HAL
open science

# ZOME : UN JEU DE CONSTRUCTION MATHÉMATIQUE

François Guéritaud

**To cite this version:**

François Guéritaud. ZOME : UN JEU DE CONSTRUCTION MATHÉMATIQUE. Gazette des Mathématiciens, 2019, 159, pp.55-62. hal-02409913

**HAL Id: hal-02409913**

**https://hal.science/hal-02409913v1**

Submitted on 13 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ZOME : UN JEU DE CONSTRUCTION MATHÉMATIQUE

Résumé. Zometool, ou Zome, est un jeu de construction basé sur la symétrie de l'icosaèdre et de ses "cousins" de dimension 4. À la fois facile et collaboratif, il permet de réaliser des structures rigides étonnantes et variées. Nous donnons un aperçu des principes mathématiques sous-jacents.

Créé en 1992 et commercialisé par une société américaine [1], Zome est un jeu de construction à base de baguettes et de petits connecteurs en plastique. Les connecteurs, tous identiques, sont assimilables à des sphères percées de 62 trous, situés aux sommets, milieux des arêtes, et centres des faces d'un icosaèdre (figure 1.iii). Dans ces trous, qui sont de forme pentagonale, rectangulaire et triangulaire respectivement, peuvent venir se ficher des baguettes de section correspondante. Chaque baguette est ainsi faite que deux connecteurs fichés à ses extrémités aient toujours la même orientation dans l'espace. Les longueurs des baguettes ont 4 valeurs "magiques" (il y a deux types de baguettes pentagonales), permettant un très grand nombre de combinaisons exactes. Pour expliquer ces valeurs, nous proposons un détour par les solides réguliers de dimension 3 et 4.

## 1. L'icosaèdre et son groupe de symétrie $\Gamma$

L'icosaèdre $\mathbb{I}$, connu au moins depuis l'Antiquité grecque, est un solide régulier de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ possédant :

— 12 sommets de valence cinq ;
— 30 arêtes (Nb : deux arêtes parallèles sont toujours opposées) ;
— 20 faces triangulaires.

On peut placer les sommets de $\mathbb{I}$ aux points $(0, \pm 1, \pm\tau)$, $(\pm 1, \pm\tau, 0)$ et $(\pm\tau, 0, \pm 1)$, où $\tau$ désigne le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$ (figure 1.i et ii).

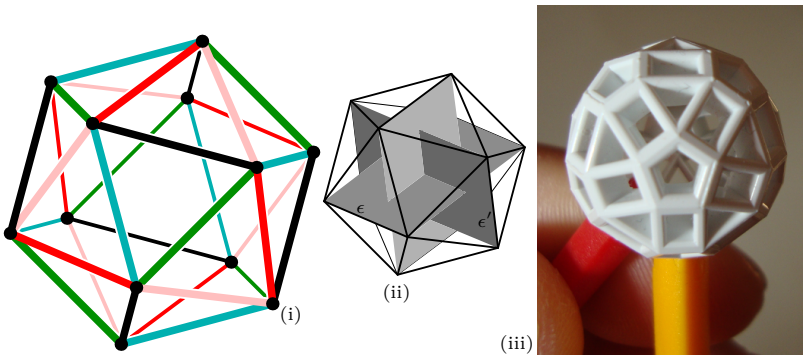



Figure 1. (i) un icosaèdre $\mathbb{I}$ muni du coloriage des arêtes en 5 couleurs ; (ii) trois rectangles inscrits de format $1 \times \tau$ ; (iii) le connecteur à symétrie icosaédrique percé de $12 + 30 + 20 = 62$ trous.

1. www.zometool.com (page en anglais). On y apprend que mouler les connecteurs par injection fut une petite prouesse de plasturgie...

La *parité* d'une permutation $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ est le signe ($+$ ou $-$) du produit $\prod_{1\le i<j\le n}[\sigma(j) - \sigma(i)]$. Une permutation est paire (signe $+$) si et seulement si sa décomposition en cycles comprend un nombre pair de cycles de longueur paire. Dans le groupe symétrique $S_5$ à 120 éléments, il y a donc 4 classes de conjugaison paires : la classe triviale, les 3-cycles, les produits de deux 2-cycles, et les 5-cycles. Comme la permutation qui conjugue deux 5-cycles peut elle-même être paire ou bien impaire, cette dernière classe se scinde en deux classes de conjugaison dans le groupe $A_5$ à 60 éléments.

Les symétries de $\mathbb{I}$ (directes, i.e. respectant l'orientation) forment un sous-groupe $\Gamma$ de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'ordre 60, isomorphe au groupe $A_5$ des permutations paires de 5 objets (voir l'encadré). On peut matérialiser l'isomorphisme $\Gamma \simeq A_5$, par exemple, en cherchant des familles de 6 arêtes qui soient deux à deux parallèles ou perpendiculaires : il y a exactement 5 telles familles, dont l'une correspond par exemple aux petits côtés des trois rectangles inscrits de la figure 1.ii. Ces 5 familles sont disjointes, et colorées sur la figure 1.i. Elles sont permutées par $\Gamma$. Plus précisément, $\Gamma$ comprend, outre l'élément identité :

— 20 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$, fixant les centres de deux faces opposées de $\mathbb{I}$ ;
— 15 rotations d'angle $\pi$, fixant les milieux de deux arêtes opposées de $\mathbb{I}$ ;
— 12 rotations d'angle $\frac{2\pi}{5}$, fixant une paire de sommets opposés de $\mathbb{I}$ ;
— 12 rotations d'angle $\frac{4\pi}{5}$, carrés des précédentes.

Cette partition de $\Gamma$ est la partition en classes de conjugaison : deux rotations de même angle sont conjuguées dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (et, en fait, dans $\Gamma$) par une isométrie qui amène l'axe de l'une sur l'axe de l'autre. Par exemple, toute rotation est conjuguée à son inverse par une isométrie qui renverse son axe. On peut vérifier que ces différentes rotations agissent sur les couleurs de la figure 1.i en les permutant selon les longueurs de cycles décrites dans l'encadré.

## 2. La 3-sphère et le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

Un élément (non-trivial) de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est une rotation ; il peut donc être décrit par trois paramètres réels : l'angle de rotation, et la direction de l'axe, vue elle-même comme un point de la sphère des directions donné par une latitude et une longitude. On dit que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est une *variété de dimension trois*. Quelle est la forme, la topologie de cette variété ?

**Fait.** *Le groupe* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *s'identifie au quotient de la sphère unité tridimensionnelle* $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ *par l'application antipodale* $z \mapsto -z$.

Cette identification est en fait un isomorphisme de groupes, quitte à munir la sphère unité $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ de la loi multiplicative des quaternions et à voir $\mathbb{R}^3$ comme l'espace $V := \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\rangle$ des quaternions "imaginaires purs". Plus précisément, si $z = x + v \in \mathbb{R} \oplus V =: \mathbb{H}$ est de norme euclidienne 1, alors $\overline{z} := x - v$ satisfait $z\overline{z} = \overline{z}z = 1$. Le morphisme de groupes

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathrm{SO}(V) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \\ & z & \longmapsto & \big[\varphi(z) : w \mapsto zw\overline{z}\big] \end{array}$$

est surjectif, de noyau $\{1, -1\}$ (la multiplication par $-1$ dans $\mathbb{S}^3$ étant justement l'application antipodale). Concrètement $\varphi(x + v)$ est une rotation de $V$, d'axe $\mathbb{R}v$ et d'angle

L'algèbre non commutative $\mathbb{H}$ des *quaternions* est l'espace euclidien de dimension 4 engendré par 4 vecteurs 1, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, formant une base orthonormée et soumis aux relations $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ et $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. Associatives, ces relations sont invariantes par toute isométrie directe de l'espace tridimensionnel $V := \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\rangle \subset \mathbb{H}$.

$$2\arccos(x) = \pm 2\arcsin(\|v\|) \pmod{2\pi}. \tag{1}$$

On peut donc dire que l'angle de rotation est déterminé par la partie réelle $x \in \mathbb{R}$, et la direction de l'axe par la partie imaginaire $v \in V \simeq \mathbb{R}^3$.

Enfin, le groupe $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{S}^3)$ s'identifie à $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)/\pm$, via l'action $\pm(z', z) \cdot u := z'u\overline{z}$ pour $u \in \mathbb{S}^3$. L'image du plongement diagonal $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ (modulo $\pm$) est le stabilisateur du point $1 \in \mathbb{S}^3$, ou groupe d'isotropie $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

## 3. L'icosaèdre et les longueurs Zome

Si $\Gamma$ est le groupe des isométries directes de l'icosaèdre, la préimage

$$\widehat{\Gamma} := \varphi^{-1}(\Gamma)$$

est donc un sous-groupe fini de $\mathbb{S}^3$ à $2|\Gamma| = 120$ éléments. Par (1) les parties réelles de ses éléments sont les $\pm\cos\frac{\theta}{2}$ où $\theta$ est l'angle d'une rotation préservant l'icosaèdre : $\theta \in \{0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$. En notant $\Sigma_x^\Gamma := (x + V) \cap \widehat{\Gamma}$ l'ensemble des éléments de $\widehat{\Gamma}$ de partie réelle $x \in [-1, 1]$, et $\langle\Sigma_x^\Gamma\rangle^{\mathsf{c}}$ son enveloppe convexe, inscrite dans une sphère de rayon $\rho(\Sigma_x^\Gamma) := \sqrt{1 - x^2}$, on obtient :

(2)

| $x$ | $1$ | $\cos\frac{\pi}{5}$ | $\cos\frac{\pi}{3}$ | $\cos\frac{2\pi}{5}$ | $0$ | $-\cos\frac{2\pi}{5}$ | $-\cos\frac{\pi}{3}$ | $-\cos\frac{\pi}{5}$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert\Sigma_x^\Gamma\rvert$ | 1 | 12 | 20 | 12 | 30 | 12 | 20 | 12 | 1 |
| $\rho(\Sigma_x^\Gamma)$ | 0 | $\sin\frac{\pi}{5}$ | $\sin\frac{\pi}{3}$ | $\sin\frac{2\pi}{5}$ | 1 | $\sin\frac{2\pi}{5}$ | $\sin\frac{\pi}{3}$ | $\sin\frac{\pi}{5}$ | 0 |
| $\langle\Sigma_x^\Gamma\rangle^{\mathsf{c}}$ | . | $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ | | | | | | | . |

L'ensemble fini $\Sigma_x^\Gamma - x \subset V$ admet toujours une symétrie icosaédrique : par construction, c'est l'ensemble des directions des axes autour desquels $\mathbb{I}$ (ou le connecteur) admet une symétrie de rotation d'angle $2\arccos(x)$. Plus exactement, quand $|\Sigma_x^\Gamma| = 12$ (resp. 20, 30), les points de $\Sigma_x^\Gamma - x$ sont situés dans les directions des trous pentagonaux (resp. triangulaires, rectangulaires), et $\langle\Sigma_x^\Gamma\rangle^{\mathsf{c}}$ est donc un icosaèdre (resp. un dodécaèdre, resp. un *icosidodécaèdre* obtenu en tronquant les sommets de l'icosaèdre à hauteur du milieu de ses arêtes : dans (2) c'est le dessin du milieu).

Par exemple, le sommet $\{1\} = \Sigma_1^\Gamma$ a pour plus proches voisins les 12 points de $\Sigma_{\cos\frac{\pi}{5}}^\Gamma$, sommets d'un icosaèdre $\langle\Sigma_{\cos\frac{\pi}{5}}^\Gamma\rangle^{\mathsf{c}} =: \mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$.

**Définition.** *Les longueurs des baguettes Zome sont celles des vecteurs de $\Sigma_x^\Gamma - x \subset V \simeq \mathbb{R}^3$, soit les normes $\rho(\Sigma_x^\Gamma)$ des "parties imaginaires" :*

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{5} \text{ ou } \sin\frac{2\pi}{5} \text{ pour les baguettes pentagonales } (|\Sigma_x^\Gamma| = 12), \\ \sin\frac{\pi}{3} \text{ pour les baguettes triangulaires } (|\Sigma_x^\Gamma| = 20), \\ \sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ pour les baguettes rectangulaires } (|\Sigma_x^\Gamma| = 30) \end{cases}$$

(à ces longueurs il faut retrancher la taille du connecteur, puisque la baguette ne pénètre pas jusqu'en son centre : nous ferons ici abstraction de cette correction). Autrement dit, les points reliés par une baguette quelconque à un connecteur placé en $0 \in \mathbb{R}^3$ sont la projection de $\widehat{\Gamma}$ à $V$. Les baguettes sont en outre coloriées en rouge, jaune ou bleu selon la forme de leur section — cela facilite le tri. Notons que la face triangulaire avant de la figure 1.i est renversée par rapport à la face arrière. Si les baguettes jaunes avaient la forme d'un long prisme, deux connecteurs reliés par une telle baguette n'auraient donc *pas* la même orientation dans l'espace. C'est pourquoi on donne aux baguettes jaunes la forme d'une paire de prismes reliés par un antiprisme (dessin ci-dessus) ; de même pour les baguettes rouges.

Pour résumer, il y a des bijections naturelles entre :

— les 4 types de baguettes ;

— les 4 angles de rotation préservant l'icosaèdre ;

— les 4 classes de conjugaison non triviales du groupe des permutations paires $A_5$.

Le rapport de longueur des deux types de baguettes rouges est $\sin\frac{2\pi}{5}\big/\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau \simeq 1,618...$ ([2])

**Définition.** *Un polytope $P$ de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ est* zomable *si, à une homothétie de $P$ près, toute arête de $P$ définit un vecteur appartenant à $\widehat{\Gamma}$.*

Si un polytope est zomable, alors la projection de son 1-squelette (i.e. de l'union de ses arêtes) à $\mathbb{R}^3 \simeq V$ peut en principe être construite à partir de baguettes et de connecteurs. Dans la suite, nous allons montrer qu'une remarquable famille de polytopes réguliers et semi-réguliers sont zomables.

## 4. Le 4-polytope régulier à 600 cellules

L'enveloppe convexe $P_{600}$ de $\widehat{\Gamma}$ a pour cellules ou "facettes" 600 *tétraèdres réguliers*, se rencontrant par 20 en chaque sommet : par exemple, chaque face triangulaire de l'icosaèdre $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ défini en (2) est la base d'un tétraèdre de sommet $\{1\} = \Sigma_1^\Gamma$ (figure 3.i). On arrive au chiffre de 600 en voyant par exemple que chacun des $|\widehat{\Gamma}| = 120$ sommets de $P_{600}$ appartient à 20 tétraèdres, et que chaque tétraèdre a 4 sommets : $120 \cdot \frac{20}{4} = 600$. Le groupe

$$W_+ := (\widehat{\Gamma} \times \widehat{\Gamma})/\pm \subset \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}),$$

d'ordre $120^2/2 = 7200$, agit sans noyau par isométries directes sur $P_{600}$, via l'action $\pm(\gamma', \gamma) \cdot u = \gamma' u \overline{\gamma}$ décrite au §2. Comme chaque tétraèdre admet 12 isométries directes, $P_{600}$ admet *exactement* $600 \cdot 12 = |W_+|$ isométries directes (et pas plus).

**Proposition 1.** *Le polytope $P_{600}$ est zomable.*

*Preuve.* Il suffit de montrer que chaque arête de $P_{600}$ définit un vecteur de $\frac{1}{\tau}\widehat{\Gamma}$. Par transitivité de l'action isométrique de $W_+$, il suffit de traiter une seule arête de $P_{600}$. Par exemple, chaque arête de l'icosaèdre $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ est parallèle au segment reliant le centre de $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ au milieu d'une de ses arêtes (figure 1.ii), i.e. à un élément de $\Sigma_0^\Gamma \subset \widehat{\Gamma}$. □

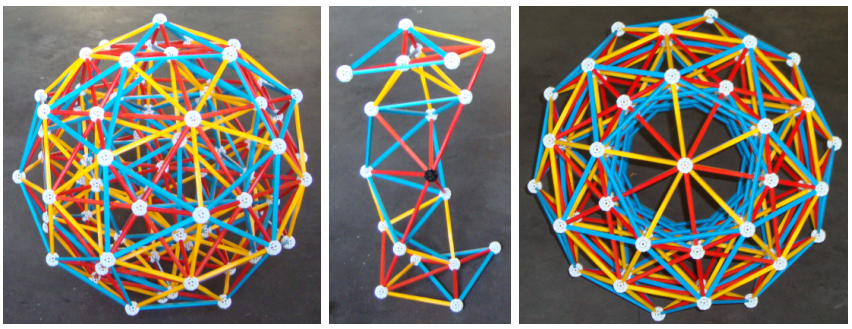


Figure 2. À gauche et à droite : deux vues du modèle Zome de $P_{600}$. Au milieu : une colonne de tétraèdres extraite du modèle.

Les cellules de $P_{600}$ se projettent à 600 tétraèdres de $V$. Ceux-ci ne sont pas réguliers : chacun est partiellement aplati, d'un facteur qui dépend de l'angle dièdre formé par $V$ avec la cellule à projeter. On peut s'assurer qu'il en résulte 8 types de tétraèdres différents, dont un type dégénéré réduit à un triangle (figure 2).

2. Afin, entre autres, de permettre différentes échelles de construction, les longueurs disponibles dans chaque couleur sont encore complétées de manière à former une suite géométrique de raison $\tau$. Dans cet article, nous nous contenterons cependant des 4 longueurs ci-dessus.

## 5. Polytopes semi-réguliers

Le groupe $W$ de *toutes* les isométries de $P_{600}$, y compris indirectes, est d'ordre $2|W_+| = 14400$.

Pour décrire concrètement $W$, considérons une cellule $T$ (tétraèdre régulier) de $P_{600}$. Rappelons que la *subdivision barycentrique* de $T$ consiste à découper $T$ selon les plans médiateurs de ses arêtes, en 24 petits tétraèdres deux à deux isométriques appelés *chambres*. Une chambre est donnée, par exemple, par l'ensemble des points de $T$ dont les coordonnées barycentriques relatives à $T$ sont rangées dans l'ordre croissant (pour un ordre donné sur les sommets de $T$). Soit $\Delta$ une telle chambre : voir la figure 3.iii. Une isométrie de $T$ est entièrement donnée par la chambre sur laquelle elle envoie $\Delta$ : il y a $4! = 24$ telles isométries.

En faisant la subdivision barycentrique de toutes les cellules de $P_{600}$, on trouve au total $24 \cdot 600 = 14400$ chambres. De nouveau, une isométrie de $P_{600}$ est donnée par la chambre sur laquelle elle envoie $\Delta$. On peut ainsi mettre en bijection $W$ et l'ensemble des chambres.

Numérotons de 1 à 4 les faces, ou *murs*, de $\Delta$ : le $i$-ème mur est opposé au sommet de $\Delta$ qui est barycentre de $i$ sommets de $T$. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ les réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans (linéaires) de $\mathbb{R}^4$ contenant ces murs. Les $\sigma_i$ engendrent $W$ : en effet, si $\Delta = \Delta_0, \Delta_1, \ldots$ est une suite de chambres, $\Delta_k$ partageant son $i_k$-ème mur avec $\Delta_{k-1}$, alors $\Delta_n = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_n} \cdot \Delta$ pour tout $n$.

La projection radiale $\mathbb{R}^4 \smallsetminus 0 \to \mathbb{S}^3$ envoie $\Delta$ sur un tétraèdre sphérique $\Delta_\circ$ d'angles dièdres $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, les deux premiers angles figurant sur deux arêtes opposées (figure 3.iii) : $\mathbb{S}^3$ est pavée par 14400 copies de $\Delta_\circ$.

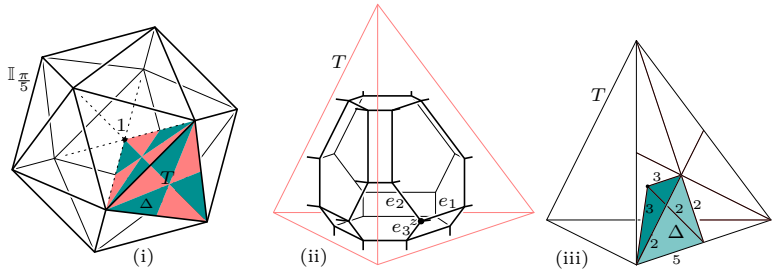



Figure 3. (i) Décomposition barycentrique d'une cellule tétraédrale $T$ de $P_{600}$, et les 20 cellules partageant un sommet avec $T$. (ii) Enveloppe convexe d'une orbite $W \cdot z$, restreinte à $T$ : les arêtes $e_1, e_2, e_3$ *dans* $T$ sont parallèles à des arêtes *de* $T$. (iii) Chambre $\Delta \subset T$ : une arête d'angle dièdre $\frac{\pi}{k}$ dans $\Delta_\circ$ est marquée $k$.

Une $W$-orbite typique $W \cdot z$ compte donc $|W| = 14400$ points, un par copie de $\Delta$, soit 24 points par copie de $T$ (figure 3.ii : "typique" signifie $z \in \mathrm{Int}(\Delta)$). L'enveloppe convexe $P'$ de $W \cdot z$ admet alors 4 orbites d'arêtes, celles des

$$e_i := [z, \sigma_i(z)]$$

où $1 \leq i \leq 4$, soit 28800 arêtes en tout. On dit aussi que le 1-squelette de $P'$ est le *graphe de Cayley* de $W$ pour les générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$. La direction de $e_i$, normale à l'hyperplan de réflexion de $\sigma_i$, est indépendante de $z$.

**Fait.** *L'enveloppe convexe $P'$ de $W \cdot z$ est zomable, pour un certain $z \in \mathrm{Int}(\Delta)$.*

*Preuve.* Montrons d'abord que pour tout $z \in \mathrm{Int}(\Delta) \subset T$, chaque arête de $P'$ est parallèle à un élément de $\widehat{\Gamma} \subset \mathbb{R}^4$. Comme $W$ agit par isométries sur $\widehat{\Gamma}$, il suffit de traiter les arêtes $e_1, \ldots, e_4$ issues de $z$. Soient $\alpha_4 > \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1 > 0$

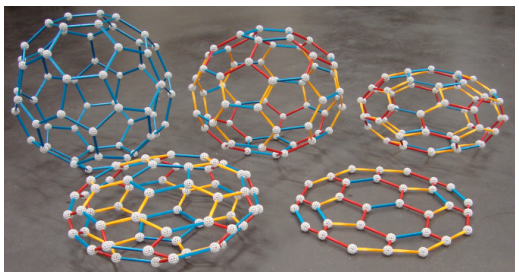
les coordonnées barycentriques (ou “poids”) de $z$ dans $T$. Pour $1 \leq i \leq 3$, les coordonnées barycentriques de $\sigma_i(z)$ dans $T$ sont les mêmes que celles de $z$, à une permutation près de $\alpha_i$ et $\alpha_{i+1}$ : par conséquent, $e_i$ est parallèle à l'arête de $T$ reliant les sommets auxquels sont affectés ces deux poids.

Quant à $e_4$, c'est un segment orthogonal à une face $F$ de $T$. On peut supposer que les sommets de $F$ sont $1 \in \mathbb{S}^3$ et les extrémités d'une arête $\epsilon$ de l'icosaèdre $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$. Alors $e_4$ est parallèle au segment reliant les sommets des deux faces de $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ de base $\epsilon$, lui-même parallèle à une autre arête $\epsilon'$ de $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ (figure 1.ii).

Ainsi les directions de $e_1, \ldots, e_4$ sont celles d'arêtes de $P_{600}$, donc (proposition 1) d'éléments de $\widehat{\Gamma}$. Pour faire en sorte que toutes les arêtes de $P'$ soient de même longueur, il reste à choisir $z \in \Delta$ équidistant des quatre faces de $\Delta_\circ$ : cela est possible parce que ces distances sont essentiellement des coordonnées barycentriques pour $z$ relativement à $\Delta$. $\square$

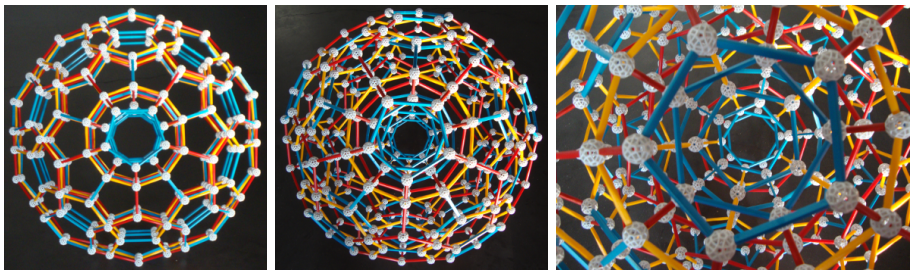
Le polytope $P'$ ci-dessus, qui possède aussi 17040 faces et 2640 cellules, est encore homothétique à la somme de Minkowski (somme ensembliste) de tous les segments $[-q, q]$ où $q$ décrit $\widehat{\Gamma} \subset \mathbb{R}^4$. Son modèle Zome a été construit à Londres en 2006. [3]

Mais $P'$ n'est que le plus gros d'une famille de 15 polytopes $P^\Lambda$, indexés par une partie non vide $\Lambda$ des sommets (étiquetés $\{1, 2, 3, 4\}$) de la chambre $\Delta$ : dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\Lambda$ se trouve toujours un point $z^\Lambda$ tel que l'enveloppe convexe $P^\Lambda$ de $W \cdot z^\Lambda$ dans $\mathbb{R}^4$ soit zomable. Le 1-squelette de $P^\Lambda$ s'obtient à partir de celui de $P'$ en contractant les arêtes de $W \cdot e_i$, pour $i \notin \Lambda$. Les nombreux types de cellules de tous ces modèles Zome, dont beaucoup sont des transformations linéaires (aplatissements) les unes des autres comme sur la photo ci-contre, donnent une idée de la foisonnante richesse de combinaison du jeu.



*Cinq aplatissements du ballon de football.*

En fait, $z_\Lambda$ est le barycentre des sommets de $T$ avec pour poids $\alpha_\Lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda$ où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \big((0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau})\big)$. Autrement dit, le 4-uplet $\alpha_\Lambda$ est une suite non nulle, de premier terme 0 ou $\frac{1}{\tau}$, et d'incréments 0 et/ou 1. On a $P' = P^{\{1,2,3,4\}}$ et $P_{600} = P^{\{1\}}$. Le polytope dual de $P_{600}$, qui compte 120 cellules dodécaédriques se rencontrant par 4 en 600 sommets, est $P^{\{4\}}$.



*Plusieurs vues de $P^{\{4\}}$.*

Les directions des arêtes de ces polytopes $P^\Lambda \subset \mathbb{R}^4$ vivent dans $\widehat{\Gamma}$, et aucun élément de $\widehat{\Gamma}$ n'est privilégié, par $W$-invariance. Aussi, les longueurs des projections à $V \simeq \mathbb{R}^3$ de ces arêtes suivent la statistique du tableau (2), i.e. des classes de

3. http://homepages.wmich.edu/~drichter/bridgeszome2006.htm

conjugaison du groupe $A_5$ des symétries de $\mathbb{I}$ :

12/60 (un cinquième) sont de longueur $\sin\frac{\pi}{5}$ et autant de longueur $\sin\frac{2\pi}{5}$,
20/60 (un tiers) sont de longueur $\sin\frac{\pi}{3}$,
15/60 (un quart) sont de longueur 1,
1/60 sont de longueur nulle, écrasées par la projection vers $V$.

Ces proportions $(12, 12, 20, 15)$ sont approximativement respectées dans le modèle de la projection de $P^\Lambda$ en baguettes Zome. [4]

## 6. Arêtes vertes

Outre $W$, il y a quatre autres groupes finis engendrés par des réflexions qui agissent sur $\mathbb{R}^4$ sans fixer de sous-espace : le groupe à 120 éléments des symétries du simplexe (enveloppe convexe de 5 points équidistants de $\mathbb{R}^4$), qui est isomorphe au groupe symétrique $S_5$, et trois groupes $W_1 \subset W_2 \subset W_3$ à 192, 384 et 1152 éléments. À conjugaison près, $W_2$ est le groupe des symétries de l'hypercube $P_8$ de sommets $(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1)$, et $W_3$ celui du polytope régulier $P_{24}$ à 24 cellules octaédriques, dont les 24 sommets sont $(0, 0, \pm1, \pm1)$ et ses permutations de coordonnées (figure 4). Là encore, les arêtes de l'enveloppe convexe $P'$ d'une orbite sont toujours normales aux hyperplans de réflexion. On peut voir au cas par cas qu'à une conjugaison près,

— les angles formés par ces directions d'arêtes avec l'axe de première coordonnée dans $\mathbb{R}^4$ appartiennent tous à $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$ ;
— les directions des projections de ces arêtes à $V$ sont de la forme $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, ou $(0, 1, 1)$ à permutation et changements de signes près.

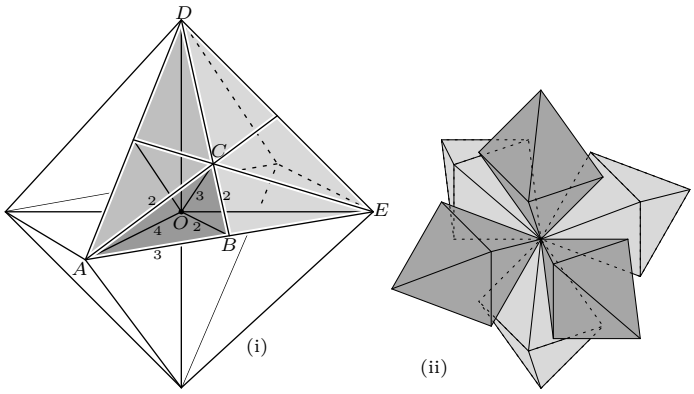



Figure 4. (i) Chambres $OABC \subset OABD \subset OAED$ pour $W_3 \supset W_2 \supset W_1$, dans une cellule octaédrique de $P_{24}$ ; (ii) vue éclatée des six cellules de $P_{24}$ incidentes à un sommet.

En d'autres termes, pour construire les projections de ces polytopes $P'$ à $\mathbb{R}^3$, il suffit d'adjoindre au système Zome les directions $(0, 1, 1)$ (les autres directions y sont déjà), et des baguettes de longueur $\sin\frac{\pi}{4}$. C'est essentiellement ce que permettent de faire les baguettes vertes, qui se fichent dans les mêmes trous que les baguettes pentagonales (directions $(0, 1, \tau)$) mais sont légèrement coudées près de leurs extrémités afin de corriger la direction. Pour ne pas changer le groupe engendré additivement par tous les vecteurs possibles reliant deux connecteurs de $\mathbb{R}^3$, le fabricant a décidé que les arêtes vertes seraient toujours de longueur $\sqrt{2}$ (multiplié

4. Il faut en général un peu plus de baguettes de longueur 1 (bleues), car $P^\Lambda$ peut avoir certaines arêtes incluses dans $V$ — qui, au contraire de toutes les autres, ne seront pas identifiées par paires sous l'effet de la projection à $V$. Pour $P^{\{1,2,3,4\}}$, cette correction n'est pas nécessaire.

par une puissance de $\tau$, cf note 2), de sorte que certains de ces polytopes ne sont pas réalisables dans leur version la plus symétrique.

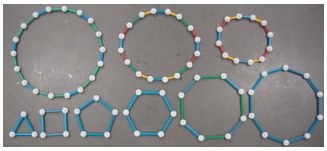
NB : les projections à $\mathbb{S}^3$ des 24 cellules octaédriques de $P_{24}$ sont d'angles dièdres $\frac{2\pi}{3}$ et se rencontrent par 6, selon un motif à symétrie cubique, en chacun des 24 sommets (figure 4.ii). Si $\Gamma_{\triangle} \subset \Gamma_{\square}$ sont les groupes de symétrie du tétraèdre et du cube dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, alors $\varphi^{-1}(\Gamma_{\square} \smallsetminus \Gamma_{\triangle}) \subset \mathbb{S}^3$ est la projection sur $\mathbb{S}^3$ des sommets de $P_{24}$, tandis que $\varphi^{-1}(\Gamma_{\triangle})$ est la projection des centres de cellules. L'enveloppe convexe de ces derniers est une autre copie de $P_{24}$, qui est en ce sens auto-dual.

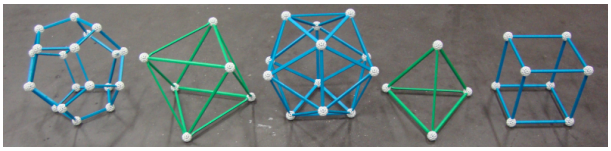
## 7. Conclusion

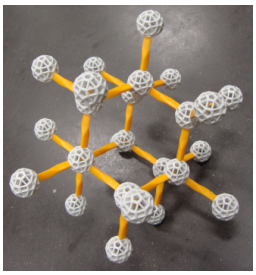
Le matériel peut être manipulé dès l'école primaire, mais même des mathématicien·ne·s étudiant·e·s ou professionnel·le·s y trouveront joie et profit, comme j'espère l'avoir fait apercevoir ici. Zome se prête particulièrement à des projets de construction collective, par exemple d'un des polytopes (semi)-réguliers décrits dans cet article, dans une classe ou dans un atelier public comme j'en anime parfois lors de la Fête de la science — surpris, chaque fois, par les créations des visiteurs.

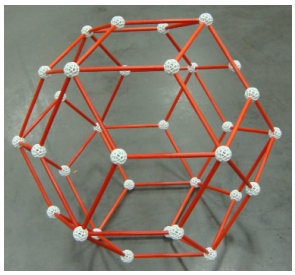
Terminons par quelques images : (i) polygones plans. (ii) Solides platoniciens.

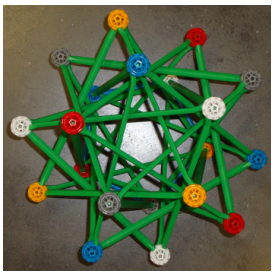
(i) (ii)





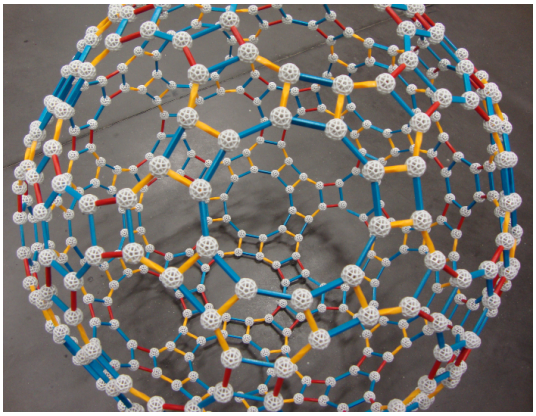






(iii) (iv) (v)

(iii) Structure cristalline du diamant. (iv) Rhomboèdre à 30 faces qui apparaît dans certains quasi-cristaux. (v) Cinq tétraèdres inscrits dans un dodécaèdre, permutés par le groupe de symétrie $A_5$.



Je remercie Gaël Benabou, Damien Gayet, Sophie Grivaux, Pallavi Panda, Barbara Tumpach et l'équipe de la Gazette pour leurs remarques sur des versions préalables de ce texte. Ce travail a bénéficié d'une aide de l'État gérée par l'Agence nationale de la recherche au titre du programme *Investissements d'avenir* portant la référence Anr-11-eqpx-0023 et soutenu par les fonds européens par le biais du programme Feder Scv IrDive.

François Guéritaud
Cnrs / Université de Lille
francois.gueritaud@univ-lille.fr