèle dynamique spécifique.

1 Modèle générique du signal gravitationnel avec précession

L'obtention d'un modèle de forme d'onde nécessite une résolution pleinement relativiste de la trajectoire orbitale de la binaire de trous noirs jusqu'à leur fusion. Cette résolution est

particulièrement difficile en présence de précession du plan orbital du fait de l'absence d'un référentiel "naturel" dans lequel décrire le mouvement.

Nous suivons ici une approche phénoménologique pour décrire les modèles d'observation. On définit un premier référentiel inertiel noté I (celui de l'observateur) dont l'axe vertical coïncide avec le moment angulaire total du système. Un second référentiel noté P dont l'axe vertical coïncide avec le moment angulaire *orbital* suit le mouvement de précession. Dans ce dernier, on considère que les composantes de la binaire suivent des orbites quasi-circulaires et possèdent des vitesses faiblement relativistes, si bien que les modes $\ell = 2$ et $m = \pm 2$ dominent le développement multipolaire des ondes gravitationnelles émises. Ces modes s'écrivent

$$h^P_{2,\pm 2}(t) = a_0(t) e^{\mp \boldsymbol{i}\Phi(t)} \tag{1}$$

où l'amplitude $a_0(t)$ et la phase $\Phi(t)$ instantanées peuvent être reliées à la dynamique orbitale de la binaire. On ne formule pas ici d'hypothèse sur l'évolution de ces deux fonctions, hormis le fait que l'amplitude est à variations lentes par rapport à celles de la phase $\Phi(t)$. Dans le référentiel inertiel, on obtient [3]

$$\begin{aligned} h^I_{2,\pm 2} = \frac{a_0}{4} e^{\mp 2\boldsymbol{i}\alpha} \{ & (1 \mp \cos\beta)^2 e^{\boldsymbol{i}(\Phi + 2\gamma)} \\ & + (1 \pm \cos\beta)^2 e^{-\boldsymbol{i}(\Phi + 2\gamma)} \} \end{aligned} \tag{2}$$

où (α, β, γ) désignent les trois angles d'Euler qui permettent de passer de P à I par trois rotations dans la convention zyz, voir par ex., Fig 1 de [3]. Des expressions similaires sont obtenues pour $h^I_{2\pm 1}$ et h^I_{20} [6]. Par simplicité, on a enlevé ici la dépendance temporelle de ces angles et des autres paramètres qui sont tous des fonctions du temps.

Ainsi, un observateur situé aux coordonnées sphériques $\Theta = (\theta, \varphi)$ dans le référentiel I reçoit une onde gravitationnelle caractérisée par les deux polarisations suivantes :

$$h_+ + \boldsymbol{i} h_\times = \sum_{m=-2}^{2} h^I_{2,m} \; {}^{-2}Y_{2,m}(\Theta) \tag{3}$$

où ${}^{-2}Y_{\ell,m}$ désigne les harmoniques sphériques de spin -2.

Comme expliqué dans la partie 3, la réécriture de cette expression sous la forme d'un signal bivarié modulé en amplitude, fréquence, et surtout *en polarisation* nous permet d'identifier des observables "non-paramétriques" de la précession, les paramètres de Stokes bien connus des physiciens des ondes.

2 Localisation de la source et reconstruction du signal gravitationnel

Chaque détecteur mesure une combinaison linéaire des deux polarisations. Le signal reçu par le $k^{\text{ième}}$ détecteur peut être exprimé par [7] :

$$x_k(t) = \mathbf{f}^T_{k,\Theta} \mathbf{h}(t + \tau_{k,\Theta}) + n_k(t), \tag{4}$$

où $\mathbf{f}_{k,\Theta}$ est le diagramme d'antenne du détecteur k en réponse aux polarisations $\mathbf{h}(t) = [h_+(t), h_\times(t)]^T$; $\tau_{k,\Theta}$ est le délai de propagation d'une onde entre le $k^{\text{ième}}$ détecteur et le centre de la terre venant de la direction (inconnue) Θ. Le diagramme d'antenne $\mathbf{f}_{k,\Theta}$ et le délai $\tau_{k,\Theta}$ sont des fonctions connues de la direction Θ et diffèrent d'un détecteur à l'autre. On a noté n_k, le bruit de mesure du $k^{\text{ième}}$ détecteur, supposé stationnaire, de densité spectrale connue [5].

La localisation de la source et la reconstruction des polarisations sont effectuées dans le domaine temps-fréquence à l'aide de la transformée de Fourier à court terme (TFCT). Le modèle d'observation (4) peut y être réécrit comme suit :

$$\tilde{x}_k(f, \tau - \tau_{k,\Theta}) = \tilde{\mathbf{f}}^T_{k,\Theta}(f) \mathbf{h}(f, \tau) + \tilde{n}_k(f, \tau - \tau_{k,\Theta}), \tag{5}$$

où les quantités avec un tilde sont "blanchies", c'est-à-dire pondérées par l'inverse de la densité spectrale du bruit du $k^{\text{ième}}$ détecteur à la fréquence f. Dans (5), les délais de propagation $\tau_{k,\Theta}$ ont été compensés afin de synchroniser les signaux reçus par les détecteurs, de manière analogue aux procédures de formation de voie. La localisation de la source est réalisée par un estimateur $\hat{\Theta}$ de la direction au sens du maximum de vraisemblance. Une fois cette direction estimée, on cherche à reconstruire les polarisations $\mathbf{h}(f, \tau)$ à partir des K mesures x_k, $k = 1, \ldots, K$ par la résolution d'un problème inverse.

2.1 Localisation de la source

La détermination de la direction de l'onde gravitationnelle repose sur le calcul d'une carte de vraisemblance pour une grille du ciel. Afin d'éviter la répétition du calcul de la TFCT pour tous les points de cette grille, la synchronisation des mesures s'effectue directement dans le domaine temps-fréquence grâce au filtre de décalage suivant [2] :

$$\tilde{x}_k(f, \tau - \tau_{k,\Theta}) \approx \left(g_{\tau_{k,\Theta}} *_\tau \tilde{x}_k \right)(f, \tau), \tag{6}$$

où $*_\tau$ est l'opérateur de convolution par rapport à τ et

$$g_{\tau_{k,\Theta}}(f, \tau) = e^{2\pi f \boldsymbol{i}(\tau - \tau_{k,\Theta})} \int \phi(u) \tilde{\phi}(\tau - \tau_{k,\Theta} + u) \mathrm{d}u, \tag{7}$$

où $\phi(u)$ et $\tilde{\phi}(u)$ sont respectivement les fenêtres d'analyse et de synthèse de TFCT. Avec l'approximation ci-dessus, le modèle d'observation (5) peut être réécrit sous forme vectorielle :

$$(\mathbf{g}_\Theta *_\tau \tilde{\mathbf{x}})(f, \tau) \approx \tilde{\mathbf{F}}_\Theta(f) \, \mathbf{h}(f, \tau) + (\mathbf{g}_\Theta *_\tau \tilde{\mathbf{n}})(f, \tau), \tag{8}$$

où l'on concatène dans chaque vecteur les quantités associées aux différents détecteurs. Dans la suite, on note les observations décalées par $\bar{\mathbf{x}}(f, \tau) = (\mathbf{g}_\Theta *_\tau \tilde{\mathbf{x}})(f, \tau)$. Une carte de localisation est obtenue en maximisant la vraisemblance, i.e. en minimisant par rapport à $\mathbf{h}$ la quantité

$$\mathcal{L}(\mathbf{h}, \Theta) = \sum_{f,\tau} \| \bar{\mathbf{x}}(f, \tau) - \tilde{\mathbf{F}}_\Theta(f) \, \mathbf{h}(f, \tau) \|_2^2 \,, \tag{9}$$

ce qui donne

$$Q(\Theta) = \min_{\mathbf{h}} \mathcal{L}(\mathbf{h}, \Theta) = \mathcal{L}(\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{MC}}, \Theta) \tag{10}$$

où $\hat{\mathbf{h}}^{\mathrm{MC}}$ est l'estimateur au sens des moindres carrés de $\mathbf{h}$. La carte $Q(\Theta)$ mesure la distance entre l'observation $\bar{\mathbf{x}}(f, \tau)$ et sa projection dans le sous-espace engendré par $\tilde{\mathbf{F}}_\Theta(f)$. La direction $\hat{\Theta} = \mathrm{argmin}_\Theta Q(\Theta)$ qui minimise l'erreur quadratique résiduelle fournit une estimation de la position de la source au sens du maximum de vraisemblance.

2.2 Reconstruction des polarisations

La reconstruction des polarisations connaissant la direction $\hat{\Theta}$ est un problème inverse mal-posé en raison du mauvais conditionnement de la matrice $\tilde{\mathbf{F}}_\Theta(f)$ pour certaines directions Θ. Nous proposons de régulariser ce problème par un *a priori* de parcimonie dans le plan temps-fréquence, visant à favoriser la détection de signaux transitoires localisés [5]. On obtient le problème inverse suivant :

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathrm{argmin}_{\mathbf{h}} \mathcal{L}(\mathbf{h}, \hat{\Theta}) + \lambda \sum_{f,\tau} \|\mathbf{h}(f,\tau)\|_1, \tag{11}$$

où $\lambda \geq 0$ est le paramètre de régularisation et $\|\cdot\|_1$ désigne la norme ℓ_1. En statistique, ce problème et l'algorithme associé sont appelés Lasso [9]. Le problème peut être résolu à l'aide d'un algorithme proximal [4] associé à la norme ℓ_1 qui implique un seuillage doux. Les polarisations estimées $\hat{h}_+(t)$ et $\hat{h}_\times(t)$ s'obtiennent ensuite simplement à partir de $\hat{\mathbf{h}}(f,\tau)$ par TFCT inverse.

3 Analyse de la polarisation instantanée

L'étude de la polarisation instantanée du signal gravitationnel reconstruit s'appuie sur un formalisme quaternionique proposé récemment [6] établissant un cadre général pour l'analyse et le traitement des signaux bivariés. Ce formalisme repose sur le plongement des signaux bivariés – pris comme signaux à valeurs complexes – dans l'espace des quaternions [1] de dimension 4 ; la démarche est formellement analogue au plongement des signaux réels – univariés – dans l'espace des nombres complexes de dimension 2. A partir des polarisations estimées, on construit le signal bivarié complexe $\hat{h}(t) = \hat{h}_+(t) + \boldsymbol{i}\hat{h}_\times(t)$. Son plongement quaternionique, l'analogue bivarié du signal analytique usuel, est noté $\hat{h}_\mathbb{H}(t)$ défini par

$$\hat{h}_\mathbb{H}(t) = \hat{h}(t) + \mathcal{H}\left[\hat{h}(t)\right]\boldsymbol{j} \in \mathbb{H} \tag{12}$$

où $\mathcal{H}$ est la transformée de Hilbert. Par construction, la restriction de $\hat{h}_\mathbb{H}(t)$ au sous-espace span$\{1, \boldsymbol{i}\} \subset \mathbb{H}$ est le signal original $\hat{h}(t)$; les parties $\boldsymbol{j}$-imaginaire et $\boldsymbol{k}$-imaginaire encodent respectivement les signaux en quadrature de $\hat{h}_+$ et $\hat{h}_\times$.

La nature algébrique de l'approche quaternionique permet de lier directement le signal $\hat{h}_\mathbb{H}(t)$ à des quantités physiques pertinentes. La décomposition de $\hat{h}_\mathbb{H}(t)$ sous la forme polaire quaternionique suivante [6]

$$h_\mathbb{H}(t) = a(t)e^{\boldsymbol{i}\theta(t)}e^{-\boldsymbol{k}\chi(t)}e^{\boldsymbol{j}\varphi(t)}, \tag{13}$$

permet l'identification univoque de 4 quantités fondamentales. L'amplitude $a(t)$ et la phase instantanée $\varphi(t)$ sont usuelles tandis que $\theta(t)$ et $\chi(t)$ encodent la polarisation instantanée du signal $\hat{h}(t)$: elles correspondent respectivement à l'orientation et à l'ellipticité instantanées. En d'autres termes, $\theta(t)$ et $\chi(t)$ définissent pour chaque t la géométrie de l'ellipse de polarisation instantanée (tangente) du signal.

1. Rappelons que l'ensemble des quaternions $\mathbb{H}$ a pour base canonique $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, où $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sont 3 imaginaires purs.

En physique, l'information portée par a, θ, χ est souvent reparamétrisée sous la forme de 4 paramètres de Stokes S_i, $0 \leq i \leq 3$, définis par

$$S_0(t) = a^2(t) \tag{14}$$

$$S_1(t) = a^2(t)\cos 2\theta(t)\cos 2\chi(t) \tag{15}$$

$$S_2(t) = a^2(t)\sin 2\theta(t)\cos 2\chi(t) \tag{16}$$

$$S_3(t) = a^2(t)\sin 2\chi(t) \tag{17}$$

Les paramètres de Stokes sont des quantités du second-ordre dont l'estimation numérique apparaît plus stable que celle des paramètres angulaires de l'ellipse θ et χ. Le premier paramètre de Stokes $S_0(t)$ est une quantité purement énergétique encodant la puissance instantanée du signal. Les autres paramètres de Stokes, sous forme normalisée S_1/S_0, S_2/S_0 et S_3/S_0, encodent l'état de polarisation instantané du signal. Le formalisme quaternionique mène naturellement aux paramètres de Stokes instantanés à partir du plongement quaternionique $\hat{h}_\mathbb{H}(t)$

$$\left|\hat{h}_\mathbb{H}(t)\right|^2 = S_0(t) \tag{18}$$

$$\hat{h}_\mathbb{H}(t)\boldsymbol{j}\hat{h}^\star_\mathbb{H}(t) = \boldsymbol{i}S_3(t) + \boldsymbol{j}S_1(t) + \boldsymbol{k}S_2(t) \tag{19}$$

où '$\star$' correspond à l'opération de conjugaison quaternionique (changement de signe de la partie imaginaire).

La précession d'une source émettant un signal gravitationnel mène à l'observation de relations non-triviales entre les amplitudes et phases instantanées des polarisations $\hat{h}_+$ et $\hat{h}_\times$. Ces effets introduisent une dépendance temporelle des paramètres $\theta(t)$ et $\chi(t)$ de l'ellipse de polarisation associées au signal bivarié $\hat{h}(t) = \hat{h}_+(t) + \boldsymbol{i}\hat{h}_\times(t)$ pouvant être caractérisée précisément par l'évolution des paramètres de Stokes instantanés normalisés S_1/S_0, S_2/S_0 et S_3/S_0. Ainsi, ces derniers définissent des observables *non-paramétriques* qui permettent la détection d'effets liés à la précession et l'estimation de paramètres physiques liés à la dynamique de la source.

4 Validation

La procédure d'analyse est testée avec un signal simulé [2] provenant d'une binaire formée de deux trous noirs de 25 et 2.5 masses solaires dans un segment de bruit des détecteurs LIGO Handford et Livingston, et de Virgo. Le bruit dans Virgo est réduit manuellement d'un facteur 3 afin d'être plus représentatif des sensibilités attendues dans les expériences futures. La composante la plus massive possède un grand moment angulaire incliné à 45° par rapport au plan orbital, produisant une forte précession de celui-ci. La distance de la source est fixée à 30 Mpc, ce qui conduit à un rapport signal sur bruit de 117 en échelle linéaire, situation particulièrement favorable, qui fournit une démonstration claire de la méthode. La direction d'injection est choisie délibérément pour éviter le problème de déficience de rang [8] de la matrice $\mathbf{F}_\Theta$.

2. Simulation réalisée grâce à la LSC Algorithm Library Suite (LALSuite), `https://wiki.ligo.org/Computing/DASWG/LALSuite`

Les pixels temps-fréquence pertinents sont préalablement sélectionnés par seuillage, ce qui débruite partiellement le signal observé. La méthode de localisation exposée plus haut en Sec. 2.1, estime la direction de la source de manière robuste à la précision d'échantillonnage de la grille céleste (~ 1 degré).

La Fig. 1 montre les spectrogrammes des observations après blanchiment et les polarisations reconstruites avec l'algorithme décrit en Sec. 2.2. La partie initiale du signal n'est pas reconstruite car le bruit instrumental croît fortement aux basses fréquences ($f \lesssim 40$ Hz) ; le signal se retrouve sous le seuil de pré-sélection à ces fréquences.

La Fig. 2 compare les polarisations originales et reconstruites ainsi que leurs paramètres de Stokes normalisés, et on observe un bon accord. Les variations du paramètre S_3 mettent clairement en évidence le basculement du plan orbital.

Ces résultats attestent des performances de l'approche globale proposée, qui permet, à partir des données observationnelles, l'estimation et la caractérisation "non-paramétrique" du motif de polarisation des ondes gravitationnelles. La procédure proposée permet d'envisager de nombreux travaux futurs, en particulier autour de l'inversion des paramètres de Stokes reconstruits pour la détermination de paramètres physiques liés au comportement dynamique (par ex. précession) de la source gravitationnelle .

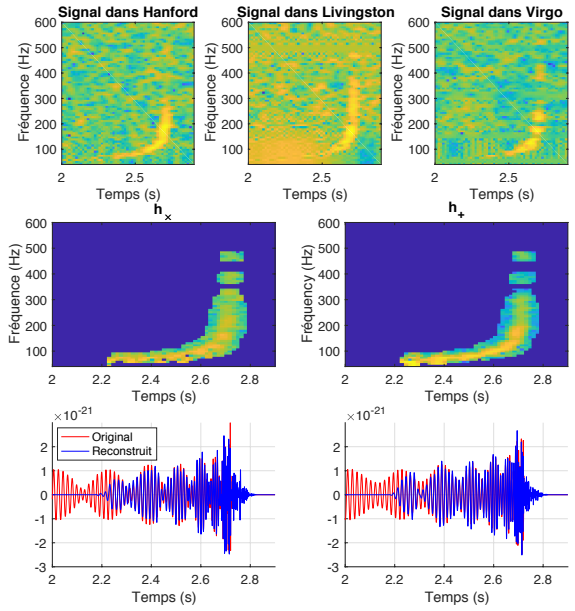

FIGURE 1 – Spectrogrammes des observations dans les trois détecteurs LIGO et Virgo après blanchiment (haut) et des polarisations $\hat{h}_+(t)$ et $\hat{h}_\times(t)$ reconstruites (milieu), et les mêmes signaux reconstruits en bleu dans le domaine temporel (bas), accompagnés des signaux originaux en rouge.

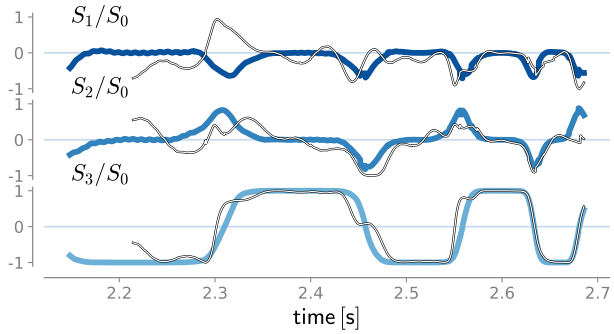

FIGURE 2 – Paramètres de Stokes normalisés originaux en bleu, et calculés à partir des polarisations reconstruites en noir.

Références

[1] B. P. Abbott et al. GWTC-1 : A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. arXiv :1811.12907, 2018.

[2] Yekutiel Avargel and Israel Cohen. System identification in the short-time fourier transform domain with crossband filtering. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 15(4) :1305–1319, 2007.

[3] Stanislav Babak, Andrea Taracchini, and Alessandra Buonanno. Validating the effective-one-body model of spinning, precessing binary black holes against numerical relativity. *Phys. Rev. D*, 95 :024010, Jan 2017.

[4] Patrick L Combettes and Jean-Christophe Pesquet. Proximal splitting methods in signal processing. In *Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering*, pages 185–212. Springer, 2011.

[5] Fangchen Feng, Eric Chassande-Mottin, Philippe Bacon, and Aurélia Fraysse. Structured sparsity regularization for gravitational-wave polarization reconstruction. In *2018 26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 1750–1754. IEEE, 2018.

[6] Julien Flamant. A general approach for the analysis and filtering of bivariate signals. *Thèse de doctorat, Centrale Lille*, 2018.

[7] C. W. Misner, K. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Princeton Univ. Press, 1973.

[8] Malik Rakhmanov. Rank deficiency and Tikhonov regularization in the inverse problem for gravitational-wave bursts. 23(19) :S673, 2006.

[9] Robert Tibshirani. Regression shrinkage and selection via the LASSO. *J. Royal Stat. Soc. B*, pages 267–288, 1996.